Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Εργαστήριο Λογικής και Επιστήμης Υπολογισμών

Αλγόριθμοι & Πολυπλοκότητα ΙΙ
3η Σειρά Ασκήσεων

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Ά. Παγουρτζής
Χειμερινό Εξάμηνο 2012-2013

Η παράδοση των ασκήσεων μπορεί να γίνει στο μάθημα ή σε ηλεκτρονική μορφή στην διεύθυνση antony.ant1985@gmail.com.
Προθεσμία παράδοσης: 10/3/2013.

Άσκηση 1

Έστω **SPARSE** η κλάση των sparse γλωσσών. Υπενθυμίζουμε ότι μια γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$ λέγεται sparse (αραιή) αν έχει το πολύ πολυωνυμικά στοιχεία σε κάθε μήκος string, δηλαδή αν $|L \cap \{0,1\}^n| \leq p(n)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και p πολυώνυμο. Δείξτε ότι $\mathbf{SPARSE} \subseteq \mathbf{P_{/poly}}$.

Άσκηση 2

1. Ένα μη-ντετερμινιστικό κύκλωμα C έχει δύο εισόδους $x = x_1 x_2 \cdots x_n$ και $y = y_1 y_2 \cdots y_m$. Το κύκλωμα C αποδέχεται το x αν και μόνο αν $\exists y\, C(x,y) = 1$. Δείξτε ότι κάθε γλώσσα στο **MA** έχει μη-ντετερμινιστικά κυκλώματα πολυωνυμικού μεγέθους.
2. Δείξτε ότι $\mathcal{BP} \cdot co\mathbf{NP} = co\mathbf{AM}$.

Άσκηση 3

1. Δείξτε ότι $\mathbf{PCP}[\log n, 1] \subseteq \mathbf{NP}$.
2. Δείξτε ότι $\mathbf{PCP}[0, \log n] = \mathbf{P}$.

Άσκηση 4

1. Ορίστε τις κλάσεις $\#\mathbf{P}$, $\oplus\mathbf{P}$, $\mathbf{C_{=}P}$ και **SPP**.
2. Η κλάση $Gap\mathbf{P}$ ορίζεται ως το σύνολο των συναρτήσεων f για τις οποίες υπάρχει μία μη-ντετερμινιστική TM M τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Sigma^*$:

$$f(x) = \Delta M(x) = \#M(x) - \#\overline{M}(x) = \#acc(x) - \#rej(x)$$

   όπου $\#acc(x)$ και $\#rej(x)$ το πλήθος των μονοπατιών που αποδέχονται και απορρίπτουν, αντίστοιχα.

   (α΄) Δείξτε ότι αν $f \in Gap\mathbf{P}$, τότε και $-f \in Gap\mathbf{P}$.

   (β΄) Χρησιμοποιήστε μια συνάρτηση της κλάσης $Gap\mathbf{P}$ για να ορίσετε εναλλακτικά τις κλάσεις **PP**, **SPP** και $\mathbf{C_{=}P}$.

3. Το βασικό μειονέκτημα της $\#\mathbf{P}$ είναι ότι περιλαμβάνει μόνο μη-αρνητικές συναρτήσεις, και έτσι δεν είναι κλειστή ως προς την αφαίρεση. Η $Gap\mathbf{P}$ περιλαμβάνει και συναρτήσεις που παίρνουν αρνητικές τιμές.

(α′) Δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f \in \mathbf{FP}$ ανήκει στην $Gap\mathbf{P}$.

(β′) Δείξτε ότι αν $f \in Gap\mathbf{P}$ τότε μπορεί να γραφτεί ως διαφορά δύο συναρτήσεων που ανήκουν στην $\#\mathbf{P}$.