Ὁμάδα ἀσκήσεων No. 1 γιὰ τὰ μεταπτυχιακά μαθήματα «Θεωρία Γραφημάτων» τοῦ Μαθηματικοῦ Τμήματος
καὶ «Γραφοθεωρία» του Μ.Π.Λ.Α.

Δευτέρα 29 Οκτωβρίου 2012

Λύστε ὅσες μπορεῖτε ἀπὸ τὶς παρακάτω ἀσκήσεις. Οἱ ἀσκήσεις θὰ παρουσιαστοῦν τὴν Τρίτη 20/11/2012. Οἱ λύσεις πρέπει νὰ παραδοθοῦν ἠλεκτρονικὰ πρὶν τις 23:59 της Κυριακής 18/11/2012. Μπορεῖτε νὰ σχηματίσετε ὁμάδες συνεργασίας τὸ πολὺ 2 ἀτόμων γιὰ τὴν ἐπίλυση τῶν ἀσκήσεων (ἄν κάποιο μέλος μιᾶς ὁμάδας ἀπουσιάζει κατὰ τὴν παρουσίαση, ἀποκλείεται ἀπὸ τὴν διεκδίκηση τοῦ βαθμοῦ).

1. Δεῖξτε ὅτι κάθε γράφημα G περιέχει ὡς ὑπογράφημα ἕνα διμερὲς γράφημα μὲ $m(G)/2$ ἀκμές.

2. Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε γράφημα G μὲ τουλάχιστον $2\kappa(G)$ κορυφές, $\textbf{περίμετρος}(G) \geq 2 \cdot \kappa(G)$.

3. Ὅλοι οἱ αὐτομορφισμοὶ ἑνὸς δέντρου ἔχουν ὡς σταθερὸ σημεῖο μιὰ ἀκμὴ ἤ μιὰ κορυφή.

4. Γιὰ κάθε γράφημα μὲ μέσο βαθμὸ d ὑπάρχει μιὰ κορυφὴ τέτοια ὥστε ὁ μέσος βαθμὸς τῶν γειτόνων της νὰ εἶναι τουλάχιστον d.

5. Ἔστω $Q_r = K_2^{[r]}$. Μὲ ἄλλα λόγια, ὁ *r-κύβος* Q_r εἶναι τὸ γράφημα ὅπου $V(Q_r) = \{0,1\}^r$ (δηλ. ὅλες οἱ συμβολοσειρὲς ἀπὸ τὸ ἀλφάβητο $\{0,1\}$ μήκους r) καὶ ὅπου δύο κορυφὲς τοῦ Q_r συνδέονται μὲ μιὰ ἀκμή ἄν οἱ ἀντίστοιχες συμβολοσειρὲς διαφέρουν σὲ ἀκριβῶς ἕνα δυφεῖο (δυαδικὸ ψηφεῖο).

   Βρέστε για κάθε $r \geq 1$ τὸν μέσο βαθμό $d(Q_r)$, τὴν πυκνότητα $\epsilon(Q_r)$, τὴν διάμετρο $\textbf{διαμ}(Q_r)$, τὴν συνεκτικότητα $\kappa(Q_r)$, τὴν περίμετρο $\textbf{περίμετρος}(Q_r)$, καὶ τὴν περιφέρεια $\textbf{περιφέρεια}(Q_r)$ τοῦ r-κύβου.

6. $C_3 \not\subseteq_{\text{υπ}} G \Rightarrow m(G) \leq \frac{n^2}{4}$.

7. Γιὰ κάθε σύνολο κορυφῶν S ἑνὸς k-συνεκτικοῦ γραφήματος ὅπου $|S| = k$, ὑπάρχει κύκλος C τέτοιος ὥστε $S \subseteq V(C)$.

8. Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε γράφημα G, $\textbf{διαμ}(G) \leq \frac{n+\kappa(G)-2}{\kappa(G)}$.

9. Ἕνα γράφημα μὲ πολλαπλές ἀκμὲς λέγεται *σειραϊκό*[1]*-παράλληλο* ἄν μπορεῖ νὰ κατασκευαστεῖ ἀναδρομικὰ ἀπὸ τὸ K_2 διπλασιάζοντας (παράλληλα) καὶ ὑποδιαιρῶντας (σειραϊκά) ἀκμὲς. Δεῖξτε ὅτι ἕνα δισυνεκτικὸ γράφημα εἶναι σειραϊκὸ παράλληλο ἄν καὶ μόνο ἄν δὲν περιέχει τὸ K_4 ὡς τοπολογικὸ ἐλάσσον. Δεῖξτε ἐπίσης ὅτι κάθε *σειραϊκό-παράλληλο* γράφημα μπορεῖ νὰ φτιαχτεῖ ἀναδρομικὰ μὲ ἀθροίσματα κλικῶν, ἀρχίζοντας ἀπὸ κλίκες μὲ ≤ 3 κορυφὲς.

10. Γιὰ κάθε γράφημα G, $n(G) \geq 7 \Rightarrow K_4 \leq_{\text{τπ}} G \vee K_4 \leq_{\text{τπ}} \overline{G}$.

11. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἄν ἕνα γράφημα G εἶναι συνεκτικό, τότε: $\kappa(G) = 1 + \min_{v \in V(G)} \kappa(G \setminus v)$.

12. Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε συνεκτικὸ γράφημα G, $\textbf{διαμ}(G) \geq 5 \Rightarrow \Delta(G) + \delta(G) \leq n - 2$.

13. Δεῖξτε ὅτι ἄν $\Delta(H) \leq 3$, τότε $H \leq_{\text{ελ}} G \Leftrightarrow H \leq_{\text{τπ}} G$.

14. Ἔστω G δισυνεκτικὸ γράφημα διαφορετικὸ τοῦ K_3. Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε ἀκμὴ e τοῦ G, κάποιο ἀπὸ τὰ γραφήματα $G \setminus e$, G/e εἶναι δυσυνεκτικό.

15. Ἔστω $G = (A \cup B, E)$ διμερὲς γράφημα. Ἄν τὸ G εἶναι κανονικὸ, τότε $|A| = |B|$.

16. $C_4 \not\subseteq_{\text{υπ}} G \Rightarrow m(G) \leq \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3})$.

17. Γιὰ κάθε συλλογὴ μέγιστων μονοπατιῶν ἑνὸς δέντρου ὑπάρχει τουλάχιστον μιὰ κοινὴ κορυφή ποὺ νὰ ἀνήκει σὲ ὅλα.

18. Ἄν $m(G) \geq n(G) + 4$, τότε τὸ G περιέχει δύο κύκλους C_1 καὶ C_2 ὅπου $E(C_1) \cap E(C_2) = \emptyset$.

19. Ἔστω G συνεκτικὸ γράφημα καὶ ἔστω $\beta(v)$ τὸ πλῆθος τῶν τεμαχίων τοῦ G στὰ ὁποῖα ἀνήκει το v. Ἔστω ἐπίσης $\beta(G)$ τὸ πλῆθος ὅλων τῶν τεμεχίων τοῦ G. Τότε ἰσχύει ὅτι: $\beta(G) = 1 + \sum_{v \in V(G)} (\beta(v) - 1)$.

20. Ἡ *τριγωνοποίηση* $\mathcal{T}$ ἑνὸς τριγώνου T εἶναι ἕνα σύνολο ἀπὸ τρίγωνα ὅπου $T = \bigcup_{t \in \mathcal{T}} t$ καὶ τέτοια ὥστε ποτὲ δύο τρίγωνα τοῦ συνόλου $\mathcal{T}$ δὲν ἔχουν κάποιο κοινὸ ἐσωτερικὸ σημεῖο. Συμβολίζουμε μὲ $V(\mathcal{T})$ τὸ σύνολο των κορυφῶν τῶν τριγώνων τοῦ $\mathcal{T}$. Ἔστω ἐπίσης v_1, v_2, v_3 οἱ κορυφὲς τοῦ τριγώνου T καὶ ἔστω $\chi : V(\mathcal{T}) \to \{1,2,3\}$ χρωματισμὸς τῶν κορυφῶν τῶν τριγώνων ὅπου $\chi(v_i) = i$ γιὰ $i \in \{1,2,3\}$ καὶ τέτοιος ὥστε κάθε ἀκμὴ τριγώνου στὸ $\mathcal{T}$ νὰ ἔχει ἄκρα μὲ διαφορετικὰ χρώματα. Δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει ἕνα τρίγωνο τοῦ ὁποίου οἱ κορυφὲς νὰ ἔχουν καὶ τα τρία χρώματα καθῶς ἐπίσης καὶ ὅτι τὸ πλῆθος αὐτῶν τῶν τριγώνων εἶναι περιττὸς ἀριθμός.

21. Ἔστω G τριμερὲς $(n+1)$-κανονικὸ γράφημα ὅπου κάθε μέρος του ἔχει n κορυφές. Δεῖξτε ότι $K_3 \leq_{\upsilon\pi} G$.

[1] Ὁ ὅρος *σειριακό* εἶναι λάθος! Τὸ σωστὸ εἶναι *σειραϊκό*.