Ὁμάδα ἀσκήσεων No. 2 γιὰ τὰ μεταπτυχιακά μαθήματα «Θεωρία Γραφημάτων» τοῦ Μαθηματικοῦ Τμήματος καὶ «Γραφοθεωρία» του Μ.Π.Λ.Α.

Κυριακή 2 Δεκεμβρίου 2012

Λύστε ὅσες μπορεῖτε ἀπὸ τὶς παρακάτω ἀσκήσεις. Οἱ ἀσκήσεις θὰ παρουσιαστοῦν τὴν Τρίτη 08/01/2013 και την Πέμπτη 10/01/2013. Οἱ λύσεις πρέπει νὰ παραδοθοῦν ἠλεκτρονικὰ πρὶν τις 23:59 της Κυριακής 06/01/2013. Μπορεῖτε νὰ σχηματίσετε ὁμάδες συνεργασίας τὸ πολὺ 2 ἀτόμων γιὰ τὴν ἐπίλυση τῶν ἀσκήσεων (ἄν κάποιο μέλος μιᾶς ὁμάδας ἀπουσιάζει κατὰ τὴν παρουσίαση, ἀποκλείεται ἀπὸ τὴν διεκδίκηση τοῦ βαθμοῦ).

1. Ἕνα γράφημα καλεῖται *ἄρτιο* ἄν ὅλες οἱ κορυφὲς ἔχουν ἄρτιο βαθμό. Δεῖξτε ὅτι ἄν τὸ G εἶναι συνεκτικὸ γράφημα, τότε
$$|\{H \subseteq_{\text{πα}} G \mid H \text{ εἶναι ἄρτιο}\}| = 2^{m(G)-n(G)+1}$$
2. Δεῖξτε ὅτι $\max\{r \mid K_k \leq_{\text{ελ}} P_r^{[3]}\} = O(k^{3/2})$
3. Ἔστω G γράφημα στὸ ὁποῖο κάθε δύο περιττοὶ κύκλοι ἔχουν κάποιο κοινὸ στοιχεῖο. Τότε $\chi(G) \leq 5$.
4. Ἔστω
$$\mathcal{P}_3 = \{G \mid \exists n \geq 0 : G \leq_{\text{ελ}} P_n \times K_3\} \quad \text{καὶ} \quad \mathcal{P}_3^* = \{G \mid G^* \in \mathcal{P}_3\}$$
Δεῖξτε ὅτι $\mathcal{P}_3^* = \mathcal{P}_3$.
5. Κάθε ἐπίπεδο γράφημα μπορεῖ νὰ ζωγραφιστεῖ ἔτσι ὥστε ὅλες οἱ ἀκμὲς του νὰ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα.
6. Κατασκευάστε, για κάθε $k \geq 3$, γράφημα μὲ περιφέρεια 5 καὶ χρωματικὸ ἀριθμὸ k.
7. Ὁρίζουμε τὸ *τετράγωνο* G^2 ἑνὸς γραφήματος G ὥς ἐξῆς:
$$G^2 = (V(G), \{\{x,y\} \mid \mathbf{dist}_G(x,y) \leq 2\})$$
Περιγράψτε πλήρως ὅλα τὰ γραφήματα G γιὰ τὰ ὁποῖα τὸ G^2 εἶναι ἐπίπεδο (τὰ γραφήματα αὐτὰ ὀνομάζονται *τετραγωνικὲς ρίζες* τῶν ἐπίπεδων γραφημάτων).
8. Ἄν τὸ G εἶναι ἐπίπεδο γράφημα μὲ περιφέρεια $k \geq 3$, τότε $m(G) \leq \frac{k(n(G)-2)}{k-2}$. Χρησιμοποιῆστε τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ γιὰ νὰ ἀποδείξετε ὅτι τὸ γράφημα τοῦ Petersen δὲν εἶναι ἐπίπεδο.
9. Δεῖξτε ὅτι ἄν $\delta(G) \geq \lfloor \frac{(r-2)\cdot n(G)}{r-1} \rfloor + 1$ τότε $K_r \subseteq_{\text{υπ}} G$.
10. Ἔστω $\mathcal{G}_n = \{G \mid n(G) = n \ \wedge \ K_4^- \not\leq_{\text{τπ}} G\}$ ὅπου K_4^- εἶναι τὸ γράφημα ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὸ K_4 μετὰ τὴν ἀφαίρεση μιᾶς ἀκμῆς. Προσδιορίστε τὴν τιμὴ τοῦ
$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\frac{m(G)}{n(G)} \mid G \in \mathcal{G}_n\}.$$
11. Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε γράφημα G μὲ n κορυφὲς ἰσχύει ὅτι $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n+1$ καὶ $n \leq \chi(G)\cdot\chi(\overline{G}) \leq (\frac{n+1}{2})^2$.
12. Κάθε ἐπίπεδο γράφημα G εἶναι ἡ ἕνωση 3 δασῶν.
13. Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε θετικό ἀκέραιο k ἰσχύει ὅτι ἕνα γράφημα G εἶναι τέλειο ἄν καὶ μόνο ἄν τὸ $G^{(k)}$ εἶναι τέλειο.
14. Δεῖξτε ὅτι ὁ αριθμὸς Ramsey $r(4,3)$ εἶναι ἴσος μὲ 9.
15. Κάθε γράφημα μὲ ἐλάχιστο βαθμὸ $4k$ περιέχει ὑπογράφημα Euler μὲ ἐλάχιστο βαθμὸ $2k$. (Ὑπόδειξη: Γκουγκλίστε «*Minimum degree condition forcing complete graph immersion*»).
16. Κάθε 3-κανονικὸ γράφημα χωρίς γέφυρες G περιέχει ταίριασμα μεγέθους $\frac{1}{3}m(G)$.
17. Ἕνα τριγωνοποιημένο ἐπίπεδο γράφημα ἔχει χρωματικὸ ἀριθμὸ 3 ἄν καὶ μόνο ἄν εἶναι γράφημα Euler. (Ὑπόδειξη: Γκουγκλίστε «*3-colorability of Eulerian triangulations*»).
18. Κάθε γράφημα G μὲ n κορυφὲς καὶ τουλάχιστον $2 \cdot n$ ἀκμὲς ἔχει κύκλο μήκους $\leq 2 \cdot \log n$.
19. Ἕνα γράφημα μὲ ὅλες τὶς κορυφὲς ἄρτιου βαθμοῦ δὲν περιέχει γέφυρες (καλοῦμε *γέφυρα* μιὰ ἀκμὴ ἡ ἀφαίρεση τῆς ὁποῖας δημιουργεῖ γράφημα μὲ δύο συνεκτικὲς συνιστῶσες).
20. Ἄν ἕνα γράφημα εἶναι τὸ συμπλήρωμα ἑνὸς διμεροῦς γραφήματος, τότε εἶναι τέλειο.
21. $\delta(G) \geq n(G)/2 \Rightarrow \mu(G) \geq \lfloor n/2 \rfloor$.
22. Ἄν ὁ r εἶναι πρῶτος, τότε τὸ K_{2r+1} ἔχει r Χαμιλτονιανοὺς κύκλους $C_1, \ldots, C_r$ τέτοιους ὥστε τὸ $\{E(C_1), \ldots, E(C_r)\}$ νὰ εἶναι διαμέριση τοῦ $E(K_{2r+1})$. Εἶναι ἀπαραίτητο τὸ r νὰ εἶναι πρῶτος;
23. Ἕνα ἐνεπίπεδο γράφημα λέγεται *αὐτοδυϊκό* ἄν εἶναι ἰσόμορφο μὲ τὸ δυϊκὸ του. Δεῖξτε ὅτι κάθε αὐτοδυϊκό γράφημα μὲ n κορυφὲς ἔχει ἀκριβῶς $2(n-1)$ ἀκμές. Κατασκευάστε γιὰ κάθε $n \geq 4$ ἕνα αὐτοδυϊκό γράφημα μὲ n κορυφές.
24. Ἕνα ἐπίπεδο γράφημα εἶναι διμερὲς ἄν καὶ μόνο ἄν τὸ δυϊκὸ του εἶναι γράφημα Euler.
25. Γιὰ κάθε δισυνεκτικὸ ἐξωεπίπεδο γράφημα G μὲ n κορυφὲς, ἰσχύει ὅτι $\frac{1}{2}n \leq \mathbf{vc}(G) \leq \frac{3}{4}n$.