Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Εργαστήριο Λογικής και Επιστήμης Υπολογισμών

Θεωρητική Πληροφορική Ι - Αλγόριθμοι & Πολυπλοκότητα ΙΙ
1η Σειρά Ασκήσεων

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Ά. Παγουρτζής
Χειμερινό Εξάμηνο 2012-2013

Η παράδοση των ασκήσεων μπορεί να γίνει στο μάθημα ή σε ηλεκτρονική μορφή στην διεύθυνση `antony.ant1985@gmail.com`.
Προθεσμία παράδοσης: 29/11/2012.

Άσκηση 1

Κατασκευάστε Μηχανή Turing που να υπολογίζει την συνάρτηση:

$$f(n_1, \ldots, n_k) = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$$

όπου το k δεν είναι σταθερό, π.χ. $f(1,3,5,7) = 7$, $f(3,6,3,6,6,4,6) = 6$ κλπ.

Άσκηση 2

Ορίζουμε μια δισδιάστατη Μηχανή Turing ως μία TM που η κάθε ταινία της είναι ένα άπειρο διακριτό επίπεδο (grid), δηλαδή η TM μπορεί εκτός από δεξιά-αριστερά να κινείται και πάνω-κάτω. Δείξτε ότι για κάθε (Time-Constructible) συνάρτηση $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ και κάθε γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$, αν η L αποφασίζεται από μία δισδιάστατη TM σε χρόνο $T(n)$, τότε $L \in \mathbf{DTIME}(T^2(n))$.

Άσκηση 3

Δείξτε ότι $\mathbf{NP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$.

Άσκηση 4

α΄. Έστω $L_1,\ L_2 \in \mathbf{NP}$. Δείξτε ότι η κλάση **NP** είναι κλειστή ως προς την ένωση, δηλαδή ότι και $L_1 \cup L_2 \in \mathbf{NP}$. Ισχύει το ίδιο για την γλώσσα $L_1 \cap L_2$;

β΄. Ορίζουμε το άστρο του Kleene μιας γλώσσας L την γλώσσα:

$$L^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k | k \geq 0 \ \&\ x_1, x_2 \ldots, x_k \in L\}$$

Δείξτε ότι η κλάση **NP** είναι κλειστή ως προς το άστρο του Kleene .

Άσκηση 5

Ο S. Cook, όρισε μια διαφορετική αναγωγή από αυτές που χρησιμοποιούμε για τα **NP**-complete προβλήματα (αναγωγές κατά Karp):
Μια γλώσσα L έχει αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου κατά Cook (Cook reducible) σε μία γλώσσα L' (συμβ. $L \leq_T^P L'$) αν υπάρχει μία TM πολυωνυμικού-χρόνου που να αποφασίζει την L, η οποία έχει μία έξτρα (μαγική!) ταινία, τέτοια ώστε όποτε γραφεί ένα string x στην ταινία, μπορεί να μπει σε μια ειδική κατάσταση ‘‘ερώτησης ’’, και τότε σε *μόνο ένα* υπολογιστικό βήμα να έχει την απάντηση για το αν $x \in L'$ ή όχι (θα δούμε ότι αυτό λέγεται ‘‘μαντείο’’ (oracle) για την L').

α′. Δείξτε ότι η Αναγωγή κατά Cook είναι μεταβατική σχέση, δηλαδή: $L_1 \leq_T^P L_2 \wedge L_2 \leq_T^P L_3 \Rightarrow L_1 \leq_T^P L_3$.

β′. Δείτε ότι $L \leq_m^p L' \Rightarrow L \leq_T^P L'$.

γ′. Δείξτε ότι αν η **NP** είναι κλειστή ως προς την αναγωγή κατά Cook , τότε $\mathbf{NP} = co\mathbf{NP}$.

Άσκηση 6

Μια αναγωγή R από μία **NP** γλώσσα L σε μία **NP** γλώσσα L' ονομάζεται ‘‘parsimonious’’ αν ο αριθμός των πιστοποιητικών για την γλώσσα L ισούται με τον αριθμό των πιστοπιητικών για την γλώσσα L'. Τέτοιες αναγωγές είναι πολύ χρήσιμες στην Πολυπλοκότητα Μέτρησης (Counting Complexity), όπου μας ενδιαφέρει ο *αριθμός* των λύσεων, όχι απλά η ύπαρξη μίας. Δείξτε ότι στην απόδειξη του Θ. Cook, η αναγωγή από οποιαδήποτε γλώσσα $L \in \mathbf{NP}$ στο `SAT` μπορεί να τροποποιηθεί σε parsimonious .
(Hint: Χρησιμοποιήστε κυκλώματα)

Άσκηση 7

(Case study: Paddability)
Μία πολύ βασική τεχνική στην Θεωρία Πολυπλοκότητας είναι η paddability, η οποία έγκειται στο να ‘‘παραφουσκώνουμε’’ κάθε string μιας γλώσσας με κάποια περιττά επιπλέον σύμβολα:

Ορισμός 1 *Μια γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$ λέγεται paddable αν υπάρχει μία πολυωνυμικά υπολογίσιμη και αντιστρέψιμη συνάρτηση $pad : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ (δηλαδή $pad,\ pad^{-1} \in$ **FP**), τέτοια ώστε:*

i. $pad(x, y) \in L$ αν και μόνο αν $x \in L$, για κάθε $x, y \in \Sigma^*$.

ii. $|pad(x, y)| > |x| + |y|$, για κάθε $x, y \in \Sigma^*$.

iii. Υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου, που δεδομένου του $pad(x, y)$ επιστρέφει το y.

Χρησιμοποιώντας την paddability μπορούμε να δείξουμε ισομορφισμούς πολυωνυμικού χρόνου μεταξύ $\mathbf{NP} - complete$ προβλημάτων, όπως θα δούμε στο μάθημα, όπως και να δείχνουμε ότι σχέσεις μεταξύ κλάσεων πολυπλοκότητας μεταφέρονται σε διαφορετικές τάξεις μεγέθους (scale-up/down).

α′. Δείξτε ότι τα προβλήματα `VERTEX COVER` και `HAMILTON PATH` είναι paddable γλώσσες.

β′. Δείξτε ότι αν $\mathbf{EXP} \neq \mathbf{NEXP}$, τότε $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

*Bonus Άσκηση

Μία Μηχανή Turing απείρων καταστάσεων ορίζεται όπως μια κανονική TM, μόνο που το σύνολο Q των καταστάσεων είναι (αριθμήσιμα) άπειρο. Δείξτε ότι *για κάθε* (αναδρομική) γλώσσα $L \subseteq \{0, 1\}^*$ υπάρχει μία TM απείρων καταστάσεων που την αποφασίζει σε γραμμικό χρόνο.