Μεταπτυχιακο Προγραμμα Λογικης και Αλγοριθμων

μΠλ∀

Αλγοριθμοι Πυρηνοποιησης Σε Επιπεδα Γραφηματα

του

Γεώργιου Ρ. Ασκαλίδη

Διπλωματική Εργασία που παρουσιάσθηκε ως μερική εκπλήρωση των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού διπλώματος στην Λογική και Θεωρία Αλγορίθμων και Υπολογισμού.

Επιβλέπων

Αν. Καθ. Δημήτριος Μ. Θηλυκός

Μάιος 2011

“What we do may be small, but it has a certain character of permanence; and to have produced anything of the slightest permanent interest, whether it be a copy of verses or a geometrical theorem, is to have done something utterly beyond the powers of the vast majority of men.”
G. H. Hardy

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Περί τίνος Πρόκειται

Καθώς τα περισσότερα προβλήματα που έχουν πραγματικό ενδιαφέρον σε καθημερινές εφαρμογές έχουν αποδειχθεί να είναι NP-δύσκολα και άρα δεν αναμένουμε να έχουν αποδοτικούς (δηλ. πολυωνυμικού χρόνου) αλγόριθμους επίλυσης, είναι απαραίτητο να θεωρήσουμε εναλλακτικές προσεγγίσεις. Μία από τις νέες αυτές θεωρίες είναι η Θεωρία της Παραμετρικής Πολυπλοκότητας. Στην Παραμετρική Πολυπλοκότητα, συνοδεύουμε την είσοδο με μία παράμετρο. Ένα παραμετρικοποιημένο πρόβλημα είναι ένα $\Pi \subseteq \Gamma^* \times \mathbb{N}$ (όπου Γ ένα πεπερασμένο αλφάβητο) και λέμε πως έχει πολυωνυμικό πυρήνα, αν υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου, που με είσοδο ένα στιγμιότυπο I και μία παράμετρο $k \in \mathbb{N}$, επιστρέφει ένα νέο στιγμιότυπο (I', k'), τέτοιο ώστε η απάντηση να διατηρείται και επιπλέον $\max\{|I'|, k'\} \leq g(k)$, για κάποια πολυωνυμική συνάρτηση g που εξαρτάται μόνο από το k. Στην διπλωματική αυτή παρουσιάζουμε τεχνικές και αποτελέσματα που δίνουν γραμμικούς (δηλαδή $g(k) \in O(k)$) πυρήνες για πολλά προβλήματα σε γραφήματα περιορισμένα σε γραφήματα σε επιφάνειες.

Ευχαριστίες

"No man is an Island."

Ένα μεγάλο κεφάλαιο κλείνει στη ζωή μου με την διπλωματική αυτή και δεν μπορώ παρά να θυμηθώ όλες τις εμπειρίες που έζησα και τους ανθρώπους που συνάντησα κατά το ταξίδι μου προς τη γνώση. Κάθε μικρή και μεγάλη απόφαση που πήρα μέχρι τώρα και κάθε ερέθισμα που δέχτηκα με τις πέντε μου αισθήσεις έπαιξε το δικό του μοναδικό ρόλο στην διαμόρφωση της ζωής και του χαρακτήρα μου. Και περισσότερο από όλα, τον χαρακτήρα μου διαμόρφωσαν όλα τα άτομα που γνώρισα και έκανα παρέα.

Πρώτα θέλω να ευχαριστήσω την Έλενα και την Ευάννα, απλά επειδή υπάρχουν στη ζωή μου.

Σε ένα πανεπιστήμιο όπως το Ε.Κ.Π.Α. είναι εύκολο να παρασυρθείς και να χάσεις τους στόχους σου. Ευχαριστώ αρκετούς συμφοιτητές μου από το τμήμα Μαθηματικών για την παρέα, την έμπνευση αλλά και τα πρότυπα που μου έδωσαν. Κυρίως ευχαριστώ μια μικρή αλλά γεμάτη θετική τρέλλα ομάδα ανθρώπων· χωρίς αυτούς τα προπτυχιακά μου χρόνια δεν θα ήταν ίδια.

Ευχαριστώ ακόμα αρκετούς συμφοιτητές μου στο μ∏λ∀ που γέμισαν την φοίτησή μου εκεί με ενδιαφέρουσες και απολαυστικές συζητήσεις. Ελπίζω τα μονοπάτια μας να ξανασυναντηθούν.

Για πολλές ενδιαφέρουσες και παραγωγικές συζητήσεις αλλά και για πολλούς καφέδες ευχαριστώ και την γειτόνισσά μου, την Κατερίνα.

Καλή συντροφιά όμως μου κρατούν και αρκετές τηλεοπτικές σειρές. Ένα μεγάλο ευχαριστώ στους δημιουργούς των Entourage, The Big Bang Theory, και How I met your mother για τις πολλές στιγμές γέλιου, του καλόγραμμένου Lost για την υπερβολικά πολλή τροφή για σκέψη και πάνω απ΄ όλα του αριστουργηματικού Dexter.

Ευχαριστώ θέλω να πω και στις καφετέριες Starbucks, που τόσα χρόνια μου παρέχουν μια ευχάριστη, ωραία και χωρίς καπνό ατμόσφαιρα για χαλάρωση και διάβασμα.

Στον εκπαιδευτικό τομέα θέλω να ευχαριστήσω σχεδόν όλους του καθηγητές που είχα κατά την τετραετή μου φοίτηση στο Τμήμα Μαθηματικών του Ε.Κ.Π.Α., για τις γνώσεις που τόσο απλόχερα μου πρόσφεραν. Δεν μπορώ να μην ξεχωρίσω τον Α. Γιαννόπουλο του οποίου νοιώθω τιμή που υπήρξα φοιτητής και τον Γ. Μοσχοβάκη. Και οι δύο είναι πρότυπα ανθρώπου και επιστήμονα για μένα. Το ήθος και το επιστημονικό τους κύρος αποτελεί έμπνευση για κάθε νέο φοιτητή.

Την μεγαλύτερη επιστημονική (και όχι μόνο) επιρροή, είχε πάνω μου φυσικά ο επιβλέπων της διπλωματικής μου, ο Δ. Μ. Θηλυκός. Τον ευχαριστώ που πίστεψε σε μένα και για τις γνώσεις, την διάθεση και τις ευκαιρίες που μου έδωσε. Τον ευχαριστώ επίσης, που μου συμπεριφέρθηκε πάντα με σεβασμό και με έκανε να νοιώθω όχι απλά ανεκτός αλλά ευπρόσδεκτος και επιθυμητός στο γραφείο του.

Ευχαριστώ επίσης, όλους τους καθηγητές που με δίδαξαν κατά την διετή φοίτησή μου στο $\mu\prod\lambda\forall$. Νοιώθω τυχερός που υπήρξα φοιτητής τέτοιων μεγάλων επιστημόνων και καθηγητών.

Είναι μεγάλη μου χαρά που ο Σ. Κολλιόπουλος και ο Δ. Αχλιόπτας, καθηγητές και επιστήμονες που ξεχώρισα από την πρώτη στιγμή και θαυμάζω ιδιαίτερα, δέχτηκαν και μου έκαναν την τιμή να είναι στην τριμελή της διπλωματικής μου.

Το κύριο μέρος της δουλειάς για την διπλωματική αυτή έγινε στο Bergen της Νορβηγίας, και για αυτό ευχαριστώ θερμά την ομάδα αλγορίθμων του Πανεπιστημίου του Bergen, αλλά κυρίως τον Fedor Fomin (UiB) για την υπέροχη φιλοξενία και στήριξή του κατά τη διάρκεια του ενός μήνα της παραμονής μου στην όμορφη αυτή πόλη. Ο χρόνος που πέρασα μαζί του και οι γνώσεις που μου έδωσε ήταν πολύ σημαντικές για μένα.

Ευχαριστώ επίσης το Ινστιτούτο Max-Planck for Informatics (Saarbrücken, Γερμανία) και το Northwestern University (Evanston, IL, ΗΠΑ) για τις ολιγοήμερες φιλοξενίες τους αλλά κυρίως για την τιμή που μου έκαναν με το να μου εμπιστευθούν μια θέση στο διδακτορικό τους πρόγραμμα. Μακάρι να μπορούσα να πάω και στα δύο.

Τέλος, ευχαριστώ τους γονείς μου και την αδελφή μου, Ανθή, για την άνευ όρων και ορίων αγάπη και στήριξη που μου δείχουν καθ᾽ όλη τη διάρκεια της ζωής μου. Αν και δεν τους το δείχνω συχνά, σημαίνουν τα πάντα για μένα και δεν θα κατάφερνα τίποτα στη ζωή μου αν δεν είχα την δική τους πλάτη για να ακουμπώ.

“No Weennies Allowed”

Στο ομώνυμο επεισόδιο της σειρά κινουμένων σχεδιών “SpongeBob” (‘Μπομπ Σφουγγαρακής ’), ο ήρωάς μας, ο Bob, προσπαθεί να μπει στο πιο σκληροτράχηλο μπαρ του βυθού Μπικίνη, το ‘Αλμυρό Πτυελοδοχείο’ (“Salty Spitoon”). Στο μπαρ αυτό μπαίνουν μόνο οι πολύ σκληροί και άγριοι τύποι. Χαρακτηριστικό είναι πως το να έχεις φάει ένα μπολ από καρφιά για πρωινό, *δεν* εντυπωσιάζει τον πορτιέρη (βέβαια αν τα έχεις φάει *χωρίς* γάλα, τότε μπορείς να μπεις). Ως φυσικό, όταν ο Bob, φτάνει στην είσοδο, του απαγορεύεται η είσοδος και του προτείνεται, από τον πορτιέρη, ως εναλλακτικό στέκι το ‘Στέκι των Πολύ Μικρούλιδων’ (“Super Weennie Hut, Jr”), όπου και καταλήγει ο ήρωάς μας να πίνει το αναψυκτικό του και να σκέφτεται το πώς θα καταφέρει να μπει στο σκληροτράχηλο ‘Αλμυρό Πτυελοδοχείο’.

Το επεισόδιο αυτό έφερε στην προσοχή μου για πρώτη φορά ο καθηγητής Δ. Θηλυκός στο προπτυχιακό μάθημα Γραφοθεωρίας που παρακολούθησα το εαρινό εξάμηνο του 2007. Η κατάσταση στην οποία βρισκόταν ο Bob στο επεισόδιο εκείνο, είναι φυσικά οικεία σε όλους μας. Όλοι θέλουμε να μπούμε στο ‘Αλμυρό Πτυελοδοχείο’, αλλά μόνο οι καλύτεροι και σκληρότεροι τα καταφέρνουν.

Προς το παρών, χαιρετισμούς από το ‘Στέκι των Πολύ Μικρούλιδων’.

Κεφάλαιο 1

Η Γη, ο Ουρανός και όλα στο ενδιάμεσο

'Υπάρχουν περισσότερα πράγματα μεταξύ γης και ουρανού, Οράτιε, απ΄ όσα ονειρεύεται η φιλοσοφία σου.'
William Sheakspeare

'Η Πληροφορική εν αντιθέσει προς άλλες επιστήμες, που συνάντησαν τους περιορισμούς τους, όπως οι άνθρωποι, στη μέση της ηλικίας τους, γεννήθηκε γνωρίζοντας τους περιορισμούς της. Στη ληξιαρχική πράξη της γέννησης της πληροφορικής, που ήταν το άρθρο του Turing το πρώτο πράγμα που έδειξε είναι ότι δεν λύνονται όλα τα προβλήματα. Η πληροφορική είναι μια επιστήμη, η οποία, εκ γενετής και λόγω κληρονομικότητας, λόγω του ότι προήλθε έτσι, ψάχνεται και ψάχνει να βρει τους περιορισμούς της, και το P=NP είναι μια έκφραση αυτής.'
Χρίστος Παπαδημητρίου.

1.1 Εισαγωγή

Η πληροφορική γεννήθηκε γνωρίζοντας πως δεν μπορεί να λύσει όλα τα προβλήματα ([35]). Αυτό όμως ήταν μόνο η αρχή. Όπως ένα παιδί του δημοτικού εύκολα αντιλαμβάνεται πως το να προσθέσει δύο αριθμούς είναι για κάποιο λόγο κάπως πιο εύκολο από το να τους πολλαπλασιάσει, έτσι και οι επιστήμονες αντιλήφθηκαν γρήγορα πως ακόμα και ανάμεσα στα πρόβλήματα που λύνονται με υπολογιστή, υπάρχουν πολλά που δεν μπορούν να λυθούν με αποδοτικό και γρήγορο τρόπο. Για παράδειγμα μπορούμε εύκολα να ελέξουμε αν ένας αριθμός είναι πρώτος αλλά το να βρούμε τους πρώτους παράγοντές του θα πάρει εκατομμύρια χρόνια ακόμα και στον πιο γρήγορο υπολογιστή του κόσμου. Πήρε αρκετά χρόνια ώστε να διατυπώσουμε την διχοτομία αυτή στο πασίγνωστο πλεόν πρόβλημα του P vs NP. Για 40 χρόνια τώρα οι κορυφαίοι της πληροφορικής και των μαθηματικών προσπαθούν αλλά δεν έχουν καταφέρει ακόμα να αποδείξουν το σε όλους σχεδόν 'προφανές ': Πως το να βρείς μια απόδειξη, είναι πιο δύσκολο από το να ελέξεις αν μια δοσμένη απόδειξη είναι σωστή. Το ερώτημα αυτό είναι το ιερό δισκοπότηρο της Πληροφορικής και μάλιστα έχει αξία ενός εκατομμυρίου δολλαρίων.

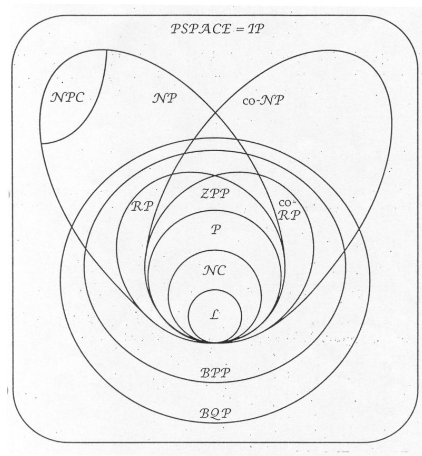
Ας πάρουμε τα πράγματα από την αρχή. Ο αναγνώστης υποθέτεται να είναι οικείος με τις βασικές έννοιες της Θεωρητικής Πληροφορικής όπως Μηχανή Turing, Αλγόριθμος, Ντεντερμινισμός, Μη Ντεντερμινισμός, Κλάση Πολυπλοκότητας, Αναγωγή και πληρότητα. Επίσης ο αναγνώστης υποθέτεται ότι είναι οικείος με τις έννοιες και τον 'Ασυμπωτικό συμβολισμό O'. Για αναγνώσματα σε αυτές τις περιοχές παραπέμπουμε στα [10], [33] και [13]. Οι βασικές κλάσεις που θα αναφέρουμε στην διπλωματική αυτή χωρίς να τις ορίσουμε αυστηρά είναι οι P και NP. Πολύ απλοικά, η κλάση P περιέχει τα προβλήματα που μπορούν να λυθούν από μια ντεντερμινιστική μηχανή Turing σε πολυωνυμικό χρόνο. Η κλάση NP περιέχει τα προβλήματα τα οποία μπορούν να επιλυθούν από μια μη ντεντερμινιστική μηχανή Turing σε πολυωνυμικό χρόνο. Αλλιώς, μπορούμε να ορίσουμε την κλάση NP ως την κλάση των προβλημάτων για τα οποία μια δοσμένη υποψήφια λύση πολυωνυμικού μεγέθους, μπορεί να ελεχθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Παρά την φαινομενική ισχύ της NP έναντι της P, προς το παρών δεν έχει αποδειχθεί τίποτα περισσότερο από το προφανές, ότι δηλαδή P⊆ NP. Ένα πρόβλημα είναι NP-πλήρες αν ανήκει στην κλάση NP και κάθε άλλο πρόβλημα στην κλάση ανάγεται πολυωνυμικά σε αυτό. Δηλαδή αν βρέθει πολυωνυμικός αλγόριθμος για *ένα* NP-πλήρες πρόβλημα, ολόκληρη η κλάση NP καταρρέει στο P.

Μετά τα πρωτοπόρα άρθρα των Stephen Cook ([8]) και Richard Karp ([27]) δεκάδες χιλιάδες άρθρα έχουν δημοσιευτεί αποδεικνύοντας όλο και περισσότερα ενδιαφέροντα προβλήματα NP-πλήρη. Δεν θα ήταν υπερβολή να πούμε πως τα περισσότερα προβλήματα που παρουσιάζουν πραγματικό ενδιαφέρον σε καθημερινές εφαρμογές έχουν αποδειχτεί να είναι NP-πλήρη, και άρα δεν αναμένονται να βρεθούν αλγόριθμοι που θα τα λύνουν με αποδοτικό τρόπο. Από την άλλη, τα προβλήματα που ανήκουν στο P έρχονται πάντα με πολύ καλούς χρόνους, στην χειρότερη, της μορφής $O(n^7)$. Αυτή την παράξενη και τόσο απότομη διχοτομία κανείς δεν μπορεί ακόμα να εξηγήσει.

Στην σκιά αυτής της κατάστασης λοιπόν, έχει αναπτυχθεί σχεδόν όλη η Θεωρητική Πληροφορική. Μια τεράστια ποικιλία κλάσεων πολυπλοκότητας έχει ορισθεί και μελετηθεί, (ο αναγνώστης παραπέμπεται στην ιστοσελίδα [9]), και έχουν αναπτυχθεί πολλές θεωρίες και είδη αλγορίθμων όπως Προσεγγιστικοί, Πιθανοτικοί ακόμα και Κβαντικοί Αλγόριθμοι για να προσφέρουν κάποια λύση στα NP-πλήρη προβλήματα που καλούμαστε να λύσουν καθημερινά.

1.2 Δομή

Σε αυτή την διπλωματική θα ασχοληθούμε με την ταχύτατα αναπτυσσόμενη θεωρία της Παραμετρικής Πολυπλοκότητας και συγκεκριμένα ένα πανίσχυρο εργαλείο της, την Πυρηνοποίηση (ορισμοί παρακάτω). Θα ασχοληθούμε σχεδόν κατά αποκλειστικότητα με NP-δύσκολα προβλήματα σε γραφήματα και θα περιοριστούμε σε ειδικές κλάσεις γραφημάτων όπως επίπεδα ή φραγμένου γένους. Θα παρουσιάσουμε γενικές και ειδικές τεχνικές πυρηνοποίησης καθώς και ένα νέο πυρήνα. Η δομή της διπλωματικής είναι η εξής: Στο επόμενο κεφάλαιο θα ορίσουμε τις βασικές έννοιες από την Θεωρία Γραφημάτων και την



Σχήμα 1.1: Μια ματιά σε μερικές από τις κλάσεις πολυπλοκότητας, και την συσχέτιση που πιστεύουμε πως έχουν μεταξύ τους.

Παραμετρική Πολυπλοκότητα. Στο κεφάλαιο 3 θα κάνουμε μια εισαγωγή στην έννοια και την δύναμη της Πυρηνοποίησης παρουσιάζοντας κάποια παραδείγματα και αποτελέσματα. Στο Κεφάλαιο 4 θα παρουσιάσουμε την τεχνική της Αποσύνθεσης περιοχών και θα δούμε μερικά από τα αποτελέσματα που παράγει. Στην τεχνική αυτή βασίζεται και η κύρια συνεισφορά της διπλωματικής αυτής (το Θεώρημα 5.1), η οποία βρίσκεται στο Κεφάλαιο 5, και είναι ένας πυρήνας με μη-τετριμμένη παράμετρο. Τέλος το Κεφάλαιο 6 παρουσιάζουμε θεωρήματα Μέτα-Πυρηνοποίσης τα οποία αποτελούν τα πιο σύγχρονα και γενικά αποτελέσματα που υπάρχουν στην Πυρηνοποίηση. Ακολουθούν παραρτήματα με τεχνικές λεπτομέρειες από την άποδειξη του 5.1 και γλωσσάρι όρων.

Κεφάλαιο 2

Παραμετρική Πολυπλοκότητα

2.1 Γραφήματα

Τα γραφήματα είναι ένα πολύ σημαντικό κομμάτι των διακριτών Μαθηματικών που έχει γνωρίσει τεράστια ανάπτυξη τις τελευταίες δεκαετίες, κυρίως λόγω της ιδιότητάς τους να μπορούν να αναπαραστούν τόσα πολλά μαθηματικά αντικείμενα.

Καθώς ένας τεράστιος αριθμός προβλημάτων μπορεί να αναπαρασταθεί στα πλαίσια της Γραφοθεωρίας, η θεωρία Αλγορίθμων και Υπολογιστικής Πολυπλοκότητας την χρησιμοποιούν κατά κόρον για τον ορισμό αλλά και την ανάπτυξη τεχνικών επίλυσης διαφόρων προβλημάτων. Κατά αποκλειστικότητα στην διπλωματική αυτή θα ασχοληθούμε με προβλήματα σε γραφήματα. Παρακάτω θα ορίσουμε τις βασικές έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε στην διπλωματική αυτή. Για ένα πλήρες ανάγνωσμα στην Θεωρία Γραφημάτων, παραπέμπουμε στο [14].

Ένα γράφημα είναι ένα ζευγάρι $G = (V, E)$ όπου V είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από κορυφές και E ένα σύνολο από ζευγάρια κορυφών. Κάθε τέτοιο ζευγάρι καλείται ακμή. Το σύνολο κορυφών ενός γραφήματος G συμβολίζεται με $V(G)$ και το σύνολο ακμών με $E(G)$. Ένα γράφημα μπορεί να είναι μη-κατευθυνόμενο στην οποία περίπτωση μια ακμή e είναι απλά ένα δισύνολο $\{u, v\}$ (δηλαδή η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι κορυφές u και v δεν έχει σημασία) ή κατευθυνόμενο οπότε και κάθε ακμή e είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος (u, v). Ένα βεβαρημένο γράφημα έρχεται με μια επιπλέον συνάρτηση $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ και για κάθε $e \in E(G)$, η τιμή $w(e)$ καλείται το βάρος της ακμής e. Όλα τα γραφήματα στην διπλωματική αυτή υποθέτονται να είναι μη-κατευθυνόμενα και χωρίς βρόχους (δηλ. $\forall u \in V(G) : \{u, u\} \notin E(G)$) ή πολλαπλές ακμές μεταξύ του ίδιου ζεύγους κορυφών. Μία κορυφή u είναι γειτονική με μία άλλη κορυφή v αν $\{u, v\} \in E(G)$. Η γειτονιά της κορυφής u στο γράφημα G, $N_G(u)$, είναι το σύνολο των κορυφών με τις οποίες είναι γειτονική. Ο βαθμός μιας κορυφής u στο γράφημα G, $d_G(u)$, είναι ο πληθάριθμος του συνόλου $N_G(u)$. Όποτε είναι ξεκάθαρο για το σε ποιο γράφημα αναφερόμαστε, θα παραλείπουμε τον δείκτη G. Ο ελάχιστος βαθμός ενός γραφήματος ορίζεται ως εξής: $\delta(G) :=\min\{d_G(u)|u \in V(G)\}$. Ο μέγιστος ορίζεται ανάλογα: $\Delta(G) :=\max\{d_G(u)|u \in V(G\}$.

Η απόσταση δύο κορυφών u και v στο γράφημα G συμβολίζεται με $\mathbf{dist}_G(u, v)$ και είναι το μήκος του ελάχιστου μονοπατιού με αφετηρία την u και τέρμα την v. Το μήκος ενός μονοπατιού είναι ο αριθμός των ακμών που περιέχει. Θα παραλείπουμε τον δείκτη G όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχησης. Η απόσταση μεταξύ μιας κορυφής w και μιας ακμής $e = \{u, v\}$, $\mathbf{dist}_G(e, w)$, ορίζεται ως το ελάχιστο των $\mathbf{dist}_G(u, w)$ και $\mathbf{dist}_G(v, w)$. Η απόσταση μεταξύ μιας κορυφής u και ενός συνόλου S, $\mathbf{dist}(u, S)$, ορίζεται ως το $\min\{\mathbf{dist}(u, v)|v \in S\}$.

Όλα τα αποτελέσματα σε αυτήν διπλωματική αφορούν γραφήματα σε επιφανείες. Συμβολίζουμε με $\mathcal{G}_g$ όλα τα γραφήματα που μπορούν να εμβαπτιστούν σε μία επιφάνεια Σ με γένος Euler το πολύ g.

2.2 Παραδείγματα Προβλημάτων

Τα προβλήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε στην διπλωματική αυτή είναι όλα προβλήματα σε γραφήματα και NP-δύσκολα. Δηλαδή η γενική μορφή τους θα είναι η εξής:

Στιγμιότυπο: Ένα γράφημα G και ένας φυσικός k.
Ερώτημα: Υπάρχει κάποιο σύνολο $S \subseteq V(G)$ (ή $S \subseteq E(G)$, ανάλογα με το πρόβλημα) τέτοιο ώστε S ικανοποιεί μια πολυωνυμικού χρόνου ελέξιμη ιδιότητα και $\|S\| \leq k$ (ή $\|S\| \geq k$, ανάλογα με το πρόβλημα);

Ας δούμε 3 χαρακτηριστικά παραδείγματα:

1. Χρωματισμος Κορυφων (Colorability)

   Στο πρόβλημα αυτό μας ενδιαφέρει να χρωματίσουμε τις κορυφές ενός γραφήματος με τέτοιο τρόπο ώστε καμία κορυφή να μην έχει το ίδιο χρώμα με καμία γειτονική της.

Στιγμιότυπο: Ένα γράφημα G και ένας φυσικός k.
Ερώτημα: $\exists \sigma : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\} : \forall \{u, v\} \in E(G)\ \sigma(u) \neq \sigma(v)$;

   Για $k = 2$ το πρόβλημα ανήκει στο P και μάλιστα μπορεί να λυθεί σε γραμμικό χρόνο, $O(n)$. Για $k = 3$ γίνεται αμέσως NP-πλήρες. Το πρόβλημα αυτό, στην γενική περίπτωσή του, μπορεί να λυθεί με αλγόριθμο χρόνου εκτέλεσης $O(n^2 \cdot k^n)$.

2. Ανεξαρτητο Συνολο (Independent Set)

   Στο πρόβλημα αυτό μας ενδιαφέρει να βρούμε ένα σύνολο από κορυφές του γραφήματος έτσι ώστε ανά δύο να μην είναι γειτονικές.

Στιγμιότυπο: Ένα γράφημα G και ένας φυσικός k.
Ερώτημα: $\exists S \subseteq V(G) : \|S\| \geq k\ \&\ \forall u, v \in S : \{u, v\} \notin E(G)$;

Το πρόβλημα αυτό είναι NP-πλήρες και στην γενική του περίπτωση μπορεί να επιλυθεί σε χρόνο $O(n^{k+1})$.

3. Κάλυμμα Κορυφών (Vertex Cover)

Στο πρόβλημα αυτό ψάχνουμε ένα υποσύνολο S των κορυφών του γραφήματος έτσι ώστε όλες οι ακμές να έχουν τουλάχιστον ένα άκρο μέσα στο S.

Στιγμιότυπο: Ένα γράφημα G και ένας φυσικός k.
Ερώτημα: $\exists S \subseteq V(G) : \vert S\vert \leq k$ & $\forall e \in E(G) : e \cap S \neq \emptyset$;

Το NP-πλήρες πρόβλημα αυτό είναι από τα πιο μελετημένα της Θεωρίας Αλγορίθμων. Ο απλός αλγόριθμος για την επίλυσή του τρέχει σε χρόνο $O(2^k \cdot n)$, αλλά ο καλύτερος γνωστός αλγόριθμος τρέχει σε χρόνο $O((1,2738)^k \cdot n)$.

Παρατηρούμε μια διαφορά μεταξύ των 3 προβλημάτων (τα οποία από την σκοπιά της κλασσικής υπολογιστικής πολυπλοκότητας είναι ισοδύναμα, αφού είναι και τα 3 NP-δύσκολα). Ενώ και οι τρείς αλγόριθμοι είναι εκθετικού χρόνου, λαμβάνωντας υπόψη πως σε πρακτικές εφαρμογές η τιμή του k μπορεί να θεωρηθεί πολύ μικρότερη από το μέγεθος του γραφήματος, ο τελευταίος είναι αισθητά καλύτερος από τους άλλους δύο. Αν θεωρήσουμε πως το k είναι *σταθερά* τότε βλέπουμε πως ο πρώτος αλγόριθμος παραμένει εκθετικός (πράγμα που δεν μας προξενεί εντύπωση, αφού αναφέραμε πως το πρόβλημα είναι NP-πλήρες ακόμα και για $k = 3$), ο δεύτερος είναι κάπως καλύτερος και ο τρίτος είναι ουσιαστικά γραμμικός στο μέγεθος του γραφήματος. Αυτή ακριβώς την διαφορά ανάμεσα στα προβλήματα προσπαθεί να αναδείξει η Παραμετρική Πολυπλοκότητα.

2.3 Η κλάση FPT

Ορισμός 2.1. *Παραμετρικοποιημένο πρόβλημα* είναι ένα υποσύνολο $L \subseteq \Gamma^* \times \mathbb{N}$, όπου Γ ένα πεπερασμένο αλφάβητο.

Η είσοδος για ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα αποτελείτε από μια δυάδα (x, k), όπου $x \in \Gamma^*$ και $k \in \mathbb{N}$ είναι η παράμετρος. Στην περιπτωσή μας, θεωρούμε το x να είναι πάντα γράφημα. Η παράμετρος k τις περισσότερες φορές λαμβάνεται να είναι το μέγεθος της λύσης που ψάχνουμε. Στο κεφάλαιο 5 θα δούμε και άλλες πολύ ενδιαφέρουσες παραμετρικοποιήσεις με πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα.

Για να κάνουμε ξεκάθαρο πως δουλεύουμε πάνω σε παραμετρικοποιημένο πρόβλημα, θα βάζουμε ένα 'p' μπροστά από την ονομασία του προβλήματος (π.χ. p-Ανεξαρτητο Συνολο, αντί του κλασσικού Ανεξαρτητο Συνολο).

Ορισμός 2.2. Ένα παραμετρικοποιημένο πρόβλημα L λέγεται πως είναι *παραμετρικά αποδοτικό (fixed-parameter tractable)* αν το ερώτημα '$(x, k) \in L$;' μπορεί να απαντηθεί σε χρόνο εκτέλεσης $O(f(k) \cdot p(|x|))$, όπου f μια υπολογίσιμη συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από το k και p ένα πολυώνυμο.

Το κύριο πράγμα που πρέπει να προσέξει κανείς στον τελευταίο ορισμό είναι πως το μη-πολυωνυμικό κομμάτι του χρόνου εκτέλεσης του αλγορίθμου εξαρτάται μόνο από την παράμετρο k, κάτι που κάνει το πρόβλημα πρακτικά επιλύσιμο για μικρές τιμές του k.

Ορισμός 2.3. Ένα πρόβλημα ανήκει στην κλάση FPT αν είναι παραμετρικά αποδοτικό.

Πράγματι, πολλά NP-πλήρη προβλήματα σε πρακτικές εφαρμογές χρειάζονται μόνο μικρές τιμές για το k. Έτσι το να αποδείξουμε κάποιο πρόβλημα στο FPT μας δίνει σοβαρές ελπίδες για γρήγορη επίλυσή του. Θα μπορούσε κανείς να ρωτήσει μήπως *όλα* τα NP-πλήρη προβλήματα είναι στο FPT, αλλά η απάντηση είναι φυσικά αρνητική. Υπάρχουν προβλήματα, όπως το SAT και το Χρωματισμος που αναφέραμε και πιο πάνω, που είναι NP-πλήρη ακόμα και για

$k = 3$. Έτσι αν αποδειχθεί κάποιο τέτοιο πρόβλημα να είναι μέσα στο FPT θα σημαίνει πως P=NP.

Στην προηγούμενη ενότητα είπαμε πως το πρόβλημα Καλυμμα Κορυφων λύνεται σε χρόνο $O(2^k \cdot n)$. Ας το δούμε λίγο πιο αναλυτικά. Ο αλγόριθμος που θα δούμε θα είναι και η απόδειξη πως το πρόβλημα p-Καλυμμα Κορυφων ανήκει στο FPT.

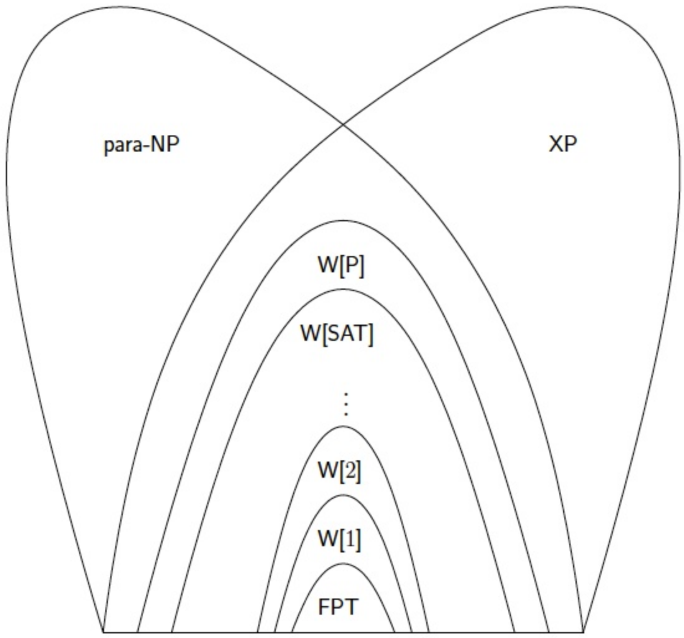
> p-Καλυμμα Κορυφων
> *Στιγμιότυπο:* Ένα γράφημα G, και $k \in \mathbb{N}$
> *Παράμετρος:* k
> *Ερώτημα:* $\exists S \subseteq V(G) : |S| \leq k \ \& \ \forall e \in E(G) : e \cap S \neq \emptyset$;

Παράδειγμα 2.1. Παρατηρούμε πως για κάθε ακμή $\{u, v\}$ του γραφήματος είτε η u είτε η v είτε και οι δύο πρέπει να μπούν στο σύνολο S. Έτσι φτιάχνουμε ένα δένδρο αναζήτησης το βάθος του οποίου εξαρτάται *μόνο* από το k. Ο αναδρομικός αλγόριθμός μας είναι ο εξής:

VC(G, k)
1. **if** $|E(G)| = 0$ then return "YES"
2. **if** $k = 0$ then return "NO"
3. choose (arbitrarily) an edge $e = \{u, v\}$
4. return **VC**$(G - u, k - 1) \vee$ **VC**$(G - v, k - 1)$

Η ορθότητα του αλγορίθμου είναι προφανής, αφού το γράφημα G έχει κάλυμμα κορυφών μεγέθους το πολύ k αν και μόνο αν το γράφημα $G - u$ ή το $G - v$ έχει κάλυμμα κορυφών μεγέθους το πολύ $k - 1$. Και ανάλογα με το ποια από τις δύο τιμές $|E(G)|$ και k μηδενιστεί πρώτα απαντάμε ΝΑΙ ή ΌΧΙ.

Στο βήμα 4, ο αλγόριθμος καλείτε 2 φορές, και το βάθος της αναδρομής είναι το πολύ k. Άρα ο χρόνος εκτέλεσης εύκολα βγαίνει πως είναι $O(2^k \cdot n)$. Είναι FPT αλγόριθμος με $f(k) = 2^k$ και $p(n) = n$.



Σχήμα 2.1: Μια γενική άποψη με τις κυριότερες κλάσεις παραμετρικής πολυπλοκότητας, και την σχέση που πιστεύουμε πως έχουν μεταξύ τους.

2.4 Άλλες Κλάσεις

Η κλάση FPT είναι το χαμηλότερο επίπεδο μιας ολόκληρης ιεραρχίας κλάσεων παραμετρικής πολυπλοκότητας, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.1. Η κλάση para-NP περιλαμβάνει τα προβλήματα που μπορούν να λυθούν σε χρόνο όμοιο με αυτό στον ορισμό της κλάσης FPT, αλλά από μία μη-ντεντερμινιστική μηχανή Turing. Έτσι, εύκολα βλέπουμε πως τα προβλήματα 3-Χρωματισιμοτητα και 3-SAT ανήκουν στην κλάση αυτή, και μάλιστα είναι και para-NP-Πλήρη. Η κλάση XP είναι ανάλογη της κλάσης EXP της κλασσικής πολυπλοκότητας, και ορίζεται ως η κλάση όλων των προβλημάτων που με είσοδο x, μπορούν να λυθούν από μια ντεντερμινιστική μηχανή Turing σε χρόνο $O(|x|^{f(k)})$, όπου k η παράμετρος και f αναδρομική σύναρτηση. Αναφέρουμε δύο ενδιαφέροντα θεωρήματα για τις κλάσεις αυτές.

Θεώρημα 2.1. FPT$\subsetneq$XP

Θεώρημα 2.2. *Αν* XP$\subseteq$para-NP, *τότε* P$\neq$NP.

Οι κλάσεις W ορίζονται επίσης ανάλογα, αλλά με την διαφορά πως βάζουμε ένα φράγμα στο πλήθος των μη-ντεντερμινιστικών βημάτων που επιτρέπουμε να κάνει η μηχανή Turing. Όπως και στην Κλασσική Πολυπλοκότητα, έτσι κι εδώ, ελάχιστα γνωρίζουμε για την δομή της ιεραρχίας αυτής. Κάπως ανάλογα με το Κλασσικό P$\neq$NP, εικάζεται πως FPT$\subsetneq$W[1], χωρίς όμως να έχει αποδειχθεί ακόμα. Να σημειώσουμε πως το δεύτερο πρόβλημα, δεν είναι ισοδύναμο με το P=NP πρόβλημα, και μία ενδεχόμενη λύση για αυτό δεν λύνει την γνωστή εικασία.

Η εντρύφιση σε αυτές τις κλάσεις ξεφεύγει από τους σκοπούς της διπλωματικής αυτής, και ο αναγνώστης παραπέμπεται στα αναγνώσματα [15] και [20].

Κεφάλαιο 3

Πυρηνοποίηση

3.1 Εισαγωγή και Ορισμοί

Ένα σημαντικό και πανίσχυρο εργαλείο της Παραμετρικής Πολυπλοκότητας είναι η Πυρηνοποίηση (Kernelization). Η Πυρηνοποίηση μας προσφέρει ένα μαθηματικά αυστηρό τρόπο για να ορίσουμε την έννοια της προ-επεξεργασίας και ένα μέτρο για να μετράμε την *ποιότητα* αλγορίθμων προ-επεξεργασίας.

Ορισμός 3.1. *Πυρήνας* (Kernel) για ένα πρόβλημα $L \subseteq \Gamma^* \times \mathbb{N}$ είναι ένας πολυωνυμικού-χρόνου αλγόριθμος, ο οποίος με είσοδο (x, k), επιστρέφει ένα νέο ζευγάρι (x', k'), τέτοια ώστε:

1. $(x, k) \in L$ αν και μόνο αν $(x', k') \in L$
2. $\max\{x', k'\} \leq g(k)$, για κάποια υπολογίσιμη συνάρτηση g.

Ξανά το κύριο πράγμα που πρέπει να προσέξει κανείς στον παραπάνω ορισμό είναι πως το μέγεθος του νέου ζευγαριού (x', k') εξαρτάται μόνο από την παράμετρο k.

Η απαιτησή μας από την συνάρτηση g είναι απλά να είναι υπολογίσιμη και πυρήνες οποιουδήποτε μεγέθους έχουν θεωρητικό αλλά και πρακτικό ενδιαφέρον. Όπως όμως είναι λογικό, ενδιαφερόμαστε για όσο το δυνατό μικρότερους πυρήνες και συγκεκριμένα μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα οι πολυωνυμικοί πυρήνες, δηλ. $g(k) \in k^{O(1)}$, και οι γραμμικοί, δηλ. $g(k) \in O(k)$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα, για να καταλάβουμε καλύτερα την έννοια της πυρηνοποίησης.

3.2 Απλά Παραδείγματα

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε μερικά απλά και κλασσικά αποτελέσματα πυρήνων.

3.2.1 p-Κάλυμμα Κορυφών

Παράδειγμα 3.1. Θα παρουσιάσουμε τον πυρήνα του S. Buss ([7]) για το πρόβλημα p-Κάλυμμα Κορυφών. Δεδομένου (G, k), εφάρμοσε τους παρακάτω κανόνες:

1. Αν υπάρχει κορυφή $u \in V(G)$ με $d(u) \geq k + 1$. Διεγραψέ την u και μείωσε το k κατά ένα. $(G, k) \rightarrow (G - u, k - 1)$.

2. Αν u είναι απομωνομένη κορυφή (έχει βαθμό 0), διέγραψέ την.

   $(G, k) \rightarrow (G - u, k)$

3. Μετά από εξαντλητική εφαρμογή των παραπάνω κανόνων:

   Αν έχουν μείνει $\geq k^2$ ακμές $\rightarrow$ 'ΟΧΙ'

   αλλιώς, $|E(G)| \leq k^2 \rightarrow$ πυρήνας μεγέθους $O(k^2)$.

Κατ΄ αρχάς ο αλγόριθμος είναι προφανώς πολυωνυμικού χρόνου. Ο κανόνας 2 είναι προφανώς σωστός μιας και μια απομωνομένη κορυφή δεν προσφέρει τίποτα σε ένα Κάλυμμα Κορυφών αφού δεν συμμετέχει σε καμία ακμή. Ο κανόνας 1 είναι σωστός, γιατί αν έχουμε μια κορυφή u με τουλάχιστον $k + 1$ γείτονες, αυτό σημαίνει πως προσπίπτουν σε αυτήν τουλάχιστον $k + 1$ ακμές. Κάθε ενδεχόμενο Κάλυμμα Κορυφών μεγέθους το πολύ k θα πρέπει να περιέχει την u, γιατί αν δεν την περιέχει, θα πρέπει να περιέχει όλους τους γείτονές της, οι οποίοι είναι τουλάχιστον $k+1$. Ο κανόνας 3 είναι σωστός γιατί μετά από μια εξαντλητική εφαρμογή των κανόνων 1 και 2, το γράφημα G αποτελείτε από κορυφές με βαθμό $1 \leq d_G(u) \leq k$. Παρατηρούμε πως δεν γίνεται το πολύ k κορυφές, με βαθμό το πολύ k η κάθε μία να καλύπτουν πάνω από k^2 ακμές.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σχολιάσουμε και να διευκρινίσουμε μια μικρή τεχνική λεπτομέρεια. Στο βήμα 3 του παραπάνω αλγορίθμου αναφέραμε ένα ''ΟΧΙ' το οποίο δεν συμφωνεί με τον ορισμό του πυρήνα που δώσαμε. Αυτό που κάναμε ουσιαστικά είναι ότι χρησιμοποίησαμε το 'ΟΧΙ' ως συντομογραφία της εντολής 'Σταμάτα και δώσε σαν έξοδο ένα στιγμιότυπο για το οποίο η απάντηση είναι προφανώς ''ΟΧΙ', π.χ. $(K_3, 1)$'. Ανάλογα, θα χρησιμοποιήσουμε την συντομογραφία 'ΝΑΙ', για την εντολή 'Σταμάτα και δώσε σαν έξοδο το στιγμιότυπο $(K_3, 2)$'.

3.2.2 p-Επιπεδο Ανεξαρτητο Συνολο

Για να δούμε ένα ακόμη, αναπάντεχα απλό, παράδειγμα για το πρόβλημα p-Επιπεδο Ανεξαρτητο Συνολο.

> p-Επιπεδο Ανεξαρτητο Συνολο
> *Στιγμιότυπο:* Ένα επίπεδο γράφημα G, $k \in \mathbb{N}$.
> *Παράμετρος:* k
> *Ερώτημα:* $\exists S \subseteq V(G) : |S| \geq k \;\&\; \forall u, v \in S, \{u, v\} \notin E(G)$;

Παράδειγμα 3.2. Έχουμε για είσοδο ένα επίπεδο γράφημα G, χρησιμοποιούμε τον συνήθη συμβολισμό $n = |V(G)|$.

1. Αν $k \leq \frac{n}{4} \rightarrow$ ' ΝΑΙ'.

2. Αλλιώς, $k > \frac{n}{4} \Rightarrow n < 4 \cdot k \rightarrow$ πύρηνας μεγέθους $O(4k)$.

Ο απλός αυτός πυρήνας στηρίζει την ορθότητά του στο πανίσχυρο θεώρημα των 4-χρωμάτων,[34].

Θεώρημα 3.1. *Κάθε επίπεδο γράφημα G, είναι 4-χρωματίσιμο.*

Παρατηρώντας πως κάθε χρωματική κλάση αποτελεί ένα ανεξάρτητο σύνολο, το θεώρημα αυτό μας εγγυάται πως θα υπάρχει ένα ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους τουλάχιστον $\frac{n}{4}$, σε κάθε επίπεδο γράφημα με n κορυφές. Μετά από αυτό, η ορθότητα του αλγορίθμου είναι προφανής.

3.3 Όχι και τόσο απλά παραδείγματα

3.3.1 p-Πολυφυλλος Δεδροπαραγοντας

Ας δούμε ένα όχι και τόσο απλό πυρήνα για το πρόβλημα p-Πολυφυλλος Δεδροπαραγοντας (p-Max-Leaf-Spanning-Tree).

p-Πολυφυλλος Δεδροπαραγοντας
Στιγμιότυπο: Ένα επίπεδο γράφημα G, $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος: k
Ερώτημα: $\exists$ δενδροπαράγοντας T του G, τέτοιο ώστε T περιέχει τουλάχιστον k φύλλα;

Παράδειγμα 3.3.

Θα εφαρμόσουμε τους παρακάτω κανόνες:

Κανόνας 3.1. *Αν το γράφημα G περιέχει $j \geq 2$ κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_j$ βαθμού 1 με τον ίδιο γείτονα, διέγραψε όλες εκτός από μία και μείωσε το k κατά $j-1$. $(G,k) \to (G \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}\}, k-j+1)$*

Κανόνας 3.2. *Αν το γράφημα G περιέχει ένα μονοπάτι μεγέθους 2, $\{v_1, v_2\}$, με $d(v_1) = 2$ και $d(v_2) = 1$, τότε διέγραψε την v_2. $(G,k) \to (G \setminus v_2, k)$.*

Κανόνας 3.3. *Αν το γράφημα G περιέχει αλυσίδα με 2 ή περισσότερες εσωτερικές κορυφές, τότε θέτουμε $(G, k) \to (G', k)$, όπου G' είναι το γράφημα που παίρνουμε αν διαλύσουμε όλες εκτός από 2 τις εσωτερικές κορυφές.*

Λέμε πως ένας κανόνας που τροποποιεί την είσοδο από (G, k) σε (G', k') είναι ασφαλής για ένα πρόβλημα Π αν ισχύει πως $(G, k) \in \Pi$ αν και μόνο αν $(G', k') \in \Pi$. Είναι εύκολο να επιβεβαιώσει κανείς το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.1. *Οι Κανόνες 1, 2 και 3 είναι ασφαλείς.*

Παρατήρηση 3.1. *Το γράφημα G' αποτελείται μόνο από αλυσίσες μήκους 3 (Κανόνας 3) και από κορυφές βαθμού 1.*

Έστω V_1, V_2, V_3 τα σύνολα κορυφών με βαθμό στο G' 1, 2 και ≥ 3 αντίστοιχα. Κάνουμε την παρακάτω παρατήρηση.

Παρατήρηση 3.2. $|V_1| \leq |V_3|$

Απόδειξη. Οι κορυφές βαθμού 1 έχουν ως πιθανό γείτονά τους μόνο τις κορυφές στο τέλος των αλυσίδων, δηλ. κορυφές βαθμού τουλάχιστον 3. Από τον Κανόνα 1, καμία κορυφή δεν έχει πάνω από ένα γείτονα βαθμού 1.

□

Θεώρημα 3.2. *Αν $|V(G')| \geq 8k$ τότε έχει δενδροπαράγοντα με τουλάχιστον k φύλλα.*

Σε ό,τι ακολουθεί, κάνουμε τις απαραίτητες ενέργειες για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.

Ορισμός 3.2. Καλούμε δύο κορυφές βαθμού 2 *αδελφικές* αν έχουν την ίδια γειτονιά.

Φτιάχνουμε ένα νέο βοηθητικό γράφημα H, χρησιμοποιώντας το G', ως εξής:

1. Αφαιρούμε όλες τις κορυφές βαθμού 1.

2. Διαλύουμε μία εσωτερική κορυφή σε κάθε αλυσίδα (από τον Κανόνα 3, κάθε αλυσίδα έχει ακριβώς 2 εσωτερικές κορυφές, τώρα την αφήνουμε με μία).

3. Για κάθε σύνολο αδελφικών κορυφών, διαλέγουμε μία στην τύχη, έστω u, και προσθέτουμε ακμές μεταξύ της u και όλων των αδελφικών της κορυφών (φτιάχνουμε δηλαδή ένα αστέρι με κέντρο την u).

Το πρώτο πράγμα που πρέπει να παρατηρήσουμε μετά από αυτή την διαδικασία είναι το εξής.

Παρατήρηση 3.3. $|V(H)| \geq |V(G')|/2$

Απόδειξη. Συνδυάζοντας την Παρατήρηση 3.2 και το Βήμα 2 (το γεγονός πως διαλύουμε μία από κάθε δύο εσωτερικές κορυφές των αλυσίδων), έπεται το ζητούμενο.

□

Το επόμενο πράγμα που πρέπει να κάνουμε είναι να διασφαλίσουμε πως οι επιπλέον ακμές που προσθέσαμε στο γράφημα H είναι ασφαλής, με την έννοια πως δεν θα προσθέσουν νέα φύλλα στο δενδροπαράγοντα. Αν κάποιος δενδροπαράγοντας έχει κάποια εσωτερική κορυφή, έστω u, κάποιας αλυσίδας για φύλλο. Και για να φτάσει σε αυτό το φύλλο χρησιμοποιεί κάποια από τις νέες ακμές. Τότε είναι καθαρό πως και οι δύο ακμές που συνδέουν την u με τα άκρα της αλυσίδας είναι ελέυθερες. Οπότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε την νέα ακμή με κάποια από αυτές και να έχουμε και πάλι την u ως φύλλο. Αυτό σημαίνει πως αν το γράφημα H έχει δενδροπαράγοντα με k φύλλα, μπορούμε να τροποποιήσουμε τον δενδροπαράγοντα ώστε να συνεχίσει να έχει k φύλλα και επιπλέον να μην χρησιμοποιεί καμία από τις νέες ακμές.

Λήμμα 3.2. $\delta(H) \geq 3$

Απόδειξη. Έπεται από τα Βήματα 1 και 2 της κατασκευής του γραφήματος H πως οι μόνες κορυφές που έχουν βαθμό μικρότερο από 3 είναι οι εσωτερικές, οι οποίες έχουν βαθμό ακριβώς 2. Το Βήμα 3, η τελευταία τροποποίηση στο γράφημα H, εγγυάται το ζητούμενο. □

Τέλος, το τελευταίο Λήμμα θα μας κάνει ξεκάθαρο γιατί κάναμε όλα αυτά. Η αποδειξή του μπορεί να βρεθεί στο [28].

Λήμμα 3.3. *Έστω γράφημα G και k μη αρνητικός ακέραιος. Αν $|V(G)| \geq 4k$ και $\delta(G) \geq 3$ τότε το G περιέχει ένα δενδροπαράγοντα με τουλάχιστον k φύλλα.*

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το Θεώρημα 3.2.

Απόδειξη. (**Θεώρημα 3.2**) Αν $|V(G')| \geq 8k$ τότε από Παρατήρηση 3.3 $|V(H)| \geq |V(G')|/2 \geq 4k$. Συνδυάζοντας τα Λήμματα 3.2 και 3.3. παίρνουμε το ζητούμενο. □

Το θεώρημα 3.2 μας δίνει πυρήνα μεγέθους $8k$ για το πρόβλημα, αφού αν $|V(H)|$ λέμε 'ΝΑΙ'. Σε αντίθετη περίπτωση $|V(H)| \leq 8k$.

Για πληρότητα αναφέρουμε πως ο καλύτερος γνωστός πυρήνας για το πρόβλημα αυτό είναι μεγέθους $O(3,75k)$, [16]. Στο [29] παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος επίλυσής του με χρόνο εκτέλεσης $O((3,4574)^k \cdot n^{O(1)})$.

3.4 Η Δύναμη της Πυρηνοποίησης

Στην υποενότητα αυτή θα αναφέρουμε δύο θεωρήματα σχετικά με την Πυρηνοποίηση, που δείχνουν την σημασία και την δύναμή της.

Θεώρημα 3.3. *Ένα παραμετρικοποιημένο πρόβλημα L έχει πυρήνα αν και μόνο αν ανήκει στην κλάση* FPT.

Θεώρημα 3.4. *Ένας γραμμικός Πυρήνας για ένα πρόβλημα Π, μας δίνει έναν προσεγγιστικό αλγόριθμο σταθερού παράγοντα προσέγγισης.*

Κεφάλαιο 4

Η τεχνική της Αποσύνθεσης Περιοχών

4.1 Εισαγωγή

Το 2002 στο συνέδριο SWAT ([1],[2]) παρουσιάστηκε για πρώτη φορά γραμμικός πυρήνας για το πρόβλημα p-Σύνολο Κυριαρχίας (p-Dominating Set) σε επίπεδα γραφήματα. Το πρόβλημα αυτό είναι $W[2]-$δύσκολο στην γενική του περίπτωση, έτσι η ύπαρξη οποιουδήποτε πυρήνα σε γενικά γραφήματα θεωρείται εξαιρετικά αμφίβολη. Η τεχνική που χρησιμοποιήθηκε για την έυρεση και ανάλυση του μεγέθους του πυρήνα αυτού εμπεριείχε σε κάποια φάση την αποσύνθεση του γραφήματος σε μικρότερες περιοχές. Οι συγγραφείς αποδείκνειαν όχι μόνο πως αυτό είναι δυνατό αλλά και ότι κάθε γράφημα μπορεί να αποσυνθεθεί σε ένα *γραμμικό* πλήθος (ως προς το μέγεθος της λύσης που ψάχνουμε) περιοχών. Μερικά χρόνια αργότερα οι J. Guo και R. Niedermeier, [25], στο συνέδριο ICALP 2007, γενίκευσαν την τεχνική αυτή ώστε να μπορεί να εφαρμόζεται σε ένα πλήθος προβλημάτων με συγκεκριμένες ιδιότητες. Ως αποτέλεσμα παρουσίασαν γραμμικούς πυρήνες σε επίπεδα γραφήματα για τέσσερα NP-πλήρη προβλήματα.

Η γενική ιδέα της τεχνικής της αποσύνθεσης περιοχών είναι ότι μπορούμε για κάποια προβλήματα να αποσυνθέσουμε ένα επίπεδο γράφημα σε γραμμικό ως προς την παράμετρο πλήθος από περιοχές, με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Και εφαρμόζωντας κανόνες, να φράξουμε από κάτι σταθερό το πλήθος των κορυφών που βρίσκονται σε μία περιοχή αλλά και το πλήθος των κορυφών που δεν βρίσκονται μέσα σε καμία περιοχή. Αυτό θα μας δώσει και τους γραμμικούς πυρήνες.

4.2 Βασική Περιγραφή της Μεθόδου

Η τεχνική αυτή για να εφαρμοστεί και να δώσει αποτελέσματα χρειάζονται 3 βασικές προυποθέσεις. Κατ΄ αρχάς χρειαζόμαστε ένα είδος τοπικότητας από τα προβλήματά μας.

Ορισμός 4.1. Ένα πρόβλημα Π σε γραφήματα με είσοδο $G = (V, E)$ λέγεται πως έχει την *ιδιότητα της απόστασης* (distance property) με σταθερές c_V και c_E αν για κάθε λύση S με σύνολο κορυφών $V(S)$, ισχύει πως για κάθε κορυφή $u \in V(G)$ υπάρχει κορυφή v στο $V(S)$ τέτοια ώστε $d(u, v) \leq c_V$, και για κάθε ακμή $e \in E(G)$ υπάρχει κορυφή $v \in V(S)$ τέτοια ώστε $d(e, v) \leq c_E$

Παραδείγματα προβλημάτων που έχουν την ιδιότητα της απόστασης είναι το Καλυμμα Κορυφων με $c_V = 1$ και $c_E = 0$ και το Συνολο Κυριαρχιας με $c_V = 1$ και $c_E = 1$.

Το δεύτερο στοιχείο που χρειαζόμαστε είναι οι περιοχές.

Ορισμός 4.2. Μια *περιοχή* $R(u, v)$ (region) μεταξύ δύο διαφορετικών κορυφών $u, v \in V(S)$,(S μία λύση του προβλήματος) είναι ένα κλειστό υποσύνολο του επιπέδου με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Το σύνορο του $R(u, v)$ αποτελείτε από δύο μεγέθους το πολύ $(c_V + c_E + 1)$ μονοπάτια μεταξύ της u και v. (Τα μονοπάτια αυτά δεν είναι απαραίτητο να είναι ξένα ή απλά).

2. Όλες οι κορυφές που βρίσκονται είτε στο σύνορο είτε αυστηρά μέσα στην περιοχή $R(u, v)$ έχουν απόσταση το πολύ c_V από τουλάχιστον μία εκ των κορυφών u και v, και όλες οι ακμές των οποίων και τα δύο άκρα βρίσκονται

είτε στο σύνορο είτε αυστηρά μέσα στην περιοχή $R(u,v)$ έχουν απόσταση το πολύ c_E από τουλάχιστον μία εκ των u και v.

3. Εκτός από την u και την v καμία άλλη κορυφή που βρίσκεται μέσα στην $R(u,v)$ δεν ανήκει στην λύση S.

Οι κορυφές u και v ονομάζονται κορυφές άγκυρες (anchor vertices) της $R(u,v)$, και μία κορυφή λέγεται πως βρίσκεται *μέσα στην περιοχή* $R(u,v)$ αν βρίσκεται είτε στο σύνορο της είτε αυστηρά μέσα της.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό 4.2 μπορούμε να διαχωρίσουμε το γράφημά μας στις λεγόμενες αποσυνθέσεις περιοχών (region decomposition).

Ορισμός 4.3. Μία *S-αποσύνθεση περιοχών* ενός γραφήματος είναι ένα σύνολο $\mathcal{R}$ από περιοχές τέτοιες ώστε δεν υπάρχει κορυφή που βρίσκεται αυστηρά μέσα σε παραπάνω από μία (τα σύνορά των περιοχών μπορούν να ακουμπάνε όμως).

Για μία S-αποσύνθεση περιοχών, έστω $V(\mathcal{R}) := \cup_{R \in \mathcal{R}} V(R)$. Μία S-αποσύνθεση περιοχών $\mathcal{R}$ καλείται *μεγιστική* αν δεν υπάρχει $R \notin \mathcal{R}$ τέτοια ώστε $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup \{R\}$ είναι μία S-αποσύνθεση περιοχών με $V(\mathcal{R}) \subsetneq V(\mathcal{R}')$.

Η Βάση της τεχνικής αυτής είναι επόμενο λήμμα, που μπορεί να βρεθεί στο [25].

Λήμμα 4.1. ([**25**]) *Έστω Π ένα πρόβλημα σε γραφήματα που έχει την ιδιότητα της απόστασης με σταθερές c_V και c_E, και έστω S μία λύση σε ένα επίπεδο γράφημα $G = (V, E)$. Τότε, υπάρχει μία μεγιστική S-αποσύνθεση περιοχών $\mathcal{R}$ για το G που αποτελείται από το πολύ $c_V \cdot (3|V(S)| - 6)$ περιοχές.*

Για παράδειγμα το πρόβλημα Σύνολο Κυριαρχίας, όπως ήδη αναφέραμε, έχει την ιδιότητα της απόστασης με σταθερές $c_V = 1$ και $c_E = 1$. Αυτό σημαίνει πως η μεγιστική αποσύνθεση περιοχών για το πρόβλημα αυτό αποτελείτε από περιοχές με συνοριακά μονοπάτια μήκους το πολύ 3. Από το Λήμμα 4.1 ξέρουμε πως για μια λύση του Συνόλου Κυριαρχίας, C, μεγέθους το πολύ k, έχουμε το πολύ $3k - 6$ περιοχές σε μία μεγιστική αποσύνθεση περιοχών.

Από τη στιγμη που φράξαμε το πλήθος των περιοχών από κάτι γραμμικό στο μέγεθος της λύσης, αυτό που μένει να κάνουμε είναι να φράξουμε το πλήθος των κορυφών που βρίσκονται μέσα σε κάθε περιοχή από κάτι σταθερό και το πλήθος των κορυφών που δεν είναι μέσα σε καμία περιοχή από κάτι γραμμικό. Για να κάνουμε κάτι τέτοιο πρέπει να βρούμε κανόνες για κάθε πρόβλημα. Αυτό είναι και το τρίτο βασικό στοιχείο για να δουλέψει η τεχνική.

Ορισμός 4.4. Δεδομένου ενός προβλήματος που έχει την ιδιότητα της α-πόστασης με σταθερές c_V και c_E, η *ιδιωτική γειτονιά* (private neigborhood), $N_p(u)$, μιας κορυφής u αποτελείτε από τις κορυφές στο $V \setminus \{u\}$ που έχουν απόσταση το πολύ c_V από την u, που δεν ακουμπάνε καμία κορυφή που έχει απόσταση πάνω από c_V από την u και που δεν ακουμπάνε καμία ακμή που έχει απόσταση πάνω από c_E από την u.

Ορισμός 4.5. Δεδομένου ενός προβλήματος που έχει την ιδιότητα της από-στασης με σταθερές c_V και c_E, η *κοινή γειτονιά* (joint neigborhood), $N_p(u, v)$, δύο κορυφών $u, v \in V$ αποτελείτε από τις κορυφές στο $V \setminus \{u, v\}$ που έχουν απόσταση το πολύ c_V από την u ή την v, που δεν ακουμπάνε καμία κορυφή που έχει απόσταση πάνω από c_V και από την u και από την v και που δεν ακουμπάνε καμία ακμή που έχει απόσταση πάνω από c_E και από την u και από την v.

Γενικά λοιπόν η τεχνική αυτή για έυρεση γραμμικών πυρήνων για NP-δύσκολα προβλήματα σε επίπεδα γραφήματα, μπορεί να συνοψιστεί σε 3 βήματα:

1. Αποδεικνύουμε την ιδιότητα της απόστασης για το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει και καθορίζουμε την δομή της ιδιωτικής και κοινής γειτονιάς των κορυφών.

2. Βασισμένοι στην δομή των γειτονιών, αναπτύσσουμε κανόνες συμπίεσης δεδομένων για να σμικρίνουμε τα μεγέθη των ιδιωτικών και κοινών γει-τονιών.

3. Θεωρούμε μια μεγιστική αποσύνθεση περιοχών και αποδεικνύουμε γραμ-μικά φράγματα στο πλήθος των κορυφών που βρίσκονται μέσα και έξω από περιοχές.

4.3 Εφαρμογές

Ώρα να δούμε την τεχνική σε δράση. Ας δούμε το απλό παράδειγμα του p-Συνεκτικου Καλυμματος Κορυφων.

Δοσμένου ενός γραφήματος $G = (V, E)$ και μη-αρνητικού ακεραίου k, το πρόβλημα του p-Συνεκτικου Καλυμματος Κορυφων ρωτά αν υπάρχει σύνολο C, μεγέθους το πολύ k κορυφών, τέτοιο ώστε το $G[C]$ να είναι συνεκτικό και C να είναι κάλυμμα κορυφών του G. Το πρόβλημα αυτό είναι NP-πλήρες ακόμα και σε επίπεδα γραφήματα.

Μιας και ένα συνεκτικό κάλυμμα κορυφών είναι ένα κάλυμμα κορυφών, η ιδιότητα της απόστασης ισχύει με $c_V = 1$ και $c_E = 0$ και άρα οι περιοχές σε μια μεγιστική αποσύνθεση περιοχών για το Συνεκτικο Καλυμμα Κορυφων αποτελούνται από το πολύ $3k - 6$ περιοχές, το καθένα με συνοριακά μονοπάτια μήκους το πολύ 2.

Εφαρμόζουμε τους παρακάτω δύο κανόνες:

Κανόνας 4.1. ***Κανόνας Ιδιωτικής Γειτονιάς:*** *Αν μία κορυφή έχει πάνω από ένα βαθμού-ένα γείτονα, τότε εκτός από ένα διέγραψε όλους αυτούς τους γείτονες.*

Κανόνας 4.2. ***Κανόνας Κοινής Γειτονιάς:*** *Αν δύο κορυφές έχουν πάνω από 2 κοινούς βαθμού-δύο γείτονες, τότε διέγραψε όλους αυτούς τους γείτονες εκτός από δύο.*

Θεώρημα 4.1. ([25]) *Το p-Συνεκτικο Καλυμμα Κορυφων σε επίπεδα γραφήματα επιδέχεται πυρήνα μεγέθους $14k$ κορυφών.*

Απόδειξη. Πρώτα θεωρούμε μία περιοχή R σε μια μεγιστική C-αποσύνθεση περιοχών $\mathcal{R}$, για το συνεκτικό κάλυμμα κορυφών C, με $|C| \leq k$. Αυστηρά μέσα στην περιοχή δεν μπορεί να υπάρχει κορυφή βαθμού πάνω από 2, γιατί αυτό θα σήμαινε μη καλυμμένες ακμές. Λόγω του κανόνα κοινής γειτονιάς δεν μπορεί να υπάρχουν πάνω από 2 κορυφές βαθμού 2 αυστηρά μέσα στην περιοχή.

Μιας και μπορεί να υπάρχουν το πολύ 2 κορυφές από το $V \setminus C$ στα σύνορα της περιοχής, κάθε περιοχή μπορεί να περιέχει το πολύ 4 κορυφές από το $V \setminus C$. Μιας και έχει εφαρμοστεί και ο κανόνας της Ιδιωτικής Γειτονιάς κάθε κορυφή στο C μπορεί να έχει το πολύ μία κορυφή βαθμού-ένα που δεν είναι μέσα σε καμία περιοχή της $\mathcal{R}$. Άρα συνολικά έχουμε $4 \cdot (3k - 6)$ κορυφές από το $V \setminus C$ μέσα στις περιοχές και το πολύ k εκτός των περιοχών. Μαζί και με το $|C| \leq k$, έχουμε το επιθυμητό φράγμα. $\square$

Ίδιοι κανόνες μπορούν να εφαρμοστούν δίνοντας το ίδιο αποτέλεσμα και για το πρόβλημα του p-Συνολου Κυριαρχιας Ακμων (Edge Domination Set). Το πρόβλημα αυτό δοσμένου ενός γραφήματος $G = (V, E)$ και μη-αρνητικού ακεραίου k, ρωτά για την ύπαρξη ενός συνόλου C μεγέθους το πολύ k ακμών τέτοιο ώστε όλες οι ακμές στο E, μοιράζονται τουλάχιστον μία κοινή κορυφή με κάποια ακμή στο C. Το πρόβλημα είναι NP-πλήρες ακόμα και για επίπεδα γραφήματα. Αποδεικνείεται δηλαδή το παρακάτω.

Θεώρημα 4.2. ([25]) *Το p-Συνολο Κυριαρχιας Ακμων σε επίπεδα γραφήματα επιδέχεται πυρήνα μεγέθους $14k$ ακμών (και άρα $28k$ κορυφών).*

Η τεχνική δίνει γραμμικό πυρήνα και για το πρόβλημα του p-Πακεταρισμα Τριγωνων (Maximum Triangle Packing). Το πρόβλημα αυτό δεδουμένου γραφήματος G και μη-αρνητικού ακεραίου k ρωτά για την ύπαρξη τουλάχιστον k ξένων μεταξύ τους τριγώνων μέσα στο γράφημα. Εκ πρώτης όψεως δεν έχει την ιδιότητα της απόστασης (αφού μπορεί να υπάρχουν κορυφές και ακμές αυθαίρετα μακρυά από ένα τρίγωνο σε ένα γράφημα), αλλά την αποκτά μόλις εφαρμοστεί ένας κανόνας καθαρισμού, ο οποίος διαγραφεί από το γράφημα όλες τις κορυφές και ακμές που δεν συμμετέχουν σε κανένα τρίγωνο (φυσικά αυτός ο καθαρισμός δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα). Με λίγο πιο περίπλοκους κανόνες αλλά και αρκετά περιπλοκότερη ανάλυση, αποδεικνύεται το παρακάτω.

Θεώρημα 4.3. ([25]) *Το p-Μεγιστο Πακεταρισμο Τριγωνων σε επίπεδα γραφήματα επιδέχεται πυρήνα μεγέθους $624k$ κορυφών.*

Τέλος στο ίδιο άρθρο,[25], με χρήση αυτής της τεχνικής παρουσιάζεται και γραμμικός πυρήνας για το πρόβλημα p-Αποδοτικο Συνολο Κυριαρχιας

(p-Efficient Dominating Set). Το πρόβλημα αυτό, δεδομένου ενός γραφήματος $G = (V, E)$ και μη-αρνητικού ακεραίου k, ρωτά για την ύπαρξη ενός συνόλου C το πολύ k κορυφών τέτοιο ώστε C είναι ανεξάρτητο σύνολο και κάθε κορυφή στο $V \setminus C$ έχει ακριβώς ένα γείτονα στο C. Το πρόβλημα είναι NP-πλήρες ακόμα και σε επίπεδα γραφήματα με μέγιστο βαθμό 3. Αποδεικνύεται λοιπόν το εξής.

Θεώρημα 4.4. ([**25**]) *Το p-Αποδοτικο Συνολο Κυριαρχιας σε επίπεδα γραφήματα επιδέχεται πυρήνα μεγέθους $84k$ κορυφών.*

Αξίζει να αναφέρουμε πως χρησιμοποιώντας διφορετική τεχνική στην διαμέριση του συνόλου κορυφών (αντί την αποσύνθεση περιοχών που χρησιμοποιείται στο [25]) και, σε κάποιες περιπτώσεις, νέους κανόνες οι Wang και λοιποί στο [36] δίνουν καλύτερους πυρήνες για όλα τα παραπάνω προβλήματα, εκτός το τελευταίο. Συγκεκριμένα δίνουν πυρήνα μεγέθους $4k - 4$ για το πρόβλημα Συνεκτικο Καλυμμα Κορυφων, $12k - 10$ για το Συνολο Κυριαρχιας Ακμων και $75k$ για το Μεγιστο Πακεταρισμα Τριγωνων

Κεφάλαιο 5

Μη-Προφανείς Παραμετρικοποιήσεις

5.1 Εισαγωγή

Μέχρι στιγμής έχουμε χρησιμοποιήσει μόνο μια παραμετρικοποίηση, αυτή ως προς το μέγεθος της λύσης που ψάχνουμε. Θα μπορούσε κανείς να πιστέψει πως δεν υπάρχουν άλλες παραμετρικοποισήσεις ή πως αν υπάρχουν δεν είναι καθόλου ενδιαφέρουσες. Η αλήθεια είναι πολύ όμως διαφορετική.

Η ιδέα της παραμετρικοποίησης με διαφορετικές παραμέτρους δεν είναι νέα ([31], [17], [18], [32]). Η ιδέα πίσω από την έρευνα αυτή, είναι να διερευνηθεί κατά πόσο διαφορετικές παράμετροι επηρεάζουν την παραμετρική πολυπλοκότητα ενός προβλήματος, και να αναπτύξουμε έτσι μια όσο το δυνατό καλύτερη εικόνα για το 'οικοσύστημα' των παραμέτρων. Το άρθρο [26] των Jansen και Bodlaender, είναι από τα πρώτα που έδωσε αποτελέσματα πυρηνοποίησης με τέτοιου είδος παραμέτρους. Οι παραμετρικοποιήσεις αυτές είναι ενδιαφέρουσες γιατί δίνουν πληροφορία για την δομή του γραφήματος. Επιπλέον αν γίνουν με παραμέτρους οι οποίες είναι μικρότερες από το μέγεθος της λύσης που ψάχνουμε, μπορούν να οδηγήσουν σε αποδοτικούς αλγορίθμους. Τέλος τέτοιες παραμετρικοποιήσεις οδηγούν σε νέα αποτελέσματα για την δομή της δυσκολίας των προβημάτων, αλλά επιτρέπουν και την δημιουργία νέων τύπων προβλημάτων.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί και η κύρια συνεισφορά της διπλωματικής αυτής, που είναι ένας γραμμικός πυρήνας για το παρακάτω πρόβλημα.

ds-Επιπεδο Καλυμμα Κορυφων
Στιγμιότυπο: Ένα επίπεδο γράφημα G, S Σύνολο Κυριαρχίας, $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος: $\ell := |S|$
Ερώτημα: Έχει το G Κάλυμμα Κορυφών μεγέθους το πολύ k;

Θεώρημα 5.1. *Το πρόβλημα* ds-Επιπεδο Καλυμμα Κορυφων *επιδέχεται πυρήνα μεγέθους $O(\ell)$.*

Το Θεώρημα 5.1 μαζί με ένα EPTAS για το πρόβλημα Επιπεδο Συνολο Κυριαρχιας μας δίνουν το παρακάτω Πόρισμα.

Πόρισμα 5.1. *Υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος που με είσοδο ένα στιγμιότυπο $(G = (V, E), k)$ για το πρόβλημα* Καλυμμα Κορυφων *υπολογίζει ένα ισοδύναμο στιγμιότυπο $G' = ((V', E'), k')$ τέτοιο ώστε $k' \leq k$ και $|V'| \in O(\gamma(G))$, όπου $\gamma(G)$ το μέγεθος του ελάχιστου Συνόλου Κυριαρχίας του G.*

Στην επόμενη ενότητα θα παρουσιάσουμε επιλεγμένα αποτελέσματα από τα άρθρα [5] των Bodlaender και λοιπών και [26] των Jansen και Bodlaender και στην Ενότητα 5.3 θα αποδείξουμε το Θεώρημα 5.1.

5.2 Παραδείγματα

5.2.1 Κάλυμμα Κορυφών με παράμετρο το FVS

Ορισμός 5.1. Έστω γράφημα G. Ένα σύνολο S λέγεται *Σύνολο Ανάδρασης Κορυφών* του G (Feedback Vertex Set, FVS), αν $G \setminus S$ είναι δάσος.

Έστω το παρακάτω πρόβλημα:

fvs-Κάλυμμα Κορυφών
Στιγμιότυπο: Ένα γράφημα G, ένα FVS $X \subseteq V(G)$ και $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος: $|X|$, το μέγεθος του FVS.
Ερώτημα: Έχει το G Κάλυμμα Κορυφών μεγέθους το πολύ k;

Όμοια ορίζεται το πρόβλημα fvs-Ανεξάρτητο Σύνολο.

Παρατηρούμε πως το μέγεθος του ελάχιστου FVS για ένα γράφημα G είναι μικρότερο ή ίσο από το μέγεθος του ελάχιστου Καλύμματος Κορυφών του G, αφού η αφαίρεση ενός Καλύμματος Κορυφών αφήνει το γράφημα σκόνη, που είναι τετριμμένα δάσος (άρα κάθε Κάλυμμα Κορυφών είναι ένα FVS). Μάλιστα, η διαφορά μπορεί να γίνει αυθαίρετα μεγάλη, αρκεί να πάρει κανείς ως παράδειγμα τα δένδρα, τα οποία φυσικά έχουν FVS μεγέθους 0. Το καλύτερο μέγεθος πυρήνα για το πρόβλημα p-Κάλυμμα Κορυφών, (με την κανονική παραμετρικοποίηση) έχει μέγεθος $2k$. Η παραπάνω παρατήρηση δίνει αξία σε πυρήνες για το πρόβλημα fvs-Κάλυμμα Κορυφών μη-γραμμικού μεγέθους.

Θεώρημα 5.2. ([**26**]) *Το πρόβλημα* fvs-Ανεξάρτητο Σύνολο *έχει πυρήνα με κυβικό αριθμό κορυφών: Υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που μετατρέπει ένα στιγμιότυπο (G, X, k) σε ένα ισοδύναμο στιγμιότυπο (G', X', k') τέτοιο ώστε $|X'| \leq |X|$, $k' \leq k$, $|V(G')| - k' \leq |V(G)| - k$, $|V(G')| \leq 2(V(G') - k')$ και $|V(G')| \leq |X| + 83|X|^3$.*

Αφού υπάρχει 2-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το πρόβλημα Σύνολο Αναδρασης Κορυφών, μπορούμε να παραλείψουμε την υπόθεση πως ένα FVS προμηθεύεται μαζί με την είσοδο. Το φράγμα στο μέγεθος του πυρήνα που θα πάρουμε είναι χειρότερο μόνο κατά μία σταθερά 2. Έτσι από το Θεώρημα 5.2 μπορούμε να βγάλουμε το παρακάτω Πόρισμα.

Πόρισμα 5.2. *Υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος που με είσοδο ένα στιγμιότυπο (G, k) για το πρόβλημα* Ανεξάρτητο Σύνολο *επιστρέφει ένα νέο* *ισοδύναμο στιγμιότυπο (G', k'), τέτοιο ώστε $|V(G)| \leq \ell + \ell^3$, όπου ℓ το μέγεθος του ελαχίστου FVS του G.*

Λόγω του ότι χρησιμοποιούμε το FVS για παράμετρο, η προφανής αναγωγή αποδεικνύει πως τα προβλήματα FVS-Ανεξαρτητο Συνολο και FVS-Καλυμμα Κορυφων είναι ισοδύναμα: Ένα στιγμιότυπο (G, X, k) του FVS-Καλυμμα Κορυφων είναι ισοδύναμο με το στιγμιότυπο $(G, X, V(G) - k)$ του FVS-Ανεξαρτητο Συνολο, με την ίδια τιμή $|X|$ για παράμετρο. Άρα το Θεώρημα 5.2 μεταφέρεται αμέσως στο FVS-Καλυμμα Κορυφων και έχουμε το παρακάτω Πόρισμα.

Πόρισμα 5.3. ([26]) *Το* FVS-Καλυμμα Κορυφων *έχει πυρήνα* $\min\{2k, |X| + |X|^3\}$.

Ακριβώς επειδή το FVS μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρότερο από το Κάλυμμα Κορυφών, το $(|X| + |X|^3)$ είναι φράγμα που έχει αξία, γιατί μπορεί να γίνει μικρότερο του $2k$.

Το επόμενο ερώτημα είναι αν οι βεβαρημένες εκδοχές των δύο παραπάνων προβλημάτων έχουν πολυωνυμικό πυρήνα. Οι βεβαρημένη εκδοχή του FVS-Καλυμμα Κορυφων ορίζεται όπως φαίνεται παρακάτω. Αντίστοιχα ορίζεται η βεβαρημένη εκδοχή του FVS-Ανεξαρτητο Συνολο.

FVS-Βεβαρημενο Καλυμμα Κορυφων
Στιγμιότυπο: Ένα γράφημα G, ένα FVS $X \subseteq V(G)$, $w : G \rightarrow \mathbb{N}^+$, $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος: $|X|$, το μέγεθος του FVS .
Ερώτημα: Έχει το G Κάλυμμα Κορυφών C τέτοιο ώστε $\sum_{v \in C} w(v) \leq k$;

Το επόμενο θεώρημα όμως, των Jansen και Bodlaender, δίνει ισχυρή ένδειξη πως κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό.

Θεώρημα 5.3. ([26]) *Τα προβλήματα* FVS-Βεβαρημενο Καλυμμα Κορυφων *και* FVS-Βεβαρημενο Ανεξαρτητο Συνολο *δεν επιδέχονται πολυωνυμικό πυρήνα εκτός και αν $PH = \Sigma_3^p$.*

5.2.2 Δενδροπλάτος με παράμετρο ρυθμιστές

Στο πρόβλημα Δενδροπλατος το στιγμιότυπο είναι ένα γράφημα G και ένας μη-αρνητικός ακέραιος k και η ερώτηση είναι αν το G έχει δενδροπλάτος (treewidth) μικρότερο ή ίσο με k.

Έστω $\mathcal{F}$ μια κλάση γραφημάτων, και έστω το παρακάτω πρόβλημα.

> Δενδροπλατος παραμετροποιημενο με ενα ρυθμιστη για την $\mathcal{F}$
>
> *Στιγμιότυπο:* Ένα γράφημα G, $k \in \mathbb{N}$ και ένα σύνολο $S \subseteq V(G)$ τέτοιο ώστε $G[V \setminus S] \in \mathcal{F}$
> *Παράμετρος:* $\ell := |S|$
> *Ερώτημα:* $\mathbf{tw}(G) \leq k$;

Το σύνολο S λέγεται *ρυθμιστής* (modulator) για την κλάση $\mathcal{F}$.

Η παραμετροποίηση του προβλήματος αυτού αποτελεί γενίκευση της παραμετροποίησης των προβλημάτων που είδαμε στην προηγούμενη υποενότητα, αφού το FVS του γραφήματος G είναι ρυθμιστής για την κλάση των δένδρων.

Οι Bodlaender, Jansen και Kratsch στο άρθρο [5] μελετούν το πρόβλημα αυτό για τις περιπτώσεις όπου $\mathcal{F}$ είναι η κλάση των γραφημάτων σκόνη και η κλάση των δένδρων. Οι ρυθμιστές για τις κλάσεις αυτές δεν είναι άλλοι από το Κάλυμμα Κορυφών και το FVS αντίστοιχα.

Θεώρημα 5.4. ([5]) *Το* Δενδροπλατος παραμετροποιημενο με το Καλυμμα Κορυφων *επιδέχεται πυρήνα μεγέθους* $O(\ell^3)$.

Το Θεώρημα 5.4 σε συνδυασμό με ένα 2-προσεγγιστικό αλγόριθμο για το πρόβλημα του Καλύμματος Κορυφών μας δίνει το παρακάτω Πόρισμα.

Πόρισμα 5.4. ([5]) *Υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος που με είσοδο ένα στιγμιότυπο* $(G = (V, E), k)$ *για το πρόβλημα* Δενροπλατος *υπολογίζει ένα ισοδύναμο στιγμιότυπο* $(G' = (V', E'), k)$*, τέτοιο ώστε* $V'(G) \subseteq V(G)$ *και* $|V(G') \in O((\ell^*)^3)$*, όπου* ℓ^* *είναι το μέγεθος του βέλτιστου Καλύμματος Κορυφών του* G*.*

Θεώρημα 5.5. *Το* ΔΕΝΔΡΟΠΛΑΤΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΠΟΙΗΜΕΝΟ ΜΕ ΤΟ FVS *επιδέχεται πυρήνα μεγέθους* $O(\ell^4)$.

Ανάλογα με το Πόρισμα 5.5, το Θεώρημα 5.5 σε συνδυασμό με ένα 2-προσεγγιστικό αλγόριθμο για το πρόβλημα της εύρεσης του ελάχιστου FVS μας δίνει το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 5.5. ([5]) *Υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος που με είσοδο ένα στιγμιότυπο* $(G = (V, E), k)$ *για το πρόβλημα* ΔΕΝΡΟΠΛΑΤΟΣ *υπολογίζει ένα ισοδύναμο στιγμιότυπο* $(G' = (V', E'), k)$, *τέτοιο ώστε* $V(G') \subseteq V(G)$ *και* $|V(G')| \in O((\ell^*)^4)$, *όπου* ℓ^* *είναι το μέγεθος του ελάχιστου FVS του* G.

5.3 Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1

Στην Ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε την κύρια συνεισφορά της διπλωματικής αυτής. Θα αποδείξουμε δηλαδή το Θεώρημα 5.1.

Το κύριο αποτέλεσμα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι πως το ΣΥΝΟΛΟ ΚΥΡΙΑΡΧΙΑΣ (σε επίπεδα γραφήματα) έχει αποσύνθεση περιοχών με $O(\ell)$ περιοχές ($\ell := |S|$, όπου S το Σύνολο Κυριαρχίας που μας δίνεται με την είσοδο). Αυτό μας το εξασφαλίζει το παρακάτω ενδιαφέρον θεώρημα, η απόδειξη του οποίου μπορεί να βρεθεί στο Παράρτημα Α′.

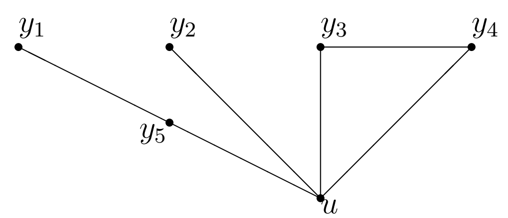
Θεώρημα 5.6. *Έστω ένα επίπεδο γράφημα* G *και ένα σύνολο κυριαρχίας* S *με* $|S| \leq \ell$. *Τότε υπάρχει μια συλλογή μεγέθους* $O(\ell)$ *από περιοχές με τις εξής ιδιότητες:*

- *Το σύνορο κάθε περιοχής έχει το πολύ 6 κορυφές εκ των οποίων το πολύ 2 προέρχονται από το* $V(S)$.
- *Κάθε ακμή και κορυφή του γραφήματος* G *ανήκει σε τουλάχιστον μία περιοχή.*
- *Στο εσωτερικό της περιοχής δεν υπάρχουν άλλες κορυφές που να ανήκουν στο* $V(S)$.

Αφού αποσυνθέσουμε το γράφημα μας, λοιπόν, σε ένα $O(\ell)$ πλήθος από περιοχές, κοιτάμε κάθε περιοχή ξεχωριστά και εφαρμόζουμε ασφαλής ως προς το Κάλυμμα Κορυφών κανόνες, έτσι ώστε μετά από εξαντλητική εφαρμογή αυτών των κανόνων, κάθε περιοχή να περιέχει *σταθερό* πλήθος από κορυφές. Από τη στιγμή που δεν υπάρχουν κορυφές που να μην ανήκουν σε κάποια περιοχή, το αποτέλεσμα που θέλουμε θα ακολουθήσει.

Ορισμός 5.2. Έστω γράφημα $G = (V, E)$ και $u \in V(G)$. Καλούμε ιδιωτική γειτονιά της κορυφής $u, N_p(u)$, τις κορυφές που ανήκουν στην γειτονιά της u και έχουν απόσταση άπειρο από κάθε κορυφή εκτός της γειτονιάς. Δηλαδή $N_p(u) = \{v \in N(u) | \ \mathbf{dist}(v, V \setminus N(u)) = \infty\}$.

Ένα απλό παράδειγμα για τον παραπάνω ορισμό δίνεται στο Σχήμα 5.1.



$$N_p(u) = \{y_2, y_3, y_4\}$$

Σχήμα 5.1: Παράδειγμα ιδιωτικής γειτονιάς

Να σημειώσουμε πως ο ορισμός που δώσαμε εδώ για την ιδιωτική γειτονιά είναι διαφορετικός από τον ορισμό που χρησιμοποιείτε στο άρθρο [25], και που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο.

Διαισθητικά, αν η ιδιωτική γειτονιά της u είναι 'μεγάλη', τότε πρέπει να βάλουμε την u στο Κάλυμμα Κορυφών, αφού σε αντίθετη περίπτωση θα χρειαστεί να βάλουμε όλες τις κορυφές που ανήκουν στην ιδιωτική γειτονιά. Αυτή την διαίσθηση, υλοποιεί ο παρακάτω κανόνας.

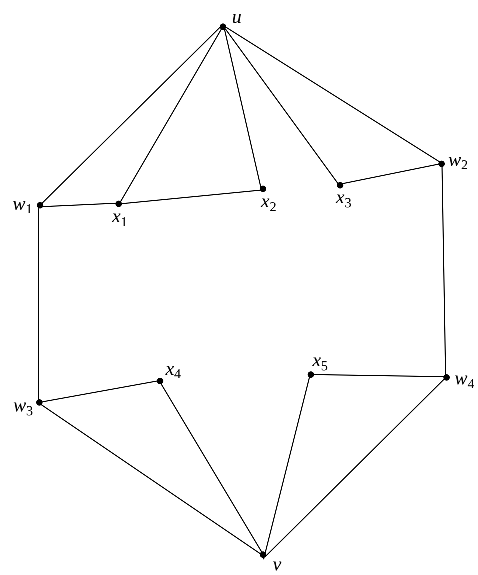
Κανόνας 5.1. (**Κανόνας για την ιδιωτική γειτονιά**) *Για κάθε $u \in S$, αν $|N_p(u)| \geq 4$, τότε διέγραψε όλες τις κορυφές που ανήκουν στην ιδιωτική γειτονιά της u, πρόσθεσε μια νέα κορυφή, x, στο γράφημα, και σύνδεσε την x μόνο με την u. Μείωσε την παράμετρο k κατά α, όπου α το μέγεθος της βέλτιστης λύσης για το $G[N_p(u) \setminus \{u\}]$.*

Λήμμα 5.1. *Ο Κανόνας για την ιδιωτική γειτονιά είναι ασφαλής ως προς το Κάλυμμα Κορυφών.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πως το γράφημα που ενάγεται από το $N_p(u) \setminus \{u\}$ είναι εξωεπίπεδο. Αν περιέχει ως ελάσσων το K_4, τότε το $N_p(u)$, και άρα και το αρχικό γράφημα G, θα περιέχει ως ελάσσων το K_5, κάτι που είναι άτοπο από την επιπεδότητα του G. Όμοια δεν μπορεί να περιέχει ως ελάσσων ούτε το $K_{2,3}$. Από την εξωεπιπεδότητα συνεπάγεται και η ευκολία εύρεσης του βέλτιστου Καλύμματος Κορυφών για το γράφημα $G[N_p(u) \setminus \{u\}]$.

Από την εξωεπιπεδότητα συνεπάγεται πως είναι 3 χρωματίσιμο και άρα περιέχει ένα ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους τουλάχιστον $\frac{|N_p(u)|}{3}$. Άρα έχει ένα Κάλυμμα Κορυφών μεγέθους το πολύ $\frac{2 \cdot |N_p(u)|}{3}$. Παρατηρούμε πως αν δεν βάλουμε την κορυφή u στο Κάλυμμα Κορυφών του γραφήματος G, θα χρειαστεί να βάλουμε όλες τις κορυφές που ανήκουν στην ιδιωτική γειτονιά της, θα χρειαστούμε δηλαδή $|N_p(u)|$ κορυφές. Αν όμως βάλουμε την u θα χρειαστούμε το πολύ $1 + \frac{2 \cdot |N_p(u)|}{3}$. Άρα ψάχνουμε το μεταίχμιο (threshold) για το μέγεθος του $|N_p(u)|$, για το οποίο ισχύει πως $|N_p(u)| > 1 + \frac{2 \cdot |N_p(u)|}{3}$, που είναι το 4. □

Θεωρούμε τώρα μια μεγιστική S-Αποσύνθεση Περιοχών για το γράφημα μας, με S το Σύνολο Κυριαρχίας που μας δίνεται στην είσοδο. Θεωρούμε μία ελαχιστική περιοχή $R(u, v)$. Ελαχιστική με την έννοια πως δεν υπάρχει μονοπάτι μήκους το πολύ 3 μεταξύ της u και της v, που βρίσκεται αυστηρά στο εσωτερικό της, (αυτό θα χώριζε την περιοχή μας σε 2 περιοχές). Το εσωτερικό της περιοχής αυτής είναι περίπου όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.2. Αν επικεντρωθούμε στην 'μεριά' της κορυφής u θα δούμε πως αυτή είναι ενωμένη με κάποιες κορυφές στο εσωτερικό της περιοχής, και οι κορυφές αυτές είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους αλλά και, κάποιες, με τα σύνορα της περιοχής. Αν καμία από τους γείτονες της u δεν είναι ενωμένη με καμία κορυφή στο σύνορο της περιοχής, τότε ουσιαστικά όλες αυτές αποτελούν την ιδιωτική της γειτονιά, πράγμα άτοπο αφού υποθέτουμε πως έχει εφαρμοστεί ήδη ο κανόνας για την ιδιωτική γειτονιά. Στο σημείο αυτό να παρατηρήσουμε πως τουλάχιστον μία από τις 2 κορυφές που ανήκουν στο σύνορο της περιοχής $R(u, v)$ και στην γειτονιά της u, έχουν γείτονες που δεν είναι γείτονες με την u, γιατί αλλιώς θα ήταν και αυτές μέρος



Σχήμα 5.2: Παράδειγμα μιας ελαχιστικής περιοχής σε μια αποσύνθεση περιοχών για το Σύνολο Κυριαρχίας

της ιδιωτικής γειτονιάς και θα μπορούσε να εφαρμοστεί ο αντίστοιχος κανόνας. Σε αυτή τη φάση της εκτέλεσης του αλγορίθμου, η ιδιωτική γειτονιά της u έχει μέγεθος το πολύ 3, και θα την αγνοούμε. Όπου αναφερόμαστε στην γειτονιά της u, $N(u)$, στα επόμενα, θα εννοούμε πως έχουμε αγνοήσει τις κορυφές της ιδιωτικής γειτονιάς.

Ορίζουμε κάποιους συμβολισμούς για να διευκολύνουμε την ανάγνωση για τα παρακάτω.

Ορισμός 5.3. Έστω μια περιοχή $R(u, v)$. Συμβολίζουμε με, X_u (αντίστοιχα με X_v) το σύνολο των γειτόνων της u (αντίστοιχα της v), που βρίσκονται αυστηρά μέσα στην περιοχή $R(u, v)$. Έστω w_1, w_2 (αντίστοιχα w_3, w_4) οι (το πολύ) δύο γείτονες της κορυφής u (αντίστοιχα της v) που βρίσκονται στο σύνορο της $R(u, v)$.

Στο Σχήμα 5.2 έχουμε πως $X_u = \{x_1, x_2, x_3\}$ και $X_v = \{x_4, x_5\}$.

Κάποιες παρατηρήσεις θα μας δώσουν πληροφορία για την δομή μιας τέτοιας ελαχιστικής περιοχής $R(u, v)$.

Παρατήρηση 5.1. *Για κάθε $x_1 \in X_u$ και $x_2 \in X_v$, $(x_1, x_2) \notin E(G)$.*

Απόδειξη. Αν $(x_1, x_2) \in E(G)$, για κάποια $x_1 \in X_u$ και $x_2 \in X_v$, τότε (u, w_1, w_3, v) και (u, x_1, x_2, v) θα είναι μια περιοχή μέσα στην περιοχή $R(u, v)$, αντικρούωντας το γεγονός πως η $R(u, v)$ είναι ελαχιστική περιοχή της αποσύνθεσης περιοχών. □

Με το ίδιο επιχείρημα αποδεικνύονται και τα παρακάτω.

Παρατήρηση 5.2. *Για κάθε $x_1 \in X_u$, $(x_1, w_3) \notin E(G)$ και $(x_1, w_4) \notin E(G)$.*

Παρατήρηση 5.3. *Για κάθε $x_2 \in X_v$, $(x_2, w_1) \notin E(G)$ και $(x_2, w_2) \notin E(G)$.*

Διαισθητικά, αν το σύνολο X_u, είναι 'μεγάλο', θα είναι καλύτερα να βάλουμε την u στο Κάλυμμα Κορυφών. Εφαρμόζουμε το ίδιο επιχείρημα με τον κανόνα της Ιδιωτικής γειτονιάς και καταλήγουμε στο παρακάτω κανόνα.

Κανόνας 5.2. *Αν $|X_u| \geq 5$, διέγραψε όλες τις ακμές μεταξύ της u και κάθε $x \in X_u$, πρόσθεσε μια νέα κορυφή x' και ένωσε την x' με ακμή μόνο με την u.*

Λήμμα 5.2. *Ο Κανόνας 5.2 είναι ασφαλής ως προς το Κάλυμμα Κορυφών.*

Απόδειξη. Αν δεν μπει η κορυφή u στο Κάλυμμα Κορυφών, τότε θα χρειαστεί να μπουν όλες $|X_u| + 2$ γείτονες της u. Αν όμως μπει η u στο Κάλυμμα Κορυφών τότε θα χρειαστούν (χρησιμοποιώντας και πάλι την εξωεπιπεδότητα του γραφήματος $G[N(u) \setminus \{u\}]$) το πολύ $\frac{2(|X_u|+2)}{3} + 3$. Το $(+3)$ προκύπτει από την προσθήκη της u αλλά και την πιθανή προσθήκη των w_1 ή/και w_2. Οι w_1 και w_2 επειδή έχουν γείτονες έξω από το σύνολο $N(u) \setminus \{u\}$ μπορεί να χρειασθεί να συμπεριληφθούν στο συνολικό Κάλυμμα Κορυφών ακόμα και αν δεν είναι μέρος του τοπικού Καλύμματος Κορυφών. Άρα ψάχνουμε πάλι το μεταίχμιο από το οποίο και πέρα ισχύει $\frac{2(|X_u|+2)}{3} + 3 < n + 2$, που είναι το $|X_u| = 5$. □

Διαγράψαμε τις ακμές μεταξύ της u και των $x \in X_u$, αλλά φυσικά παραμένουν κάποιες ακμές μεταξύ των κορυφών μέσα στο X_u. Παρατηρούμε, όπως κάναμε και στην απόδειξη του Λήμματος 5.1, πως το γράφημα $G[N(u) \setminus \{u\}]$ είναι εξωεπίπεδο. Θα μπαίναμε στον πειρασμό λοιπόν να εφαρμόσουμε τον ίδιο κανόνα με την ιδιωτική γειτονιά. Κάτι τέτοιο όμως δεν γίνεται γιατί τώρα στο σύνολο αυτό ανήκουν και κορυφές που έχουν γείτονες εκτός του συνόλου, πράγμα που σημαίνει πως το βέλτιστο Κάλυμμα Κορυφών του $G[N(u) \setminus \{u\}]$ δεν είναι απαραίτητα υποσύνολο του βέλτιστου Καλύμματος Κορυφών του γραφήματος G. Δηλαδή μπορεί μια κορυφή του συνόρου της περιοχής να ανήκει στο βέλτιστο Κάλυμμα Κορυφών του γραφήματος $G[N(u) \setminus \{u\}]$, αλλά όχι του γραφήματος G. Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό θεωρούμε περιπτώσεις και 'σκαριφήματα' (gadgets). Έστω w_1 και w_2 οι γειτονικές κορυφές της u που ανήκουν στο σύνορο της περιοχής $R(u, v)$. Αυτό που κάνουμε είναι πως θεωρούμε 4 περιπτώσεις, ως προς το ποιες από τις δύο κορυφές w_1 και w_2 ανήκουν στην ολική βέλτιστη λύση (για ευκολία ανάγνωσης θα θεωρήσουμε τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις $\chi(w_1)$ και $\chi(w_2)$), και για κάθε μία από τις περιπτώσεις αυτές υπολογίζουμε το μέγεθος της τοπικής ('τοπική' εννούμε στο γραφήμα $G[N(u) \setminus \{u, w_1, w_2\}]$) βέλτιστης λύσης. Το μέγεθος της τοπικής βέλτιστης λύσης μπορεί να υπολογισθεί σε πολυωνυμικό χρόνο, γιατί το $G[N(u) \setminus \{u, w_1, w_2\}]$ είναι φραγμένου δενδροπλάτους, συγκεκριμένα είναι εξωεπίπεδο όπως συζητήσαμε και πιο πάνω. Παρατηρούμε τις αλλαγές στο μέγεθος του τοπικού Καλύμματος Κορυφών ανάλογα με τις τιμές που παίρνουν τα $\chi(w_1)$ και $\chi(w_2)$) και μετά αντικαιθιστούμε όλο το σύνολο X_u με ένα σκαρίφημα που έχει την ίδια συμπεριφορά.

Έστω α το μέγεθος της τοπικής λύσης όταν και το w_1 και το w_2 ανήκουν στην ολική λύση. Τότε το μέγεθος της τοπικής λύσης όταν καμία από τις w_1 και w_2 δεν ανήκει στην λύση, δεν μπορεί να ξεπερνά το $\alpha+2$. Αυτό γιατί αν π.χ. είναι $\alpha+3$, τότε μπορούμε να βάλουμε και τις δύο w_1 και w_2 στην λύση, και να έχουμε αυστηρά μικρότερη λύση. Με το ίδιο επιχείρημα δεν μπορεί το μέγεθος της τοπικής λύσης όταν μόνο μία από τις w_1 και w_2 είναι μέσα στην ολική λύση, να είναι αυστηρά μεγαλύτερο από $\alpha+1$. Οι πίνακες που θα δημιουρήσουμε είναι μεγέθους 4×3, με τις δύο πρώτες στήλες να αντιπροσωπεύουν την χαρακτηριστική συνάρτηση της συμπερίληψης των κορυφών w_1 και w_2 στην ολική λύση και την τρίτη στήλη να αντιπροσωπεύει το μέγεθος της εκάστοτε τοπικής λύσης, LS:= μέγεθος ελάχιστου καλύμματος κορυφών του $G[N(u) \setminus \{u, w_1, w_2\}]$. Οι πίνακες έχουν την μορφή που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

$\chi(w_1)$	$\chi(w_2)$	μέγεθος του LS
0	0	δ
0	1	γ
1	0	β
1	1	α

Με βάση αυτά που είπαμε παραπάνω τα β και γ μπορούν να πάρουν μόνο τις τιμές α και $\alpha + 1$, και το δ τις τιμές α, $\alpha + 1$ και $\alpha + 2$. Συνολικά δηλαδή 12 περιπτώσεις. Πιο προσεκτική ανάλυση θα δείξει πως 6 περιπτώσεις δεν είναι δυνατές. Άρα μας μένουν 6 περιπτώσεις, για τις οποίες και βρίσκουμε σκαριφήματα. Για ευκολία ανάγνωσης τα σκαριφήματα αυτά μπορούν να βρεθούν στο Παράρτημα Β΄. Το σημαντικό για αυτά τα σκαριφήματα είναι πως το μέγεθός τους είναι το πολύ 4 κορυφές.

Κανόνας 5.3. *Διέγραψε όλες τις κορυφές που ανήκαν στο X_u και αντικατέστησέ τις με το κατάλληλο σκαρίφημα, που ταιριάζει στην περίπτωση. Μείωσε την παράμετρο ανάλογα με την περίπτωση.*

Μετά από εξαντλητική εφαργμογή των κανόνων, είμαστε έτοιμοι να φράξουμε το πλήθος των κορυφών που απομένουν.

Λήμμα 5.3. *Μετά από μία εξαντλητική εφαρμογή των κανόνων 5.1, 5.2 και 5.3, απομένουν το πολύ 18 κορυφές μέσα στην περιοχή $R(u, v)$ που δεν ανήκουν στο σύνολο κυριαρχίας S.*

Απόδειξη. Μπορεί να υπάρχουν το πολύ 4 κορυφές στην X_u, γιατί αν υπάρχουν περισσότερες θα τις αντικαταστήσουμε με το κατάλληλο σκαρίφημα που έχει μέγεθος μικρότερο ή ίσο από 4. Επίσης υπάρχουν το πολύ 3 κορυφές στην ιδιωτική γειτονιά της u, γιατί αν υπήρχαν περισσότερες θα είχε εφαρμοστεί ο κανόνας 5.1. Συνολικά λοιπόν έχουμε το πολύ: 4 κορυφές από την X_u, 4 από την X_v, οι 4 συνοριακές w_1, w_2, w_3, w_4, 3 από την $N_p(u)$ και 3 από την $N_p(v)$. Σύνολο το πολύ 18 κορυφές. □

Μετά από την συζήτηση αυτή, και λόγω του ότι το θεώρημα 5.6 μας εξασφαλίζει πως δεν υπάρχουν κορυφές ή ακμές που να μην ανήκουν σε καμία περιοχή, είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το Θεώρημα 5.1.

Απόδειξη. (**Θεώρημα 5.1**) Έστω $\ell := |S|$, όπου S το σύνολο Κυριαρχίας που μας δίνεται με την είσοδο. Από το Θεώρημα 5.6 ξέρουμε πως μια μεγιστική αποσύνθεση περιοχών για το σύνολο S, αποτελείτε από το πολύ $O(\ell)$ περιοχές. Μετά από εξαντλητική εφαρμογή όλων των κανόνων, το Λήμμα 5.3 μας εξασφαλίζει πως απομένουν το πολύ 18 κορυφές σε κάθε περιοχή. Σε αυτές όμως δεν έχουμε μετρήσει τις κορυφές που ανήκουν στο S. Άρα συνολικά $18 \cdot O(\ell) + \ell \in O(\ell)$. □

Λόγω του ότι υπάρχει EPTAS για το πρόβλημα Επιπεδο Συνολο Κυριαρχιας, ([24], [21]) μπορούμε να παραλείψουμε την υπόθεση πως ένα σύνολο κυριαρχίας S μας προμηθεύεται στην είσοδο. Παρατηρούμε πως σε καμία φάση της απόδειξης δεν απαιτήσαμε το S να είναι το *ελάχιστο* σύνολο κυριαρχίας. Δεδομένου ενός γραφήματος G και χρησιμοποιώντας τον EPTAS μπορούμε να βρούμε μια λύση μεγέθους $(1+\epsilon)\cdot\gamma(G)$ (όπου $\gamma(G)$ είναι το μέγεθος του ελάχιστου Συνόλου Κυριαρχίας του G), την οποία στην συνέχεια θα προμηθεύσουμε στον αλγόριθμο πυρηνοποιήσης που παρουσιάσαμε. Η σταθερά 55 ουσιαστικά δεν θα επηρεαστεί, αφού θα γίνει απλά $55 \cdot (1+\epsilon)$.

Τέλος να παρατηρήσουμε πως το Σύνολο Κυριαρχίας μπορεί να γίνει αυθαιρετά μικρότερο από το Κάλυμμα Κορυφών ακόμα και σε επίπεδα γραφήματα, έτσι ο πυρήνας μεγέθους $(63+\epsilon)$ κορυφών μπορεί να γίνει μικρότερος από τον καλύτερο γνωστό πυρήνα μεγέθους $2k$ που γνωρίζουμε για το Κάλυμμα Κορυφών, με την συνηθισμένη παράμετρο. Παράδειγμα που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας είναι τα γραφήματα W_{n+1}, οι λεγόμενοι ‘τροχοί’. Αυτά τα γραφήματα έχουν Σύνολο Κυριαρχίας μεγέθους 1 αλλά το ελάχιστο Κάλυμμα Κορυφών έχει μέγεθος $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$.

Κεφάλαιο 6

Μετά-Πυρηνοποίηση

6.1 Εισαγωγή

Είδαμε μέχρι τώρα πολλούς κανόνες που δίνουν πυρήνες για διάφορα προβλήματα. Αυτό που εύκολα μπορεί να αντιληφθεί κανείς είναι πως κάθε σύνολο αυτών των κανόνων δεν μπορεί να εφαρμοστεί, εν γένει, σε κανένα άλλο πρόβλημα εκτός από αυτό για το οποίο σχεδιάστηκε, π.χ. η πυρηνοποίηση Buss για το πρόβλημα του Καλύμματος Κορυφών, είναι άχρηστη για κάθε άλλο πρόβλημα. Αυτό συμβαίνει γιατί σχεδιάσαμε τους κανόνες ειδικά για το κάθε συγκεκριμένο πρόβλημα, λαμβάνωντας υπόψη και προσπαθώντας να εκμεταλευτούμε τα ειδικά χαρακτηριστικά που έχει. Αυτό απαιτεί εις βάθος μελέτη των ειδικών ιδιοτήτων του κάθε προβλήματος αλλά και πολύ ισχυρά θεωρήματα (π.χ. όπως το θεώρημα των 4-χρωμάτων στον πυρήνα για το Επιπεδο Ανεξαρτητο Συνολο). Γενικά μπορούμε να πούμε πως όταν έχουμε πολλά προβλήματα, πρέπει να βρούμε πολλούς και εν γένει εντελώς διαφορετικούς πυρήνες. Αυτό που θα θέλαμε θα ήταν ένα σύνολο κανόνων που μπορούν να εφαρμοστούν και να δώσουν πολυωνυμικούς πυρήνες για πολλά προβλήματα. Οι H. Bodlaender, F. Fomin, D. Lokshtanov, E. Penninkx, S. Saurabh και Δ. Θηλυκός στο συνέδριο FOCS 2009 [6] παρουσίασαν τα πρώτα Μετά-Θεωρήματα για την πυρηνοποίηση. Το άρθρο τους εξηγεί λογικά, ενοποιεί αλλά και επεκτείνει την πλειοψηφία των γνωστών αποτελεσμάτων. Όλα τα αποτελεσματά τους είναι σε προβλήματα για γραφήματα φραγμένου γένους. Στο Κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματά τους.

6.2 Βασικές Έννοιες

Στην υποενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε μερικές βασικές έννοιες, οι οποίες είναι απαραίτητες για να καταλάβουμε τα αποτελέσματα που θα παρουσιασθούν.

6.2.1 Ακτινική Απόσταση, Συμπάγεια και Προεξοχές

Ορισμός 6.1. Η *ακτινική απόσταση* (radial distance) μεταξύ δύο κορυφών x και y σε ένα γράφημα G είναι το ελάχιστο μήκος μια ακολουθίας κορυφών και όψεων με αφετηρία την x και τέρμα την y, τέτοια ώστε κάθε δύο συνεχόμενα αντικείμενα της ακολουθίας να είναι γειτονικά.

Ορισμός 6.2. Δεδομένου ενός γραφήματος και μιας εμβάπτισής του σε μία επιφάνεια με Euler γένος το πολύ g και ενός συνόλου S, ορίζουμε την *ακτινική μπάλα γύρω από το S* (radial ball around S), $\mathbf{R}_G^r(S)$, ως το σύνολο των κορυφών που έχουν ακτινική απόσταση το πολύ r από κάποια κορυφή μέσα στο σύνολο S.

Ορισμός 6.3. Ένα πρόβλημα $\Pi \subseteq \mathcal{G}_g \times \mathbb{N}$ λέγεται πως είναι *συμπαγές* (compact) αν υπάρχει $r \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $(G, k) \in \Pi$, υπάρχει εμβάπτιση του γραφήματος G σε μια επιφάνεια με Euler γένος το πολύ g και $S \subseteq V(G)$, τέτοιο ώστε $|S| \leq r \cdot k$ και $\mathbf{R}_G^r(S) = V$.

Ένα εύκολο παράδειγμα για την κατανόηση του τελευταίου ορισμού είναι το πρόβλημα Καλυμμα Κορυφων, το οποίο εύκολα φαίνεται πως είναι Συμπαγές, εξ' ορισμού, με S την ζητούμενη λύση και $r = 1$. Όμοια, το πρόβλημα Συνολο Κυριαρχιας είναι συμπαγές με $r = 2$. Αντιθέτως το πρόβλημα Συνολο Αναδρασης Κορυφων δεν φαίνεται να είναι συμπαγές.

Ορισμός 6.4. Ένα πρόβλημα $\Pi \subseteq \mathcal{G}_g \times \mathbb{N}$ λέγεται πως είναι *σχεδόν συμπαγές* (quasi-compact) αν υπάρχει $r \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $(G, k) \in \Pi$, υπάρχει εμβάπτιση του γραφήματος G σε μια επιφάνεια με Euler γένος το πολύ g και $S \subseteq V(G)$, τέτοιο ώστε $|S| \leq r \cdot k$ και $\mathbf{tw}(G \setminus \mathbf{R}^r_G(S)) \leq r$.

Δεδομένου ενός γραφήματος $G = (V, E)$ και ενός συνόλου S, ορίζουμε το $\partial_G S$ ως το σύνολο των κορυφών στο S που έχουν γείτονες στο $V \setminus S$. Για ένα σύνολο $S \subseteq V(G)$ η γειτονιά της S είναι η $N_G(S) = \partial_G(V \setminus S)$. Θα παραλείπουμε τους δείκτες όποτε δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης. Ορίζουμε παρακάτω την έννοια της *προεξοχής*.

Ορισμός 6.5. Δεδομένου ενός γραφήματος $G = (V, E)$, λέμε πως ένα σύνολο $X \subseteq V$ είναι μία *r-προεξοχή* του G, αν $\partial(X) \leq r$ και $\mathbf{tw}(G[X]) \leq r$.

Για μία *r-προεξοχή* X, το σύνολο κορυφών $X' = V \setminus \partial(X)$ είναι μια *περιορισμένη r-προεξοχή*. Το σύνολο X' είναι η περιορισμένη προεξοχή του X, και το X είναι η προεξοχή του X'.

6.2.2 Μοναδική Δευτεροβάθμια Λογική με Μέτρηση

Σημαντικό εργαλείο σε όσα θα ακολουθήσουν θα παίξει η Μοναδική Δευτεροβάθμια Λογική με Μέτρηση (Counting Monadic Second Order Logic).

Το συντακτικό της Μοναδικής Δευτεροβάθμιας Λογικής των γραφημάτων περιλαμβάνει τους λογικούς συνδέσμους, μεταβλητές για κορυφές, ακμές, σύνολα κορυφών και σύνολα ακμών, τους ποσοδείκτες $\forall$ και $\exists$ που μπορούν να εφαρμοστούν στις μεταβλητές αυτές και τις ακόλουθες δυαδικές σχέσεις:

1. $u \in U$, όπου u είναι μεταβλητή κορυφής και U μεταβήτή συνόλου κορυφών.
2. $d \in D$, όπου d είναι μεταβήτή ακμής και D μεταβλητή συνόλου ακμών.
3. $\mathbf{inc}(d, u)$, όπου d είναι μεταβλητή ακμής, u είναι μεταβητή κορυφής και η ερμηνεία της σχέσης είναι πως η ακμή d ακουμπά την κορυφή u.

4. $\mathbf{adj}(u, v)$, όπου u, v είναι μεταβλητές κορυφών και η ερμηνεία είναι πως οι u και v είναι γειτονικές.

5. Ισότητα μεταβλητών που αντιπροσωπεύουν κορυφές, ακμές, σύνολα κορυφών και σύνολα ακμών.

Η μοναδική δευτεροβάθμια λογική με μέτρηση (Counting Second Order Logic) είναι μιά προέκταση της μοναδικής δευτεροβάθμιας λογικής με την προσθηκή του ακόλουθου ατομικού τύπου: Αν U αναπαριστά ένα σύνολο X, τότε $\mathbf{card}_{n,p}(U)$ =true αν και μόνο αν $|X| = n \pmod p$. Για περισσότερα για την CMSO παραπέμπουμε στα [3], [11] και [12]

Σε ένα p-MIN-CMSO πρόβλημα γραφημάτων $\Pi \subseteq \mathcal{G}_g \times \mathbb{N}$, μας δίνεται ένα γράφημα $G = (V, E)$ και ένας ακέραιος k. Το ερώτημα είναι αν υπάρχει ένα σύνολο S υποσύνολο των κορυφών ή των ακμών, μεγέθους το πολύ k, τέτοιο ώστε να ικανοποιείται το CMSO-εκφράσιμο κατηγόρημα $P_\Pi(G, S)$. Σε ένα p-EQ-CMSO και σε ένα p-MAX-CMSO πρόβλημα γραφημάτων, το μέγεθος του συνόλου S απαιτείται να είναι ακριβώς και τουλάχιστον k, αντίστοιχα.

6.2.3 Σεσημασμένη Εκδοχή ενός Προβλήματος

Η *Σεσημασμένη εκδοχή* Π^α ενός p-MIN/EQ/MAX-CMSO προβλήματος ορίζεται ως εξής: Η είσοδος είναι μια τριάδα $(G = (V, E), Y, k)$, όπου G είναι ένα γράφημα, $Y \subseteq V(G)$ είναι ένα σύνολο από 'μαύρες ' κορυφές και k μη-αρνητικός ακέραιος. Στην σεσημασμένη εκδοχή ενός p-MIN/EQ-CMSO προβλήματος γραφημάτων, απαιτούμε το σύνολο S να είναι, επιπρόσθετα, υποσύνολο του συνόλου Y. Στην σεσημασμένη εκδοχή ενός p-MAX-CMSO προβλήματος γραφημάτων, δεν απαιτούμε το σύνολο S να είναι υποσύνολο του Y, αλλά αντί του $|S| \geq k$ απαιτούμε $|S \cap Y| \geq k$.

6.2.4 t-Συνοριακά Γραφήματα

Στην υποενότητα αυτή θα ορίζουμε την έννοια του t-Συνοριακού Γραφήματος, και διάφορες πράξεις που μπορούμε να κάνουμε με αυτά.

Ορισμός 6.6. Ένα t-Συνοριακό Γράφημα είναι ένα γράφημα $G = (V, E)$ με t διακεκριμένες κορυφές, μοναδικά αριθμημένες από το 1 εώς το t. Το σύνολο $\partial(G)$ των αριθμημένων κορυφών λέγεται το σύνορο του G. Οι κορυφές της $\partial(G)$ αναφέρονται ως συνοριακές κορυφές.

Παρακάτω ορίζουμε την έννοια της *συγκόλησης με $\oplus$ (gluing by $\oplus$)*.

Ορισμός 6.7. Έστω G_1 και G_2 να είναι δύο t-Συνοριακά Γραφήματα. Συμβολίζουμε με $G_1 \oplus G_2$, το t-Συνοριακό Γράφημα που προκύπτει παίρνοτας την διακεκριμένη ένωση των G_1 και G_2 και ταυτοποιώντας κάθε κορυφή της $\partial(G_1)$ με την κορυφή της $\partial(G_2)$ με την ίδια αρίθμηση, δηλαδή 'κολλάμε' τα γραφήματα στα σύνορα τους. Στο $G_1 \oplus G_2$ υπάρχει ακμή μεταξύ δύο αριθμημένων κορυφών αν και μόνο αν υπάρχει ακμή μεταξύ τους στο G_1 ή στο G_2.

Ορισμός 6.8. Έστω μία κλάση γραφημάτων $\mathcal{G}$, G_1 και G_2 δύο t-Συνοριακά γραφήματα και $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$. Λέμε πως η $G_1 \oplus G_2$ είναι *νόμιμη* (legal) ως προς την $\mathcal{G}$ αν $G_1 \oplus G_2 \in \mathcal{G}$. Όποτε η κλάση $\mathcal{G}$ είναι ξεκάθαρη από τα συμφραζόμενα, θα παραλείπουμε να λέμε ως προς ποια κλάση είναι νόμιμη η πράξη.

Ορισμός 6.9. Έστω $G = (V, E)$ να είναι ένα γράφημα που περιέχει μία r-προεξοχή X. Έστω X' να είναι η περιορισμένη προεξοχή της X και έστω G_1 να είναι ένα t-Συνοριακό Γράφημα. Η ενέργεια της αντικατάστασης του X ή του $G[X]$ με τον G_1 αντιστοιχεί στην αλλαγή του G σε $G[V \setminus X'] \oplus G_1$.

6.2.5 Πεπερασμένος Ακέραιος Δείκτης

Έδω θα ορίσουμε την έννοια του *Πεπερασμένου Ακέραιου Δείκτη (Finite Integer Index)*, την οποία θα χρειαστούμε στα θεωρήματα που θα παρουσιάσουμε αργότερα. Για περισσότερα στην έννοια αυτή, παραπέμπουμε στα [4] και [19].

Ορισμός 6.10. Για ένα παραμετροποιημένο γράφημα Π σε μία κλάση γραφημάτων $\mathcal{G}$ και δύο t-Συνοριακά γραφήματα G_1 και G_2, λέμε πως $G_1 \equiv_\Pi G_2$ αν υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε t-Συνοριακό γράφημα G και για κάθε φυσικό k

1. $G_1 \oplus G_2$ είναι νόμιμη αν και μόνο αν $G_2 \oplus G$ είναι νόμιμη.

2. $(G_1 \oplus G, k) \in \Pi$ αν και μόνο αν $(G_2 \oplus G, k + c) \in \Pi$.

Ορισμός 6.11. Το Π έχει *Πεπερασμένο Ακέραιο Δείκτη (Finite Integer Index)* μέσα στην $\mathcal{G}$ αν για κάθε t υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο S t-Συνοριακών γραφημάτων τέτοια ώστε $S \subseteq \mathcal{G}$ και για κάθε t-Συνοριακό Γράφημα G_1 υπάρχει $G_2 \in S$ τέτοιο ώστε $G_2 \equiv_\Pi G_1$. Κάθε τέτοιο σύνολο S λέγεται *Σύνολο Αντιπροσώπων* για το (Π, t).

6.3 Μετά - Πυρήνες

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε, χωρίς αποδείξεις, τα κύρια αποτελέσματα του άρθρου [6].

Θεώρημα 6.1. *Έστω $\Pi \subseteq \mathcal{G}_g \times \mathbb{N}$ να είναι ένα p-MIN/EQ/MAX-CMSO πρόβλημα και είτε το Π είτε το $\bar{\Pi}$ είναι συμπαγές. Τότε η σεσημασμένη εκδοχή Π^α επιδέχεται ένα κυβικό πυρήνα αν το Π είναι p-EQ-CMSO πρόβλημα και τετραγωνικό πυρήνα αν το Π είναι p-MIN/MAX-CMSO πρόβλημα.*

Ας σημειώσουμε εδώ πως ενώ το πρόβλημα Π είναι ειδική περίπτωση της σεσημασμένη εκδοχής Π^α, λαμβάνοντας απλά $Y = V(G)$, το ότι η σεσημασμένη εκδοχή επιδέχεται πολυωνυμικό πυρήνα δεν συνεπάγεται πολυωνυμικό πυρήνα για το αντίστοιχο (μη Σεσημασμένο) πρόβλημα Π. Πράγματι, ένας πυρήνας για την Σεσημασμένη εκδοχή ενός προβλήματος είναι ένας πολυωνυμικός αλγόριθμος που μετατρέπει ένα στιγμιότυπο $(G = (V, E), Y, k)$ σε ένα ισοδύναμο στιγμιότυπο $(G' = (V', E'), Y', k')$. Το θέμα όμως είναι πως ενώ $Y = V(G)$, αυτό δεν συνεπάγεται πως $Y' = V(G')$. Το πρόβλημα αυτό όμως επιλύεται για NP-πλήρη προβλήματα, και το Θεώρημα 6.1 έχει και ένα Πόρισμα.

Πόρισμα 6.1. *Έστω $\Pi \subseteq \mathcal{G}_g \times \mathbb{N}$ να είναι ένα NP-Πλήρες p-MIN/EQ/MAX-CMSO πρόβλημα, τέτοιο ώστε είτε το Π είτε το $\bar{\Pi}$ είναι συμπαγές και Π^α ανήκει στο NP. Τότε το Π επιδέχεται πολυωνυμικό πυρήνα.*

Το Θεώρημα 6.1 μαζί με το Πόρισμα 6.1 γενικεύουν και ενοποιούν *όλους* τους γνωστούς πολυωνυμικούς πυρήνες σε προβλήματα γραφημάτων περιορισμένα σε γραφήματα εμβαπτίσιμα σε επιφάνειες. Πολλά προβλήματα γραφημάτων στην βιβλιογραφία είναι γνωστό πως επιδέχονται γραμμικούς πυρήνες σε επίπεδα γραφήματα, και το επόμενο Θεώρημα γενικεύει *όλους* τους γνωστούς γραμμικούς πυρήνες σε επιφάνειες.

Θεώρημα 6.2. *Έστω* $\Pi \subseteq \mathcal{G}_g \times \mathbb{N}$ *που έχει Πεπερασμένο Ακέραιο Δείκτη (Finite Integer Index), και είτε το* Π *είτε το* $\bar{\Pi}$ *είναι σχεδόν συμπαγές. Τότε το* Π *επιδέχεται γραμμικό πυρήνα.*

6.4 Προεκτάσεις

Τα αποτελέσματα που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα είναι πολύ γενικά και καλύπτουν μεγάλο πλήθος προβλημάτων και γραφημάτων. Υπάρχουν όμως περιθώρια γενίκευσης των αποτελεσμάτων αυτών. Η κύρια ανοιχτή ερώτηση και κατεύθυνση έρευνας είναι αν μπορούν τα αποτελέσματα να γενικευθούν σε προβλήματα σε πιο ευρείες κλάσεις γραφημάτων (από την κλάση των γραφημάτων φραγμένου γένους). Ήδη έγιναν τα πρώτα βήματα σε αυτή την κατεύθυνση από τους F. Fomin, D. Lokshtanov, S. Saurabh και Δ. Θηλυκό, οι οποίοι γενίκευσαν τα αποτελέσματα σε minor-free γραφήματα, δηλαδή κλάσεις γραφημάτων που δεν περιέχουν ένα συγκεκριμένο γράφημα H ως ελάσσων. Επόμενες υποψήφιες κλάσεις γραφημάτων είναι τα γραφήματα με φραγμένο τοπικό-δενδροπλάτος (bounded local-treewidth), [23], και τα γραφήματα με φραγμένη επέκταση (bounded expansion), [30]. Μια άλλη σημαντική κατευθύνση έρευνας στην περιοχή αυτή, είναι η βελτιστοποίηση των σταθερών που κρύβονται μέσα στους ασυμπτωτικούς συμβολισμούς. Τέλος είναι ενδιαφέρον να δούμε τι γίνεται με κάποια συγκεκριμένα προβλήματα που αντιστέκονται ακόμα στους πολυωνυμικούς πυρήνες. Ένα παράδειγμα τέτοιου προβλήματος είναι το Κατευθυνομενο Συνολο Αναδρασης Κορυφων το οποίο δεν μπορεί να επιλυθεί με την τεχνική που αναπτύχθηκε από τους Bodlaender και λοιπούς στο [6] γιατί δεν γνωρίζουμε αν είναι σχεδόν συμπαγές. Κανένας πολυωνυμικός πυρήνας δεν είναι γνωστός για το πρόβλημα αυτό, ούτε καν σε επίπεδα γραφήματα.

Παράρτημα Α′

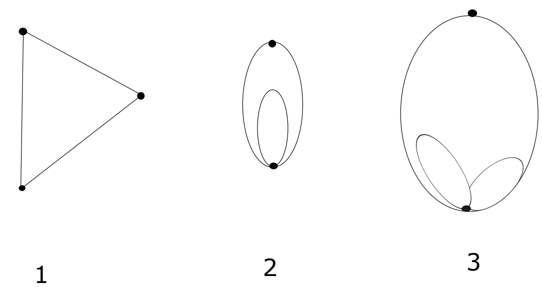
Σκιαγράφηση της απόδειξης του Θεωρήματος 5.6

Δεδομένου του γραφήματος G και χρησιμοποιώντας μια ειδική περίπτωση του Λήμματος 3.9 από το [22] καταλήγουμε στο ότι υπάρχει γράφημα H για το οποίο ισχύουν τα παρακάτω:

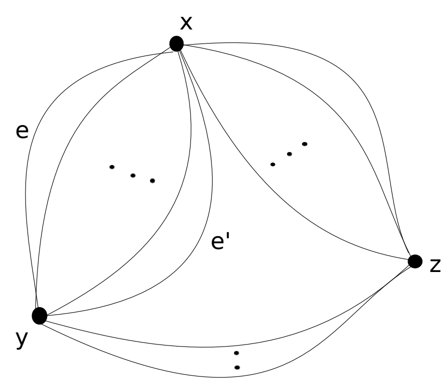
- Το G είναι ελάσσων του H.
- Το H είναι τριγωνοποιημένο.
- Κάθε κορυφή στο $V(H)$ είναι μοναδικά κυριαρχημένη. Δηλαδή η απόσταση μεταξύ κάθε δύο κορυφών ενός συνόλου κυριαρχίας S είναι ακριβώς 3.

Θα αποδείξουμε το Θεώρημα 5.6 για το γράφημα H και θα δείξουμε πως μεταφέρεται και στο G.

Παρατηρούμε πως η δομή του γραφήματος H είναι η εξής: Υπάρχουν αστέρια, με κέντρα τις κορυφές της λύσης S και κάποιες ακμές ανάμεσα σε κορυφές. Φτιάχνουμε ένα γράφημα H' διαλύοντας όλες τις ακμές που συνδέουν κάποια κορυφή της λύσης S με τους γείτονές της. Μετά από τις διαλύσεις αυτές δημιουργούνται πολλές πολλαπλές ακμές και βρόγχοι. Κοιτάμε τώρα τις όψεις του H'. Θα είναι μία από τις παρακάτω περιπτώσεις.



Σχήμα Α′.1: Οι πιθανές όψεις του γραφήματος H'



Σχήμα Α′.2: Μια τριγωνική όψη στο γράφημα H'

Ας δούμε την απλή περίπτωση 1. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις είναι παρόμοιες και παραλείπονται.

Φυσικά υπάρχουν πολλές ακμές μεταξύ της x και y. Θεωρούμε ισοδύναμες τις ακμές που έχουν τα ίδια άκρα. Μεταξύ των ισοδύναμων ακμών μεταξύ της x και y θεωρούμε τις δύο πιο ακραίες. Την e και την e' όπως φαίνεται στο σχήμα Α′ 2. Παρατηρούμε πως το (x, e, y, e') αντιστοιχεί σε ένα *λάσσο* στο γράφημα H. Λάσσο είναι μια κλειστή καμπύλη του επιπέδου που ακουμπά το γράφημά μόνο σε κορυφές.

Το λάσσο αυτό στο γράφημα H έχει μέγεθος το πολύ 6, αφού οι κορυφές x και y 'κρύβουν' μέσα τους ολόκληρα αστέρια που συνθλίψαμε. Τώρα παρατηρούμε πως ένα λάσσο στο γράφημα H αντιστοιχεί σε μια περιοχή, μεγέθους το πολύ 6 κορυφών, με τις ιδιότητες που θέλουμε και περιγράψαμε στο Ορισμό 4.2. Το μόνο διαφορετικό που μας δίνει αυτή η απόδειξη στην δομή των περιοχών είναι ότι, λόγω του ότι στο γράφημα H υπάρχουν ακμές που ίσως δεν υπάρχουν στο γράφημα G (από την διαδικασία τριγωνοποίησης και 'τεντώματος '), οι περιοχές στο γράφημα G μπορεί να μην είναι κλειστές, δηλαδή μπορεί κάποια ακμή του συνόρου να απουσιάζει. Αυτό βέβαια δεν μας πειράζει, και δεν είναι η χειρότερη περίπτωση για την οποία και δώσαμε το φράγμα στον πυρήνα. Το ότι όλες οι ακμές και κορυφές ανήκουν σε τουλάχιστον μια περιοχή είναι εύκολο να επιβεβαιωθεί.

Παράρτημα Β΄

Σκαριφήματα για την Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1

Στο Παράρτημα αυτό θα παρουσιάσουμε τα 6 σκαριφήματα που αναφέραμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.

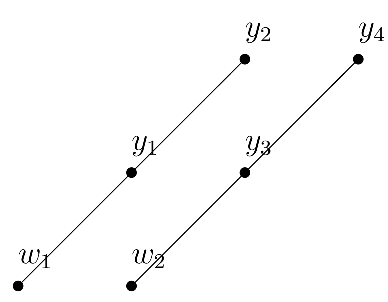
Όπως αναφέραμε και στην απόδειξη, υπάρχουν συνολικά 12 περιπτώσεις για τους πίνακες τιμών. Συνοπτικά μπορούμε να τις δούμε στον παρακάτω πίνακα. Οι τιμές στο εσωτερικό του πίνακα, αντιπροσωπεύουν τα μεγέθη της εκάστοτε βέλτιστης τοπικής λύσης, δηλαδή του γραφήματος $G[N(u) \setminus \{u, w_1, w_2\}])$, το οποίο υπενθυμίζουμε πως είναι εξωεπίπεδο (και άρα το μέγεθος του βέλτιστου Καλύμματος Κορυφών μπορεί να υπολογισθεί σε πολυωνυμικό χρόνο).

	$\chi(w_1) = \chi(w_2) = 1$	$\chi(w_1) = 0, \chi(w_2) = 1$	$\chi(w_1) = 1, \chi(w_2) = 0$	$\chi(w_1) = \chi(w_2) = 0$
1	α	α	α	α
2	α	α	α	$\alpha + 1$
3	α	$\alpha + 1$	α	$\alpha + 1$
4	α	α	$\alpha + 1$	$\alpha + 1$
5	α	$\alpha + 1$	$\alpha + 1$	$\alpha + 1$
6	α	$\alpha + 1$	$\alpha + 1$	$\alpha + 2$
7	α	α	α	$\alpha + 2$
8	α	$\alpha + 1$	α	$\alpha + 2$
9	α	α	$\alpha + 1$	$\alpha + 2$
10	α	$\alpha + 1$	$\alpha + 1$	α
11	α	$\alpha + 1$	α	α
12	α	α	$\alpha + 1$	α

Η περίπτωση 7 του παραπάνω πίνακα είναι χωρίς ουσία. Βλέπουμε πως όταν μία από τις $\chi(w_1)$ ή $\chi(w_2)$ είναι 1, τότε η βέλτιστη τοπική λύση είναι α. Δηλαδή αν πάρουμε π.χ. την w_1 ($\chi(w_1) = 1$ και $\chi(w_2) = 0$) στο ολικό Κάλυμμα Κορυφών, θα χρειαστούμε επιπλέον α κορυφές από το εσωτερικό της περιοχής. Αν δεν την πάρουμε όμως (δηλαδή $\chi(w_1) = \chi(w_2) = 0$), θα χρειαστούμε $\alpha + 2$, πράγμα προφανώς μη-βέλτιστο. Άρα η περίπτωση $\chi(w_1) = \chi(w_2) = 0$ είναι εκτός συζήτησης, και απλά μένει να δούμε ποια από τις υπόλοιπες τρεις περιπτώσεις είναι καλύτερη, αυτό όμως καλύπτεται με το σκαρίφημα της περίπτωσης 1 ή 2. Για παρόμοιο λόγο είναι ανούσιες και οι περιπτώσεις 8 και 9. Στην Περίπτωση 8, όταν $\chi(w_1) = \chi(w_2) = 0$ η βέλτιστη τοπική λύση είναι $a + 2$ ενώ όταν $\chi(w_1) = 1$ η βέλτιστη τοπική πέφτει στο a, και ακόμα και μαζί με την w_1 έχουμε μια αυστηρά μικρότερη λύση, άρα το $\chi(w_1) = \chi(w_2) = 0$ είναι προφανώς μη-βέλτιστο, και η Περίπτωση 8 ανάγεται ουσιαστικά στην Περίπτωση 3 ή 4.

Οι υπόλοιπες 3 τελευταίες περιπτώσεις είναι απλά αδύνατες. Είναι προφανές πως το μέγεθος της τοπικής λύσης όταν ισχύει πως $\chi(w_1) = 1$ ή/και $\chi(w_2) = 1$ πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο από όταν ισχύει ότι $\chi(w_1) = \chi(w_2) = 0$. Αυτό δεν ισχύει όμως για τις περιπτώσεις 10 μέχρι και 12.

Οι πρώτες 6 περιπτώσεις λοιπόν είναι οι ουσιώδης, και για αυτές παρουσιάζουμε τα σκαριφήματα. Το πρώτο σκαρίφημα παρουσιάζεται στο Σχήμα Β΄.



$k' = k - \alpha + 2$

Σχήμα Β΄.1: Σκαρίφημα και αλλαγή μεταβλητής για την Περίπτωση 1.

Ας σχολιάσουμε λίγο την ορθότητα του σκαριφήματος καθώς και της αλλαγής μεταβλητής.

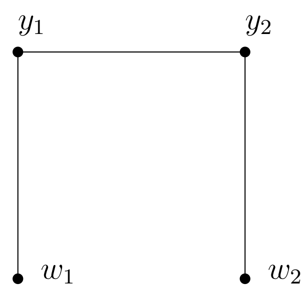
1. $\chi(w_1) = \chi(w_2) = 0$: ($\Rightarrow$) Αφού το βέλτιστο τοπικό Κάλυμμα Κορυφών (Κ.Κ.) στο αρχικό γράφημα έχει μέγεθος α (λόγω της Περίπτωσης στην οποία βρισκόμαστε), αν το αρχικό γράφημα έχει Κ.Κ. μεγέθους k τότε το νέο γράφημα θα έχει Κ.Κ. μεγέθους $k - \alpha + 2$. Το $(-\alpha)$ προκύπτει γιατί όλο το τοπικό γράφημα αφαιρείται, και το $+2$ λόγω του ότι αφού $\chi(w_1) = \chi(w_2) = 0$, θα χρειατεί να μπουν στο Κ.Κ. οι κορυφές y_1 και y_3. ($\Leftarrow$) Αν το νέο γράφημα έχει Κ.Κ. μεγέθους $k-\alpha+2$ τότε το αρχικό γράφημα θα έχει Κ.Κ. μεγέθους $(k-\alpha+2)+\alpha-2$. Το $(+\alpha)$ προκύπτει από το γεγονός πως το τοπικό Κ.Κ. έχει μέγεθος α και το (-2) από την αφαίρεση των y_1 και y_3.

2. $\chi(w_1) = 0, \chi(w_2) = 1$: ($\Rightarrow$) Αν το αρχικό γράφημα έχει Κ.Κ. μεγέθους k τότε το νέο γράφημα θα έχει Κ.Κ. μεγέθους $k - a + 2$. Το $(-\alpha)$ προκύπτει για τον ίδιο λόγω και παραπάνω, και το $(+2)$ προκύπτει από την προσθήκη των κορυφών y_1 και y_4. ($\Leftarrow$) Όμοια με παραπάνω.

3. $\chi(w_1) = 1, \chi(w_2) = 0$: Ανάλογη με την περίπτωση $\chi(w_1) = 0, \chi(w_2) = 1$.

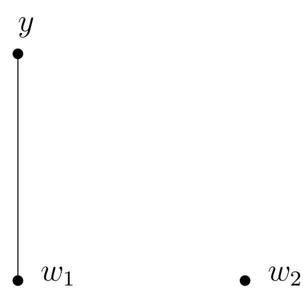
4. $\chi(w_1) = \chi(w_2) = 1$. ($\Rightarrow$) Αν το αρχικό γράφημα έχει Κ.Κ. μεγέθους k, τότε το νέο γράφημα θα έχει α λιγότερες και $(+2)$ από την προσθήκη των κορυφών y_2 και y_4. ($\Leftarrow$) Αν το νέο γράφημα έχει Κ.Κ. μεγέθους $k-a+2$, τότε το αρχικό θα χρειαστεί α περισσότερες αλλά και 2 λιγότερες, από την αφαίρεση των y_2 και y_4.

Η ορθότητα όλων των υπόλοιπων περιπτώσεων αποδεικνύεται το ίδιο εύκολα και εντελώς ανάλογα με την Περίπτωση 1, και έτσι παραλείπονται. Παρακάτω, απλά εκθέτουμε τα σκαριφήματα και τις αλλαγές της μεταβλητής.



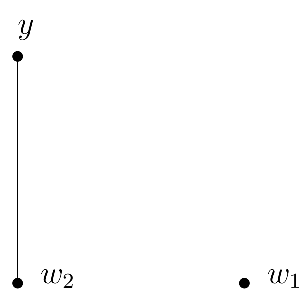
$$k' = k - \alpha + 1$$

Σχήμα Β΄.2: Σκαρίφημα και αλλαγή μεταβλητής για την Περίπτωση 2.



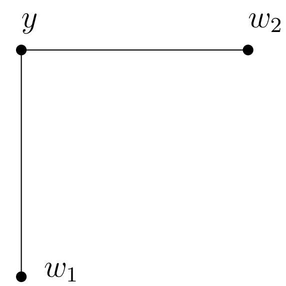
$$k' = k - \alpha$$

Σχήμα Β΄.3: Σκαρίφημα και αλλαγή μεταβλητής για την Περίπτωση 3.



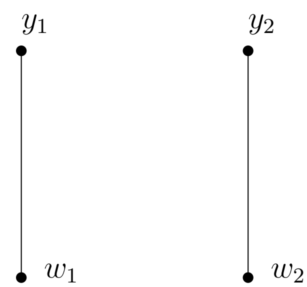
$$k' = k - \alpha$$

Σχήμα Β΄.4: Σκαρίφημα και αλλαγή μεταβλητής για την Περίπτωση 4.



$k' = k - \alpha$

Σχήμα Β΄.5: Σκαρίφημα και αλλαγή μεταβλητής για την Περίπτωση 5.



$k' = k - \alpha$

Σχήμα Β΄.6: Σκαρίφημα και αλλαγή μεταβλητής για την Περίπτωση 6.

Παράρτημα Γ′

Γλωσσάρι

Η μετάφραση της ορολογίας, είναι πάντα ένας ποκοκέφαλος αλλά και πρόκληση για την συγγραφή επιστημονικών συγγραμάτων. Αρκετοί από τους όρους που αποπειραθήκαμε να μεταφράσουμε είναι αρκετά νέοι, και δεν υπάρχουν ακόμα ευρέως γνωστές και κοινώς αποδεκτές μεταφράσεις. Σε κάθε ορισμό που δώσαμε, γράφαμε σε παρενθέσεις και τους αντίστοιχους ξένους όρους, για ευκολότερη ανάγνωση. Παρόλα αυτά, προσπαθήσαμε να μαζέψουμε τις κυριότερες έννοιες μαζί με τις ξένες τους μεταφράσεις, αλλά και το αντίστροφο, στα δύο αυτά γλωσσάρια, ώστε να βοηθήσουμε στην διάδοση κάποιων μεταφράσεων αλλά και να διευκολύνουμε τον αναγνώστη που επιθυμεί να συνεχίσει την ανάγνωση επιστημονικών άρθρων και συγγραμάτων στην περιοχή αυτή. Έχουμε παραλείψει εύκολες και κλασσικές έννοιες όπως π.χ. graph (γράφημα), treewidth (δενδροπλάτος) κ.ά.

Γ′.1 Έλληνο-Αγγλικό

Ακτινική Απόσταση Radial Distance

Ακτινική μπάλα γύρω από το S Radial Ball around S

Αποσύνθεση Περιοχών Region Decomposition

Αριθμός Κυριαρχίας Domination Number

Δενδροπαράγοντας Spanning Tree

Εμβάπτιση Embedding

Επέκταση Expansion

Ιδιότητα της Απόστασης Distance Property

Κορυφή Άγκυρα Anchor Vertex

Μοναδική Δευτεροβάθμια Λογική με Μέτρηση Counting Monadic Second Order Logic

Νόμιμη Legal

Παραμετρικά Αποδοτικό Fixed Parameter Tractable

Πεπερασμένος Ακέραιος Δείκτης Finite Integer Index

Περιοχή Region

Προεξοχή Protrusion

Πυρήνας Kernel

Πυρηνοποίηση Kernelization

Ρυθμιστής Modulator

Σεσημασμένη Εκδοχή Annotated Version

Σκαρίφημα Gadget

Συγκόλληση με $\oplus$ Gluing by $\oplus$

Συμπαγές Compact

t-**Συνοριακό Γράφημα** t-Boundaried Graph

Σχεδόν Συμπαγές Quasi-Compact

Τοπικό Δενδροπλάτος Local treewidth

Γ′.2 Άγγλο-Ελληνικό

Anchor Vertex Κορυφή Άγκυρα

Annotated Version Σεσημασμένη Εκδοχή

t-Boundaried Graph t-Συνοριακό Γράφημα

Compact Συμπαγές

Counting Monadic Second Order Logic Μοναδική Δευτεροβάθμια Λογική με Μέτρηση

Distance Property Ιδιότητα της Απόστασης

Domination Number Αριθμός Κυριαρχίας

Embedding Εμβάπτιση

Expansion Επέκταση

Finite Integer Index Πεπερασμένος Ακέραιος Δείκτης

Fixed Parameter Tractable Παραμετρικά Αποδοτικό

Gadget Σκαρίφημα

Gluing by $\oplus$ Συγκόλληση με $\oplus$

Kernel Πυρήνας

Kernelization Πυρηνοποίηση

Legal Νόμιμη

Local treewidth Τοπικό Δενδροπλάτος

Modulator Ρυθμιστής

Protrusion Προεξοχή

Quasi-Compact Σχεδόν Συμπαγές

Radial Ball around S Ακτινική μπάλα γύρω από το S

Radial Distance Ακτινική Απόσταση

Region Περιοχή

Region Decomposition Αποσύνθεση Περιοχών

Spanning Tree Δενδροπαράγοντας

Βιβλιογραφία

[1] J. Alber, M. R. Fellows and R. Niedermeier. Efficient data reduction for dominating set: A linear problem kernel for the planar case. *8th Scandinavian Workshop on Algorithm Theory - SWAT 2002*.

[2] J. Alber, M. R. Fellows and R. Niedermeier. Polynomial-Time Data Reduction for Dominating Set. *Journal of ACM*, Vol. 51, No. 3, May 2004, pp. 363-384.

[3] S. Arnborg, J. Lagersen, D. Seese. Easy problems for tree decomposable graphs. *J. Algorithms* 12. pp. 308-340. 1991.

[4] H. L. Bodlaender and B. van Antwerpen-de Fluiter. Reduction Algorithms for graphs of small treewidth. *Information and Computation* 167, pp. 86-119. 2001.

[5] H. L. Bodlaender, B. M. P. Jansen and S. Kratsch. Preprocessing for Treewidth: A Combinatorial Analysis through Kernelization. *Proc. of ICALP 2011.* 2011

[6] H. L. Bodlaender, F. V. Fomin, D. Lokshtanov, E. Penninkx, S. Saurabh and D. M. Thilikos. (Meta) Kernelization. *Proceedings of the 50th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2009)*, pp. 629-638. 2009.

[7] J. F. Buss, J. Goldsmith. Nondeterminism within P.*SIAM Journal on Computing* 22 (3), pp. 560?572. 2003

[8] S. Cook. The Complexity of Theorem - Proving Procedures. *Proceedings of Third Annual ACM Symposium*. 1971.

[9] `http://qwiki.stanford.edu/index.php/Complexity_Zoo` Complexity Zoo

[10] T. H. Cormen, C. E. Leiserson and R. L. Rivest. *Introduction to Algorithms*. MIT press.

[11] B. Courcelle. The monadic second-order logic of graphs I: Recognizable Sets of finite graphs. *Information and Computation* 85, pp.12-75, 1990.

[12] B. Courcelle. The expression of graph logic properties and graph transformations in monadic second-order logic. *Handbook of Graph Grammars*, pp. 313-400. 1997.

[13] S. Dasgupta, C. H. Papadimitriou and U. Vazirani. *Algorithms*. McGraw-Hill, 2006.

[14] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer.

[15] R. G. Downey and M. R. Fellows. *Parameterized Complexity*. Springer.

[16] V. Estivill-Castro, M. Fellows, M. Langston, F. Rosamond. FPT is P-time extremal structure I. *Proc. 1st ACiD*. pp.1-41. 2005.

[17] M. R. Fellows. Towards fully multivariete algorithmics: Some new results and directions in parameter ecology. *Proc. 23th IWOCA*, pp. 2-10. 2009.

[18] M. R. Fellows, D. Lokshtanov, N. Misra, M. Mnich, F. A. Rosamond, S. Saurabh. The complexity ecology of parameters: An illustration using max leaf number. *Theory Comput. Syst.*, 45(4). pp. 822-848. 2009

[19] B. de Fluiter. *Algorithms for graphs of small treewidth*. Ph.D. thesis, Utrecht University. 1997.

[20] J. Flum and M. Grohe. *Parameterized Complexity Theory*. Springer.

[21] F. V. Fomin, D. Lokshtanov, V. Raman, S. Saurabh. Bidimensionality and EPTAS. *Proceedings of SODA '11*. 2011.

[22] F. V. Fomin and D. M. Thilikos. Dominating Sets in Planar Graphs: Branch-width and Exponential Speed-up. *SIAM J. Comput. 36* No 2. pp. 281-309. 2006

[23] M. Frick and M. Grohe. Deciding first order properties of locally tree-decomposable structures. *J. ACM* 48, 6, pp. 1184-1204. 2001.

[24] M. Grohe. Local tree-width, excluded minors, and approximation algorithms. *Combinatorica* 23, pp. 613 - 632. 2003.

[25] J. Guo and R. Niedermeier. Linear Problem Kernels for NP-Hard Problems on Planar Graphs. *34th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP '07)*, Vol.4596 of LNCS, pp. 375-386, Springer.

[26] B. M. P. Jansen and H. L. Bodlaender. Vertex Cover Kernelization Revisited: Upper and Lower Bounds for a Refined Parameter.

[27] R. Karp. Reducibility among Combinatorial Problems.

[28] D.J. Kleitman and D.B. West. Spanning trees with many leaves. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 4, 99-106. 1991.

[29] J. Kneis, A. Langer, P. Rossmanith. A new algorithm for finding trees with many leaves. *Proc. 19th ISAAC*. pp. 270-281. 2008.

[30] J. Nesetril and P. O. de Mendez. Grad and classes with bounded expansion I. Decompositions. *Eur. Journal of Combinatorics* 29, 3, pp. 760-776. 2008.

[31] R. Niedermeier. *An Invitation to Fixed-Parameter Algorithms.* Oxford University Press.

[32] R. Niedermeier. Reflections on multivariate algorithmics and problem parameterization. *Proc. of 27th STACS*. pp. 17-32. 2010.

[33] Christos H. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Addison Wesley, 1994.

[34] N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour and R. Thomas. The four colour theorem. *J. Combin. Theory Ser. B.* 70, 2-44. 1997.

[35] A. M. Turing. On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1936.

[36] Jianxin Wang, Yongjie Yang, Jiong Guo and Jianer Chen. Linear Problem Kernels for Planar Graph Problems with Small Distance Property.