Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Εργαστήριο Λογικής και Επιστήμης Υπολογισμών

Αλγόριθμοι & Πολυπλοκότητα II
2η Σειρά Ασκήσεων

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Ά. Παγουρτζής
Χειμερινό Εξάμηνο 2012-2013

Η παράδοση των ασκήσεων μπορεί να γίνει στο μάθημα ή σε ηλεκτρονική μορφή στην διεύθυνση `antony.ant1985@gmail.com`.
Προθεσμία παράδοσης: 24/1/2013.

Άσκηση 1: NP-completeness

1. Δίνεται το πρόβλημα:

   > Δοθέντος ενός (πεπερασμένου) συνόλου S και μιας συλλογής υποσυνόλων του S, έστω $\mathcal{C}$, υπάρχει μία *διαμέριση* του S σε δύο υποσύνολα S_1 και S_2, τέτοια ώστε να *μην* υπάρχει υποσύνολο T στην $\mathcal{C}$ τέτοιο ώστε $T \subseteq S_1$ ή $T \subseteq S_2$;

   Δείξτε ότι το πρόβλημα είναι **NP**-complete. Παραμένει το πρόβλημα **NP**-complete αν για κάθε $C \in \mathcal{C}$ ισχύει ότι $|C| \leq 2$;

2. Δίνεται το πρόβλημα:

   > Δίνεται ένα (πεπερασμένο) σύνολο S, μια συλλογή υποσυνόλων του S, έστω $\mathcal{C}$, και ένας φυσικός αριθμός $K \leq |\mathcal{C}|$. Υπάρχει μία συλλογή υποσυνόλων του S, έστω $\mathcal{B}$, τέτοια ώστε $|\mathcal{B}| = K$ και για κάθε $T \in \mathcal{C}$ να υπάρχει οικογένεια συνόλων $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ της οποίας η ένωση να είναι ακριβώς το T;

   Δείξτε ότι το πρόβλημα είναι **NP**-complete. Παραμένει το πρόβλημα **NP**-complete αν για κάθε $T \in \mathcal{C}$ έχουμε $|T| \leq 2$;
   (**Παρατηρήστε ότι η δομή αυτή είναι το διακριτό ανάλογο της Βάσης Περιοχών στην Ανάλυση.*)

3. Δίνεται το πρόβλημα `STEINER TREE`:

   > Δίνεται γράφος $G = (V, E)$ με βάρη $d_{ij} : E \to \mathbb{N}$, ένα σύνολο $M \subseteq V$, και ένας φυσικός αριθμός B. Υπάρχει υποδέντρο του G που να περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του M, τέτοιο ώστε το άθροισμα των βαρών των ακμών του υποδέντρου να μην υπερβαίνει το B;

   Δείξτε ότι το πρόβλημα είναι **NP**-complete. Παραμένει το πρόβλημα **NP**-complete αν όλες οι ακμές έχουν το ίδιο βάρος;

Άσκηση 2

Έστω γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$ και κλάση πολυπλοκότητας $\mathcal{C}$. Η L ονομάζεται "low" για την $\mathcal{C}$ αν $\mathcal{C}^L = \mathcal{C}$. Αυτό διαισθητικά σημαίνει ότι η γλώσσα L δεν προσφέρει επιπλέον υπολογιστική δύναμη στην $\mathcal{C}$ αν την χρησιμοποιήσουμε ως μαντείο (oracle). Επιπλέον, για δύο κλάσεις πολυπλοκότητας $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ λέμε ότι η $\mathcal{C}'$ είναι low για την $\mathcal{C}$ αν για κάθε $L \in \mathcal{C}'$: $\mathcal{C}^L = \mathcal{C}$. Δείξτε ότι:

1. $\mathbf{P}^{\mathbf{BPP}} = \mathbf{BPP}$.
2. Η **BPP** είναι low για την **PP**.

Άσκηση 3

Θεωρώντας δεδομένο ότι $\mathbf{ZPP} = \mathbf{RP} \cap co\mathbf{RP}$, δείξτε ότι μια γλώσσα $L \in \mathbf{ZPP}$ αποφασίζεται σε χρόνο $T(n)$ από μία Πιθανοτική Μηχανή Turing που δίνει πάντοτε σωστή απάντηση, και ισχύει:

$$\mathbb{E}[T(n)] \leq 2(p_1(n) + p_2(n))$$

όπου n το μήκος της εισόδου, $p_1(n), p_2(n)$ τα πολυώνυμα που φράσσουν τους χρόνους εκτέλεσης της **RP** και *co***RP** μηχανής αντίστοιχα, και το “$\mathbb{E}[\ \cdot\ ]$” συμβολίζει την μέση ή αναμενόμενη τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής.

Άσκηση 4

Θα μελετήσουμε τον τελεστή “$\mathcal{BP}\cdot$ ”, που δρα πάνω σε κλάσεις πολυπλοκότητας, και τις ιδιότητές του:

Ορισμός 1 *Έστω $\mathbf{C}$ μια κλάση πολυπλοκότητας και $L \subseteq \Sigma^*$. $L \in \mathcal{BP} \cdot \mathbf{C}$ αν υπάρχει μία γλώσσα $A \in \mathbf{C}$, ένα πολυώνυμο p, και μία σταθερά $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \Sigma^*$:*

$$\mathbf{Pr}_{y \in \{0,1\}^{p(|x|)}} [(x; y) \in A \leftrightarrow x \in L] \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$$

1. Δείξτε ότι $\mathcal{BP} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{BPP}$.
2. Δείξτε ότι αν $\mathbf{C}_1 \subseteq \mathbf{C}_2$, τότε και $\mathcal{BP} \cdot \mathbf{C}_1 \subseteq \mathcal{BP} \cdot \mathbf{C}_2$.
3. Δείξτε ότι $co(\mathcal{BP} \cdot \mathbf{C}) \subseteq \mathcal{BP} \cdot (co\mathbf{C})$. Τι συνεπάγεται αυτή η σχέση αν η $\mathbf{C}$ είναι κλειστή ως προς συμπλήρωμα;
4. Δείξτε ότι αν η $\mathbf{C}$ είναι κλειστή ως προς padding[1]τότε $\mathbf{C} \subseteq \mathcal{BP} \cdot \mathbf{C}$.

όπου $\mathbf{C}, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ κλάσεις πολυπλοκότητας.

Άσκηση 5*

Ορίζουμε την κλάση **BPL** ως το ανάλογο για λογαριθμικό χώρο της **BPP**: Μιά γλώσσα L ανήκει στην κλάση **BPL** αν υπάρχει μία Πιθανοτική Μηχανή Turing λογαριθμικού χώρου, τέτοια ώστε:

- Αν $x \in L$, τότε $\mathbf{Pr}_r[M(x, r) \text{ accepts}] \geq 2/3$
- Αν $x \notin L$, τότε $\mathbf{Pr}_r[M(x, r) \text{ accepts}] \leq 1/3$

1. Ορίστε με παρόμοιο τρόπο την κλάση **RL**, και δείξτε ότι $\mathbf{RL} \subseteq \mathbf{BPL}$.
2. Δείξτε ότι $\mathbf{BPL} \subseteq \mathbf{SPACE}(\log^2 n)$.
3. Δείξτε ότι $\mathbf{BPL} \subseteq \mathbf{P}$.

[1]Μία κλάση είναι κλειστή ως προς padding αν $L \in \mathbf{C} \Rightarrow \{x; y | x \in L \wedge y \in \{0,1\}^*\} \in \mathbf{C}$.

Άσκηση Bonus

(*The Boolean Hierarchy*)
Σε αυτή την άσκηση, θα μελετήσουμε την κλάση **DP**, και την Ιεραρχία που χτίζεται μέσω αυτής.

Ορισμός 2 *Μια γλώσσα L ανήκει στην κλάση* **DP** *αν και μόνο αν υπάρχουν δύο γλώσσες $L_1 \in \mathbf{NP}$ και $L_2 \in co\mathbf{NP}$, τέτοιες ώστε $L = L_1 \cap L_2$.*

(το "D" στον ορισμό προέρχεται από το Difference)

1. Παρατηρήστε ότι $\mathbf{DP} \neq \mathbf{NP} \cap co\mathbf{NP}$, όπως και ότι ο ορισμός της κλάσης **DP** είναι "συντακτικός ", οπότε είναι φυσιολογικό να έχει complete προβλήματα. Δείτε περισσότερα στο βιβλίο του Παπαδημητρίου [1], σελίδες 412-415.

   (α′) Δείξτε ότι $\mathbf{NP} \cup co\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{DP}$.

   (β′) Με παρόμοιο τρόπο όπως στο [1], δείξτε ότι τα προβλήματα `EXACT-CLIQUE` και `CRITICAL-HC` [2] είναι **DP**-complete.

2. Η κλάση **DP** επεκτείνεται φυσιολογικά στην Boolean Hierarchy ως εξής:

   Ορισμός 3 *Η κλάση $\mathbf{DP}_n$ ορίζεται για κάθε $n \geq 0$:*

   - $\mathbf{DP}_0 = \mathbf{P}$
   - $\mathbf{DP}_{n+1} = \{A \cup B |\ A \in \mathbf{DP}_n, B \in \mathbf{NP}\}$, *αν n είναι άρτιος*
   - $\mathbf{DP}_{n+1} = \{A \cap B |\ A \in \mathbf{DP}_n, B \in co\mathbf{NP}\}$, *αν n είναι περιττός*

   Επίσης ορίζουμε:

   $$\mathbf{BH} = \bigcup_{n \geq 0} \mathbf{DP}_n$$

   (α′) Οι κλάσεις $\mathbf{DP}_n$ έχουν complete σύνολα! Έστω το πρόβλημα $\texttt{GCOLOR}_k$: δοθέντος ενός γράφου G, είναι ο χρωματικός αριθμός $\chi(G)$ (ο ελάχιστος απαραίτητος αριθμός χρωμάτων για να χρωματιστεί ο G) περιττός και μεταξύ του $3k$ και του $4k$; Δείξτε ότι για κάθε περιττό φυσικό k, το πρόβλημα $\texttt{GCOLOR}_k$ είναι $\mathbf{DP}_k$-complete.

   (β′) Δείξτε ότι η Boolean Hierarchy **BH** είναι γνήσια (δηλαδή $\mathbf{DP}_n \subsetneq \mathbf{DP}_{n+1}$ για κάθε $n \geq 0$) εκτός αν η Πολυωνυμική Ιεραρχία καταρρέει.

[2]`CRITICAL-HC`: "Δοθέντος γράφου $G = (V, E)$, ισχύει ότι ο γράφος G *δεν* έχει κύκλο Hamilton, αλλά κάθε γράφος G' που προέρχεται από τον G προσθέτοντας μία καινούργια ακμή έχει κύκλο Hamilton;"