Διπλωματική Εργασία

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

μΠλ∀: Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα στη Λογική και Θεωρία Αλγορίθμων και Υπολογισμού

Το δεντροπλάτος και το γνήσιο δεντροπλάτος.

Παύλος-Ιωάννης-Πύρρος Χάιδος

Τριμελής Επιτροπή:

Δημήτριος Θηλυκός, Αναπ. Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών (Επιβλέπων)
Κώστας Δημητρακόπουλος, Καθηγητής, Τμήμα Μεθοδολογίας, Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης
Σταύρος Κολλιόπουλος, Αναπ. Καθηγητής, Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Αθήνα, 2011

Περίληψη

Θα εξετάσουμε το δεντροπλάτος και το γνήσιο (proper) δεντροπλάτος. Θα αρχίσουμε με μια περιήγηση στις εφαρμογές του στο χώρο της γραφοθεωρίας αλλά και εκτός αυτού. Σε ορισμένες από αυτές, όπως στα Δέντρα Διακλάδωσης, το δεντροπλάτος χρησιμοποιείται διότι παρέχει ένα φυσικό μοντέλο για το πρόβλημα που μας απασχολεί, ενώ σε άλλες μας δίνει ένα ισχυρό υπόβαθρο για να αναλύσουμε την πολυπλοκότητα του προβλήματος και να απομονώσουμε υποπεριπτώσεις όπου αυτή είναι αρκετά χαμηλή για να αναπτύξουμε αποτελεσματικούς αλγορίθμους.

Κατόπιν, θα παραθέσουμε αρκετούς ισοδύναμους ορισμούς που υπάρχουν στη βιβλιογραφία για το δεντροπλάτος, και θα αναλύσουμε πως διαφοροποιούνται στην περίπτωση του γνήσιου δεντροπλάτους. Οι ορισμοί αυτοί έχουν τη βάση τους σε διαφορετικά προβλήματα, πρακτικά (όπως η αναζήτηση σε ένα γράφημα) αλλά και θεωρητικά (όπως η προετοιμασία του Graph Minor Theorem). Τέλος, θα δώσουμε έναν νέο, ισοδύναμο, ορισμό για το γνήσιο δεντροπλάτος ο οποίος βασίζεται σε ένα νέο είδος αποσύνθεσης .

Λέξεις-Κλειδιά: Θεωρία γραφημάτων, δεντροπλάτος, treewidth.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Τα δέντρα είναι μια από τις πιο απλές αλλά και χρήσιμες κατηγορίες γραφημάτων. Πολλά προβλήματα της γραφοθεωρίας, ενώ είναι δύσκολα στη γενική τους μορφή, έχουν εύκολες λύσεις όταν περιορισθούν στα δέντρα. Για το λόγο αυτό, υπάρχουν αλγόριθμοι που υπολογίζουν, ανάλογα με το πρόβλημα που εξετάζουμε το βέλτιστο δέντρο το οποίο αντιστοιχεί στο αρχικό γράφημα. Σε άλλες περιπτώσεις, φροντίζουμε να χρησιμοποιούμε δομές δεδομένων που έχουν δομή δέντρου για λόγους ταχύτητας. Το δεντροπλάτος είναι μια γενίκευση της έννοιας του δέντρου, και μετρά την απόσταση ενός γραφήματος από το να είναι δέντρο —τα δέντρα είναι ακριβώς τα συνεκτικά γραφήματα με δεντροπλάτος 1. Η απόσταση αυτή δεν είναι απλά θεωρητική. Πολλοί αλγόριθμοι πάνω σε γραφήματα έχουν εξαιρετική απόδοση σε γραφήματα μικρού δεντροπλάτους. Ο κλάδος της παραμετρικής πολυπλοκότητας ασχολείται με την ανάπτυξη και μελέτη τέτοιων αλγορίθμων, των οποίων ο χρόνος εκτέλεσης είναι πολυωνυμικός ως προς το μέγεθος της εισόδου αλλά εκθετικός ως προς μία παράμετρο της (εδώ, το δεντροπλάτος). Έχουμε έτσι, για γραφήματα με φραγμένο δεντροπλάτος πολυωνυμικούς (ή ακόμα και γραμμικούς) αλγορίθμους για πολλά NP-Hard προβλήματα [AP89].

Πριν προχωρήσουμε στις εφαρμογές του δεντροπλάτους, καλό θα ήταν να το ορίσουμε.

2 Ισοδύναμες Έννοιες

2.1 Το δεντροπλάτος κατά τους S&R

Ορισμός 2.1 (Αποσύνθεση Δέντρου). Ο αρχικός ορισμός της αποσύνθεσης δέντρου (tree decomposition, παρακάτω απλώς αποσύνθεση ή δεντροαποσύνθεση) δόθηκε από τους Seymour & Robertson [RS84] κατά την απόδειξη του Graph-Minor Theorem. Έστω ένα γράφημα G. Λέμε ότι η (T, B) είναι αποσύνθεση του G αν το T είναι δέντρο, η B είναι μια συνάρτηση από τις κορυφές του T στα υποσύνολα του $V(G)$, και επιπλέον ισχύει:

- Για κάθε $v \in V(G)$ υπάρχει $t \in V(T)$ ώστε $v \in B(t)$.
- Για κάθε $e \in E(G)$ υπάρχει $t \in V(T)$ ώστε $e \subseteq B(t)$.

- Για κάθε $t_1, t_2, t_3 \in V(T)$ με την t_3 στο μονοπάτι από την t_1 προς την t_2 ισχύει: $B(t_3) \supseteq (B(t_1) \cap B(t_2))$. (Δεντρική ιδιότητα)

Για ευκολία, παρακάτω τα $B(v)$ θα τα αναφέρουμε και ως μέρη ή τσάντες (από το Bags) Το $|B(v)|$ το ονομάζουμε πλάτος του $B(v)$. Ως πλάτος της αποσύνθεσης (B, T) ορίζουμε το μέγιστο των $|B(v)|$ ανάμεσα στις κορυφές v του T. Στο σχήμα 1 έχουμε δύο αποσυνθέσεις, διαφορετικού πλάτους, ενός γραφήματος.

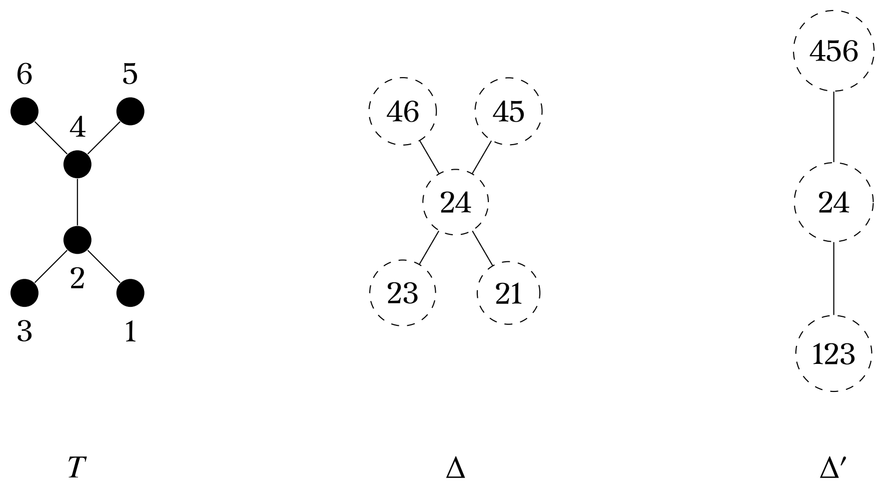
Ορισμός 2.2 (Δεντροπλάτος). Ένα γράφημα έχει δεντροπλάτος το πολύ k αν έχει μια αποσύνθεση με πλάτος k. Δεντροπλάτος ενός γραφήματος ορίζουμε το ελάχιστο πλάτος ανάμεσα στα πλάτη των αποσυνθέσεων που επιδέχεται.

Η εύρεση μίας αποσύνθεσης με πλάτος κοντά στο βέλτιστο είναι σε πολλές εφαρμογές χρησιμότερη από τον ακριβή υπολογισμό του δεντροπλάτους, μια και μία αποσύνθεση μας δίνει ένα φυσικό τρόπο για να χωρίσουμε το αρχικό πρόβλημα σε υποπροβλήματα μέσω των τσαντών, όσο και μία δομή σύμφωνα με την οποία θα συνθέσουμε τις επιμέρους λύσεις (μέσω του δέντρου).

Για κάθε γράφημα, μπορούμε να υπολογίσουμε μία τετριμμένη δεντροαποσύνθεση που αποτελείται από μία τσάντα η οποία περιέχει όλες τις κορυφές του. Με εξαίρεση τα πλήρη γραφήματα, η αποσύνθεση αυτή έχει πλάτος μεγαλύτερο από το βέλτιστο. Στη γενική περίπτωση, το να κατασκευάσουμε μία βέλτιστη αποσύνθεση για ένα γράφημα είναι δύσκολο πρόβλημα, και συγκεκριμένα NP-Hard [ACP87]. Για το λόγο αυτό, στην πράξη χρησιμοποιούμε προσεγγιστικούς αλγορίθμους τόσο για την κατασκευή αποσυνθέσεων όσο και για τον υπολογισμό του δεντροπλάτους.

2.2 Χορδικά γραφήματα και το γνήσιο δεντροπλάτος

Τα χορδικά (επίσης και τριγωνοποιημένα) γραφήματα έχουν ιδιαίτερα στενή σχέση με το δεντροπλάτος, όπως βλέπουμε στα παρακάτω θεωρήματα από τον Diestel [Die05]. Η σχέση αυτή είναι τόσο στενή που σε πολλές εφαρμογές το πρώτο βήμα για την εύρεση μιας (όχι απαραίτητα βέλτιστης) αποσύνθεσης αποσύνθεσης είναι ο υπολογισμός ενός χορδικού συμπληρώματος. Επίσης, μέσω των χορδικών γραφημάτων εκτός από το δεντροπλάτος μπορούμε να ορίσουμε το γνήσιο δεντροπλάτος, μια παράμετρο κοντινή αλλά διαφορετική από το δεντροπλάτος που ίσως είναι χρησιμότερη σε κάποιες



Σχήμα 1: Δύο αποσυνθέσεις Δ, Δ' του T, με πλάτος 1 και 2 αντίστοιχα.

εφαρμογές. Όπως θα δούμε παρακάτω, στα προβλήματα αναζητήσεων, το δεντροπλάτος και το γνήσιο δεντροπλάτος περιγράφουν διαφορετικά μοντέλα, οπότε ανάλογα με την αναζήτηση που θέλουμε να εξετάσουμε το γνήσιο δεντροπλάτος μπορεί να είναι προτιμότερο. Ένα άλλο πλεονέκτημα του γνήσιου δεντροπλάτους είναι ότι είναι αυτοδυικό, ενώ το δεντροπλάτος ενός γραφήματος και του δυικού του μπορεί να διαφέρουν κατά 1 [BMT03]
.

Ορισμός 2.3 (Χορδικότητα). Ένα γράφημα είναι *χορδικό* ανν κάθε κύκλος του μήκους 4 ή μεγαλύτερος έχει χορδή.

Θεώρημα 2.4. *Ένα χορδικό γράφημα με μέγιστη κλίκα μεγέθους $k+1$ έχει δεντροπλάτος k.*

Θεώρημα 2.5. *Ένα γράφημα είναι χορδικό ανν έχει μια αποσύνθεση (T, B) όπου κάθε $B(v)$ είναι κλίκα.*

Θεώρημα 2.6. *Το δεντροπλάτος ενός γραφήματος G είναι ίσο με το δεντροπλάτος του H, όπου το H είναι το χορδικό υπεργράφημα του G με το ελάχιστο δεντροπλάτος: $tw(G) = \min_H(tw(H) | H \supseteq G | H \text{χορδικό})$.*

Ορισμός 2.7 (Δέντρο Κλικών). Έστω ένα γράφημα G και K_G το σύνολο των μεγιστικών κλικών του. Ένα δέντρο T με σύνολο κορυφών το K_G

ονομάζεται δέντρο κλικών του G αν ισχύει για οποιεσδήποτε τρεις κλίκες K_1,K_2,K_3 όπου η K_2 βρίσκεται στο μονοπάτι από την K_1 προς την K_3 ότι: $K_2 \supset (K_1 \cap K_3)$.

Σχόλιο. Από τον ορισμό του, ένα δέντρο κλικών είναι και δεντροαποσύνθεση. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

Θεώρημα 2.8. *Ένα γράφημα είναι χορδικό ανν έχει δέντρο κλικών (Blair & Peyton [BP92], Gavril [Gav74])*

Ορισμός 2.9 (Χορδικό Συμπλήρωμα). Για ένα γράφημα G, θα λέμε ότι το H είναι χορδικό συμπλήρωμα του G ανν $V(H) = V(G)$, $tw(G) = tw(H)$, και επιπλέον το H είναι χορδικό. Από τον ορισμό του δεντροπλάτους, είναι προφανές ότι κάθε γράφημα έχει χορδικό συμπλήρωμα.

Ορισμός 2.10 (Φυσική Κλίκα). Μία n-κλίκα ονομάζεται φυσική ανν περιέχει μία τουλάχιστον ακμή, που δεν συμμετέχει σε κάποιον ελάχιστο διαχωριστή του γραφήματος με μέγεθος το πολύ $n-1$. Εάν υπάρχει τέτοια ακμή, την ονομάζουμε ακμή μετάβασης.

Ορισμός 2.11 (Απλοϊκή Κλίκα). Μία κλίκα ονομάζεται απλοϊκή ανν περιέχει απλοϊκή κορυφή. Απλοϊκή είναι μια κορυφή της οποίας η γειτονιά είναι κλίκα. Εύκολα προκύπτει ότι μια απλοϊκή κλίκα είναι φυσική.

Ορισμός 2.12 (Γνήσιο Δεντροπλάτος). Ο απλούστερος ορισμός για το γνήσιο δεντροπλάτος είναι ο εξής: Ένα γράφημα G έχει γνήσιο δεντροπλάτος $ptw(G)$ το πολύ k ανν είναι υπογράφημα ενός χορδικού γραφήματος H που έχει δεντροπλάτος το πολύ k **και** κάθε $k+1$ κλίκα του είναι **φυσική**.

Σχόλιο. Από τον ορισμό είναι προφανές ότι για οποιοδήποτε γράφημα G ισχύει $tw(G) \leq ptw(G) \leq tw(G)+1$, μιας και σε ένα γράφημα όπου η μέγιστη κλίκα είναι βαθμού $k+1$, κάθε $k+2$ κλίκα είναι φυσική.

2.3 Τα κ-δέντρα και το la.

2.3.1 Τα κ-δέντρα.

Ένας άλλος τρόπος να περιγράψουμε τα γραφήματα ενός δεντροπλάτους k είναι να δώσουμε έναν τρόπο κατασκευής τους. Τα μερικά κ-δέντρα και τα γνήσια μερικά κ-δέντρα μας δίνουν ένα τέτοιο εργαλείο. Άλλο ένα εργαλείο, μόνο για την περίπτωση του γνήσιου δεντροπλάτους είναι η παράμετρος la [vdH96]. Γνωρίζοντας ότι το δεντροπλάτος είναι μια γενίκευση της έννοιας του δέντρου, δεν είναι έκπληξη ότι η κατασκευή των κ-δέντρων είναι γενίκευση της κατασκευής των δέντρων.

Ορισμός 2.13 (κ-δέντρο). Ένα γράφημα είναι κ-δέντρο εάν μπορεί να κατεσκευαστεί από την παρακάτω διαδικασία:

- Μία κ-κλίκα είναι κ-δέντρο.
- Εάν το T είναι κ-δέντρο και C μία κ-κλίκα του, τότε προσθέτοντας μία κορυφή v στο T και κ ακμές από την νέα κορυφή σε κάθε κορυφή της κλίκας, έχουμε ένα νέο κ-δέντρο.

Είναι προφανές από τον ορισμό ότι τα 1-δέντρα είναι τα δέντρα. Επίσης μπορούμε να δείξουμε, μιας και είναι χορδικά, ότι τα κ-δέντρα έχουν δεντροπλάτος το πολύ[1] κ.

Ορισμός 2.14 (γνήσιο κ-δέντρο). Ένα κ-δέντρο είναι γνήσιο αν κάθε $\kappa+1$ κλίκα του είναι φυσική.

Ορισμός 2.15 (μερικό (γνήσιο) κ-δέντρο). Ένα γράφημα λέγεται μερικό (γνήσιο) κ-δέντρο εάν είναι υπογράφημα ενός (γνήσιου) κ-δέντρου.

Εύκολα βλέπουμε ότι τα μερικά (γνήσια) κ-δέντρα είναι ακριβώς τα γραφήματα που έχουν (γνήσιο) δεντροπλάτος το πολύ κ.

2.3.2 Το la.

Το la όπως και τα κ-δέντρα γενικεύει και αυτό την κατασκευή των δέντρων, αλλά με διαφορετικό τρόπο: η βασική κατασκευή είναι το γράφημα-γινόμενο[2] $T \times K_k$ ενός δέντρου T και μίας κ-κλίκας K_k.

Ορισμός 2.16 (la). Το la(G) για ένα γράφημα G είναι το ελάχιστο k ώστε να υπάρχει δέντρο T τέτοιο ώστε το G να είναι υπογράφημα του $T \times K_k$.

Θεώρημα 2.17 ([ST03]). *Για κάθε γράφημα G, $ptw(G) = la(G) \leq tw(G) + 1$*

[1]εκτός, από την τετριμένη περίπτωση όπου ένα κ-δέντρο είναι απλώς μία κ-κλίκα, το δεντροπλάτος είναι ακριβώς κ

[2]το γράφημα-γινόμενο $G \times H$ δύο γραφημάτων G, H έχει ως κορυφές το καρτεσιανό γινόμενο $V(G) \times V(H)$ των κορυφών των δύο γραφημάτων. Δύο κορυφές $(v,w),(y,z)$ έχουν μεταξύ τους ακμή αν υπάρχει η ακμή (v,y) στο G και $w=z$ ή αν $v=y$ και υπάρχει η ακμή w,z στο H.

2.4 Αναζήτηση σε γραφήματα (Graph Searching)

Μια κατηγορία προβλημάτων στην οποία βρίσκει εφαρμογή το δεντροπλάτος είναι οι αναζητήσεις σε γραφήματα. Ας φανταστούμε – όπως ο Parsons στο [Par78] – το γράφημα σαν ένα σπήλαιο με δωμάτια (κόμβους) και διάδρομους (ακμές). Ένα φυσικό μέτρο για την πολυπλοκότητά του σπηλαίου είναι το πόσο δύσκολο είναι να βρούμε ή να κυνηγησουμε κάποιον ανάμεσα στα δωμάτια. Ανάλογα με τους κανόνες που ορίζουμε για το κυνηγητό αυτό οδηγούμαστε σε διαφορετικές γραφοθεωρητικές παραμέτρους. Ανάμεσά τους, το δεντροπλάτος και το φυσικό δεντροπλάτος.

Στις εκδοχές της αναζήτησης που θα εξετάσουμε θεωρούμε ότι υπάρχει ένας καταζητούμενος ο οποίος κινείται στις ακμές και τους κόμβους του γραφήματος. Μια ομάδα από διώκτες, η οποία δεν γνωριζει τη θέση του, προσπαθεί να τον περικυκλώσει.

Σε μερικές εκδοχές υποθέτουμε ότι ο καταζητούμενος είναι δραστήριος (agile) και κινείται συνέχεια, προσπαθώντας να αποφυγει τους διώκτες του, ενώ σε άλλες μπορει να ειναι αδρανής (inert) μέχρι οι διώκτες του να τον πλησιάσουν. Στις περιπτωσεις που θα εξετασουμε, ο καταζητούμενος υποθέτουμε ότι είναι αδρανής άρα δεν κινειται παρα μόνο εάν κάποιος διώκτης βρεθεί διπλα του[3]. Η ταχύτητα του καταζητούμενου είναι επίσης μια παράμετρος που στον ορισμό της αναζήτησης. Εδώ, θεωρούμε ότι είναι ασύγκρητα μεγαλύτερη των διωκτών, οπότε για να περικυκλωθεί οι διώκτες του πρέπει να φραξουν κάθε πιθανό μονοπάτι. Τέλος, ο καταζητούμενος θεωρούμε ότι δεν είναι ορατός στους διώκτες, παρα μονο όταν περικυκλωθει.

Οι διώκτες λοιπόν, πρέπει γνωρίζοντας το γραφημα να καταστρώσουν ένα σχεδιο με το οποίο θα περιηγηθούν στο γραφημα ώστε, όποια και αν ειναι η αρχική θέση του καταζητούμενου, να τον περικυκλώσουν. Η παράμετρος που μας ενδιαφέρει είναι το πληθος των διωκτών που χρειάζονται για να εκτελεστεί το σχέδιο.

Θα επεκταθούμε για λίγο στους διαισθητικούς κανόνες του κυνηγητού και τις παραλλαγές τους, πριν προχωρησουμε σε μαθηματικούς ορισμούς.

[3]Οι περιπτώσεις όπου ο καταζητούμενος κινείται συνέχεια σχετίζονται ([LaP93])με παραμέτρους όπως το cutwidth και το pathwidth.

2.4.1 Κατηγορίες αναζητήσεων.

Εκτός από τον διαχωρισμό ανάμεσα στο αν ο καταζητούμενος είναι δραστήριος ή αδρανής, οι αναζητήσεις μας διαχωρίζονται και ανάλογα με τον τρόπο που οι διώκτες ελέγχουν το γράφημα.

Αρχικά, όλες οι κορυφές και ακμες του γραφηματος θεωρούνται ύποπτες. Μία κορυφή στην οποία τοποθετούμε ένα διώκτη ειναι ελεγμένη. Μία ελεγμένη κορυφη χωρις διώκτη γίνεται ύποπτη εάν γειτνιάζει με ύποπτη ακμή. Μια ελεγμένη ακμη γινεται ύποπτη εάν γειτνιάζει με μια ύποπτη κορυφη. Ο τροπος με τον οποίο ελέγχονται οι ακμές διαφέρει ανάλογα με την εκδοχη του προβλήματος.

Η αναζητηση διεξάγεται σε γύρους, και σε κάθε γυρο εκτελειται μία από τις παρακάτω ενέργειες από τους διώκτες:

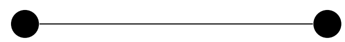
- Προστίθεται ένας διώκτης σε μία κορυφη.
- Αφαιρειται ένα διώκτης από μία κορυφή.
- Μετακινειται ένας διώκτης από μία κορυφη σε μία γειτονική της. (Σε ορισμένες μονο εκδοχές)

Οι τρεις εκδοχές για τον έλεγχο των ακμών, ειναι οι παρακάτω:

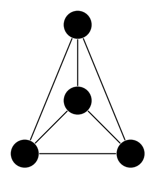
- Να τοποθετηθούν διώκτες στα άκρα της. (Έλεγχος κορυφών — node search, [KP86])
- Να μετακινηθεί ένας διώκτης κατα μηκος της. (Έλεγχος ακμών — edge search)
- Να συμβει οποιοδηποτε από τα παραπάνω (Μεικτος έλεγχος — mixed search)

Στην περιπτωση του ελέγχου κορυφών, δεν επιτρεπονται οι μετακινήσεις διωκτων.

Η παράμετρος που μας ενδιαφέρει, σε κάθε περιπτωση, ειναι ο μέγιστος αριθμός διωκτών που βρίσκονται ταυτόχρονα στο γράφημα. Είναι απλό να δειξουμε ότι ένας έλεγχος ακμών με n διώκτες μπορεί να προσομοιωθεί από έναν έλεγχο κορυφών με $n+1$ διώκτες (όποτε δύο διώκτες ελέγχουν μια ακμη στο αρχικό σχέδιο παρεμβάλουμε την τοποθέτηση, μετακίνηση και αφαιρεση ενός βοηθητικού διώκτη στην ακμή αυτή) και αντίστροφα ένας



Σχήμα 2: Ένα μονοπάτι χρειάζεται 2 διώκτες για έλεγχο κορυφων, αλλά μονο 1 διώκτη για έλεγχο ακμών ανεξάρτητα με το αν ο καταζητούμενος είναι δραστήριος ή ορατός: αρκεί να ελέγξουμε τις ακμές κινούμενοι από το κέντρο προς τα έξω.



Σχήμα 3: Μια πυραμίδα χρειάζεται 3 διώκτες για αδρανή έλεγχο κορυφών, αλλά μόνο 2 διώκτες για αδρανή έλεγχο ακμών.

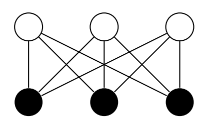
έλεγχος κορυφων με n διώκτες από έναν έλεγχο ακμών με $n + 1$ διώκτες (αντικαθιστούμε κάθε μετακίνηση, με μία προσθήκη διώκτη στον προορισμό και μία αφαιρεση διώκτη από την αφετηρια). Με μία παρόμοια διαδικασια, δείχνουμε ότι ένας μεικτος έλεγχος μπορει να μεταβληθεί σε έλεγχο ακμών ή κορυφών, με κόστος το πολυ έναν διώκτη.

Στην ανάλυση των στρατηγικών που μπορούν να ακολουθήσουν οι διώκτες, ένας σημαντικός διαχωρισμός είναι ανάμεσα στις στρατηγικές που επιτρέπουν οπισθοδρόμηση (recontamination) και αυτές που την απαγορεύουν, τις οποίες ονομάζουμε και μονοτονικές. Ως οπισθοδρόμηση οριζουμε μία αποχωρηση ενός διώκτη που μετατρέπει ελεγμένες κορυφές σε ύποπτες. Είναι σαφές ότι οι στρατηγικές που απαγορευουν την οπισθοδρόμηση είναι υποσύνολο αυτών που την επιτρεπουν. Ένα σημαντικό αποτέλεσμα, είναι ότι σε κάθε μία από τις παραλλαγές που έχουμε αναφέρει, υπάρχει στρατηγική χωρις οπισθοδρόμηση εξίσου καλή με την καλύτερη στρατηγική που επιτρεπει οπισθοδρόμηση [BS91, ST03, KP85].

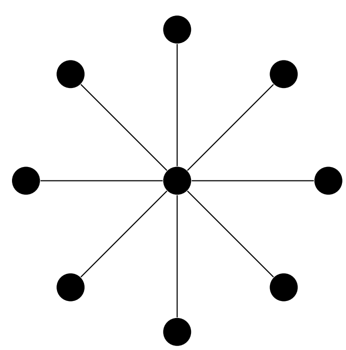
Πριν προχωρησουμε, θα δούμε μερικά παραδειγματα γραφημάτων όπου οι διαφορετικοί τροποι ελέγχου, χρειάζονται πραγματι διαφορετικό πληθος διωκτών.

Στη συνέχεια, θα περιοριστούμε σε δύο κατηγορίες αναζητήσεων:

- Την αναζήτηση κορυφών με αδρανή καταζητούμενο (inert node search, ins), η οποία είναι ισοδύναμη με την αναζήτηση ενός ορατού



Σχήμα 4: Το $K_{2,3}$ χρειάζεται 4 διώκτες για αδρανή έρευνα ακμών αλλα 5 διώκτες για αδρανή έρευνα κορυφών.



Σχήμα 5: Για έναν έλεγχο ακμών σε ένα αστέρι με έναν αδρανή καταζητούμενο χρειαζομαστε μονο έναν διώκτη, αφού αν ο καταζητούμενος βρεθεί σε κάποι φύλλο δεν θα μετακινηθεί μέχρι να τον βρει ο διώκτης. Με έναν αόρατο δραστηριο καταζητούμενο χρειαζόμαστε δύο (έναν για να φυλάει το κέντρο και έναν για να ελέγξει κάθε φύλλο, διαφορετικά). Με έναν ορατό δραστήριο καταζητούμενο, πάλι αρκεί ένας (αρχικά τοποθετείται στο κέντρο και μετά κατευθύνεται στο φύλλο του καταζητούμενου).

δραστήριου καταζητούμενου και το δεντροπλάτος [ST93, DKT97].

- Την αναζήτηση ακμών με αδρανή καταζητούμενο (inert edge search, ies), η οποία είναι ισοδύναμη με την μεικτή αναζήτηση με αδρανή καταζητούμενο (inert mixed search, ims) και το γνήσιο δεντροπλάτος [ST03].

2.4.2 Αναζητήσεις ισοδύναμες με το δεντροπλάτος.

Ορισμός 2.18 (Μεικτή αναζητηση με ορατό, δραστήριο καταζητούμενο,[BS91]). Μια αναζήτηση S σε ένα γραφημα $G = (V, E)$ ειναι μια ακολουθία της μορφής

$$(A_0, Z_0), (A_1, Z_1), \ldots (A_n, Z_n)$$

όπου $A_i \subseteq E$ και $Z_i \subseteq V$, και επιπλέον τηρούνται οι παρακάτω συνθήκες:

- $A_0 = \emptyset$, $A_n = E$.
- Κάθε κορυφή στη οποία προσπίπτουν ακμες του A_i και του $E \setminus A_i$ ανήκει στο Z_i.
- Για κάθε $i < n$ ισχύει ένα από τα παρακάτω:

(Προσθήκη φρουρών) $Z_{i+1} \supseteq Z_i$ και $A_{i+1} = A_i$

(Αφαίρεση φρουρών) $Z_{i+1} \subseteq Z_i$, και το A_{i+1} είναι ακριβώς οι ακμές e του A_i για τις οποίες δεν υπάρχει μονοπάτι P το οποίο να περιέχει την e, μια κορυφη του $E \setminus A_i$ και αποφευγει το Z_{i+1}.

(Έλεγχος κορυφών) $Z_{i+1} = Z_i$ και $A_{i+1} = A_i \cup e$ όπου τα άκρα της e ανήκουν στο Z_i

Στον παραπάνω ορισμό, τα A_i αντιπροσωπεύουν τις ακμές που έχουμε ήδη ελέγξει, και τα Z_i τις κορυφές που περιέχουν διώκτη μετα από το i βήμα.

Το μέγιστο πλήθος $max_i Z_i$ των διωκτών που εμφανίζονται ταυτόχρονα σε κάποια αναζητηση ειναι το κόστος της αναζήτησης. Το ελάχιστο κόστος ως προς τις αναζητήσεις που επιδέχεται ένα γράφημα G ονομάζεται κόστος αναζήτησης κορυφών με ορατό δραστήριο καταζητούμενο στο G (για συντομία vans(G)).

Ορισμός 2.19 (Αναζήτηση κορυφών με αδρανή καταζητούμενο). Μια αναζήτηση S σε ένα γραφημα $G = (V, E)$ ειναι μια ακολουθία της μορφής

$$(A_0, F_0), (A_1, F_1), \ldots (A_n, F_n)$$

όπου $A_i \subseteq V$ και $F_i \subseteq V$, και επιπλέον τηρούνται οι παρακάτω συνθήκες:

- $A_0 = \emptyset$,$F_0 = \emptyset$, $A_n = V$.
- Κάθε κορυφή στη οποία προσπίπτουν ακμες του A_i και του $E \setminus A_i$ ανήκει στο Z_i.
- Για κάθε $i < n$ ισχύει ένα από τα παρακάτω:

(Προσθήκη φρουρού) $F_{i+1} = F_i \cup \{v\}$ και το A_{i+1} είναι ακριβώς οι κορυφές t του $A_i \cup \{v\}$ για τις οποίες δεν υπάρχει μονοπάτι P από την v στην t το οποίο να αποφευγει το F_{i+1}.

(Αφαίρεση φρουρών) $F_{i+1} \subseteq F_i$, και $A_{i+1} = A_i$.

(Έλεγχος κορυφών) $F_{i+1} = F_i$ και $A_{i+1} = A_i \cup F_i$

Τα σύνολα F_i αντιπροσωπεύουν τις θέσεις των διωκτών στο γράφημα τη στιγμή i, ενώ τα σύνολα A_i τις κορυφές οι οποίες έχουν ελεγθεί και είναι απροσπέλαστες στον καταζητούμενο. Παρατηρούμε ότι η αφαίρεση φρουρών δεν προκαλεί την μετακίνηση του καταζητούμενου, ενώ όπου υπάρχει μετακίνηση, αυτή γίνεται μόνο από την κορυφή στην οποία μόλις εμφανίστηκε κάποιος διώκτης.

Το μέγιστο πλήθος $max_i F_i$ των διωκτών που εμφανίζονται ταυτόχρονα σε κάποια αναζητηση ειναι το κόστος της αναζήτησης. Το ελάχιστο κόστος ως προς τις αναζητήσεις που επιδέχεται ένα γράφημα G ονομάζεται κόστος αναζήτησης κορυφών με αδρανή καταζητούμενο στο G (για συντομία ins(G)).

Θεώρημα 2.20 ([ST93, DKT97]). $vans(G) - 1 = ins(G) - 1 = tw(G)$

2.4.3 Αναζητήσεις ισοδύναμες με το γνήσιο δεντροπλάτος.

Ορισμός 2.21 (Μεικτή Αναζητηση με αδρανή καταζητούμενο.). Μια αναζήτηση S σε ένα γραφημα $G = (V, E)$ ειναι μια ακολουθία της μορφής

$$(A_0, F_0), (A_1, F_1), \ldots (A_n, F_n)$$

όπου $A_i \subseteq V$ και $F_i \subseteq V$, και επιπλέον τηρούνται οι παρακάτω συνθήκες:

- $A_0 = \emptyset$, $A_n = V$.
- Κάθε κορυφή στη οποία προσπίπτουν ακμες του A_i και του $E \setminus A_i$ ανήκει στο Z_i.
- Για κάθε $i < n$ ισχύει ένα από τα παρακάτω:

(Προσθήκη φρουρού) $F_{i+1} = F_i \cup \{v\}$ και το A_{i+1} είναι ακριβώς οι κορυφές t του $A_i \cup \{v\}$ για τις οποίες δεν υπάρχει μονοπάτι P από την v στην t το οποίο να αποφευγει το F_{i+1}.

(Αφαίρεση φρουρών) $F_{i+1} \subseteq F_i$, και $A_{i+1} = A_i$.

(Έλεγχος κορυφών) $F_{i+1} = F_i$ και $A_{i+1} = A_i \cup F_i$

(Έλεγχος ακμών) $F_{i+1} = (F_i \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ για κάποια $v \in F_i$ και $w \in V$ ώστε να υπάρχει ακμη $(v, w) \in E$. Επιπλεον, το A_{i+1} είναι ακριβώς οι κορυφές t του $A_i \cup w$ για τις οποίες δεν υπάρχει μονοπάτι P από την w στην t το οποίο να αποφευγει το $F_i \setminus \{v\}$ και την (v, w).

Στον παραπάνω ορισμό, θα πρέπει να θεωρήσουμε τα F_i ως πολυσύνολα μιας και ενδέχεται να θέλουμε να μετακινήσουμε ένα φρουρό από μία κορυφή v στην w μέσω της ακμής (v, w) αφήνοντας ένα δεύτερο φρουρό στην v για να εμποδίσει κάποια πιθανή διαδρομή του καταζητούμενου. Για να μετατρέψουμε τον παραπάνω ορισμό σε αναζήτηση ακμών απαγορεύουμε τον έλεγχο κορυφών.

Το μέγιστο πλήθος $max_i F_i$ των διωκτών που εμφανίζονται ταυτόχρονα σε κάποια αναζητηση ειναι το κόστος της αναζήτησης. Το ελάχιστο κόστος ως προς τις αναζητήσεις που επιδέχεται ένα γράφημα G ονομάζεται κόστος μεικτής αναζήτησης με αδρανή καταζητούμενο στο G (για συντομία $\mathrm{ims}(G)$). (Αντίστοιχα $\mathrm{ies}(G)$ για αναζήτηση ακμών).

Θεώρημα 2.22 ([ST03]). *$ims(G) = ies(G) = ptw(G)$*

Σχόλιο. Παρατηρούμε ότι αντίθετα με το θεώρημα 2.20, εδώ δεν εμφανίζεται το -1. Οπότε για ένα γράφημα G ισχύει ακριβώς ένα από τα εξής: $\mathrm{ptw}(G) = \mathrm{tw}(G)$, $\mathrm{ims}(G) = \mathrm{ins}(G)$.

3 Εφαρμογές του Δεντροπλάτους.

3.1 Γραφήματα με φραγμένο Δεντροπλάτος.

3.1.1 Σειραϊκά-Παράλληλα γραφήματα.

Γνωρίζουμε ότι τα (συνεκτικά) γραφήματα δεντροπλάτους 1 είναι τα δέντρα. Είναι λοιπόν φυσικό να αναρωτηθούμε αν τα γραφήματα δεντροπλάτους το πολύ 2 περιγράφουν κάποια ήδη γνωστή κατηγορία γραφημάτων. Πράγματι, όπως θα δούμε, τα γραφήματα δεντροπλάτους το πολύ 2 σχεδόν[4] συμπίπτουν με τα σειραϊκά-παράλληλα γραφήματα.

Τα σειραϊκά-παράλληλα γραφήματα περιγράφουν τα ομώνυμα ηλεκτρικά κυκλώματα (ισοδύναμα, κυκλώματα χωρίς γέφυρες Wheatstone [Duf65]). Τα κυκλώματα αυτά είναι ιδιαίτερα χρήσιμα σε εφαρμογές διότι οι υπολογισμοί των αντιστάσεων σε τέτοια κυκλώματα είναι απλούστεροι από ότι στη γενική περίπτωση. Τα σειραϊκά-παράλληλα (στο εξής, σ-π) γραφήματα κατασκευάζονται όπως τα σ-π κυκλώματα: συνδέοντας δύο υπάρχοντα σ-π γραφήματα σε σειρά ή παράλληλα και συνεπώς ορίζονται επαγωγικά.

Ορισμός 3.1. Σειραϊκά-παράλληλα είναι τα γραφήματα G με δύο ετικέτες (α, τ), όπου $\alpha, \tau \in V(G)$ τα οποία μπορούν να κατασκευαστούν ως εξής:

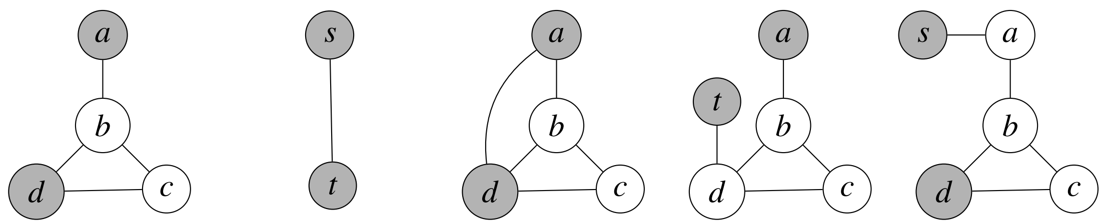
(Βάση) Μία 2-κλίκα C με ετικέτες στις δύο κορυφές της v,w είναι σ-π γράφημα.

(Παράλληλη σύνδεση) Αν δύο γραφήματα με εττικέτες, (G, v, w) και (H, y, z) είναι σ-π, τότε το γράφημα $(G \| S, v, w)$ που προκύπτει αν ενώσουμε τα G, H ταυτίζοντας τις κορυφές v, y και w, z, και με εττικέτες v, w είναι σ-π γράφημα.

(Σύνδεση σε σειρά) Αν δύο γραφήματα με εττικέτες, (G, v, w) και (H, y, z) είναι σ-π, τότε το γράφημα $(G{+}S, v, z)$ που προκύπτει αν ενώσουμε τα G, H ταυτίζοντας τις κορυφές y, w και με εττικέτες v, z είναι σ-π γράφημα.

Λήμμα 3.2. *Κάθε σειραϊκό-παράλληλο γράφημα G έχει δεντροπλάτος το πολύ 2.*

[4] Τα γραφήματα δεντροπλάτους το πολύ 2 είναι ελαφρώς ευρύτερη έννοια: περιλαμβάνουν τα σειραϊκά παράλληλα γραφήματα, και γραφήματα των οποίων κάθε διπλά συνεκτική συντιστώσα είναι σειραϊκό παράλληλο γράφημα.



(G, a, d) (H, s, t) $(G \| H, a, d)$ $(G + H, a, t)$ $(H + G, s, d)$

Σχήμα 6: Δύο σειραϊκά-παράλληλα γραφήματα και οι συνδέσεις τους

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω ορισμό για να κατασκευάσουμε για οποιοδήποτε σ-π γράφημα μία δεντροαποσύνθεση πλάτους το πολύ 3.

1. Η αποσύνθεση μίας 2-κλίκας $C = (v, w)$ είναι ένα δέντρο με μία κορυφή V_C με $B(V_C) = \{v, w\}$. Η μοναδική αυτή κορυφή του είναι προφανώς και η ρίζα του.

2. Αν το G προέκυψε από παράλληλη σύνδεση των (F, v, w) και (H, y, z), τότε το δέντρο της αποσύνθεσης του G προκύπτει εάν θεωρήσουμε το γράφημα-ένωση των F, H στο οποίο προσθέτουμε μία νέα κορυφή P_{FH} με $B(P_{FH}) = \{v, w\}$. Επίσης προσθέτουμε ακμές από την P_{FH} στις ρίζες των F, H, και ορίζουμε ως ρίζα του νέου δέντρου την P_{FH}.

3. Αν το G προέκυψε από σειραϊκή σύνδεση των (F, v, w) και (H, y, z), τότε το δέντρο της αποσύνθεσης του F προκύπτει εάν θεωρήσουμε το γράφημα-ένωση των F, H στο οποίο προσθέτουμε μία νέα κορυφή S_{FH} με $B(S_{FH}) = \{v, w, z\}$. Επίσης προσθέτουμε ακμές από την S_{FH} στις ρίζες των F, H, και ορίζουμε ως ρίζα του νέου δέντρου την S_{FH}.

Είναι προφανές ότι η πρώτη περίπτωση μας δίνει πράγματι μία αποσύνθεση, η οποία μάλιστα είναι βέλτιστη. Αυτό είναι λιγότερο προφανές στις άλλες δυο περιπτώσεις οπότε θα το εξετάσουμε αναλυτικότερα.

Αρχικά, επιβεβαιώνουμε ότι το γράφημα της υποψήφιας αποσύνθεσης που κατασκευάζουμε είναι πράγματι δέντρο. Εκ κατασκευής είναι συνεκτικό, και καμία από τις ακμές που προσθέσαμε δεν δημιούργησε κύκλο.

Κατόπιν, εξετάζουμε αν πληρούνται οι τρεις ιδιότητες που πρέπει να έχει μια αποσύνθεση.

1. Κάθε κορυφή του G προϋπήρχε σε τουλάχιστον ένα από τα F, H, οπότε βρίσκεται σε μία από τις τσάντες της υποψήφιας αποσύνθεσης.

2. Ομοίως, τόσο στην παράλληλη όσο και στην σειραϊκή σύνδεση, οι ακμές του G προυπάρχουν στα συνδεόμενα γραφήματα και άρα και στις αποσυνθέσεις τους.

3. Αναφορικά με την δεντρική ιδιότητα, παρατηρούμε ότι τα γραφήματα F, H είναι ξένα από κατασκευή με εξαίρεση τις κορυφές που ταυτίζονται. Επίσης παρατηρούμε ότι για ένα γράφημα (F, v, w) οι κορυφές με εττικέτες, v, w περιέχονται στην τσάντα της ρίζας του δέντρου της αποσύνθεσης του. Στην αποσύνδεση της σύνδεσης (παράλληλης ή σειραϊκής) του F με το H, η δεντρική ιδιότητα ισχύει τετριμένα ανάμεσα σε δύο κορυφές όπου αμφότερες προήλθαν από την αποσύνθεση του F ή του H.

   Έστω μία κορυφή V_F που υπήρχε στην αποσύνθεση του F και μία V_H που προήλθε από αυτήν του H. Η τομή των δύο τσαντών μπορεί να περιέχει μονάχα τη μία (σειραική) ή τις δύο (παράλληλη) κορυφές που ταυτίστηκαν κατά τη σύνδεση. Έστω ότι στην τομή $B(V_F) \cap B(V_H)$ περιέχεται μόνο η w. Η δεντρική ιδιότητα της αποσύνθεσης του F, σε συνδιασμό με την παρουσία της w στην τσάντα της ρίζας της αποσύνθεσης του F μας εξασφαλίζει ότι στις κορυφές ανάμεσα στην V_F και την ρίζα της αποσύνθεσης του F, η w υπάρχει. Ομοίως και στις κορυφές ανάμεσα στην V_H και την ρίζα της αποσύνθεσης του H. Ανάμεσα στις δύο παλιές ρίζες, βρίσκεται μόνο η νέα ρίζα του δέντρου, στην οποία κατά την κατασκευή τοποθετήσαμε την w. Άρα, η τομή των $B(V_F) \cap B(V_H)$ περιέχεται στην τσάντα κάθε ενδιάμεσης κορυφής και η δεντρική ιδιότητα ισχύει.

□

3.1.2 Προγράμματα χωρίς *goto*.

Η πλειοψηφία των γλωσσών προγραμματισμού παρέχουν τη εντολη *goto*. Ένα πρόγραμμα αποτελείται από μία ακολουθία αριθμημένων εντολών. Κατά την εκτέλεση ενός προγράμματος υπάρχει ένας δείκτης (instruction pointer) στον οποίο αποθηκεύεται η επόμενη εντολή που θα εκτελεστεί. Κατά κανόνα, μετά την εκτέλεση μίας εντολής, η τιμή του δείκτη αυξάνεται κατά 1, ώστε να εκτελεστεί η επόμενη. Η εντολή *goto x* όμως, αλλάζει την τιμή του δείκτη σε *x*. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να επιλέξουμε να εκτελέσουμε ένα διαφορετικό υποπρόγραμμα ανάλογα με την τιμή κάποιας μεταβλητής.

Η γλώσσα μηχανής της συντριπτικής πλειοψηφίας των επεξεργαστών περιλαμβάνει εντολές ανάλογες της *goto* και για αυτόν το λόγο η *goto* εμφανίστηκε σε γλώσσες προγραμματισμού νωρίτερα από άλλες δομές ελέγχου. Στην FORTRAN για παράδειγμα η *goto* υπήρχε στην πρώτη της έκδοση, το 1957, πριν τις συναρτήσεις (1958), τα blocks στα *if* (1978) και την αναδρομή (1991).

Σε γλώσσες υψηλού επιπέδου, το ότι η *goto* προσεγγίζει τη γλώσσα μηχανής περισσότερο από τις άλλες δομές ελέγχου δεν είναι σημαντικό πλεονέκτημα, ενώ η χρήση της μπορεί να οδηγήσει σε δυσανάγνωστα προγράμματα, των οποίων η σωστή λειτουργία είναι δύσκολο να ελεγθεί ή/και να αποδειχθεί. Ενδεικτικό είναι το διάσημο γράμμα του Dijkstra [Dij68] στο οποίο υποστηρίζει την κατάργηση της *goto*. Ένα νέο επιχείρημα στο διάλογο σχετικά με τη χρησιμότητα της *goto* ήρθε να προστεθεί από τον Thorup [Tho98] ο οποίος απέδειξε χρησιμοποιώντας το δεντροπλάτος ότι για τα προγράμματα στα οποία δεν χρησιμοποιείται η *goto*, το πρόβλημα της *ανάθεσης καταχωρητών* (register allocation) είναι ευκολότερο.

Ένας επεξεργαστής έχει στη διάθεσή του έναν περιορισμένο αριθμό θέσεων μνήμης που ονομάζονται καταχωρητές. Η πρόσβαση του επεξεργαστή στους καταχωρητές είναι αρκετές τάξεις μεγέθους ταχύτερη από ότι η πρόσβασή του στην κεντρική μνήμη οπότε θα θέλαμε όλες οι μεταβλητές κατά την εκτέλεση ενός προγράμματος να βρίσκονται σε καταχωρητές. Ο αριθμός όμως των καταχωρητών είναι περιορισμένος οπότε αυτό δεν είναι πάντα εφικτό. Στο πρόγραμμα της ανάθεσης καταχωρητών εξετάζουμε εάν k καταχωρητές αρκούν για την εκτέλεση ενός προγράμματος με τρόπο ώστε κάθε μεταβλητή που χρησιμοποιεί το πρόγραμμα να αποθηκεύεται σε καταχωρητή. Αυτό που κάνει το πρόβλημα μη-τετριμένο είναι ότι κάποιες μεταβλητές μπορεί να δημιουργηθούν μετά την αρχή της εκτελεσής του, και άλλες μπορεί να καταστραφούν πριν το τέλος του (διαφορετικά, απλά θα μετράγαμε πόσα διαφορετικά ονόματα μεταβλητών εμφανίζονται στο πρόγραμμα). Το αποτέλεσμα του Thorup βασίζεται στο ότι το διάγραμμα ροής προγραμμάτων σε Pascal και Algol χωρίς *goto* και χωρίς μερική αποτίμηση (short-circuit evaluation) λογικών παραστάσεων, έχει δεντροπλάτος το πολύ 2[5],

Χωρίς τον περιορισμό αυτό, μιας και επιτρέπεται να μεταπηδήσουμε από οποιοδήποτε σημείο του προγράμματος σε οποιοδήποτε άλλο το δεντροπλάτος είναι μη-φραγμένο. Κάθε μεταβλητή που εμφανίζεται στο πρόγραμμα ορίζεται σε ένα συνεκτικό υπογράφημα του διαγράμματος ροής, το οποίο ονομάζουμε διάγραμμα χρόνου ζωής της μεταβλητής. Με βάση τα διαγράμματα χρόνου ζωής των μεταβλητών κατασκευάζουμε το γράφημα συμπτώσεων (*interference graph*) στο οποίο δημιουργούμε μία κορυφή για κάθε μεταβλητή, και ενώνουμε δύο κορυφές με ακμή αν οι αντίστοιχες μεταβλητές έχουν διαγράμματα χρόνου ζωής με μη-κενή τομή. Αντιστοιχώντας κάθε καταχωρητή σε ένα χρώμα, το να αναθέσουμε κάθε μεταβλητή σε έναν καταχωρητή χωρίς δύο μεταβλητές να χρησιμοποιούν τον ίδιο καταχωρητή ταυτόχρονα είναι ισοδύναμο με το να χρωματίσουμε το γράφημα συμπτώσεων χωρίς δύο γειτονικές κορυφές να έχουν ίδιο χρώμα.

Γνωρίζουμε από τη θεωρία πολυπλοκότητας ότι το πρόβλημα του χρωματισμού στη γενική του περίπτωση είναι NP-Hard και επιπλέον ότι δεν υπάρχουν πολυωνυμικοί αλγόριθμοί με σταθερό λόγο προσέγγισης [LY93]. Στην περίπτωση όμως του φραγμένου δεντροπλάτους μπορούμε να πετύχουμε κάτι πολύ καλύτερο:

Θεώρημα 3.3. *Έστω ένα γράφημα G και μια αποσυνθεσή του πλάτους k. Μπορούμε να χρωματίσουμε το γράφημα τομών (intersection graph) I οποιοδήποτε συνόλου X από συνεκτικά υπογραφήματα του G με λόγο προσέγγισης $\lfloor k/2 \rfloor + 1$. Αν ο μέγιστος βαθμός των κορυφών του I είναι m, τότε ο παραπάνω χρωματισμός μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(kmn + m^{2.5}n)$.*

Ένα ανάλογο αποτέλεσμα για την γλώσσα Java έχουμε στο [GMT02]. Αν και η Java από κατασκευής δεν περιλαμβάνει την goto, έχει τη δυνατότητα για break και continue με ετικέτες, και η δυνατότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη της goto αναφορικά με το δεντροπλάτος του διαγράμματος ροής. Αν αφαιρέσουμε τη δυνατότητα αυτή, το όριο για το δεντροπλάτος των διαγραμμάτων ροής είναι 6, όπως και αυτό της C. Στην ίδια δημοσίευση έχουμε και ορισμένες μετρήσεις για το δεντροπλάτος στα διάγράμματα ροής των προγραμμάτων της βιβλιοθήκης της java. Το μέσο δεντροπλάτος

[5] Αν επιτρέψουμε μερικές αποτιμήσεις, το όριο αυξάνεται κατά 1. Στην περίπτωση της Modula-2 το όριο είναι 5 καθώς επιτρέπονται οι μερικές αποτιμήσεις και επιπλέον προβλέπονται παραπάνω από 1 σημεία εξόδου από συναρτήσεις και επαναλήψεις. Στην περίπτωση της C επιπλέον υποστηρίζεται η χρήση του continue μέσα σε δομές επανάληψης και το όριο για το δεντροπλάτος είναι 6.

είναι 2.7, μόλις μία συνάρτηση έχει δεντροπλάτος 5, ενώ δεν εμφανίζεται συνάρτηση με δεντροπλάτος 6. Τα εμπειρικά αυτά αποτελέσματα είναι ενθαρρυντικά για τις εφαρμογές του παραπάνω θεωρήματος.

Σχόλιο. Σημειώνουμε ότι κατά τον σχεδιασμό μεταγωτιστών ένα πρόβλημα εξίσου σημαντικό με αυτό της ανάθεσης καταχωρητών είναι αυτό της ανεπάρκειάς τους (spilling), που έχει να κάνει με τις αποφάσεις που πρέπει να πάρει ο μεταγλωτιστής όταν η απάντηση στο πρόβλημα της ανάθεσης καταχωρητών είναι αρνητική.

3.2 Βελτιστοποίηση Επερωτήσεων (Query Optimization).

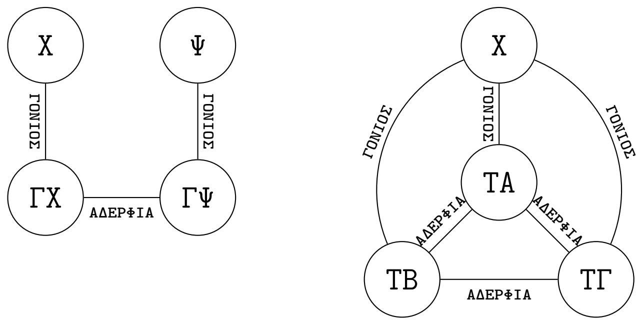
Οι Βάσεις Δεδομένων χρησιμοποιούνται ευρύτατα για την αποθήκευση, αναζήτηση και συσχέτιση πληροφοριών: η ηλεκτρονική αναζήτηση μιας δημοσίευσης ή η αναζήτηση ενός e-mail στον δίσκο του υπολογιστή μας. Οι εφαρμογές τους διαφέρουν σε κλίμακα (από προσωπικές βιβλιοθήκες με μερικές δεκάδες βιβλία, μέχρι μηχανές αναζήτησης που αποθηκεύουν κάθε κείμενο και εικόνα στον παγκόσμιο ιστό) όσο και σε πολυπλοκότητα. Η πολυπλοκότητα αυτή αυξάνεται όσο μεγαλύτερη δυνατότητα έκφρασης δίνεται στους χρήστες της βάσης δεδομένων πράγμα που μας οδηγεί φυσικά στο να αναζητούμε αποτελεσματικούς αλγόριθμους για την ικανοποίηση των αιτημάτων τους.

Οι επερωτήσεις (queries) είναι αναζητήσεις σε βάσεις δεδομένων. Μία βάση δεδομένων θεωρούμε ότι αποτελείται από ένα σύνολο από σχέσεις (relationships) οι οποίες κωδικοποιούν τα δεδομένα μας. Μία επερώτηση αποτελείται από μία κεφαλίδα (head), η οποία αποτελείται από το όνομα της επερώτησης και ορισμένες μεταβλητές, και το σώμα (body) το οποίο είναι η λογική σύζευξη ενός ή παραπάνω υποερωτήματων. Υποερώτημα είναι μία σχέση της βάσης με ορίσματα μεταβλητές.

Αν για παράδειγμα στη βάση μας υπήρχαν αποθηκευμένες οι σχέσεις `ΑΔΕΡΦΙΑ(Ξ,Ψ)` και `ΓΟΝΙΟΣ(Γ,Τ)` τότε θα μπορούσαμε να ορίσουμε τις παρακάτω επερώτησεις:

- `Α_ΞΑΔΕΡΦΙΑ(Χ,Υ) :- ΓΟΝΙΟΣ(ΓΧ,Χ),ΓΟΝΙΟΣ(ΓΥ,Υ),ΑΔΕΡΦΙΑ(ΓΧ,ΓΥ).`

- ```
  ΠΟΛΥΤΕΚΝΟΣ(Χ) :- ΓΟΝΙΟΣ(Χ,ΤΑ),ΓΟΝΙΟΣ(Χ,ΤΒ),ΓΟΝΙΟΣ(Χ,ΤΓ),
                  ,ΑΔΕΡΦΙΑ(ΤΑ,ΤΒ),ΑΔΕΡΦΙΑ(ΤΒ,ΤΓ),ΑΔΕΡΦΙΑ(ΤΓ,ΤΑ).
  ```
  ```



Σχήμα 7: Τα γραφήματα που προκύπτουν από τις επερωτήσεις `Α_ΞΑΔΕΡΦΙΑ` και `ΠΟΛΥΤΕΚΝΟΣ`. Η επερώτηση `ΠΟΛΥΤΕΚΝΟΣ` περιέχει κύκλο.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, οι Χ και Υ είναι πρώτα ξαδέρφια αν υπάρχει ένας γονιός ΓΧ του Χ και ένας γονιός ΓΥ του Υ έτσι ώστε οι δυο γονείς ΓΧ και ΓΥ να είναι αδέρφια. Επίσης, ο Χ είναι πολύτεκνος εαν έχει τρία παιδιά , ΤΑ,ΤΒ,ΤΓ τα οποία είναι ανα δύο αδέρφια[6].

Είναι απλό να αναπαραστήσουμε το σώμα μιας επερώτησης με ένα υπεργράφημα. Κατασκευάζουμε μία κορυφή για κάθε μεταβλητή που εμφανίζεται, και μία (υπερ)ακμή για κάθε υποερώτημα, η οποία ενώνει (περιέχει) τις μεταβλητές του υποερωτήματος. Τα γραφήματα για τα δύο παραπάνω παραδείγματα, βρίσκονται στο σχήμα 7.

Μία σημαντική ιδιότητα για κάθε επερώτηση είναι το αν είναι ακυκλική ή όχι, καθώς στις ακυκλικές επερωτήσεις έχουμε μεγαλύτερη ευχέρεια βελτιστοποιήσεων. Στην περίπτωση που το υπεργράφημά της είναι και απλό γράφημα, μπορούμε να απαντήσουμε εύκολα: αν με διαδοχικές αφαιρέσεις φύλων από ένα γράφημα G καταλήγουμε στο κενό γράφημα, τότε το G είναι ακυκλικό. Στην περίπτωση που είναι γνήσιο υπεργράφημα χρησιμοποιούμε τις αναγωγές GYO (Graham, Yu & Ozsuyoglu). Ουσιαστικά εφαρμόζουμε το παραπάνω κριτήριο, αντικαθιστόντας την έννοια του φύλου με αυτήν του αυτιού (ear). Μία υπερακμή H είναι αυτί ανν υπάρχει άλλη υπερακμή Y που περιέχει κάθε κορυφή της H εκτός από τις αποκλειστικές. Αποκλειστικές κορυφές της H είναι όσες δεν περιέχονται σε καμία άλλη υπερακμή.

[6]Το αίτημα τα παιδιά να είναι ανα δύο αδέρφια είναι τεχνικό: εαν δεν το είχαμε προσθέσει, δεν θα εξασφαλίζαμε ότι οι τιμές `ΤΑ,ΤΒ,ΤΓ` είναι ανα δύο διαφορετικές, οπότε η επερωτησή μας θα θεωρούσε πολύτεκνο όποιον είχε τουλάχιστον ένα παιδί αντί τουλάχιστον 3.

Με βάση τις αναγωγές GYO μπορούμε να κατασκευάσουμε δέντρα αποδόμησης (elimination trees), ως εξής: όταν αφαιρούμε ένα αυτί H επειδή οι μη-αποκλειστικές κορυφές του περιέχονται στην υπερακμή Y, προσθέτουμε (αν δεν υπάρχουν ήδη) στο δέντρο κορυφές με εττικέτες H και Y και τις ενώνουμε με ακμή.

Ανάλογα με τον ορισμό του δεντροπλάτους ως γενίκευση της ακυκλικότητας στα γραφήματα, το πλάτος επερώτησης (query width), μετρά πόσο απέχει μία επερώτηση από το να είναι κυκλική. Οι ακυκλικές επερωτήσεις έχουν πλάτος επερώτησης 1. Το πλάτος επερώτησης ορίζεται μέσω των αποσυνθέσεων επερωτήσεων οι οποίες είναι γενικεύσεις των elimination trees.

Ορισμός 3.4. Έστω μια επερώτηση E με υποερωτήματα $S_i \in S$ και μεταβλητές $A_i \in A$. Λέμε η T, X είναι αποσύνθεση της E αν το T είναι δέντρο, και η X μία συνάρτηση από τις κορυφές του T στα υποσύνολα του $S \cup A$ [7], και επιπλέον ισχύει:

- Για κάθε υποερώτημα S_i, υπάρχει $v \in V(G)$ ώστε $S_i \in X(v)$
- Για κάθε υποερώτημα S_i οι κορυφές v όπου $S_i \in X(v)$ επάγουν συνεκτικό υπογράφημα του T.
- Για κάθε μεταβλητή A_i οι κορυφές v όπου $A_i \pitchfork X(v)$ επάγουν συνεκτικό υπογράφημα του T.

  Για μία μεταβλητή A_i και μία κορυφή v του T, λέμε ότι $A_i \pitchfork X(v)$ αν $A_i \in X(v)$ ή υπάρχει υποερώτημα $S_i \in X(v)$ ώστε η A_i να εμφανίζεται στο S_i.

  Μία αποσύνθεση έχει πλάτος ίσο με $\max_{v \in V(G)} |X(v)|$.

Ορισμός 3.5 (Πλάτος Επερώτησης). Μία επερώτηση E έχει πλάτος επερώτησης $qw(E)$ ίσο με το ελάχιστο πλάτος ανάμεσα στα πλάτη των αποσυνθέσεων που επιδέχεται.

Μέχρι τώρα, δεν είναι γνωστό αν υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος ο οποίος να υπολογίζει το πλάτος μιας επερώτησης και να κατασκευάζει κατάλληλη αποσύνθεση. Μπορούμε όμως να πετύχουμε μία καλή προσέγγιση του πλάτους επερώτησης μέσω του δεντροπλάτους.

[7] αν περιορισθούμε στα υποσύνολα του S έχουμε τον ορισμό των δέντρων αποδόμησης.

Στο [CR97] οι Chekuri και Rajaraman δείχνουν ότι μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε ένα διμερές γράφημα για κάθε επερώτηση το οποίο έχει την ιδιότητα οι δεντροαποσυνθέσεις του να είναι αποσυνθέσεις επερώτησης, και αντίστροφα, οι αποσυνθέσεις επερώτησεων είναι (ή μπορούν να μετασχηματιστούν) σε δεντροαποσυνθέσεις. Το γράφημα αυτό έχει στο ένα μέρος του μία κορυφή για κάθε μεταβλητή που εμφανίζεται στο σώμα της επερώτησης και στο άλλο μία κορυφή για κάθε υποερώτημα. Μία μεταβλητή ενώνεται με ένα υποερώτημα εάν εμφανίζεται σε αυτό.

Θεώρημα 3.6. *Για κάθε επερώτηση* E, $\frac{tw(E)}{(a+1)} \leq qw(E) \leq tw(E) + 1$, *όπου* a *η μέγιστη πλειομέλεια ανάμεσα στα υποερωτήματα της* E.

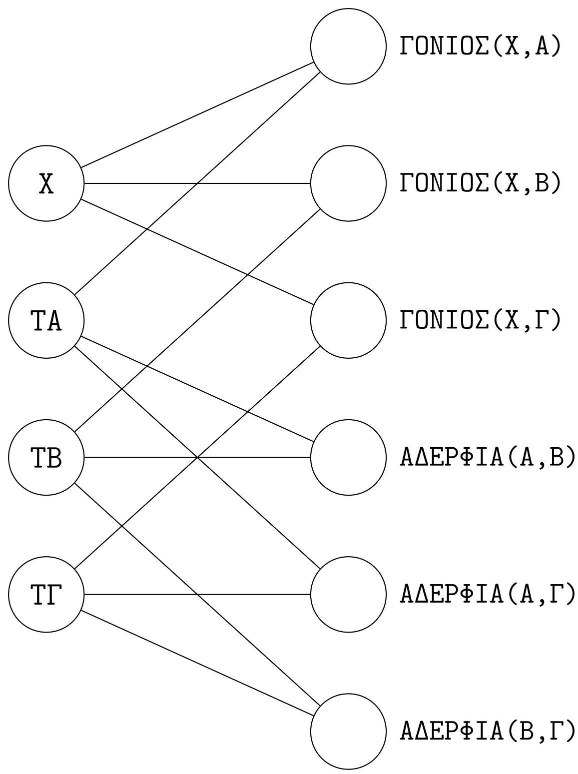
Απόδειξη. Για την πρώτη ανισότητα, κάθε αποσύνθεση επερώτησης πλάτους r μπορεί να μετασχηματιστεί σε μία δεντροαποσύνθεση για το διμερές γράφημα με πλάτος το πολύ $(a+1)r-1$: προσθέτουμε σε κάθε $X(v)$ τις μεταβλητές που εμφανίζονται στα υποερωτήματα που περιέχει, οι οποίες είναι το πολύ a το πλήθος για κάθε υποερώτημα. Εύκολα ελέγχουμε ότι η δεντρική ιδιότητα διατηρείται.

Για τη δεύτερη ανισότητα, είναι εύκολο να δούμε ότι μία δεντροαποσύνθεση για το διμερές γράφημα μετασχηματίζεται άμεσα σε μια αποσύνθεση και για την αρχική επερώτηση. Κάθε υποερώτημα περιέχεται σε κάποια τσάντα, ενώ οι εμφανίσεις τόσο των μεταβλητών όσο και των υποερωτημάτων στις τσάντες της αποσύνδεσης έχουν δεντρική δομή. Το +1 προκύπτει από το ότι το πλάτος της δεντροαποσύνθεσης είναι μικρότερο κατά 1 από το μέγεθος της μεγαλύτερης τσάντας ενώ στις αποσυνθέσεις επερωτήσεων είναι ίσο με αυτό.

□

Βασιζόμενοι στη παραπάνω σχέση, αν περιορίσουμε την πλειομέλεια των σχέσεων της Βάσης μας από μία σταθερά a, μπορούμε να πετύχουμε προσεγγίσεις λόγου a για το πλάτος της επερώτησης.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα μπορούμε να για παράδειγμα να αποφανθούμε αν μια επερώτηση E περιέχεται στην E' σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς το πλάτος της E. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό μπορούμε πάλι σε πολυωνυμικό χρόνο να εξετάσουμε αν μια επερώτηση με φραγμένο πλάτος μπορεί να μετασχηματιστεί αποτελεσματικά με χρήση όψεων.



Σχήμα 8: Η κατασκευή για την κυκλική επερώτηση ΠΟΛΥΤΕΚΝΟΣ.Οι κορυφές του δεξιού μέρους έχουν βαθμό 2 διότι το γράφημα της επερώτησης δεν είναι γνήσιο πολυγράφημα (ισοδύναμα, οι σχέσεις που εμφανίζονται στα υποερωτήματα έχουν πλειομέλεια το πολύ 2.

4 Ένας νέος ισοδύναμος ορισμός.

Σε αυτό το σημείο θα εισάγουμε έναν νέο ορισμό για το γνήσιο δεντροπλάτος, βασισμένο σε ένα νέο είδος αποσύνθεσης, την *αποσύνθεση ακμών*.

Ορισμός 4.1 (Αποσύνθεση ακμών). Μια αποσύνθεση ακμών ενός γραφήματος G είναι ένα δέντρο T και μια '1-1' συνάρτηση m από τις ακμές του G στις ακμές του T.

Ορισμός 4.2 (Σύνορα). Έστω G ένα γράφημα και S ένα υποσύνολο των ακμών του. Ορίζουμε σαν σύνορο του S (∂S), το σύνολο των κορυφών του G στις οποίες προσπίπτουν ακμές του S, και ακμές του $E(G) \setminus S$.

Ορισμός 4.3 (Πλάτος αποσύνθεσης ακμών σε κορυφή). Έστω ένα γράφημα G και μία φυσική αποσύνθεση ακμών του, (T, m). Μια κορυφή v του T, διαχωρίζει το $T \setminus v$ σε $deg(v)$ συνιστώσες, έστω C_i. Ορίζουμε $E_i = \{e \in E(G) | m^{-1}(e) \in E(C_i)\}$ τις αντίστροφες εικόνες των C_i ως προς την m. Προφανώς τα E_i είναι διαμέριση του $E(G)$. Ορίζουμε ως πλάτος της αποσύνθεσης (T, e) στην κορυφή v, $w_T(v)$ το $||\{\bigcup_{i=1..i=deg(v)} \partial E_i\}||$, και $\mathbf{bd}(v) = \{\bigcup_{i=1..i=deg(v)} \partial E_i\}$ τις συνοριακές κορυφές ως προς την v. Το $\mathbf{bd}(v)$ το ονομάζουμε και σύνορο της v.

Ορισμός 4.4 (Διαίρεση). Έστω ένα δέντρο T και μία κορυφή του t. Η t **διαιρεί** το T σε $deg(v)$ υποδιαιρέσεις P_i όσες και οι συνιστώσες C_i του $T \setminus v$. Ορίζουμε $V(P_i) = V(C_i) \cup v$ και $E(P_i) = \{(v, w) \in E(T) | v, w \in V(P_i)\}$. Τις υποδιαιρέσεις P_i του T στην v τις συμβολίζουμε και T/v.

Σχόλιο. Οι υποδιαιρέσεις T/v διαμερίζουν τις ακμές του T ενώ οι συνιστώσες του $T \setminus v$ διαμερίζουν τις κορυφές και τις ακμές του $T \setminus v$. Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε κορυφή v ισχύει για τις συνιστώσες C_i του $T \setminus v$ και τις υποδιαιρέσεις P_i του T στη v, ότι $\{C_i\} = \{P_i \setminus v\}$.

Ορισμός 4.5 (Πλάτος αποσύνθεσης ακμών). Ως πλάτος μιας αποσύνθεσης ακμών ορίζουμε το μέγιστο πλάτος αποσύνθεσης σε κορυφή ανάμεσα στις κορυφές της.

Ορισμός 4.6 (Πλάτος γραφήματος μέσω αποσύνθεσης ακμών). Ως πλάτος γραφήματος μέσω αποσύνθεσης ακμών για ένα γράφημα G, ορίζουμε το ελάχιστο πλάτος αποσύνθεσης, ανάμεσα σε κάθε αποσύνθεση ακμών που επιδέχεται το G.

Θεώρημα 4.7. *Το πλάτος γραφήματος μέσω αποσύνθεσης είναι κλειστό ως προς υπογραφήματα.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι οι δύο επιτρεπόμενες ενέργειες για τα υπογραφήματα δεν αυξάνουν το πλάτος μιας αποσύνθεσης ακμών.

- Αφαίρεση ακμών: Έστω ότι αφαιρούμε την ακμή e από το γράφημα G με αποσύνθεση (T,m). Τροποποιούμε την συνάρτηση m της αρχικής αποσύνθεσης ώστε να μην ορίζεται στην ακμή που αφαιρέσαμε, και ονομάζουμε την νέα συνάρτηση m'. Το αρχικό δέντρο, μαζί με την m' αποτελούν αποσύνθεση για το $G \setminus \{e\}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι το πλάτος της (T,m') δεν είναι μεγαλύτερο από αυτό της (T,m).

- Αφαίρεση κορυφών: Αναλύουμε την αφαίρεση μιας κορυφής στην αφαίρεση των γειτονικών της ακμών, και την αφαίρεση τελικά της απομονομένης κορυφής. Αρκεί να δείξουμε ότι η αφαίρεση απομονομένων κορυφών δεν επιρρεάζει το πλάτος της αποσύνθεσης. Αυτό ισχύει τετριμμένα.

□

Θεώρημα 4.8. *Το πλάτος γραφήματος μέσω αποσύνθεσης ακμών είναι ισοδύναμο με το γνήσιο δεντροπλάτος.*

Απόδειξη. Για την μια κατεύθυνση, θα δείξουμε ότι μια αποσύνθεση ακμών μπορεί να μας δώσει μια αποσύνθεση κατά S&R, μαζί με την ιδιότητα των φυσικών κλικών (properness property).

Για την άλλη κατεύθυνση, θα βασιστούμε στα χορδικά γράφηματα με φυσικές κλίκες, και θα χρησιμοποιήσουμε την κλειστότητα των αποσυνθέσεων ακμών ως προς τα υπογραφήματα για τα μη-χορδικά.
Επίσης, θα χρησιμοποιήσουμε, και στις δύο κατευθύνσεις ένα θεώρημα των Ho & Lee [HL89] και του Lundquist [Lun90] για τους ελάχιστους διαχωριστές στα χορδικά γραφήματα. □

Θεώρημα 4.9. *[Ελάχιστοι διαχωριστές και δέντρα κλικών σε χορδικά γραφήματα [HL89, Lun90]] Έστω ένα χορδικό γράφημα H και ένα δέντρο κλικών του (T,B). Ένα υποσύνολο S του $V(H)$ είναι ελάχιστος διαχωριστής στο H ανν υπάρχει ακμή (v,w) στο T ώστε $S = B(v) \cap B(w)$.*

Λήμμα 4.10. *Εάν ένα γράφημα G έχει αποσύνθεση ακμών με πλάτος k, τότε έχει ένα χορδικο συμπλήρωμα H με μέγιστες κλίκες βαθμού το πολύ $k+1$, και του οποίου όλες οι $k+1$ κλίκες είναι φυσικές.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι το H έχει δεντροπλάτος το πολύ k, θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό των S&R. Συγκεκριμένα, με βάση το δέντρο T και τα σύνορα $\mathbf{bd}(v)$ θα κατασκευάσουμε μια δεντροαποσύνθεση $(\bar{T}, \bar{B})$. Θα δείξουμε ότι η αποσύνθεση που θα δημιουργήσουμε αφορά στο H, καθώς και ότι οι $k+1$-κλίκες του H είναι φυσικές . Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι:

- Κάθε κορυφή περιέχεται σε κάποιο $\bar{B}(v)$.
- Κάθε ακμή περιέχεται σε κάποιο $\bar{B}(v)$.
- Εάν στο $\bar{T}$ υπάρχει μονοπάτι από την $\bar{v_1}$ στη $\bar{v_3}$ μέσω της $\bar{v_2}$, τότε ισχύει $\bar{B}(\bar{v}_2) \supseteq \bar{B}(\bar{v}_1) \cap \bar{B}(\bar{v}_3)$ (**Συνθήκη Συνεκτικότητας**).

Πριν προχωρήσουμε στον μετασχηματισμό θα δείξουμε ότι τα σύνορα $\mathbf{bd}(v)$ (που θα αποτελέσουν τη βάση για τις τσάντες $B(v)$) έχουν δεντρική δομή που πληροί την συνθήκη συνεκτικότητας. Έστω δύο μη γειτονικές κορυφές z, w του T και y μια άλλη κορυφή του T, αναμεσά τους. Θα δείξουμε ότι μια κορυφή v του H για την οποία ισχύει $v \in \mathbf{bd}(z), \mathbf{bd}(w)$ ισχύει $v \in \mathbf{bd}(y)$. Πράγματι, για να βρίσκεται η v στο $\mathbf{bd}(z)$ πρέπει να υπάρχουν ακμές που αντιστοιχούν στη γειτονιά της v σε τουλάχιστον δύο υποδιαιρέσεις του T/z. Από αυτές, το πολύ μία περιέχει το μονοπάτι από την z προς την y και την w. Άρα, υπάρχει τουλάχιστον μία υποδιαίρεση, που δεν περιέχει τις y,w, με κατάλληλη ακμή e_z η οποία αντιστοιχεί στη γειτονιά της v. Αντίστοιχα, στο T/w υπάρχει τουλάχιστον μία υποδιαίρεση, που δεν περιέχει τις y,t και ακμή e_w που αντιστοιχεί στη γειτονιά της v. Όταν τώρα εξετάσουμε τις συνιστώσες στις οποίες χωρίζει το T η y, ξέρουμε ότι η z και η w είναι σε διαφορετικές συνιστώσες. Άρα, και οι ακμές e_z, e_w βρίσκονται σε διαφορετικές υποδιαιρέσεις του T/y και συνεπώς η v ανήκει και στο $\mathbf{bd}(y)$.

Για να κατασκευάσουμε το H από το G, προσθέτουμε τις ακμές που χρειάζονται ώστε κάθε $\mathbf{bd}(v)$ να είναι κλίκα. Στη γενική περίπτωση, οι προσθήκες αυτές, επιβάλλουν να κάνουμε αντίστοιχες προσθήκες στο T, ώστε να έχουμε μια φυσική αποσύνθεση ακμών του H.

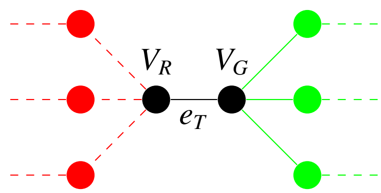
Ισχυριζόμαστε ότι αυτό επιτυγχάνεται αν, για κάθε ακμή e που προσθέτουμε στο αρχικό γράφημα, προσθέσουμε στο δέντρο της αποσύνθεσης μια νέα ακμή με ετικέτα e και άκρα (v, v_e): όπου v μια κορυφή του T για την οποία ισχύει $e \in \mathbf{bd}(v)$ (η v αυτή δεν είναι απαραίτητα μοναδική, μας αρκεί οποιαδήποτε από τις κορυφές που συνέβαλαν στη δημιουργία της e). Η v_e είναι νέα κορυφή. Τροποποιούμε επίσης και την συνάρτηση m ώστε $m(e) = (v, v_e)$. Τετριμμένα ισχύει ότι η (T', m') που δημιουργήσαμε είναι πράγματι απόσύνθεση για το επαυξημένο H.

Για να δείξουμε ότι το πλάτος της αποσύνθεσης δεν αυξήθηκε από την προσθήκη μας, εκμεταλευόμαστε την δεντρική δομή που έχουν τα σύνορα. Πράγματι, για να προστεθεί ένα νέο φύλλο στην κορυφή v του T, τα άκρα w_e, t_e της e οι οποία θα είναι η αντίστοιχή ακμή του φύλλου στο H πρέπει να εμφανίζονται ήδη στο σύνορο της v. Άρα, για κάθε μία από τις κορυφές w_e, t_e υπάρχουν ήδη δύο υποδιαιρέσεις του T/v οι ακμές των οποίων προκαλούν την εμφανισή της κορυφής στο σύνορο. Το νέο φύλλο λοιπόν, ως υποδιαίρεση του T/v δεν προσφέρει κάτι στα σύνορα. Όταν ελέγχουμε το σύνορο μιας άλλης κορυφής του T, το φύλλο θα συνεννωθεί με μία τουλάχιστον από τις συνιστώσες που αναφέραμε παραπάνω, άρα πάλι δεν συμβάλει στην δημιουργία συνόρων.

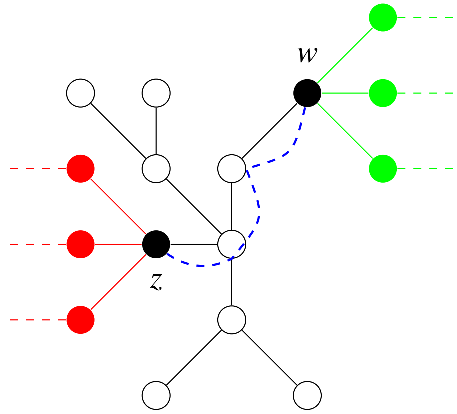
Αφού το H είναι συνεκτικό, το δεύτερο αίτημα, για την περίεξη των ακμών στα $\bar{B}(v)$, είναι ισχυρότερο από το πρώτο, οπότε θα περιορισθούμε σε αυτό. Δείχνουμε αρχικά μια ασθενέσθερη μορφή του δεύτερου αιτήματος : μια ακμή του H αν δεν βρίσκεται εξόλοκλήρου στο σύνορο μιας κορυφής του T, θα βρίσκεται στην ένωση των συνορων δύο γειτονικών κορυφών του T. (Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση όπου η e είναι φύλλο στο H, θα την καλύψουμε παρακάτω).

Για την ασθενή μορφή σε μη-φύλλα. Έστω μια ακμή e του H, και $e_t = m(e) = (V_R, V_G)$ η εικόνα της. Εξετάζουμε το σύνορο της V_R και βλέπουμε 0,1 ή 2 από τα άκρα της e.

- Αν δούμε και τα δύο, είμαστε ικανοποιημένοι.
- Αν έχουμε 1 από τα δύο άκρα της e στο σύνορο της V_R ξέρουμε οτι η εικόνα της γειτονιάς του δεύτερου άκρου βρίσκεται εξόλοκλήρου στην υποδιαίρεση του T/V_R που περιέχει την V_G (αν υπήρχε εικόνα κάποιας ακμής από τη γειτονιά του δευτερου άκρου σε άλλη υποδιαίρεση του T/V_R τότε και το δεύτερο άκρο θα εμφανιζόταν στο σύνορο). Γι΄ αυτόν τον λόγο, το σύνορο της V_G θα περιέχει το δεύτερο άκρο, μια και η V_G διαχωρίζει την $m(e)$ από τις εικόνες της γειτονιάς του δεύτερου άκρου (βλ. και σχήμα 9).



Σχήμα 9: Η ασθενής μορφή του δεύτερου αιτήματος, για μη-φύλλα.



Σχήμα 10: Τρίτο αίτημα.

- Αν έχουμε 0, εφαρμόζοντας δύο φορές το προηγούμενο επιχείρημα, δείχνουμε ότι και τα δύο άκρα που λείπουν θα βρίσκονται στην 'απέναντι' τσάντα από αυτήν που εξετάσαμε.

Για τα φύλλα. Η παραπάνω επιχειρηματολογία δεν εφαρμόζεται στα φύλλα του H: η μία από τις δύο κορυφές του φύλλου δεν θα εμφανιστεί ποτέ σε κανένα σύνορο, οπότε θα αναγκαστούμε παρακάτω να προσθέσουμε μια νέα τσάντα που θα περιέχει το φύλλο. Ευτυχώς, λογω της μη-εμφάνισης της δεύτερης κορυφής η προσθήκη αυτή θα είναι συμβατή με τη συνθήκη συνεκτικότητας.

Έχοντας δείξει την ασθενή μορφή του δεύτερου αιτήματος, θα προχωρήσουμε στην πλήρη, κάνοντας όμως προσθήκες στο γράφημα. Θα διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Μη-φύλλα όπου βρήκαμε 2 άκρα σε μία τσάντα: ικανοποιούν ήδη την πλήρη μορφή.

- Μη-φύλλα όπου βρήκαμε 0 άκρα σε μία τσάντα, και δείξαμε ότι η ‘απέναντι’ περιέχει 2: ικανοποιούν ήδη την πλήρη μορφή.

- Μη-φύλλα όπου βρήκαμε 1 άκρο σε μία τσάντα, και το δεύτερο άκρο στην ‘απέναντι’: θα τα χειριστούμε παρακάτω.

- Φύλλα: θα τα χειριστούμε παρακάτω.

Για τα μη-φύλλα. Για να προσθέσουμε τις κορυφές που λείπουν από τις τσάντες μας, προσθέτουμε ενδιάμεσες κορυφές σε κάθε ακμή $e = (t, w)$ του T της οποίας η αντίστροφη εικόνα της δεν βρίσκεται εξόλοκλήρου σε μια από τις δύο τσάντες των άκρων της. Στην τσάντα της ενδιάμεσης κορυφής, τοποθετούμε: την τομή $B(t) \cap B(w)$ στην οποία προσθέτουμε το $m^{-1}(e)$. Οι νέες τσάντες έχουν μέγεθος το πολύ 1 παραπάνω από τις αρχικές, και επιπλέον διατηρούν την συνθήκη συνεκτικότητας (αφού η $m^{-1}(e)$ υπάρχει κατά το ήμισυ, σε κάθε μία από τις $B(t), B(w)$). **Για τα φύλλα.** Έστω φύλλο $l = (l_1, l_2)$ του H. Τοποθετούμε μία νέα κορυφή v_l στο δέντρο συνδέοντας την σε μία κορυφή της οποίας η τσάντα ήδη περιέχει την μία από τις δύο κορυφές l_i του φύλλου (η άλλη όπως έχουμε αναλύσει, δεν εμφανίζεται πουθενά). Ορίζουμε $B(v_l) = \{l_1, l_2\}$. Πάλι επιβεβαιώνουμε ότι η συνθήκη συνεκτικότητας διατηρείται.

Κάθε ακμή του H έχει εικόνα μέσω της m σε μια ακμή του T, και για κάθε ακμή του T βρήκαμε ή προσθέσαμε μια τσάντα που περιέχει την αντίστροφη εικόνα της. Άρα, κάθε κορυφή του H περιέχεται σε μια τσάντα του T.

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι κάθε τσάντα $B(v)$ περιέχει ένα πλήρες υπογράφημα του H. Αυτό ισχύει τετριμμένα για τις τσάντες που προήλθαν από τα αρχικά σύνορα, μια και φροντίσαμε να τα κάνουμε κλίκες. Οι τσάντες που παρεμβάλαμε είναι επίσης κλίκες: η $B(t) \cap B(w)$ είναι κλίκα ως τομή κλικών, ενώ κάθε μία από τις δύο ακμές της $m^{-1}(e)$ συνδέεται με κάθε μέλος της τομής (και προφανώς οι δύο κορυφές του $m^{-1}(e)$ είναι γειτονικές). Ομοίως και οι μικρές τσάντες που προσθέσαμε για τα φύλλα είναι 2-κλίκες. Επειδή λοιπόν κάθε $B(v)$ είναι πλήρες υπογράφημα, το H είναι χορδικό.

Από το θεώρημα 4.9, γνωρίζουμε ότι επειδή το H είναι χορδικό, οι ελαχιστοι διαχωριστές του είναι τομές μεγιστικών κλικών του. Σημειώνουμε εδώ ότι κάθε κλίκα του H (μεγιστική ή μη) εμφανίζεται σε κάποια $B(v)$ ([Die05]). Οι τσάντες που περιέχουν $k+1$ κλίκες, είναι βαθμού 2. Λόγω της συνθήκης συνεκτικότητας, κάθε τομή τους με άλλη κλίκα θα είναι υποσύνολο του ενός από τους δύο γειτονές τους. Υπάρχει όμως τουλάχιστον μία ακμή της

$k+1$ κλίκας που δεν εμφανίζεται σε κανέναν από τους δύο γείτονες, αρα ούτε και σε καμία τομή. Άρα υπάρχει ακμή μετάβασης, και συνεπώς οι $k+1$ κλίκες του H είναι φυσικές.

□

Λήμμα 4.11. *Αντίστροφα, έστω ένα χορδικό γράφημα G με γνήσιο δεντροπλάτος το πολύ k. Θα κατασκευάσουμε αποσύνθεση ακμών πλάτους k.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό του γνήσιου δεντροπλάτους το G έχει χορδικό υπεργράφημα με κλίκες βαθμού το πολύ $k+1$ και όλες τις $k+1$ κλίκες του φυσικές. Μιας και το H είναι χορδικό, υπάρχει αποσύνθεσή του που είναι και δέντρο κλικών. Θα κατασκευάσουμε με βάση το δέντρο κλικών, αποσύνθεση ακμών τέτοια ώστε τα συνορά της να έχουν μέγεθος το πολύ k.

Θα αρχίσουμε διασπώντας τις κορυφές που αντιστοιχούν στις $k+1$ κλίκες. Μία τέτοια κλίκα C_m έχει ακμή μετάβασης, έστω (t, w) η οποία δεν εμφανίζεται σε κάποιον ελάχιστο διαχωριστή. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα 4.9 από την τσάντα κάθε γείτονα της κλίκας λείπει τουλάχιστον μία από τις δύο κορυφές t, w. Θα αντικαταστήσουμε την C_m στο δέντρο με δύο υποκλίκες της, την $C_m \setminus t$ και την $C_m \setminus w$. Όσους από τους παλιούς γείτονες της C_m περιέχουν την t (και άρα δεν περιέχουν την w) τους ενώνουμε με την $C_m \setminus w$. Τους υπόλοιπους (που δεν περιέχουν την t, και ενδεχομένως περιέχουν την w) τους ενώνουμε με την $C_m \setminus t$. Τις κορυφές $C_m \setminus t$ και $C_m \setminus w$ τις ενώνουμε με ακμή, στην οποία τοποθετούμε την ετικέτα (t, w).

Μετά τον παραπάνω μετασχηματισμό, το δέντρο και οι τσάντες που έχουμε δεν είναι πλέον δεντροαποσύνθεση (αφού δεν είναι πλέον βέβαιο ότι περιέχονται όλες οι ακμές σε τσάντες). Η δεντρική δομή όμως διατηρείται αφού από τις αλλαγές μας δεν άλλαξαν οι τομές των τσαντών (μιας και οι ακμές μετάβασης δεν συμμετείχαν ποτέ στις τομές). Επιπλέον, όλες οι τσάντες έχουν πλέον μέγεθος το πολύ k.

Έχοντας εξασφαλίσει ότι οι τσάντες έχουν πλέον ικανοποιητικό μέγεθος, θα προχωρήσουμε στον κυρίως μετασχηματισμό. Σαν δέντρο της αποσύνθεσης ακμών θα θεωρήσουμε αρχικά το T με τις παραπάνω αλλαγές. Επίσης, ορίζουμε m την συνάρτηση που αντιστοιχεί στις ακμές μετάβασης του G τις ακμές του T με τις αντίστοιχες ετικέτες.

Σε κάθε κορυφή v του T προσθέτουμε μία νέα ακμή $e_{t,w}$ για κάθε ακμή (t, w) της κλίκας $B(v)$ και επεκτείνουμε την m με το ζεύγος $((t, w), e_{t,w})$ ώστε να συσχετίζει τις ακμές της κλίκας στο H με τις νέες ακμές του T, συγκεκριμένα $m((t, w)) = e_{t,w}$.

Παραβλέποντας προς το παρόν το ότι η m δεν είναι συνάρτηση, ελέγχουμε το πλάτος σε κάθε κορυφή, και επιβεβαιώνουμε ότι αυτό είναι το πολύ k. Ισχυριζόμαστε ότι στο σύνορο της $\mathbf{bd}(v)$ της v δεν μπορεί να εμφανιστεί κάποια κορυφή εκτός αυτών της $B(v)$ οι οποίες είναι το πολύ k το πλήθος. Πράγματι, αν μία κορυφή $r \notin B(v)$ εμφανιστεί στο $\mathbf{bd}(v)$ θα πρέπει να υπάρχουν δύο ακμές e_y, e_z του T με πρότυπα (r, y) και (r, z) σε διαφορετικές υποδιαιρέσεις του T/v. Για να υπάρχουν όμως τέτοιες ακμές πρέπει οι κορυφές r, y και r, z αντίστοιχα να βρίσκονται σε δύο κλίκες $B(v_z)$,$B(v_y)$ σε διαφορετικές συνιστώσες. Αφού όμως η v βρίσκεται στο μονοπάτι ανάμεσα στις v_z και v_y στο T, λόγω της δεντρικής μορφής της αρχικής αποσύνθεσης η $B(v)$ περιέχει την r, άτοπο. Άρα $\mathbf{bd}(v) \subseteq B(v)$ και έχει $|\mathbf{bd}(v)| \leq k$.

Η παραπάνω μέτρηση μας ικανοποιεί ως προς το πλάτος στις κορυφές, οπότε το μόνο που μένει για να έχουμε μια αποσύνθεση ακμών πλάτους k για το H είναι να επανατροποποιήσουμε την m ώστε να είναι συνάρτηση. Αυτό θα το πετύχουμε διαγράφοντας αυθαίρετα τις επιπλέον εμφανίσεις κάθε ακμής από την m και κρατώντας μονάχα μία. Μένει να επιβεβαιώσουμε ότι οι διαγραφές αυτές δεν διαπλάτυναν κάποιο $\mathbf{bd}(v)$ ώστε να το κάνουν μεγαλύτερο από το αντίστοιχο $B(v)$. Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι δυνατό: επαναλαμβάνουμε την μέτρηση της παραπάνω παραγράφου για να δείξουμε ότι $\mathbf{bd}(v) \subseteq B(v)$. Πράγματι, οι διαγραφές που πραγματοποιήσαμε στην m είναι αδύνατο να προκάλεσαν την εμφάνιση μιας νέας κορυφής σε κάποιο σύνορο, καθώς αν υπάρχουν, μετά τις διαγραφές, ακμές του T που προκαλούν την εμφάνιση μιας κορυφής r' στο $\mathbf{bd}(v)$, αυτές θα υπήρχαν και πριν, και σύμφωνα με τα παραπάνω η r' θα υπήρχε ήδη στην $B(v)$.

Έχοντας κατασκευάσει μια αποσύνθεση ακμών για το H, μπορούμε εύκολα εκμεταλευόμενοι την κλειστότητα των αποσυνθέσεων ακμών ως προς τα υπογραφήματα, την περιορίζουμε στο G.

$\square$

Αναφορές

[ACP87] Stefan Arnborg, Derek G. Corneil, and Andrzej Proskurowski. Complexity of finding embeddings in a k-tree. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 8:277–284, April 1987.

[AP89] Stefan Arnborg and Andrzej Proskurowski. Linear time algorithms for np-hard problems restricted to partial k-trees. *Discrete Applied Mathematics*, 23(1):11 – 24, 1989.

[BK07] Hans L. Bodlaender and Arie M. C. A. Koster. Combinatorial optimization on graphs of bounded treewidth. *The Computer Journal*, page bxm037, 2007.

[BMT03] V. Bouchitté, F. Mazoit, and I. Todinca. Chordal embeddings of planar graphs. *Discrete Mathematics*, 273(1-3):85–102, 12 2003.

[Bod98] Hans L. Bodlaender. A partial k-arboretum of graphs with bounded treewidth. *Theor. Comput. Sci.*, 209:1–45, December 1998.

[BP92] J.R.S. Blair and B.W. Peyton. An introduction to chordal graphs and clique trees. Technical report, Oak Ridge National Lab., 1992.

[BS91] D. Bienstock and Paul Seymour. Monotonicity in graph searching. *J. Algorithms*, 12:239–245, April 1991.

[CR97] Chandra Chekuri and Anand Rajaraman. Conjunctive query containment revisited. In Foto Afrati and Phokion Kolaitis, editors, *Database Theory — ICDT '97*, volume 1186 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 56–70. Springer Berlin / Heidelberg, 1997. 10.1007/3-540-62222-5_36.

[Die05] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Springer-Verlag, 3 edition, 2005.

[Dij68] Edsger W. Dijkstra. Letters to the editor: go to statement considered harmful. *Commun. ACM*, 11:147–148, March 1968.

[DKT97] Nick D. Dendris, Lefteris M. Kirousis, and Dimitrios M. Thilikos. Fugitive-search games on graphs and related parameters. *Theoretical Computer Science*, 172(1-2):233 – 254, 1997.

[Duf65] R. J. Duffin. Topology of series-parallel networks. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 10(2):303 – 318, 1965.

[FT08] Fedor V. Fomin and Dimitrios M. Thilikos. An annotated bibliography on guaranteed graph searching. *Theoretical Computer Science*, 399(3):236 – 245, 2008. Graph Searching.

[Gav74] F. Gavril. The intersection of subtrees in trees are exactly the chordal graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 16:47–56, 1974.

[GMT02] Jens Gustedt, Ole Mæhle, and Jan Telle. The treewidth of java programs. In David Mount and Clifford Stein, editors, *Algorithm Engineering and Experiments*, volume 2409 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 57–59. Springer Berlin / Heidelberg, 2002.

[HL89] C.W. Ho and R.C.T. Lee. Counting clique trees and computing perfect elimination schemes in parallel. *Information Processing Letters*, 31(2):61–68, April 1989.

[KP85] Lefteris M. Kirousis and Christos H. Papadimitriou. Interval graphs and seatching. *Discrete Mathematics*, 55(2):181 – 184, 1985.

[KP86] M Kirousis and C H Papadimitriou. Searching and pebbling. *Theor. Comput. Sci.*, 47:205–218, November 1986.

[LaP93] Andrea S. LaPaugh. Recontamination does not help to search a graph. *J. ACM*, 40:224–245, April 1993.

[Lun90] M.E. Lundquist. *Zero patterns, chordal graphs and matrix completions*. PhD thesis, Dept. of Mathematics, Clemson University, 1990.

[LY93] Carsten Lund and Mihalis Yannakakis. On the hardness of approximating minimization problems. In *Proceedings of the twenty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing*, STOC '93, pages 286–293, New York, NY, USA, 1993. ACM.

[Par78] T. Parsons. Pursuit-evasion in a graph. In Yousef Alavi and Don Lick, editors, *Theory and Applications of Graphs*, volume 642 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 426–441. Springer Berlin / Heidelberg, 1978. 10.1007/BFb0070400.

[RS84] Neil Robertson and P. D. Seymour. Graph minors. iii. planar tree-width. *Journal of Combinatorial Theory*, 36(1):49–64, 1984.

[ST93] P. D. Seymour and Robin Thomas. Graph searching and a min-max theorem for tree-width. *J. Comb. Theory Ser. B*, 58:22–33, May 1993.

[ST03] Yannis C. Stamatiou and Dimitrios M. Thilikos. Monotonicity and inert fugitive search games, 2003.

[Tho98] Mikkel Thorup. All structured programs have small tree width and good register allocation. *Information and Computation*, 142(2):159 – 181, 1998.

[vdH96] H. van der Holst. *Topological and spectral graph characterizations*. Ph.d. thesis, University of Amsterdam, 1996.

Ευχαριστίες

Θέλω να ευχαριστήσω:

Τους καθηγητές μου στο μΠλ∀, το Μαθηματικό και το σχολείο. Ειδικότερα τον κύριο Θηλυκό και τον κυριο Δημητρακόπουλο για την υπομονή τους κατά την (μη) συγγραφή της εργασίας αυτής. Επίσης, τον κύριο Μοσχοβάκη γιατί σε ανύποπτο χρόνο μου έδωσε να καταλάβω τι έχουμε παρανοήσει οι Έλληνες φοιτητές για το πανεπιστήμιο.

Το Νικόλα για τις καταπληκτικές ιστορίες όλα αυτά τα χρόνια. Την Σάντυ γιατί μου έδειξε ότι οι άνρθωποι αλλάζουν[8], και γιατί γκρίνιαζε όποτε χρειαζόταν. Τη μητέρα μου, που μου στάθηκε σε στιγμές που ήταν δύσκολες και για τους δύο μας.

[8]προς το καλύτερο: η αντίστροφη κατεύθυνση είναι τετριμμένη.