

**Γεωμετρική Δρομολόγηση
(με βοήθεια Τοπολογικού Ελέγχου)**

σε

Ad-Hoc Ασύρματα Δίκτυα

[GEOMETRIC ROUTING
(VIA TOPOLOGY CONTROL)
IN AD-HOC WIRELESS NETWORKS]

ΔΟΥΔΗΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ

Επιβλέπων: Κρανάκης Ευάγγελος

μΠλΥ

Πίνακας Περιεχομένων

1.	Εισαγωγή.....	8
2.	Προλεγόμενα	
2.1	Το μοντέλο του δικτύου.....	10
2.2	Αδυναμίες δικτύου.....	17
2.3	Τοπικοί Αλγόριθμοι.....	18
2.4	Συναρτήσεις Κόστους.....	20
3.	Τοπολογικός Έλεγχος	
3.1	Εισαγωγή.....	24
3.2	Διατύπωση προβλήματος και υποθέσεις.....	25
3.3	Επιθυμητές Ιδιότητες Γράφου.....	26
3.4	Αλγόριθμος Σχετικής Γειτονιάς (RNG).....	28
3.5	Αλγόριθμος Gabriel.....	30
3.6	Αλγόριθμος Morelia.....	34
3.7	Επικυρίαρχα Σύνολα – Clustering.....	40
3.8	Delaunay Τριγωνοποίηση.....	43
3.9	Κύρια Αποτελέσματα.....	47
3.10	Ο $LDel^{(k)}(V)$ είναι ένας $O(1)$ -επικαλυπτής του $UDG(V)$	48
3.11	Τοπικός Αλγόριθμος για την Κατασκευή του $LDel^{(1)}(V)$	51
3.11.1	Ο $LDel^{(1)}(V)$ Μπορεί και να Μην είναι Επιπεδικός.....	53
3.11.2	Πυκνότητα του $LDel^{(1)}(V)$	54
3.12	Τοπικός Αλγόριθμος για την Κατασκευή του $LDel^{(2)}(V)$	55
3.12.1	Ο $LDel^{(2)}(V)$ είναι Επιπεδικός.....	56
3.13	Τοπικός Αλγόριθμος για την Κατασκευή του $BPS_2(UDG(V))$	58
3.13.1	Ιδιότητες του $BPS_2(UDG(V))$	60
4.	Γεωμετρική Δρομολόγηση	
4.1	Εισαγωγή.....	62
4.2	«Αμνήμων» Δρομολόγηση.....	63
4.2.1	Δρομολόγηση Βασιζόμενη στην Πρόοδο και Άπληστη Δρομολόγηση.....	64
4.2.2	Δρομολόγηση Διεύθυνσης.....	73
4.2.3	Υβριδική Δρομολόγηση I.....	82
4.2.4	Τυχαιοποιημένη Δρομολόγηση Πυξίδας.....	85
4.2.5	Γενικές παρατηρήσεις επί «Αμνημόνων» αλγορίθμων.....	88
4.3	$O(1)$ -μνήμης Αλγόριθμοι Δρομολόγηση.....	92
4.4	Υβριδική Δρομολόγηση II.....	97
4.4.1	Φραγμένη Δρομολόγηση Όψης BFR.....	100
4.4.2	Προσαρμόσιμη Δρομολόγηση Όψης AFR.....	103
4.4.3	Εναλλακτική Δρομολόγηση Όψης OFR.....	104
4.4.4	Εναλλακτική Φραγμένη Δρομολόγηση Όψης OBFR.....	106
4.4.5	Εναλλακτική Προσαρμόσιμη Δρομολόγηση Όψης OAFR.....	107
4.4.6	Άπληστη Δρομολόγηση GR.....	108

4.4.7	Άπληστη Εναλλακτική Προσαρμόσιμη Δρομολόγηση Όψης GOAFR	109
4.4.8	Άπληστη Εναλλακτική Προσαρμόσιμη Δρομολόγηση Όψης Συν: GOAFR+	111
4.4.9	Ο GOAFR+ είναι Ασυμπτωτικά Βέλτιστος	115
4.4.10	Αποτελεσματικότητα του GOAFR+ στην μέση-περίπτωση	117
5.	ΕΠΙΛΟΓΟΣ.....	120
	Βιβλιογραφία	124

(Προοίμιο)

«Εν αρχήν ην ο λόγος». Η ανάγκη του ανθρώπου να επικοινωνήσει με τα υπόλοιπα όντα που του έμοιαζαν στην όψη είναι προϊστορική. Εντάξει, μάλλον στην αρχή ως μέλη του ζωικού βασιλείου δε διεκδικούσαμε και τον τίτλο του στοχαστή ή του φιλοσόφου. Η αναζήτηση τροφής και η προσπάθεια κάλυψης άλλων βασικών αναγκών ήταν το έναυσμα για να προσπαθήσουμε να συνεννοηθούμε. Έστω και ταπεινά, τα ελατήρια αυτά οδήγησαν στην δημιουργία κωδίκων επικοινωνίας, οι οποίοι συνεχώς και εκλεπτίζονταν μέχρι τη δημιουργία γλώσσας.

Σκηνή πρώτη: Είναι μεσημέρι..... Οι Νεάντρεταλ πρόγονοί μας είναι σε διάσπαρτοι σ' ένα μικρό λιβάδι κοντά στα Πετράλωνα Χαλκιδικής. Η λεία, κάποιο τετράποδο της εποχής, περπατάει ατάραχο μην έχοντας αντιληφθεί τον κίνδυνο που εγκυμονεί. Ο αρχηγός του κυνηγιού θέλει να ενημερώσει τα μέλη της ομάδας, που βρίσκονται κάπου στα άκρα και δεν έχουν οπτική επαφή μαζί του, να κινηθούν κυκλωτικά για τον εγκλωβισμό του στόχου. Προφανώς, η λύση να φωνάξει προς εκείνους δεν είναι η ενδεδειγμένη μιας και θα χαθεί το πλεονέκτημα του αφηνιδιασμού.

Σκηνή δεύτερη: Είμαστε στην Άγρια Δύση. Οι άπληστοι λευκοί ψάχνουν συνεχώς για νέα εδάφη στην αχανή ενδοχώρα της Αμερικής. Οι γηγενείς ινδιάνοι, αν και ατρόμητοι από τη φύση τους, μπροστά στον τεχνολογικά ανώτερο αντίπαλο που εμφανίστηκε από το πουθενά, μοιάζουν να τα έχουν χαμένα. Ο προσφιλής σε εμάς αυτός λαός, αν και φορτωμένος με το μέγιστο χαρακτηριστικό της καθ' ημάς Ανατολής -τον αδελφοκτόνο αλληλοσπαραγμό μεταξύ των διαφόρων φυλών- συνειδητοποίησε ότι για να τα βγάλει πέρα θα πρέπει να είναι ενωμένος. Φάνηκε αναγκαίο ένα σύστημα με το οποίο, ο πρωτόγονος αυτός κόσμος των Απάτσι, των Μοϊκανών και των άλλων φυλών, θα μπορούσε να επικοινωνεί ώστε κρίσιμες πληροφορίες να μεταδίδονται μεταξύ και των πιο απομακρυσμένων φυλών απ' αυτές.

Η σύνδεση που υπάρχει στις παραπάνω γλαφυρές περιγραφές δεν είναι άλλη από την ανάγκη να επικοινωνήσουν άνθρωποι, οι οποίοι όμως πολλές φορές δεν βρίσκονται σε απ" ευθείας επαφή, για διάφορους λόγους -οπτικούς, απόστασης, κατάστασης, κ.ά.

1. Εισαγωγή

Δύο σημαντικές περιοχές έρευνας στα ad-hoc [κατά συνθήκη] ασύρματα δίκτυα είναι ο έλεγχος τοπολογίας ή τοπολογικός έλεγχος [topology control] και η δρομολόγηση [routing]. Στα ad-hoc ασύρματα δίκτυα η έννοια του σχεδιασμού ενός δικτύου το οποίο να κατέχει συγκεκριμένες επιθυμητές ιδιότητες πρέπει να εγκαταλειφτεί. Οι κόμβοι μπορούν να εισέλθουν και να εξέλθουν του δικτύου δυναμικά. Το αποτέλεσμα είναι μία τοπολογία δικτύου που είναι συχνά σε μεταβολή και παρουσιάζει ιδιαίτερα «φτωχές» ιδιότητες.

Ο **τοπολογικός έλεγχος** προσπαθεί να εξάγει απ' αυτό το υπάρχον- υποκείμενο δίκτυο μία τοπολογία πάνω στην οποία η δρομολόγηση καθώς και άλλοι αλγόριθμοι θα μπορούν να εκτελεστούν αποτελεσματικά. Η **δρομολόγηση** σε ένα ad-hoc δίκτυο είναι και αυτή μία πρόκληση (ακόμα και με τοπολογικό έλεγχο). Εξαιτίας του ότι οι συνδέσεις δικτύου μπορούν αδιακρίτως να δημιουργηθούν αλλά και να καταστραφούν, μονοπάτια ανάμεσα σε δύο κόμβους του δικτύου μπορούν να αλλάξουν χωρίς προειδοποίηση. Αυτό αποκλείει εκ των προτέρων τη χρήση συγκεντρωτικών [centralized] αλγορίθμων δρομολόγησης. Αντιθέτως, κάθε απόφαση δρομολόγησης πρέπει να βασίζεται αποκλειστικά σε **τοπική** [local] πληροφορία

Η εργασία μας, αρχικά, πραγματεύεται τον τοπολογικό έλεγχο. Το ενδιαφέρον μας εστιάζεται όχι μόνο σε μία ιστορική αναδρομή, κατά κάποιο τρόπο, αλλά και στους αλγόριθμους εκείνους που παρουσιάζουν λύσεις στα τρέχοντα προβλήματα της έρευνας.

Θα οδηγηθούμε σταδιακά στην παρουσίαση ενός τοπικού αλγόριθμου για την κατασκευή ενός *δεσμευμένου βαθμού επιπεδικού επικαλυπτή* (γράφου) [*bounded degree planar spanner*]. Προηγούμενες εργασίες παρήγαγαν μόνο συγκεντρωτικές μεθόδους για την κατασκευή τέτοιων τοπολογιών.

Σε δεύτερη φάση, παρουσιάζουμε έναν βελτιωμένο τοπικό αλγόριθμο για δρομολόγηση σε ad-hoc ασύρματα δίκτυα. Οι δύο κυρίαρχες μέθοδοι δρομολόγησης σε ad-hoc ασύρματα δίκτυα είναι η *άπληστη δρομολόγηση* [*greedy routing*] και η *δρομολόγηση όψης* [*face routing*]. Υπάρχει μία ένταση [tension] ανάμεσα σ' αυτές τις δύο μεθόδους δρομολόγησης. Οι άπληστες μέθοδοι είναι γρήγοροι αλλά δεν εγγυώνται παράδοση (του μηνύματος). Η δρομολόγηση όψης εγγυάται παράδοση, αλλά παρουσιάζονται (οι αντίστοιχοι αλγόριθμοι) λιγότερο αποδοτικοί σε σύγκριση με τις προαναφερόμενες μεθόδους. Πρόσφατα, αυτές οι δύο μέθοδοι συνδυάστηκαν σε μια προσπάθεια να συσσωρευτούν τα οφέλη που προσφέρει η καθεμία. Τέτοιοι αλγόριθμοι ταλαντεύονται ανάμεσα στη δρομολόγηση όψης και στην άπληστη δρομολόγηση. Το χαρακτηριστικό στοιχείο για τη βελτίωση της απόδοσης τέτοιων δυικών μεθόδων λειτουργίας είναι τα κριτήρια που χρησιμοποιούνται για την εναλλαγή από τον ένα στον άλλο τρόπο λειτουργίας.

Ο αλγόριθμος που παρουσιάζεται στο [39] αναπαριστά την καλύτερη τρέχουσα τεχνική για τη μετακίνηση ανάμεσα σε άπληστη και δρομολόγηση όψης.

2. Προλεγόμενα [preliminaries]

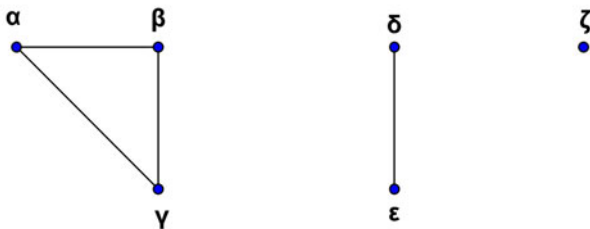
2.1 Το μοντέλο του δικτύου [network model]

Βασικό εργαλείο στην προσπάθεια μοντελοποίησης ενός δικτύου, εμφανίζεται ο γράφος $G(V,E)$. Απαραίτητο, λοιπόν, να προηγηθούν κάποιοι –τετριμμένοι ίσως- ορισμοί.

Ορισμός 2.1: Γράφος $G(V,E)$ είναι ένα μαθηματικό αντικείμενο που ορίζεται με τη βοήθεια δύο συνόλων, V και E ¹, όπου:

- ♦ V είναι ένα πεπερασμένο σύνολο τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται κορυφές του γράφου ή κόμβοι.
- ♦ $E = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta \in V\}$, είναι, δηλαδή, ένα πεπερασμένο σύνολο από μη διατεταγμένα ζεύγη διακεκριμένων κόμβων του V . Κάθε τέτοιο ζεύγος, π.χ. (α,β) , με $(\alpha,\beta) \equiv (\beta,\alpha)$, $\alpha \neq \beta$, ονομάζεται ακμή του γράφου.

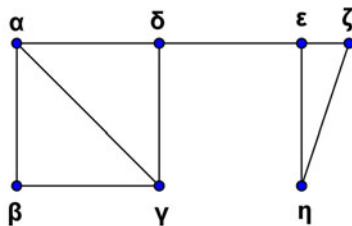
Γραφικά (βλέπε εικόνες 2.1 και 2.2 παρακάτω) αναπαριστούμε τους κόμβους του γράφου με μια κουκίδα ή γενικά με ένα σημείο του επιπέδου, ενώ τις ακμές με μια γραμμή που ενώνει τους δύο κόμβους που ορίζουν τη συγκεκριμένη ακμή.



Εικόνα 2.1:

$$V = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta\}$$

$$E = \{(\alpha, \beta), (\beta, \gamma), (\alpha, \gamma), (\delta, \epsilon)\}$$



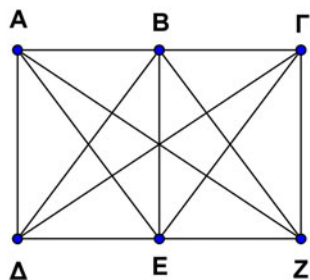
Εικόνα 2.2:

$$V = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta\}$$

$$E = \{(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\alpha, \delta), (\beta, \gamma), (\gamma, \delta), (\delta, \epsilon), (\epsilon, \zeta), (\epsilon, \eta), (\zeta, \eta)\}$$

¹ Η περιγραφή που γίνεται στο σημείο αυτό αφορά στην πραγματικότητα τη μία από τις δύο βασικές κατηγοριοποιήσεις γράφων, τους {μη κατευθυνόμενους}. Υπάρχουν και οι {κατευθυνόμενοι}, αλλά δε θα τους χρησιμοποιήσουμε στην ανάλυσή μας.

Ορισμός 2.2: Ένας γράφος ονομάζεται *πλήρης* [*complete*], εάν κάθε ζεύγος διαφορετικών κορυφών του συνδέονται με μια ακμή. (βλέπε εικόνα 2.3 παρακάτω)



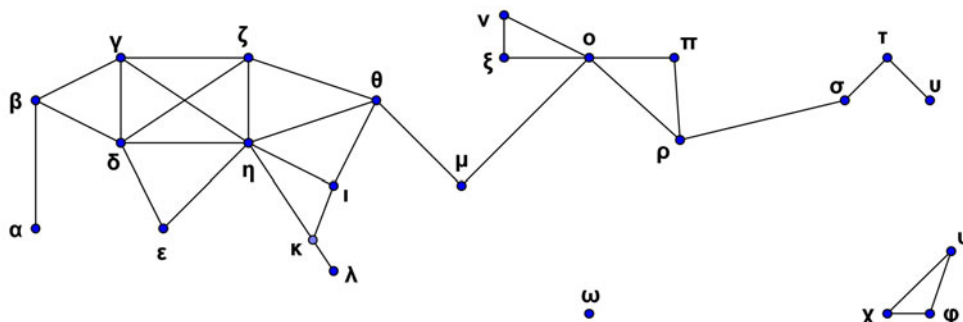
Εικόνα 2.3: Πλήρης γράφος.

Ορισμός 2.3: Εάν (α, β) είναι μία ακμή του γράφου $G(V, E)$, τότε η παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Η ακμή (α, β) συνδέει τους κόμβους α και β .
2. Η ακμή (α, β) γειτνιάζει με τους κόμβους α και β .
3. Οι κόμβοι α και β αποτελούν τα άκρα της ακμής (α, β) .
4. Οι κόμβοι α και β είναι γειτονικοί.
5. Ο κόμβος α είναι προσκείμενος στο β και αντίστροφα.

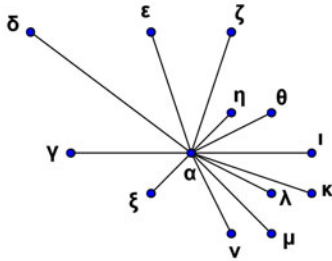
Γειτονιά ενός κόμβου α είναι το σύνολο $N(\alpha) = \{\beta \in V \mid (\alpha, \beta) \in E\}$, δηλαδή το σύνολο των κόμβων οι οποίοι είναι γειτονικοί με τον α . (βλέπε εικόνες 2.4 και 2.5 παρακάτω)

Ορισμός 2.4: *Βαθμός* ενός κόμβου ονομάζεται ο αριθμός των ακμών που γειτνιάζουν σε αυτόν². Ένας κόμβος βαθμού μηδέν καλείται *απομονωμένος*.



Εικόνα 2.4: Στον παραπάνω γράφο παρατηρούμε ότι: $N(\alpha) = \{\beta\}$, $N(\beta) = \{\gamma, \delta\}$, $N(\eta) = \{\gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \theta, \iota, \kappa\}$, $N(\omega) = \emptyset$ κλπ. Επίσης, βαθμός $\alpha = 1$, βαθμός $\beta = 2$, βαθμός $\eta = 7$, βαθμός $\omega = 0$ κλπ.

² Εύκολα συμπεραίνουμε ότι ο βαθμός ενός κόμβου ταυτίζεται με το μέγεθος της γειτονιάς του.....



Εικόνα 2.5: Στο διπλανό γράφο παρατηρούμε ότι:
 $N(\alpha) = \{\gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi\}$,
 και $N(\beta) = \emptyset$. Οπότε είναι βαθμός $\alpha = 12$ και βαθμός $\beta = 0$.

Ορισμός 2.5: Μονοπάτι μ [path] μήκους κ από μία κορυφή α σε μια κορυφή α' ενός γράφου $G(V, E)$ είναι μία ακολουθία $\langle \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_\kappa \rangle$ κορυφών, τέτοια ώστε $\alpha = \beta_0, \alpha' = \beta_\kappa$ και $(\beta_{i-1}, \beta_i) \in E$.

- ◆ Το μήκος του μονοπατιού μ είναι ο αριθμός των ακμών στο μονοπάτι.
- ◆ Το μονοπάτι μ περιέχει τις κορυφές $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_\kappa$ και τις ακμές $(\beta_0, \beta_1), (\beta_1, \beta_2), \dots, (\beta_{\kappa-1}, \beta_\kappa)$.
- ◆ Εάν υπάρχει μονοπάτι μ από το α στο β , λέμε ότι ο κόμβος β είναι προσβάσιμος [reachable] από τον α μέσω του μ .
- ◆ Υπομονοπάτι [subpath] ενός μονοπατιού $\mu = \langle \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_\kappa \rangle$ είναι μια υπακολουθία κορυφών $\langle \beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_j \rangle, \forall 0 \leq j \leq \kappa$
- ◆ Ένα μονοπάτι $\mu = \langle \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_\kappa \rangle$ σχηματίζει έναν κύκλο εάν $\kappa \geq 3, \beta_0 = \beta_\kappa$ και $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\kappa-1}$ είναι διακεκριμένοι κόμβοι.

Για παράδειγμα, στο γράφο της εικόνας 2.5 εμφανίζονται μονοπάτια αποκλειστικά μήκους 1: $\langle \alpha, \gamma \rangle, \langle \alpha, \delta \rangle, \langle \alpha, \epsilon \rangle$ κλπ. Αντίθετα στο γράφο της εικόνας 2.4, μπορούμε να βρούμε και άπειρου (θεωρητικά) ακόμα μήκους μονοπάτια, αφού κάποια από αυτά περιλαμβάνουν κύκλους εντός τους, π.χ. το $\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta, \beta, \gamma, \zeta, \theta, \mu, \sigma, \pi, \alpha \rangle$. Το μονοπάτι αυτό περιλαμβάνει έναν κύκλο, τον $\langle \beta, \gamma, \delta, \beta \rangle$. Τα μονοπάτια $\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \rangle, \langle \beta, \gamma, \zeta, \theta, \mu, \sigma \rangle, \langle \theta, \mu, \sigma, \pi \rangle$, όπως και άλλα, είναι υπομονοπάτια του $\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta, \beta, \gamma, \zeta, \theta, \mu, \sigma, \pi, \alpha \rangle$.

Τα μοντέλα δικτύου [network models] που χρησιμοποιούνται από τις περισσότερες δημοσιευμένες εργασίες είναι αρκετά παρεμφερή. Όλες μοντελοποιούν το ad-hoc ασύρματο δίκτυο ως ένα γράφο $G(V, E)$, όπου το V δηλώνει το σύνολο κορυφών [vertex set] των κόμβων που είναι τοποθετημένοι στο Ευκλείδειο επίπεδο \mathbb{R}^2 και το E δηλώνει το σύνολο ακμών [edge set] των συνδέσεων επικοινωνίας [communication links] [29,39].

Κάθε ακμή του γράφου θα δηλώνει ότι οι πομποί, που αντιπροσωπεύονται από τους δύο κόμβους που ενώνει, επικοινωνούν μεταξύ τους απευθείας. Βρίσκεται ο

Προλεγόμενα

καθένας τους, δηλαδή, μέσα στην ακτίνα εκπομπής του άλλου. Επομένως, μεταξύ δύο κόμβων μπορεί να υπάρχει το πολύ μία ακμή.

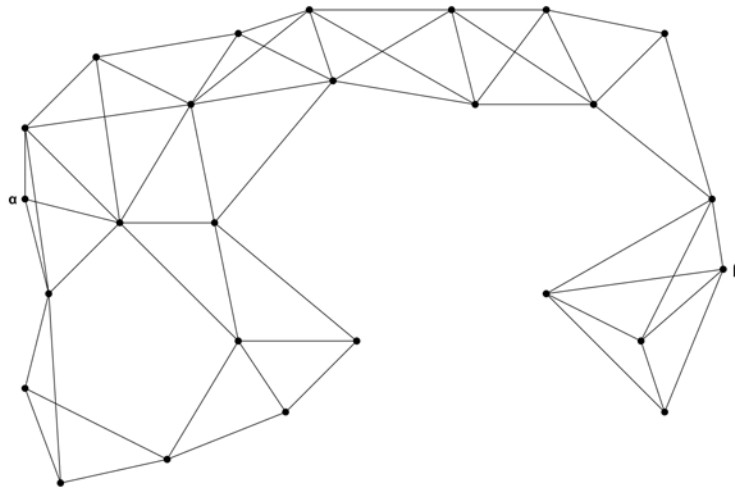
Κατά συνέπεια, η τοπολογία ενός δικτύου μας είναι εξολοκλήρου γνωστή μέσω της πλήρους περιγραφής του γράφου αυτού (κόμβοι, ακμές). Ας δούμε, όμως, στις παρακάτω εικόνες και ένα παράδειγμα ενός δικτύου πομποδεκτών και πως αυτό μετατρέπεται, δια μέσω του μαθηματικού μοντέλου που μόλις περιγράψαμε, σε έναν γράφο.



Εικόνα 2.6: Αρχικό δίκτυο πομποδεκτών.



Εικόνα 2.7: Το αρχικό δίκτυο πομποδεκτών έχει μετατραπεί σε ένα σύνολο κόμβων, καθένας από τους οποίους αντιπροσωπεύει και μία συσκευή.



Εικόνα 2.8: Το τελικό δίκτυο, όπου όμως εκτός των κόμβων έχουν προστεθεί και ακμές που ενώνουν όσους απ' αυτούς μπορούν να επικοινωνήσουν απευθείας.

Στην εικόνα 2.6 μπορούμε να διακρίνουμε την αρχική μορφή ενός συνόλου πομποδεκτών. Τέτοιοι μπορεί να είναι οποιαδήποτε συσκευή με την ικανότητα να στέλνει και δέχεται μηνύματα, όπως ένα κινητό τηλέφωνο, ένας φορητός υπολογιστής, ένας υπολογιστής χειρός [palmtop], ένα ραδιόφωνο κλπ. Μάλιστα, εδώ πρόκειται εξολοκλήρου για κινητούς [mobile] πομποδέκτες. Στην επόμενη εικόνα 2.7 μία από τις συσκευές αντικαθίσταται από έναν κόμβο, ενώ στην τελευταία, υπεισέρχονται και ακμές, οι οποίες αντιπροσωπεύουν τα ζεύγη κόμβων που μπορούν να επικοινωνήσουν απευθείας μεταξύ τους.

Στο παράδειγμα αυτό μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάποιος θέλει να στείλει ένα μήνυμα από τον υπολογιστή χειρός α σε έναν φίλο του που βρίσκεται στο φορηγάκι β . Αυτό μεταφράζεται, στην εικόνα 2.8, στην ανάγκη για εξεύρεση διαδρομής από τον κόμβο α στο β , μιας και αυτοί οι δύο κόμβοι δεν μπορούν να επικοινωνήσουν απευθείας. Αυτό θα γίνει, αν μπορεί να γίνει, μέσω του ad-hoc ασύρματου δικτύου που δημιουργήθηκε μονομιάς με την εμφάνιση των πομποδεκτών σε μια ευρύτερη περιοχή.

Αυτό που μπορούμε να παρατηρήσουμε στον τελικό κόμβο της εικόνα 2.8, είναι ότι υπάρχουν και αρκετές ακμές του δικτύου που τέμνονται μεταξύ τους. Πρόκειται, δηλαδή, για ένα μη επιπεδικό, όπως θα συζητήσουμε και αργότερα, γράφο. Τέτοιοι γράφοι δεν είναι επιθυμητοί καθώς πολλοί αλγόριθμοι αδυνατούν να λειτουργήσουν πάνω σε τέτοιο υπόβαθρο. Γι' αυτό και, όπως θα δούμε αργότερα, υπόκεινται και σε περαιτέρω επεξεργασία.

Ο κάθε κόμβος $\alpha \in V$ γνωρίζει τη δική του Ευκλείδεια τοποθεσία [Euclidian position] στο R^2 και έχει έναν μοναδικό αναγνωριστή [identifier]. Επιπλέον, κάθε κόμβος $\alpha \in V$ είναι εξοπλισμένος με μία πολυκατευθυντική³ κεραία [omni-directional antenna] που έχει τη δυνατότητα να εκπέμπει σε απόσταση έως το μέγιστο τ_α . Έτσι, όταν ο κόμβος α εκπέμπει ένα σήμα, μόνο εκείνοι οι κόμβοι των οποίων η Ευκλείδεια απόσταση από το α είναι το πολύ τ_α θα λάβουν την μετάδοση.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε τη γειτονιά [neighborhood] $N(\alpha)$ [19, 69, 70] ενός κόμβου $\alpha \in V$ στο Γ να είναι $\eta : N(\alpha) = \{\beta \in V \mid |\alpha\beta| \leq \tau_\alpha\}$. Θεωρείται ότι όλοι οι κόμβοι στο V έχουν την **ίδια** μέγιστη ακτίνα μετάδοσης [maximum transmission range] τ_α . Συνεπώς, με κατάλληλη κλιμάκωση μπορούμε να τροποποιήσουμε όλους τους κόμβους $\alpha \in V$ έτσι ώστε $\forall \alpha \in V : \tau_\alpha = 1$ (μία μονάδα). Τότε $\forall \alpha \in V : N(\alpha) = \{\beta \in V \mid |\alpha\beta| \leq 1\}$. Αυτό υπονοεί ότι $(\alpha, \beta) \in E \Leftrightarrow |\alpha\beta| \leq 1$. Αυτό το μοντέλο περιγράφει έναν γράφο μοναδιαίας ακτίνας ή γράφο μοναδιαίου δίσκου [Unit Disk Graph] $UDG(V)$ ή πιο απλά UDG [16, 44].

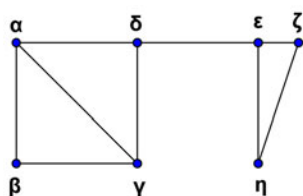
Ορισμός 2.6: Ένας γράφος ονομάζεται συνεκτικός [connected], αν για κάθε ζεύγος διαφορετικών κορυφών του α και β , υπάρχει μονοπάτι με αρχή τον α και τέλος το β .

Ορισμός 2.7: Ένας γράφος $G'(V', E')$ λέγεται υπογράφος [subgraph] του $G(V, E)$, εάν $V' = \{a\}$ και $E' \subseteq E$. Δοθέντος ενός συνόλου $V' \subseteq V$, ο υπογράφος G' του G που προσδιορίζεται από το $V' \subseteq V$ είναι ο $G'(V', E')$, όπου

$$E' = \{(\alpha, \beta) \in E : \alpha, \beta \in V'\}$$

Ορισμός 2.8: Συνεκτική συνιστώσα [connected component] ενός γράφου G , ορίζεται κάθε συνεκτικός υπογράφος του H που δεν περιέχεται σε άλλο συνεκτικό υπογράφο του G που έχει περισσότερες κορυφές ή ακμές από το H .

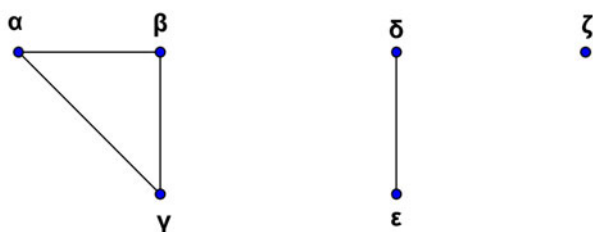
Ας ξαναδούμε τώρα, υπό το πρίσμα των παραπάνω ορισμών, κάποιες από τις προηγούμενες εικόνες:



Εικόνα 2.2: Συνεκτικός γράφος. Για κάθε ζεύγος κόμβων μπορεί να βρεθεί ένα μονοπάτι. Π.χ. για τους κόμβους α και η , υπάρχει όχι ένα αλλά πολλά μονοπάτια, όπως το $\langle \alpha, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta \rangle$. Επίσης, ο γράφος $G'(V', E')$, όπου $V' = \{\alpha, \beta, \gamma, \zeta\}$ και $E' = \{(\alpha, \beta), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha)\}$, είναι υπογράφος του

αρχικού.

³ κατευθυνόμενη προς όλες τις διευθύνσεις



Εικόνα 2.1: Μη Συνεκτικός γράφος. Εδώ εμφανίζονται οι εξής συνεκτικές συνιστώσες:

$$H_1 = (V_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}, E_1 = \{(\alpha, \beta), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha)\}),$$

$$H_2 = (V_2 = \{\delta, \epsilon\}, E_2 = \{(\delta, \epsilon)\}) \text{ και } H_3 = (V_3 = \{\zeta\}, E_3 = \emptyset).$$

Κάθε μία από αυτές είναι και υπογράφος του αρχικού γράφου, χωρίς βέβαια να είναι και οι μοναδικοί.

Επιπλέον, υποθέτουμε τυπικά, για λόγους θεωρητικής συλλογιστικής που αφορά αλγορίθμους για ad-hoc ασύρματα δίκτυα, ότι το υποκείμενο δίκτυο αλλάζει διαμόρφωση με ταχύτητες τόσο πολύ πιο αργές σε σχέση με το χρόνο εκτέλεσης των αλγορίθμων, που κάθε στιγμή του ενός αλγορίθμου εκτελείται σε έναν προσωρινά ακίνητο [temporarily stationary] γράφο [39].

2.2 Αδυναμίες δικτύου

Αν και το παραπάνω μοντέλο είναι μία λογική πρώτη προσπάθεια για τη μοντελοποίηση ενός ad-hoc ασύρματου δικτύου, δεν έχει έλλειψη αδυναμιών. Μία σημαντική αδυναμία είναι η υπόθεση ότι όλοι οι κόμβοι είναι ενσωματωμένοι [embedded] σε ένα δισδιάστατο επίπεδο [two dimensional plane]. Αυτό το μοντέλο δεν μπορεί να εξηγήσει- ερμηνεύσει την ύπαρξη εμποδίων (όπως τοίχοι, κτίρια, ή βουνά) μεταξύ ζευγών κόμβων. Επιπλέον, είναι περιορισμένο στη μοντελοποίηση κόμβων που είναι τοποθετημένοι σε μη-ομογενοποιημένη γεωγραφική περιοχή ακόμα και όταν δεν υπάρχουν εμπόδια. Αναγνωρίζοντας αυτήν τη δυσκολία, ο δίσκος του γράφου [disk graph] επεκτάθηκε στις τρεις διαστάσεις. Το αποτέλεσμα είναι ένας γράφος μοναδιαίας σφαίρας [unit ball graph] [32, 27]. Καίτι αυτό το μοντέλο επιτρέπει τους κόμβους να ενσωματωθούν στο \mathbb{R}^3 , η βελτίωση ως προς το μοναδιαίο δίσκο είναι ασήμαντα μικρή [is marginal at best]. Πολλά από τα προβλήματα [impediments] του γράφου μοναδιαίου δίσκου (βλέπε κάτωθι) παρουσιάζονται και στο γράφο μοναδιαίας σφαίρας.

Άλλη μία αδυναμία αυτού του μοντέλου είναι ότι οι τρόποι μετάδοσης (ή πρότυπα μετάδοσης) [transmission patterns] των κόμβων σχηματίζουν – μορφοποιούν ένα γράφο μοναδιαίου δίσκου. Και ενώ αυτή η υπόθεση υποστηρίζει συνεπή (έγκυρα) [sound] θεωρητικά αποτελέσματα, μπορεί να μη πλησιάζει αρκετά σε ρεαλιστικές (πραγματικά φυσικές) υλοποιήσεις [real actual implementations] ώστε να έχει κάποιο νόημα (κάποια σημασία) [to be meaningful] [42]. Όπως επισημαίνεται και στο [55], το εύρος μετάδοσης ενός ασύρματου κόμβου συχνά επηρεάζεται από παράγοντες που δεν μπορούν να ελεγχθούν (π.χ. καιρικές συνθήκες, παρεμβολή, και θόρυβος). Επιπροσθέτως, το μοτίβο με το οποίο γίνεται η εκπομπή της ενέργειας σε κύματα από τις πολυκατευθυντικές κεραιές είναι συνήθως μη κυκλικός [the radiation pattern of omnidirectional antennas is often not circular] [15]. Εναλλακτικά μοντέλα, όπως το Γράφοι Εν μέρη Μοναδιαίου Δίσκου [Quasi Unit Disk Graphs] [42], αντανακλούν πλησιέστερα πραγματικές διαμορφώσεις δικτύων [network configurations]

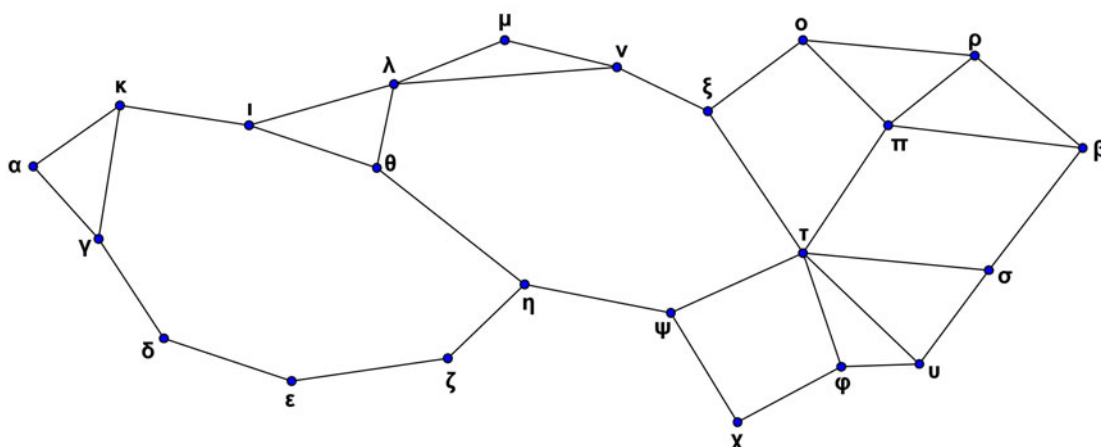
2.3 Τοπικοί Αλγόριθμοι [Local Algorithms]

Είναι επιθυμητό καθένας κόμβος που συμμετέχει σε έναν αλγόριθμο τοπολογικού ελέγχου ή αλγόριθμο δρομολόγησης να παίρνει **αποφάσεις τοπικές** και μόνο. Αυτό σημαίνει, ότι κάθε κόμβος λαμβάνει αποφάσεις που βασίζονται αποκλειστικά στη θέση του κόμβου αυτού καθεαυτού, την πληροφορία για τη θέση καθενός από τους γείτονές του, και στην περίπτωση κάποιου αλγορίθμου δρομολόγησης, την πληροφορία που εμπεριέχεται στην κεφαλή [header] του πακέτου που δρομολογείται [43, 44, 64, 65, 66].

Ορισμός 2.9: Είναι μερικές φορές απαραίτητο να επεκτείνουμε την έννοια της γειτονιάς ενός κόμβου ως ακολούθως:

$$N_k(u) = \begin{cases} \{v \mid v \in V, |uv| \leq 1\} & : k = 1 \\ N_{k-1}(u) \cup \{v \mid \exists w : w \in N_{k-1}(u) \wedge v \in N_1(w)\} & : k > 1 \end{cases}$$

Το $N_k(\alpha)$ συχνά αναφέρεται και ως k -γειτονιά του α , η οποία αποτελείται από όλους τους κόμβους οι οποίοι βρίσκονται k ή λιγότερα βήματα μακριά από τον α . Παρατηρήστε ότι $N(\alpha) \equiv N_1(\alpha)$. (βλέπε παρακάτω την εικόνα 2.6)



Εικόνα 2.6: Στον παραπάνω γράφο ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} N_1(\alpha) &= \{\kappa, \gamma\}, N_1(\kappa) = \{\gamma, \iota\}, N_1(\gamma) = \{\alpha, \kappa, \delta\}, N_1(\iota) = \{\kappa, \lambda, \theta\}, \\ N_1(\delta) &= \{\gamma, \epsilon\}, N_1(\epsilon) = \{\delta, \zeta\}, N_1(\theta) = \{\iota, \lambda, \eta\}, \text{ κλπ.} \\ \text{Άρα, θα είναι } N_2(\alpha) &= \{\gamma, \kappa, \iota, \delta\}, N_3(\alpha) = \{\gamma, \kappa, \iota, \delta, \lambda, \theta, \epsilon\}, \\ N_4(\alpha) &= \{\gamma, \kappa, \iota, \delta, \lambda, \theta, \epsilon, \mu, \nu, \zeta\}, \text{ κλπ.} \end{aligned}$$

Εδώ, όμως, πρέπει να κάνουμε ένα σαφή διαχωρισμό στους αλγορίθμους που θα μελετήσουμε, είτε πρόκειται για τοπολογικού ελέγχου είτε για αλγορίθμους δρομολόγησης. Ναι μεν θα είναι τοπικοί, ακόμα και αν γίνεται χρήση k -γειτονιάς και όχι απλώς της γειτονιάς, αλλά διακρίνονται με βάση το μέγεθος της μνήμης που χρησιμοποιούν για να λειτουργήσουν. Οπότε, στην πραγματικότητα, τοπικός αλγόριθμος θα σημαίνει k -τοπικός με $\kappa = \mathcal{O}(1)$.

Έχουμε έτσι, καταρχάς, τους «αμνήμονες» [oblivious] αλγόριθμους. Εδώ κατατάσσονται όλοι οι αλγόριθμοι που μπορούν να λειτουργήσουν, να αποφασίσουν δηλαδή ποιο θα είναι το επόμενο βήματα τους, βασιζόμενοι αποκλειστικά στη θέση του τρέχοντος [current] κόμβου, τη θέση καθενός από τους γείτονές του (ή τους κ-γείτονές του), και στην περίπτωση κάποιου αλγόριθμου δρομολόγησης, την πληροφορία που εμπεριέχεται στην κεφαλή [header] του πακέτου που δρομολογείται, **και μόνον αυτά.**

Προφανώς η μη ικανοποίηση των απαιτήσεών μας, όπως θα εξετάσουμε αναλυτικά και παρακάτω, μας ανάγκασε να μελετήσουμε και κάποιους αλγόριθμους εφοδιασμένους με περισσότερη μνήμη, αλλά πάλι σε περιορισμένο μέγεθος. Πρόκειται για τους αλγόριθμους που θα τους ονομάζουμε $O(1)$ -μνήμης. Στην κατηγορία αυτή, εκτός από τα βασικά που συναντήσαμε και προηγούμενα, οι αλγόριθμοί μας είναι απαραίτητο να έχουν και άλλες πληροφορίες σε κάθε σημείο (κόμβο) του δικτύου όπου βρίσκονται. Όπως για παράδειγμα οι υπάρχουσες όψεις σε μια κυρτή ενσωμάτωση του επιπέδου ή τα υπάρχοντα τρίγωνα σε μια τριγωνοποίηση.

Θα κλείσουμε το κεφάλαιο αυτό κάνοντας μια διευκρίνιση για αποφυγή παρεξηγήσεων. Αναφερθήκαμε πριν λίγο στην κατηγορία των αλγόριθμων $O(1)$ -μνήμης. Προφανώς εδώ το $O(1)$ δεν αναφέρεται στα ψηφία [bits] που μπορούν να αποθηκευτούν προσωρινά στην μνήμη του αλγόριθμου, αλλά στο πλήθος των κόμβων. Σε κάθε στιγμή, δηλαδή, ένας αλγόριθμος αυτής της κατηγορίας μπορεί να «θυμάται» πληροφορίες για $O(1)$ το πολύ κόμβους.

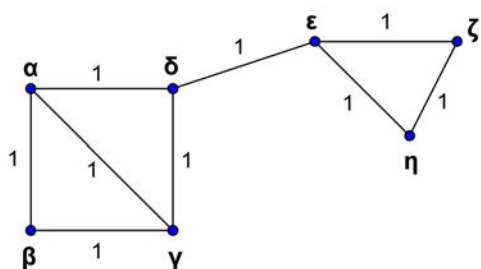
2.4 Συναρτήσεις Κόστους [Cost Functions]

Με στόχο να μελετήσουμε και να συγκρίνουμε αλγορίθμους που εκτελούνται επί ασύρματου δικτύου, αντιστοιχούμε ένα ειδικό κόστος (ή βάρος) [weight] με κάθε ακμή $\epsilon \in E$, δηλαδή ορίζουμε μια *συνάρτηση κόστους* (ή συνάρτηση βάρους) [cost function] $c : E \mapsto \mathbb{R}^+$. Στην πραγματικότητα –για λόγους μαθηματικής συνέπειας– είναι λίγο διαφορετικός ο τρόπος. Έστω ότι η ϵ αναπαριστά την ακμή $(\alpha, \beta) \in E$ και έστω $d(\epsilon)$ να είναι το μήκος της ακμής ϵ , δηλ. $d(\epsilon) = |\alpha\beta|$. Το κόστος που συνδέεται με την ακμή ϵ παρέχεται από μία συνάρτηση κόστους $c : d(\epsilon) \mapsto \mathbb{R}^+$. Όταν ο γράφος Γ είναι Γράφος Μοναδιαίου Δίσκου (UDG), είναι $0 < d(\epsilon) \leq 1$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση κόστους μπορεί να γραφτεί και ως $c : (0,1] \mapsto \mathbb{R}^+$.

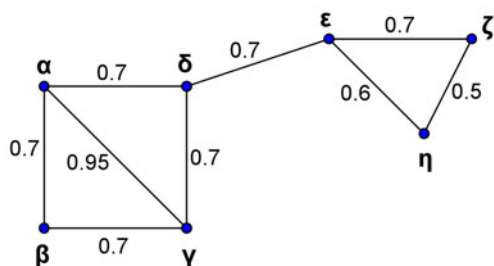
Μία συνάρτηση κόστους είναι γνησίως αύξουσα και αντιστοιχεί το μήκος $d(\epsilon)$ μιας ακμής $\epsilon \in E$ σε ένα θετικό πραγματικό αριθμό $c(d(\epsilon))$. Επιπλέον, για $x, x' \in (0,1], x > x' \Rightarrow c(x) > c(x')$. Για διευκόλυνση ως προς το συμβολισμό [notational convince], το κόστος της ακμής ϵ , $c(d(\epsilon))$, θα γράφεται πιο απλά ως $c(\epsilon)$ [39], εξ' ου και το $c : E \mapsto \mathbb{R}^+$.

Το συγκεκριμένο μοντέλο που περιγράφει συναρτήσεις κόστους (ή αλλιώς μοντέλο κοστολόγησης) [cost model] περιλαμβάνει πολλές δημοφιλείς μετρικές κόστους [cost metrics]. Η μετρική κόστους *Ευκλείδειας απόστασης* [Euclidean distance cost metric] μπορεί να περιγραφεί ως $c(\epsilon) := d(\epsilon)$. Η μετρική κόστους *μετρητής ακμών* [link distance cost metric] (κοινά αναφερόμενη και ως *μετρητής βημάτων* [hop count]) ορίζεται να ικανοποιεί τη συνθήκη $c(\epsilon) := 1$. Η *ενεργειακή μετρική κόστους* [energy cost metric] ορίζεται να ικανοποιεί τη συνθήκη $c(\epsilon) := d(\epsilon)^\alpha$, για $\alpha \geq 2$ [39].

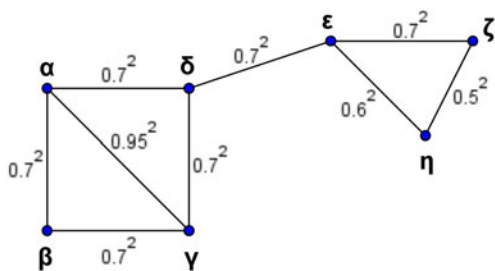
Ας δούμε τώρα και κάποια παραδείγματα συναρτήσεων κόστους στις παρακάτω εικόνες.



Εικόνα 2.7: Μετρική μετρητής βημάτων. Σε κάθε ακμή, όπως βλέπουμε, αντιστοιχίζεται η μονάδα. Συνεπώς, το κόστος ενός μονοπατιού ταυτίζεται, στην περίπτωση αυτή, με το πλήθος των ακμών που έχει διασχίσει ο αλγόριθμος για να καλύψει το μονοπάτι αυτό.



Εικόνα 2.8: Ευκλείδεια μετρική. Σε κάθε ακμή αντιστοιχίζουμε την ευκλείδεια απόστασή της. Συνεπώς, το κόστος ενός μονοπατιού ταυτίζεται, στην περίπτωση αυτή, με το πραγματικό μήκος του μονοπατιού.



Εικόνα 2.9: Ενεργειακή μετρική.
Σε κάθε ακμή αντιστοιχίζουμε κάποια συγκεκριμένη δύναμη της ευκλείδειας απόστασής της. Π.χ. στη διπλανή εικόνα αυτή η δύναμη είναι το 2.

Η συνάρτηση κόστους που περιγράφηκε παραπάνω, μπορεί να επεκταθεί ώστε να ορίσει μία συνάρτηση κόστους για ένα μονοπάτι \mathbf{p} στο Γ . Ορίζεται, λοιπόν, το κόστος ενός μονοπατιού \mathbf{p} ως $c(\mathbf{p}) := \sum_{\epsilon \in \mathbf{p}} c(\epsilon)$.

Παρομοίως, μπορεί να οριστεί και το κόστος ενός αλγορίθμου \mathcal{A} που εκτελείται στο Γ . Έστω $E_{\mathcal{A}}$ ένα πολυσύνολο [multiset] [(33)] (βλέπε και τις παραπάνω εικόνες 2.7 έως 2.9). Αρχικά είναι $E_{\mathcal{A}} = \mathbf{0}$. Κάθε φορά που μία ακμή ϵ διασχίζεται κατά τη διάρκεια εκτέλεσης του αλγορίθμου \mathcal{A} επί του γράφου Γ , ϵ προστίθεται στο $E_{\mathcal{A}}$. Τότε, το κόστος του αλγορίθμου \mathcal{A} ορίζεται ως $c(\mathcal{A}) := \sum_{\epsilon \in E_{\mathcal{A}}} c(\epsilon)$ [39].

Τελικά, η συνάρτηση κόστους μπορεί να επεκταθεί ώστε να οριστεί το κόστος ενός υπογράφου $H(V', E')$ του Γ . Ορίζεται να είναι $c(H) := \sum_{\epsilon \in E'} c(\epsilon)$ [9, 17].

Στις παραπάνω τρεις εικόνες μπορούμε ξεκάθαρα να διακρίνουμε τις διαφορές των συναρτήσεων κόστους που αναφερθήκαμε. Ας πάρουμε για παράδειγμα το μονοπάτι $\mathbf{p} = \langle \alpha, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta \rangle$. Σύμφωνα με τον τρόπο που ορίσαμε το κόστος ενός μονοπατιού, αυτό θα είναι ίσο με το άθροισμα του κόστους των ακμών που διασχίστηκαν εντός του \mathbf{p} . Δηλαδή

$$c(\mathbf{p}) := \sum_{\epsilon \in \mathbf{p}} c(\epsilon) = c((\alpha, \gamma)) + c((\gamma, \delta)) + c((\delta, \epsilon)) + c((\epsilon, \zeta)) + c((\zeta, \eta))$$

Αυτό βέβαια, σημαίνει ότι ανάλογα με τη μετρική θα έχουμε και το αντίστοιχο κόστος, όπως μπορούμε να δούμε και παρακάτω:

α) **Μετρική μετρητής βημάτων.**

$$\begin{aligned} c(\mathbf{p}) &:= \sum_{\epsilon \in \mathbf{p}} c(\epsilon) \\ &= c((\alpha, \gamma)) + c((\gamma, \delta)) + c((\delta, \epsilon)) + c((\epsilon, \zeta)) + c((\zeta, \eta)) \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

β) Ευκλείδεια μετρική.

$$\begin{aligned}c(p) &:= \sum_{\varepsilon \in p} c(\varepsilon) \\&= c((\alpha, \gamma)) + c((\gamma, \delta)) + c((\delta, \varepsilon)) + c((\varepsilon, \zeta)) + c((\zeta, \eta)) \\&= 0.95 + 0.7 + 0.7 + 0.7 + 0.5 \\&= 3.55\end{aligned}$$

γ) Ενεργειακή μετρική (με $\alpha = 2$).

$$\begin{aligned}c(p) &:= \sum_{\varepsilon \in p} c(\varepsilon) \\&= c((\alpha, \gamma)) + c((\gamma, \delta)) + c((\delta, \varepsilon)) + c((\varepsilon, \zeta)) + c((\zeta, \eta)) \\&= 0.95^2 + 0.7^2 + 0.7^2 + 0.7^2 + 0.5^2 \\&= 0.912 + 0.49 + 0.49 + 0.49 + 0.25 \\&= 2.632\end{aligned}$$

3. Τοπολογικός Έλεγχος [Topology Control]

3.1 Εισαγωγή

Τα ad-hoc ασύρματα δίκτυα αποτελούνται από μια συλλογή κινητών (μεταβλητών) [mobile] κόμβων εφοδιασμένων με συσκευές επικοινωνίας που συνεργάζονται μεταξύ τους και σχηματίζουν ένα δίκτυο μετάδοσης πληροφοριών, χωρίς το όφελος μιας συγκεντρωτικής ή υπάρχουσας σταθερής υποδομής [60]. Οι κόμβοι είναι κατανομημένοι τυχαία και είναι κινητοί. Ως αποτέλεσμα, τα μονοπάτια (δεδομένων) αλλάζουν καθώς η τοπολογία του δικτύου αλλάζει [58]. Προφανώς, όλοι οι κόμβοι δεν μπορούν να επικοινωνήσουν απευθείας, ειδικά δεν θα υφίστατο και πρόβλημα. Τίθεται, συνεπώς, το πρόβλημα της αποστολής ενός μηνύματος από έναν κόμβο σε έναν άλλο με τον οποίο δεν επικοινωνεί αμέσως, με τη βοήθεια και των υπόλοιπων υφιστάμενων κόμβων.

Κάθε κόμβος σε ένα ad-hoc ασύρματο δίκτυο είναι φυσιολογικά εφοδιασμένος με μια ιδιαίτερα περιορισμένη [severely limited] πηγή ενέργειας [power source]. Αυτό θέτει έναν περιορισμό στο συνολικό ποσό ενέργειας που μπορεί να ξοδευτεί για επικοινωνία μεταξύ των κόμβων στο δίκτυο. Ένας τυπικός στόχος στα ad-hoc ασύρματα δίκτυα είναι η επέκταση του χρόνου ζωής του δικτύου κατά το μέγιστο δυνατό ελαχιστοποιώντας το ποσό ενέργειας που καταναλώνεται [51]. Το ποσό της ενέργειας που απαιτείται για δύο κόμβους, έστω α και β , ώστε να επικοινωνήσουν μεταξύ τους αυξάνει τουλάχιστον τετραγωνικά [quadratically] ως προς την απόσταση μεταξύ των δύο κόμβων. Για το λόγο αυτό, είναι περισσότερο ενεργειακά αποδοτικό η εύρεση εναλλακτικής διαδρομής μεταξύ των κόμβων α και β που αποτελείται από μια σειρά συνδέσεων, καθεμία από τις οποίες έχει μικρότερη απόσταση από την απόσταση από τον α στον β . Αυτό θα μειώνει το απαιτούμενο ποσό ενέργειας για την αποστολή μηνυμάτων από τον α στον β . Ελαχιστοποιώντας την απαιτούμενη ενέργεια για την αποστολή μηνυμάτων μεταξύ κάθε ζεύγους στο δίκτυο, το συνολικό ποσό ενέργειας που καταναλώνει το δίκτυο μπορεί να μειωθεί, αυξάνοντας κατά συνέπεια το χρόνο ζωής του δικτύου. Οι αλγόριθμοι και οι μηχανισμοί που χρησιμοποιούνται για την εγκατάλειψη μακρών δικτυακών συνδέσεων [network links] υπέρ άλλων κοντύτερων αναφέρονται ως **τοπολογικός έλεγχος** [10, 65, 66].

Ιδιαίτερη προσοχή, παρόλα αυτά, πρέπει να ληφθεί κατά την απομάκρυνση συνδέσεων από το ασύρματο δίκτυο. Όταν αφαιρούνται οι συνδέσεις, η κίνηση στις απομένουσες ακμές αναπόφευκτα θα αυξηθεί. Αυτή η αύξηση στην κίνηση του δικτύου μπορεί να οδηγήσει σε αυξημένη σύγκρουση (καθυστέρηση) μηνυμάτων [message collision] και αναμετάδοση [retransmission]. Έτσι το αποτέλεσμα μπορεί στην πραγματικότητα να είναι μία καθαρή αύξηση στην κατανάλωση ενέργειας εξαιτίας της συμφόρησης δικτύου επί των εναπομεινάντων συνδέσεων. Επιπλέον, η απομάκρυνση ακμών από το δίκτυο είναι πιθανόν να οδηγήσει και σε μη συνεκτικότητα του δικτύου [network becoming disconnected].

Ο **τοπολογικός έλεγχος**, λοιπόν, μπορεί να ειπωθεί ως η εύρεση της ισορροπίας μεταξύ ενεργειακής συντήρησης [conservation], όπου μακριές ακμές αφαιρούνται υπέρ κάποιων άλλων κοντύτερων, και συνεκτικότητας του δικτύου, όπου οι ακμές που παραμένουν στο δίκτυο επιδεικνύουν συγκεκριμένες ιδιότητες, απαραίτητες ώστε το δίκτυο να λειτουργεί σωστά [10, 2].

3.2 Διατύπωση προβλήματος και υποθέσεις [Problem Statement and Assumptions]

Σε μια πρώτη φάση, λοιπόν θα αφιερώσουμε χώρο και χρόνο για να μελετήσουμε προτεινόμενους στη βιβλιογραφία αλγορίθμους, για να πετύχουμε τη μετατροπή ενός Γράφου Μοναδιαίας Ακτίνας (ΓΜΑ) [Unit Disk Graph (**UDG**)] σε έναν Επιπεδικό Γράφο [Planar Graph]. Και πιο συγκεκριμένα, μετά από μία πρώτη απαραίτητη ανασκόπηση παλαιότερων μεθόδων, στόχο έχουμε να καταδείξουμε την πορεία κατασκευής ενός *φραγμένου βαθμού επιπεδικό επικαλυπτή* (γράφο) [*bounded degree planar spanner (graph)*] ενός ad-hoc ασύρματου δικτύου μοντελοποιημένου σαν γράφο μοναδιαίας ακτίνας **UDG**. Όπως περιγράφηκε στο σημείο 2.1, μια τέτοια τοπολογία είναι επιθυμητή με στόχο να διατηρήσουμε (περιορίσουμε) την κατανάλωση ενέργειας και έτσι να επεκτείνουμε τη ζωή του ad-hoc ασύρματου δικτύου.

Όλες οι εργασίες με τις οποίες θα ασχοληθούμε ή θα αναφέρουμε υποθέτουν ένα μοντέλο δικτύου όπως αυτό που περιγράφηκε στο 2.1. Παρόλα αυτά, κάποιες από αυτές, όπως οι [64] και [44], επιτρέπουν μια εξασθένιση της υπόθεσης ότι ο κάθε κόμβος γνωρίζει τις ευκλείδειες συντεταγμένες του (ή την Ευκλείδεια θέση του). Σ' αυτούς τους αλγορίθμους, είναι επαρκές για κάθε κόμβο να ξέρει τη θέση του σχετικά (ή σε σχέση) με τη θέση των 1-βήματος-γειτόνων του. Αυτή είναι μια σημαντική βελτίωση μιας και η σχετική θέση ενός κόμβου σε σχέση (ή ως προς) τους γείτονές του μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας πληροφορίες κατεύθυνσης και τα μέγεθος των εισερχόμενων μηνυμάτων, αφαιρώντας την ανάγκη για πληροφορίες εξωτερικές από τους κόμβους αυτούς καθαυτούς. Μία επιπλέον υπόθεση που γίνεται στις [64] και [44] είναι ότι καμία τετράδα κόμβων του **V** δεν είναι ομοκυκλική [co-circumcircle]. Αυτή είναι μία λογική υπόθεση. Εάν υπάρχουν τέσσερις τέτοιοι κόμβοι, μια μικρή τυχαία (αντι)μετάθεση στη θέση οποιουδήποτε απ' αυτούς μπορεί να εισαχθεί χωρίς να επηρεάσει τη συνολική απόδοση του δικτύου [44].

3.3 Επιθυμητές Ιδιότητες Γράφου [Desired Graph Properties]

Ο σκοπός ενός αλγορίθμου τοπολογικού ελέγχου, όπως περιγράφηκε στο μέρος 1, είναι να μετασχηματίσει το UDG σε έναν καινούριο γράφο στον οποίο η χρήση ενέργειας έχει ελαχιστοποιηθεί. Έστω $G_p = (V, E_p)$, όπου $E_p \subseteq E$, δηλώνει το γράφο που προκύπτει από την εκτέλεση ενός αλγορίθμου τοπολογικού ελέγχου P σε έναν γράφο G . Έστω $N_p(\alpha) \subseteq N(\alpha)$ η γειτονιά του κόμβου $\alpha \in V$ στο γράφο G_p . Παρατηρήστε ότι ο G_p είναι επικαλυπτικός υπογράφος [spanning subgraph] του G [19, 69, 70]. Τυπικά είναι επιθυμητό ο γράφος G_p να ικανοποιεί τις παρακάτω αναφερόμενες ιδιότητες [29, 43, 44, 64, 66]

Συνεκτικότητα [Connectivity] Η ιδιότητα της συνεκτικότητας απαιτεί για όλα τα ζευγάρια κόμβων $\alpha, \beta \in V$, αν α και β είναι συνδεδεμένοι στον G , τότε είναι επίσης συνδεδεμένοι και στον G_p [66].

Απ' όλες τις επιθυμητές ιδιότητες γράφου που περιλαμβάνονται στο τμήμα αυτό, η συνεκτικότητα είναι η πιο ζωτική. Αυτό είναι πράγματι αληθινό όταν αναλογιστούμε τους αλγορίθμους δρομολόγησης για ad-hoc ασύρματα δίκτυα. Ενώ η απουσία οποιασδήποτε από τις άλλες ιδιότητες μπορεί να καταστήσει την εκτέλεση του αλγορίθμου προβληματική, δεν εμποδίζουν παρόλα αυτά υποχρεωτικά τη σωστή λειτουργικότητα αυτών των αλγορίθμων. Αντιθέτως, εάν δύο κόμβοι α και β δεν είναι συνδεδεμένοι, δε μπορεί να υπάρξει κανένας αλγόριθμος δρομολόγησης που να επιτρέπει τους α και β να επικοινωνήσουν.

Επικαλυπτής [Spanner] Έστω $C_G(\alpha, \beta)$ δηλωτικό ενός ελαχιστικού¹ ενεργειακού μονοπατιού [minimal cost path], όσον αφορά κάποια συνάρτηση κόστους όπως αυτές περιγράφηκαν στον τμήμα 2.4, από τον κόμβο α στον κόμβο β στον γράφο G . Παρομοίως, έστω $C_p(\alpha, \beta)$ δηλωτικό ενός ελαχιστικού ενεργειακού μονοπατιού [minimal cost path], από τον κόμβο α στον κόμβο β στον γράφο G_p . Ο γράφος G_p είναι επικαλυπτής του γράφου G εάν υπάρχει μία σταθερά k τέτοια που για όλα τα ζεύγη κόμβων $\alpha, \beta \in V$, να ισχύει $C_p(\alpha, \beta) \leq k \cdot C_G(\alpha, \beta)$. Αν υπάρχει τέτοιο k , τότε ο G_p καλείται ένας k -επικαλυπτής του G και το k λέγεται ο παράγοντας επέκτασης [stretch factor] [10, 29, 64, 66].

Παρατηρήστε ότι η ιδιότητα επικαλυπτή υποδηλώνει συνεκτικότητα.

Συμμετρία [Symmetry] Ο γράφος G_p πρέπει να είναι συμμετρικός, δηλαδή, για $u, v \in V$, ισχύει ότι: $u \in N_p(v) \Leftrightarrow v \in N_p(u)$. Χωρίς τη συμμετρία, ακόμα και ένα απλό μήνυμα ACK [ACK message] για να αναγνωρισθεί η παραλαβή κάποιου μηνύματος μπορεί να καταστεί αρκετά πολύπλοκη [29, 66]. Όταν

¹ Όταν καλούμε έναν γράφο ελαχιστικό [minimal] ή μεγιστικό maximal] για κάποια ιδιότητα, αλλά δεν έχουμε καθορίσει οποιοδήποτε είδους διάταξη [ordering], αναφερόμαστε στη σχέση υποσυνόλου [subgraph relation]

διατηρείται η συμμετρία ο G_p μπορεί να ειπωθεί ως ένας μη κατευθυνόμενος γράφος.

Επιπεδικότητα [Planarity] Ο γράφος G_p πρέπει να είναι ένας επιπεδικός γράφος [planar graph], δηλαδή ποτέ δύο ακμές του G δεν πρέπει να τέμνονται [9, 64]. Η επιπεδικότητα του G_p χρειάζεται καθώς πολλοί αλγόριθμοι δρομολόγησης που σχεδιάστηκαν για ad-hoc ασύρματα δίκτυα [38, 40, 39, 41, 43, 44, 58] απαιτούν η υποκείμενη τοπολογία να είναι ένας επιπεδικός γράφος [10, 64].

Αραιότητα [Sparseness] Ο προκύπτον γράφος G_p πρέπει να είναι αραιός [sparse]. Αυτό σημαίνει, ότι ο αριθμός των ακμών πρέπει να είναι της τάξης του αριθμού των κόμβων, δηλαδή $|E_p| = O(|V|)$ [66]. Η αραιότητα, ωστόσο, είναι μία ολική ποσότητα-μέτρο [global measure]. Τοπικά, ένας κόμβος μπορεί ακόμη να έχει ένα μεγάλο αριθμό από γείτονες, το οποίο θα μπορούσε να οδηγήσει σε υπερβολικές συγκρούσεις μετάδοσης [10, 29].

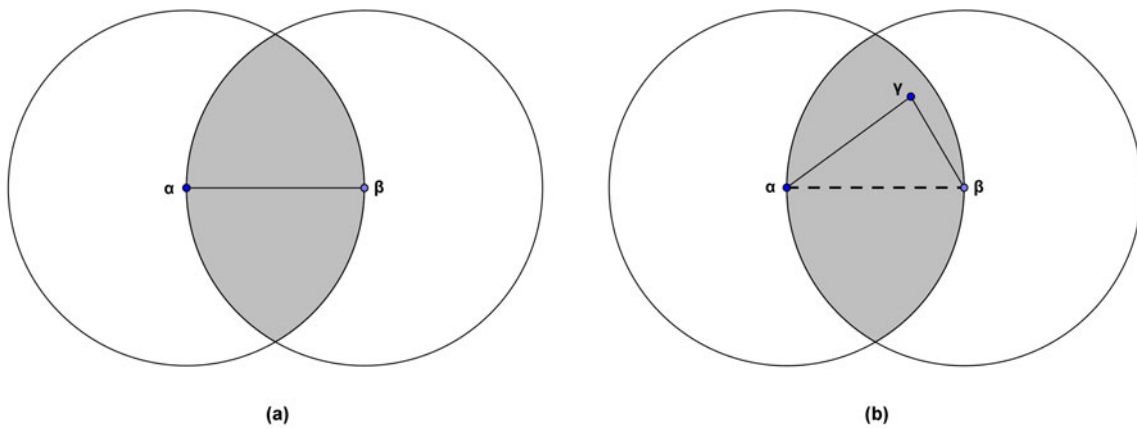
Φραγμένου βαθμού [Bounded degree] Ο μέγιστος βαθμός οποιουδήποτε κόμβου πρέπει να φράσσεται από μία σταθερά. Με άλλα λόγια $\forall \alpha \in V : |N(\alpha)| < \lambda$ για κάποια σταθερά λ [64, 66]. Στην [10], παρόλα αυτά, έχει πρόσφατα προταθεί ότι μία αραιή τοπολογία, ή ακόμη και μια τοπολογία φραγμένου βαθμού, μπορεί να μην οδηγεί υποχρεωτικά σε χαμηλή παρεμβολή μετάδοσης [transmission interference]. Συνηγορούν υπέρ της χρήσης μιας μετρικής που προσπαθεί να καταστήσει τον γράφο G_p *παρεμβολών-ελαχιστικό [interference minimal]*.

3.4 Αλγόριθμος Σχετικής Γειτονιάς (RNG) [Relative Neighborhood algorithm]

Ένας από τους πρώτους αλγόριθμους τοπολογικού ελέγχου που προτάθηκαν στη βιβλιογραφία, είναι ο αλγόριθμος **RNG** ή, περιφραστικά, ο *αλγόριθμος σχετικής γειτονιάς* [Relative Neighborhood algorithm] [62]. Έχει μείνει γνωστός, όμως, και σαν Τεστ **RNG**, αφού η εφαρμογή επί ενός γράφου **UDG** οδηγεί σε γράφο με κάποιες από τις ιδιότητες που μόλις αναφέρθηκαν. Σε κάποιες εργασίες εμφανίζεται και με την ονομασία «Το Τεστ της Πεταλούδας» [Butterfly Test], όχι όμως και τόσο συχνά. Ας πάρουμε, όμως, τα πράγματα από την αρχή.

Ορισμός 3.1: (Γράφος Σχετικής Γειτονιάς - RNG [Relative Neighborhood Graph]) Ο Γράφος Σχετικής Γειτονιάς επί ενός συνόλου κορυφών V , που παριστάνεται ως $RNG(V)$, ορίζεται να είναι ο γράφος με σύνολο κορυφών V του οποίου το σύνολο ακμών αποτελείται από όλες τις ακμές (α, β) όπου $|\alpha\beta| \leq 1$ και $\nexists \gamma \in V : (|\alpha\gamma| < |\alpha\beta|) \wedge (|\gamma\beta| < |\alpha\beta|)$ [62, 58, 43].

Δηλαδή ο γράφος $RNG(V)$, αποτελείται από εκείνες τις ακμές (α, β) , για τις οποίες δεν υπάρχει κόμβος γ που να βρίσκεται εγγύτερα στον α απ' ότι ο β στον α και ταυτόχρονα να βρίσκεται εγγύτερα στον β απ' ότι ο α στον β (βλέπε ταυτόχρονα εικόνα 3.1 [από το [46] σελ 5, κ.α.]).



Εικόνα 3.1: Γράφος Σχετικής Γειτονιάς RNG. [Στην περίπτωση (a) η ακμή (α, β) διατηρείται, ενώ στην (b) διαγράφεται (διακεκομμένη γραμμή), αφού εδώ υπάρχει κάποιος κόμβος στην σημειωμένη περιοχή.]

Ένας τρόπος για να το πετύχουμε αυτό είναι να χρησιμοποιήσουμε το τεστ «Γράφου Σχετικής Γειτονιάς» (**RNG**) [Relative Neighbourhood Graph test], δηλαδή τον αλγόριθμο **RNG**.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο κόμβους α και β με τη μεταξύ τους απόσταση όχι μεγαλύτερη από την ακτίνα εκπομπής τους, έστω ρ , δηλαδή δύο γείτονες.

Αναλυτικά ο αλγόριθμος **RNG** έχει ως εξής:

1. Κατασκευάζουμε τους κύκλους με κέντρα τους κόμβους α και β και με ακτίνα ρ .
2. Από την τομή των δύο κύκλων δημιουργείται μια περιοχή, έστω X .
3. Για κάθε κόμβο γ που ανήκει στη γειτονιά $N(\alpha)$ του α ή τη γειτονιά $N(\beta)$ του β , ελέγχουμε αν ισχύει ταυτόχρονα $|\alpha\gamma| < |\alpha\beta|$ και $|\gamma\beta| < |\alpha\beta|$. Δηλαδή, ελέγχουμε αν βρίσκεται μέσα στην περιοχή X .
4. Εάν υπάρχει, έστω και ένας, κόμβος γ που να ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη, τότε η ακμή (α, β) που συνδέει τους κόμβους α και β , διαγράφεται.

Στη βιβλιογραφία [62], αποδεικνύεται ότι ο **RNG** είναι υπεργράφος [supergraph] του **MST**, δηλαδή του Ελαχιστικού Επικαλυπτικού Δέντρου [Minimal Spanning Tree]. Ακόμη, στην ίδια εργασία, αποδεικνύεται ότι ο **RNG** είναι υπογράφος [subgraph] της Delaunay Τριγωνοποίησης. Άμεση συνέπεια των παραπάνω είναι ότι ο **RNG** είναι αραιός [sparse], μιας και είναι $|E_p| = O(|V|) = O(n)$.

Οι **RNG** γράφοι εγγυώνται ότι είναι επιπεδικοί [planar], ότι είναι επικαλυπτές [spanners] ενός γράφου μοναδιαίου δίσκου **UDG**, αλλά δεν είναι k -επικαλυπτές [k -spanners] του **UDG** [5, 22]. Επίσης, δεν υπάρχει κάποιο άνω φράγμα στο μέγιστο βαθμό κορυφής για ένα **RNG** [45, 58].

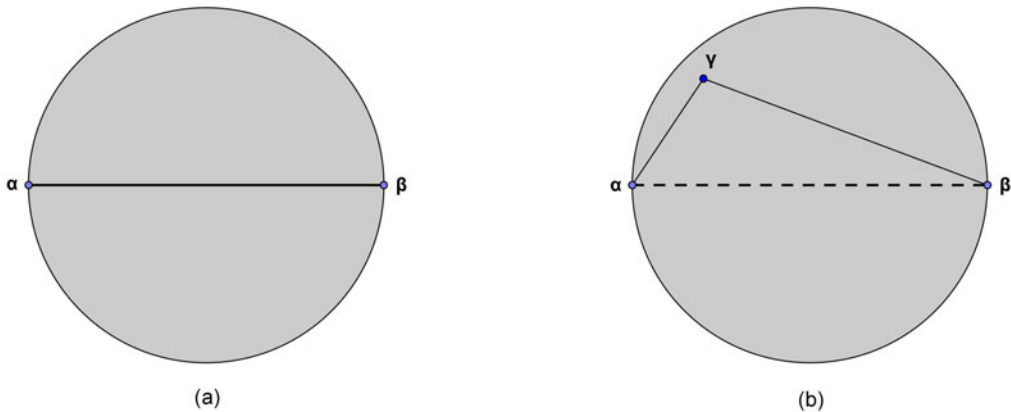
Το τεστ **RNG**, με στόχο την τελική αποφυγή τομών μεταξύ των ακμών, εμφανίζεται να διαγράφει πολλές από τις μακριές ακμές. Καταλήγουμε έτσι να χρειαζόμαστε πολλά βήματα για τη δρομολόγηση ενός μηνύματος από έναν κόμβο σε έναν άλλο, γι' αυτό ο γράφος **RNG** υποφέρει από αυτό που ονομάζουμε φαινόμενο των πολλών βημάτων [multi-hop ή multiple hop effect]. Ένα πρώτο βήμα, λοιπόν, μιας και δε λύθηκαν όλα μας τα προβλήματα.

3.5 Αλγόριθμος Gabriel [Gabriel algorithm]

Ένας άλλος αλγόριθμος τοπολογικού ελέγχου που συναντάμε στη βιβλιογραφία, ο οποίος μοιάζει με τον **RNG**, είναι ο αλγόριθμος του *Gabriel* [Gabriel algorithm]. Πρόκειται για μία από τις πιο παλιές μεθόδους και δε συνδέθηκε εξαρχής με τον τοπολογικό έλεγχο ή τη σχετιζόμενη δρομολόγηση, όπως ίσως μαρτυρά και η αρχική της παρουσίαση [26], αντιθέτως αφορούσε τομέα φαινομενικά εντελώς άσχετο με την έρευνά μας. Έχει μείνει επίσης γνωστός και σαν *Τεστ Gabriel*, αφού η εφαρμογή του επί ενός γράφου **UDG** οδηγεί σε γράφο με κάποιες από τις ιδιότητες που μόλις αναφέρθηκαν. Έχουμε, λοιπόν:

Η βασική λογική είναι να χρησιμοποιήσω από το γράφο μόνο εκείνες τις ακμές του που είναι απαραίτητες, ουσιώδης και να απομακρύνω, να εξαφανίσω τις άλλες.

Ορισμός 3.2: (Γράφος Gabriel– \mathcal{GG} [Gabriel Graph]) Ο γράφος *Gabriel* επί ενός συνόλου κορυφών V , που παριστάνεται ως \mathcal{GG} , ορίζεται να είναι ο γράφος με σύνολο κορυφών V και του οποίου το σύνολο ακμών αποτελείται από όλες τις ακμές (α, β) όπου $|\alpha\beta| \leq 1$ και $\nexists \gamma \in V : \widehat{\gamma\alpha\beta} \geq \frac{\pi}{2}$. Με άλλα λόγια, ο κυκλικός δίσκος με διάμετρο την ακμή (α, β) δεν περιέχει εντός του άλλες κορυφές από το V [26, 58, 43] (βλέπε εικόνα 3.2 [από το [46] κ.α.]).



Εικόνα 3.2: Γράφος Gabriel \mathcal{GG} [Στην περίπτωση (a) η ακμή (α, β) διατηρείται, ενώ στην (b) διαγράφεται (διακεκομμένη γραμμή), αφού εδώ υπάρχει κάποιος κόμβος εντός του σημειωμένου κύκλου.]

Ορισμός 3.3: (Ακμή Gabriel [Gabriel Edge]) Μια ακμή (α, β) είναι ακμή Gabriel εάν $|\alpha\beta| \leq 1$ και ο ανοιχτός κυκλικός δίσκος με διάμετρο την ακμή (α, β) δεν περιέχει άλλους κόμβους από το V .

² Θα μπορούσαμε να γράψουμε και $\widehat{\gamma\beta\alpha} \geq \frac{\pi}{2}$, δηλαδή η κορυφή της γωνίας να είναι ο κόμβος β , χωρίς κάποιο πρόβλημα.

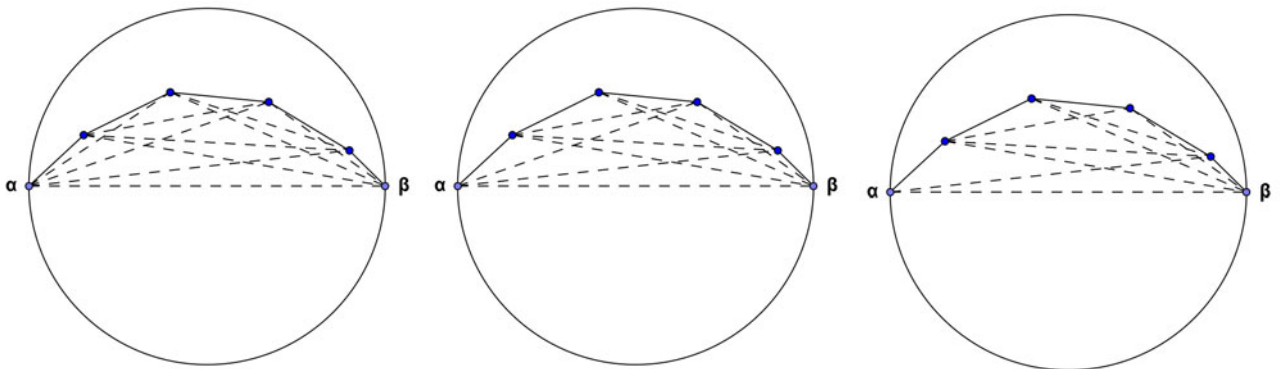
Δηλαδή, ένας γράφος Gabriel είναι στην πραγματικότητα ο υπογράφος εκείνος του V , που περιέχει όλες τις κορυφές του V αλλά από τις ακμές του μόνο αυτές που είναι ταυτόχρονα και ακμές Gabriel. Μπορεί να προκύψει αν εφαρμόσουμε στον V τον αλγόριθμο του Gabriel.

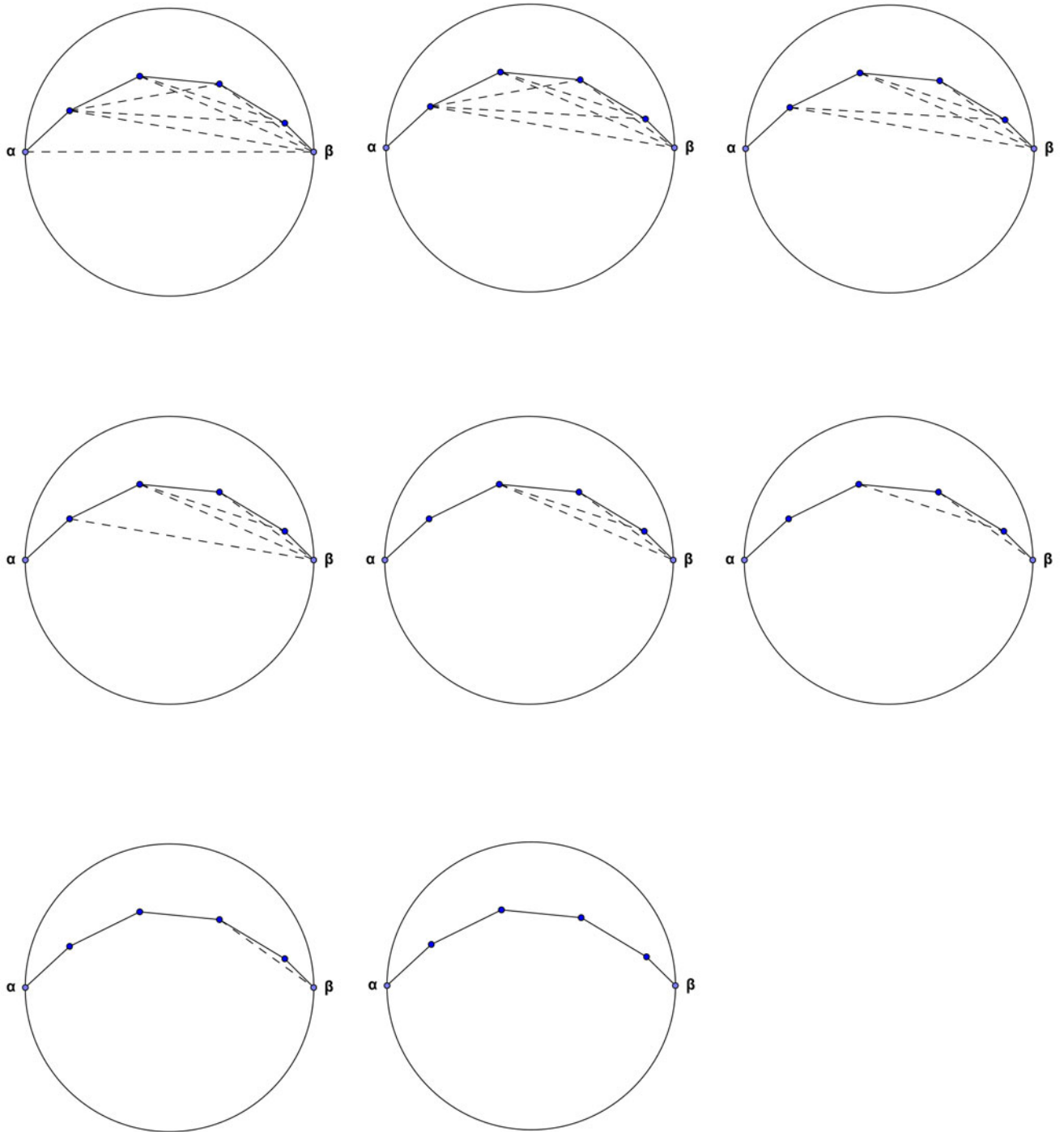
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο κόμβους γειτονικούς α και β , που επικοινωνούν, δηλαδή που ενώνονται με μια ακμή στο σχήμα.

Αναλυτικά ο αλγόριθμος GG έχει ως εξής:

1. Κατασκευάζουμε τον κύκλους με διάμετρο την ακμή (α, β) .
2. Για κάθε κόμβο γ που ανήκει στη γειτονιά $N(\alpha)$ του α ή τη γειτονιά $N(\beta)$ του β , ελέγχουμε αν ισχύει $\widehat{\gamma\alpha\beta} \geq \frac{\pi}{2}$ ή $\widehat{\gamma\beta\alpha} \geq \frac{\pi}{2}$. Ελέγχουμε, δηλαδή, αν υπάρχει κάποιος κόμβος γ που να σχηματίζει με τη διάμετρο (α, β) γωνία μεγαλύτερη από $\frac{\pi}{2}$ ακτίνια ή 90° . Με άλλα λόγια ψάχνουμε αν υπάρχει κάποιος γείτονας γ των α και β που να βρίσκεται μέσα στον κυκλικό δίσκο.
3. Εάν υπάρχει, έστω και ένας τέτοιος κόμβος γ τότε η ακμή (α, β) που συνδέει τους κόμβους α και β δεν είναι μία ακμή Gabriel και κατά συνέπεια διαγράφεται.

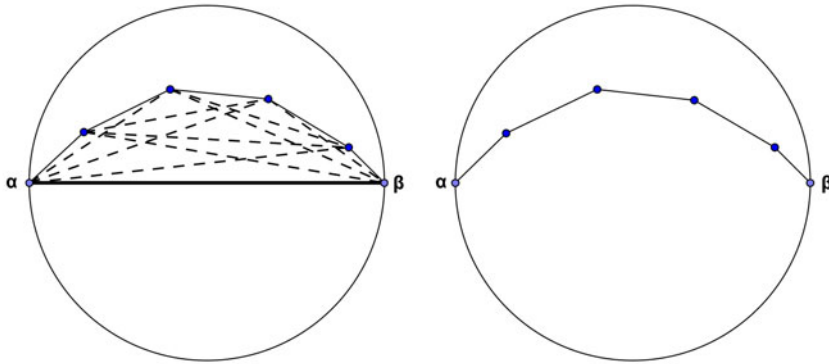
Την εφαρμογή του αλγόριθμου GG , μπορούμε να τη δούμε βήμα βήμα αναλυτικά, στο παράδειγμα που απεικονίζεται ακολούθως στην εικόνα 3.3 (από τα [38, 3]).





Εικόνα 3.3: Τεστ Gabriel GG [Στο παράδειγμα αυτό, κάνουμε σταδιακή εφαρμογή του τεστ και έτσι διαγράφεται ένας μεγάλος αριθμός ακμών].

Όπως και ο γράφος RNG , ο GG εγγυάται ότι είναι επιπεδικός [planar], είναι επικαλυπτής [spanner] ενός γράφου μοναδιαίου δίσκου UDG , αλλά δεν είναι k -επικαλυπτής [k -spanner] του UDG [5, 22]. Επίσης, δεν υπάρχει κάποιο άνω φράγμα στο μέγιστο βαθμό κορυφής για ένα GG [45, 58].



Εικόνα 3.4: Σχόλιο για το τεστ Gabriel \mathcal{GG} [Συγκρίνοντας τον αρχικό γράφο και αυτόν που προκύπτει μετά την εφαρμογή του τεστ, παρατηρούμε ότι υπάρχουν και αρνητικά χαρακτηριστικά. Π.χ. ενώ οι κόμβοι α και β μπορούσαν αρχικά να επικοινωνήσουν απευθείας, τώρα θα πρέπει να διασχίσουν ένα μονοπάτι αρκετών ακμών].

Ο αλγόριθμος Gabriel μας οδηγεί και αυτός σε έναν γράφο όπου έχει γίνει προσπάθεια να απομακρυνθούν όλες οι «μακριές» ακμές με στόχο την αποφυγή τομών μεταξύ των ακμών, κάτι αντίστοιχο με αυτό που έκανε και ο \mathcal{RNG} . Και εδώ, λοιπόν, καταλήγουμε με έναν γράφο \mathcal{GG} , στον οποίο η δρομολόγηση ενός μηνύματος από έναν κόμβο σε έναν άλλο χρειάζεται πολλά βήματα, μιας και έχουν απομείνει μόνο «κοντές» ακμές (βλέπε εικόνα 3.4 [από τα [38, 3]]). Αυτός είναι ο λόγος που και ο γράφος \mathcal{GG} υποφέρει και αυτός από το φαινόμενο των πολλών βημάτων [multi-hop effect], οπότε και το ενεργειακό κόστος της δρομολόγησης αυξάνει από την αιτία αυτή. Άρα, χωρίς να παραγνωρίζουμε τα κέρδη που αποκομίσαμε, ούτε και αυτή η προσπάθεια, μπορεί να θεωρηθεί ως η απόλυτη επιτυχία στον τομέα του τοπολογικού ελέγχου, έτσι όπως ορίστηκε στο 3.1.

3.6 Αλγόριθμος Morelia [Morelia algorithm]

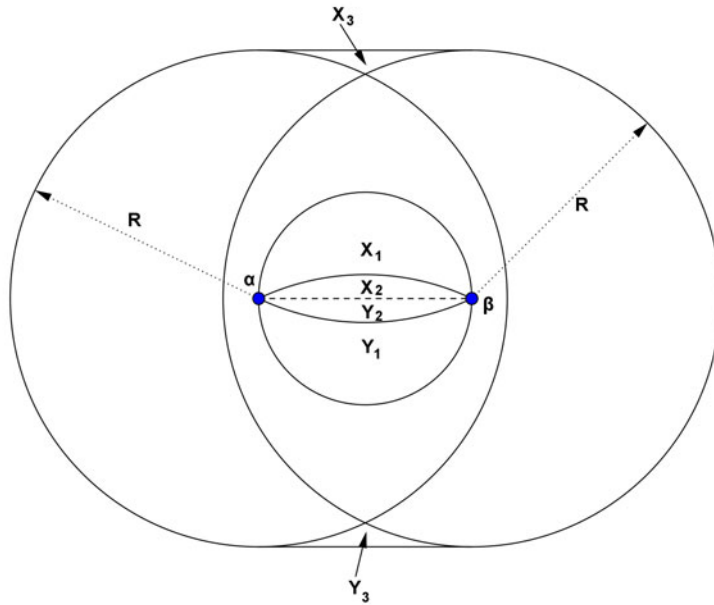
Παρατηρώντας τον προηγούμενο αλγόριθμο, αναγνωρίσαμε κάποια προβλήματα. Με στόχο πλέον την ταχύτητα, αλλά και τη διατήρηση όσο το δυνατόν περισσότερων μακρών ακμών - συγκριτικά με το Τεστ Gabriel [26] – θα μελετήσουμε μία γενίκευσή του, τον *αλγόριθμο Morelia ή τεστ Morelia* [3]. Έχει επίσης αναφερθεί και με το όνομα το «Τεστ της Πεταλούδας Μονάρχης» [Monarch Butterfly Test].

Ο αλγόριθμος αυτός προσπαθεί να διατηρήσει ακμές, όπου είναι δυνατόν. Έτσι το *επιπεδικό* δίκτυο [planar network] που θα προκύψει θα μοιάζει αρκετά με το αρχικό, οι τρύπες στο δίκτυο δε θα μεγαλώσουν ιδιαίτερα. Οπότε θα έχει - πιθανότατα – μικρότερη διάμετρο σε σχέση με ένα αντίστοιχο δίκτυο που θα προέκυπτε από την εφαρμογή των προηγούμενων αλγορίθμων, και κυρίως οι διαδρομές από την αφετηρία προς το στόχο θα απαιτούν λιγότερα βήματα.

Ας γίνουμε λίγο πιο συγκεκριμένοι, καθώς εδώ έγκειται και μια σημαντική διαφορά. Οι δύο προηγούμενοι αλγόριθμοι, Gabriel και RNG, διαγράφουν μια ακμή **όχι** επειδή δημιουργούν τομές με άλλες ακμές, αλλά κυρίως για την **πιθανότητα** να παίρνουν μέρος σε κάποια τομή.

Όπως είπαμε, ήδη, πρόκειται για μια γενίκευση του αλγορίθμου Gabriel. Όπως και εκείνος, διαγράφει ακμές βασιζόμενο στην επιθεώρηση [inspection] του κύκλου με διάμετρο (α, β) . Αντίθετα όμως από εκείνο, δε διαγράφει την ακμή (α, β) με το που θα βρει άλλο κόμβο μέσα στον κύκλο διαμέτρου (α, β) . Ελέγχει [verifies] κατά πόσο οι κόμβοι που βρίσκονται μέσα στον κύκλο δημιουργούν κάποια τομή της ακμής (α, β) . Εάν δε δημιουργείται καμία τομή η ακμή (α, β) διατηρείται και διαγράφεται στην αντίθετη περίπτωση.

Η πιστοποίηση της ύπαρξης κάποιας τομής γίνεται τις περισσότερες φορές μέσω του ελέγχου μόνο της γειτονιάς $N(\alpha)$ και $N(\beta)$ των κόμβων α και β στην ακτίνα εκπομπής ρ . Σε λίγες περιπτώσεις ελέγχεται και η γειτονιά κάποιων κόμβων του κύκλου γύρω από την (α, β) . Σε κάθε περίπτωση, πάντως, πρόκειται για έναν τοπικό αλγόριθμο [local algorithm] που λαμβάνει υπ' όψη [computes] τη γειτονιά κόμβων σε απόσταση το πολύ δύο (2) βημάτων από κάθε κόμβο α και β . Δηλαδή, όπως έχουμε ορίσει στο 2.3, κάνουμε χρήση πληροφοριών μέχρι και τις γειτονιές $N_2(\alpha)$ και $N_2(\beta)$ των α και β . Έναν τέτοιο αλγόριθμο θα τον χαρακτηρίζουμε ως *2-τοπικό αλγόριθμο* [2-local algorithm] ή θα αλλιώς θα λέμε ότι αλγόριθμός μας επιτυγχάνει *2-τοπικότητα* [2-locality].



Εικόνα 3.5: Αλγόριθμος Morelia.

Στον αλγόριθμο *Morelia*, που εφαρμόζεται πάνω σε κάθε ακμή (α, β) του V , υποδιαιρούμε τον κυκλικό δίσκο διαμέτρου (α, β) σε περιοχές X_1, X_2, Y_1, Y_2 , όπως φαίνεται στην εικόνα 3.5 (από το [3]). Οι περιοχές X_2 και Y_2 καθορίζονται από ένα τόξο ακτίνας ρ^1 , όπου ρ είναι η εμβέλεια των δύο κόμβων α και β . Επιπλέον, στον αλγόριθμο χρησιμοποιούμε και περιοχές X_3 και Y_3 , όπως φαίνεται και στην εικόνα 3.5, που είναι μεν έξω από την ακτίνα εκπομπής ρ των κόμβων α και β , αλλά και σε απόσταση έως και ρ από την ακμή (α, β) . Για κάθε κόμβο α δηλώνουμε $N(\alpha)$ να είναι το σύνολο των κόμβων γ τέτοιοι που $d(\alpha, \gamma) \leq \rho$.

Αναλυτικά ο αλγόριθμος *Morelia* επί μιας ακμής (α, β) έχει:

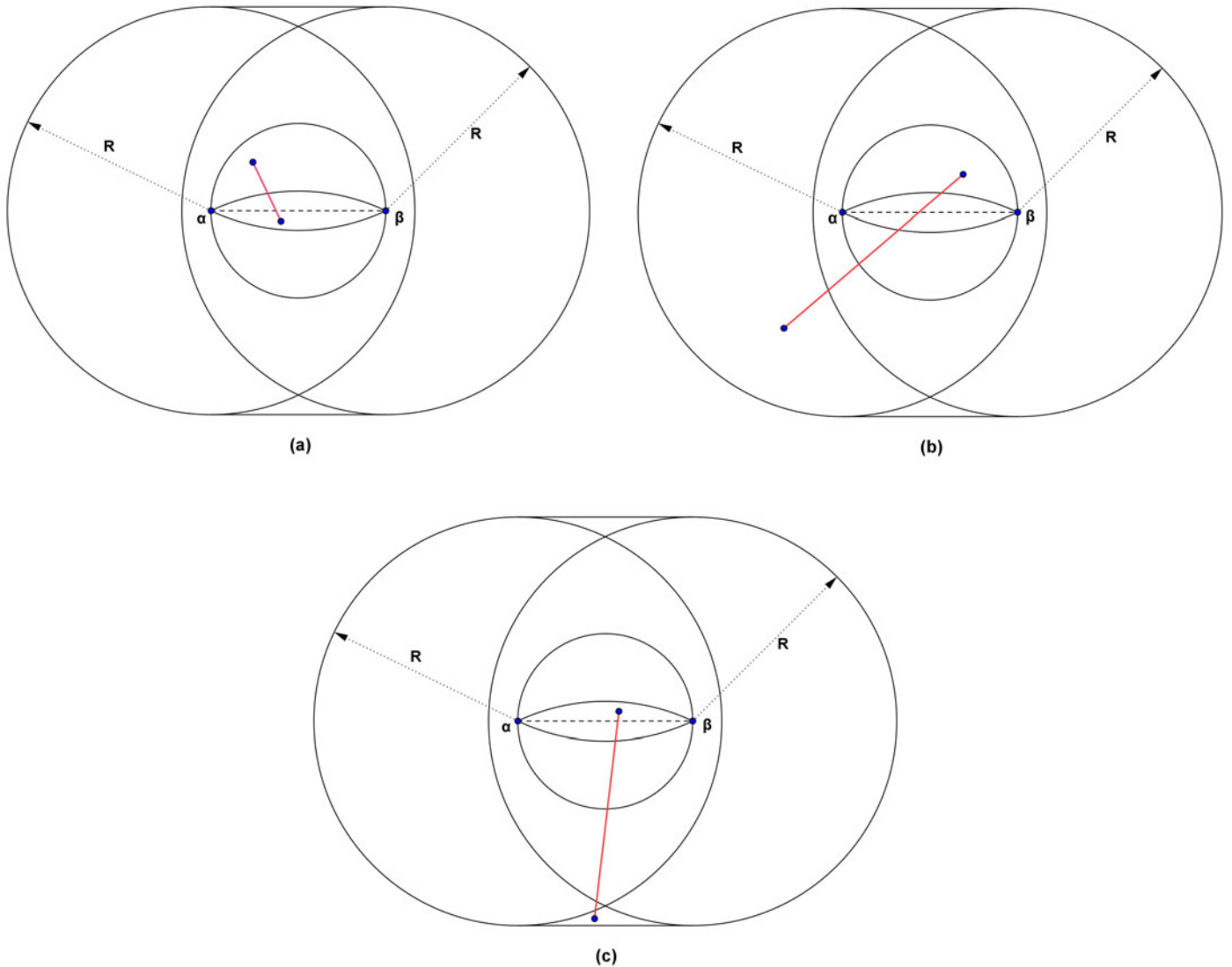
1. Εάν υπάρχει τουλάχιστον ένας κόμβος στην περιοχή $X_1 \cup X_2$ και τουλάχιστον ένας κόμβος στην $Y_1 \cup Y_2$, τότε η ακμή (α, β) διαγράφεται.
2. Εάν υπάρχει τουλάχιστον ένας κόμβος στην περιοχή X_1 και κανένας στην $X_2 \cup Y_1 \cup Y_2$, τότε ο κόμβος α ελέγχει κατά πόσον κάποιος κόμβος του συνόλου $N(\alpha)$ δημιουργεί σύνδεση-ακμή με κόμβους μέσα στην X_1 που τέμνουν την (α, β) . Εάν μια τέτοια τομή υπάρχει, η ακμή (α, β) διαγράφεται και ο α στέλνει ένα μήνυμα στο β να τη διαγράψει και εκείνος. Όμοια ο κόμβος β εκτελεί έναν έλεγχο των κόμβων στο $N(\beta)$

¹ και κέντρου καθένα από τα σημεία τομής των κύκλων που καθορίζουν τη μέγιστη εμβέλεια των κόμβων α και β

για τυχόν τομή της (α, β) και ενημερώνει τον α εάν μια τέτοια βρέθηκε και εάν η (α, β) είναι για να διαγραφεί.

3. Εάν υπάρχει τουλάχιστον ένας κόμβος στην περιοχή Y_1 και κανένας στην $Y_2 \cup X_1 \cup X_2$ (συμμετρικά με το βήμα 2), τότε ο κόμβος α ελέγχει τους κόμβους του $N(\alpha)$ για το εάν κάποιος απ' αυτούς δημιουργεί ακμή με κόμβους της περιοχής Y_1 που τέμνουν την (α, β) . Εάν μια τέτοια τομή υπάρχει, η ακμή (α, β) διαγράφεται και ο α στέλνει ένα μήνυμα στο β να τη διαγράψει και εκείνος. Όμοια ο κόμβος β εκτελεί έναν έλεγχο των κόμβων στο $N(\beta)$ για τυχόν τομή της (α, β) και ενημερώνει τον α εάν μια τέτοια βρέθηκε και εάν η (α, β) είναι για να διαγραφεί.
4. Εάν υπάρχει τουλάχιστον ένας κόμβος στην περιοχή X_2 και κανένας στην $Y_1 \cup Y_2$, τότε ο κόμβος α ελέγχει τους κόμβους του $N(\alpha)$ για το εάν κάποιος απ' αυτούς δημιουργεί ακμή με κόμβους της περιοχής $X_1 \cup X_2$ που τέμνουν την (α, β) . Εάν μια τέτοια τομή υπάρχει, η ακμή (α, β) διαγράφεται και ο α στέλνει ένα μήνυμα στο β να τη διαγράψει και εκείνος.
Επιπλέον, ο α στέλνει ένα μήνυμα στους κόμβους της περιοχής X_2 με την παράκληση να στείλουν πίσω πληροφορίες για το αν υπάρχει κόμβος στην περιοχή Y_3 . Εάν ο α λάβει ένα μήνυμα ότι υπάρχει ένας κόμβος στην Y_3 , τότε η (α, β) απομακρύνεται και ο κόμβος β ενημερώνεται να την απομακρύνει κι αυτός.
5. Εάν υπάρχει τουλάχιστον ένας κόμβος στην περιοχή Y_2 και κανένας στην $X_1 \cup X_2$ (συμμετρικά με το βήμα 4), τότε ο κόμβος α ελέγχει τους κόμβους του $N(\alpha)$ για το εάν κάποιος απ' αυτούς δημιουργεί ακμή με κόμβους της περιοχής $Y_1 \cup Y_2$ που τέμνουν την (α, β) . Εάν μια τέτοια τομή υπάρχει, η ακμή (α, β) διαγράφεται και ο α στέλνει ένα μήνυμα στο β να τη διαγράψει και εκείνος.
Επιπλέον, ο α στέλνει ένα μήνυμα στους κόμβους της περιοχής Y_2 με την παράκληση να στείλουν πίσω πληροφορίες για το αν υπάρχει κόμβος στην περιοχή X_3 . Εάν ο α λάβει ένα μήνυμα ότι υπάρχει ένας κόμβος στην X_3 , τότε η (α, β) απομακρύνεται και ο κόμβος β ενημερώνεται να την απομακρύνει κι αυτός.

Ας δούμε και σχηματικά παρακάτω στην εικόνα 3.6 (από το [3]) ορισμένες από τις περιπτώσεις που αναφέρονται στην εφαρμογή του τεστ Morelia.



Εικόνα 3.6: Παραδείγματα περιπτώσεων κατά την εφαρμογή του τεστ Morelia. Στην περίπτωση (a) η ακμή (α, β) διαγράφεται εξαιτίας του κανόνα 1, στην περίπτωση (b) η ακμή (α, β) διαγράφεται εξαιτίας του κανόνα 2 και στην περίπτωση (c) η ακμή (α, β) διαγράφεται εξαιτίας του κανόνα 4.

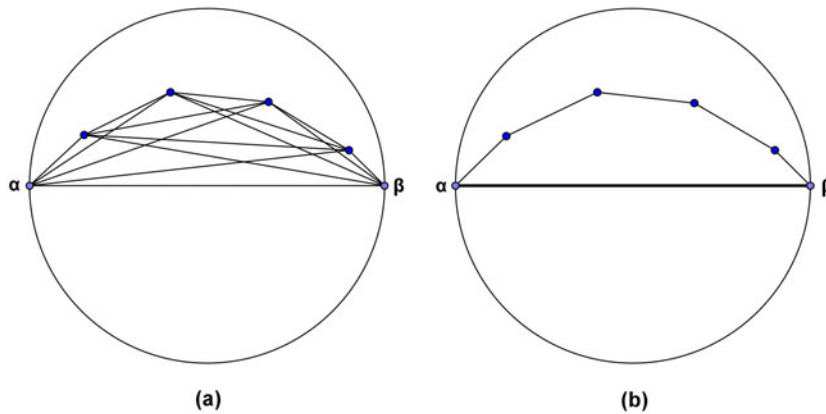
Ο γράφος που προκύπτει είναι επιπεδικός [planar] και είναι υπεργράφος του γράφου Gabriel [3]. Αυτό μας λέει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.1: *Αν ο αρχικός γράφος Γ είναι συνεκτικός, τότε η εφαρμογή του αλγορίθμου Morelia σε όλες τις ακμές του Γ δημιουργεί γράφο Γ' ο οποίος είναι συνεκτικός επιπεδικός επικαλυπτής [connected planar spanner] του Γ . Επιπλέον, ο Γ' περιέχει τον γράφο Gabriel του Γ σαν υπογράφο του.*

Απόδειξη. Κάθε ακμή στον Γ που διατηρείται από τον αλγόριθμο Gabriel διατηρείται επίσης και από τον αλγόριθμο Morelia. Κατά συνέπεια, ο Γ' περιέχει το Gabriel γράφο \mathcal{GG} του Γ ως υπογράφο του. Και αφού ο αλγόριθμος Gabriel παράγει ένα συνεκτικό υπογράφο του Γ , ο υπογράφος Γ' θα είναι και αυτός συνεκτικός.

Έστω ότι υπάρχει μια ακμή \mathcal{D} στον Γ' που να τέμνει μία ακμή (α, β) του Γ' . Το γεγονός ότι κάθε ακμή του Γ έχει μήκος το πολύ ρ , σημαίνει ότι και τα δύο άκρα της \mathcal{D} πρέπει να βρίσκονται στην περιοχή $N(\alpha) \cup N(\beta) \cup X_3 \cup Y_3$. Εάν ένα από τα άκρα της \mathcal{D} βρισκόταν στον κύκλο με διάμετρο (α, β) , τότε η (α, β) θα είχε διαγραφεί από τον αλγόριθμο Morelia. Εάν και τα δύο άκρα της \mathcal{D} βρισκόταν έξω από τον κύκλο με διάμετρο (α, β) , τότε ένα από τα άκρα της (α, β) θα έπρεπε να βρίσκεται μέσα στον κύκλο με διάμετρο \mathcal{D} , μιας και οι δυο ακμές τέμνονται μεταξύ τους. Τότε, όμως, η εφαρμογή του αλγορίθμου Morelia επί της ακμής \mathcal{D} θα εξαφάνιζε τη \mathcal{D} , εξαιτίας αυτής της τομής της με την (α, β) . Για το λόγο αυτό και δεν υπάρχουν τομές στο Γ' . □

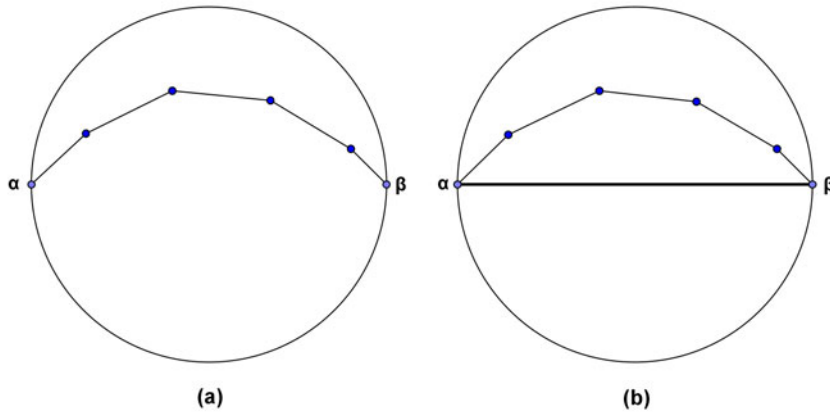
Στην εικόνα 3.7 (από το [3]) δείχνουμε πως ο αλγόριθμος Morelia διατηρεί κάποιες από τις μακριές ακμές. Το αριστερό τμήμα δείχνει μια ακμή (α, β) και τους κόμβους που βρίσκονται εντός του κύκλου με διάμετρο την (α, β) , ενώ στο δεξιό τμήμα βλέπουμε ποιες ακμές διατηρούνται από τον αλγόριθμο Morelia.



Εικόνα 3.7: Παράδειγμα εφαρμογής του τεστ Morelia. Στο αριστερό μέρος της εικόνας, στο (a), παρατηρούμε μια ακμή (α, β) καθώς και τους κόμβους που βρίσκονται εντός του κύκλου με διάμετρο την (α, β) . Στο δεξί τμήμα, (b), βλέπουμε ποιες ακμές διατηρούνται από τον αλγόριθμο Morelia.

Τα πειραματικά αποτελέσματα [3] μαρτυρούν μία σαφή βελτίωση των ποιοτικών δεδομένων του γράφου Γ' που προκύπτει από την εφαρμογή του αλγορίθμου Morelia σε ένα συνεκτικό γράφο Γ , σε σχέση πάντα με τον αντίστοιχο γράφο \mathcal{GG} που προκύπτει από το Γ με εφαρμογή του Τεστ Gabriel.

Άλλοτε λιγότερο και άλλοτε περισσότερο, παρατηρείται βελτίωση τόσο στο μήκος των ακμών που διατηρούνται στο Γ' (είναι μεγαλύτερες), όσο και στο πλήθος τους (είναι περισσότερες). Βλέπε και την εικόνα 3.8 (από το [3]) για ένα παράδειγμα σύγκρισης εφαρμογής των αλγορίθμων Gabriel και Morelia. Και αυτό συμβαίνει είτε τα πειράματα λαμβάνουν χώρα σε γράφους με ομοιόμορφα καταναμημένους κόμβους είτε σε άλλους που περιλαμβάνουν και κάποια σημεία αρκετά «αραιά» [sparse].



Εικόνα 3.8: Σύγκριση αλγορίθμων Gabriel και Morelia. Αριστερά στο (a) παρατηρούμε το αποτέλεσμα της εφαρμογής του αλγορίθμου Gabriel, όπου εκτός των άλλων έχει διαγραφεί και η ακμή (α, β) . Δεξιά στο (b), βλέπουμε το αποτέλεσμα του αλγορίθμου Morelia, όπου εδώ έχει διατηρηθεί η ακμή (α, β) .

Επιπλέον παρατηρήθηκε βελτίωση και σε αλγορίθμους δρομολόγησης (όπως ο *Face-2* στο [8]) οι οποίοι εφαρμόζονται πάνω σε επιπεδικούς γράφους που έχουν προκύψει από την εφαρμογή του αλγορίθμου Morelia σε σχέση με τους αντίστοιχους \mathcal{GG} . Και εδώ έχουμε καλύτερα αποτελέσματα, όπως για παράδειγμα τη μείωση του αριθμού των βημάτων που χρειάζονται για τη δρομολόγηση κάποιου μηνύματος.

Παρόλα αυτά όμως, δεν παύουν τα παραπάνω να αποτελούν απλώς βελτιώσεις και όχι κάποιο σημαντικό βήμα που ξεπερνά τα μέχρι τώρα προβλήματα. Ο γράφος Γ' , που προκύπτει από την εφαρμογή του αλγορίθμου Morelia σε έναν συνεκτικό γράφο Γ , είναι μεν συνεκτικός επιπεδικός επικαλυπτής [connected planar spanner] του Γ , αλλά όχι k -επικαλυπτής [k -spanner] του Γ . Όπως, επίσης, δεν είναι και φραγμένου βαθμού [bounded degree].

3.7 Επικυρίαρχα Σύνολα [Dominating Sets] – Clustering

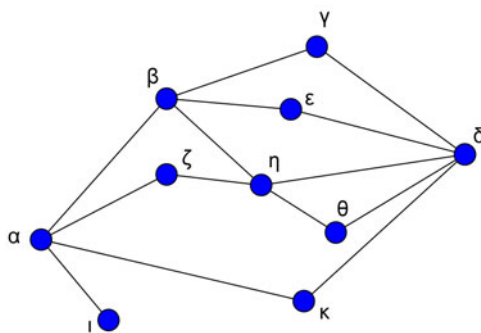
Στο σημείο αυτό θα κάνουμε μία μικρή παρέκκλιση. Αντί να ασχοληθούμε με μία ακόμα πρόταση μετατροπής του **UDG** σε επιπεδικό γράφο, θα μελετήσουμε μια ειδική κατάσταση που μπορεί να συναντήσουμε καθώς δουλεύουμε με την προηγούμενη μέθοδο.

Είναι δυνατόν το δίκτυο με το οποίο θα ασχολούμαστε να είναι ιδιαίτερα «πυκνό» [dense], δηλαδή να περιέχονται πάρα πολλοί κόμβοι μέσα στο κυκλικό δίσκο που οριοθετεί την περιοχή εμβέλειας ενός κόμβου. Σε μια τέτοια περίπτωση, η εφαρμογή του αλγορίθμου Morelia θα είχε, συγκριτικά, σχεδόν μηδενικό όφελος έναντι του Τεστ Gabriel, αφού κι αυτή θα διέγραφε σχεδόν όλες τις μακριές συνδέσεις μεταξύ των κόμβων.

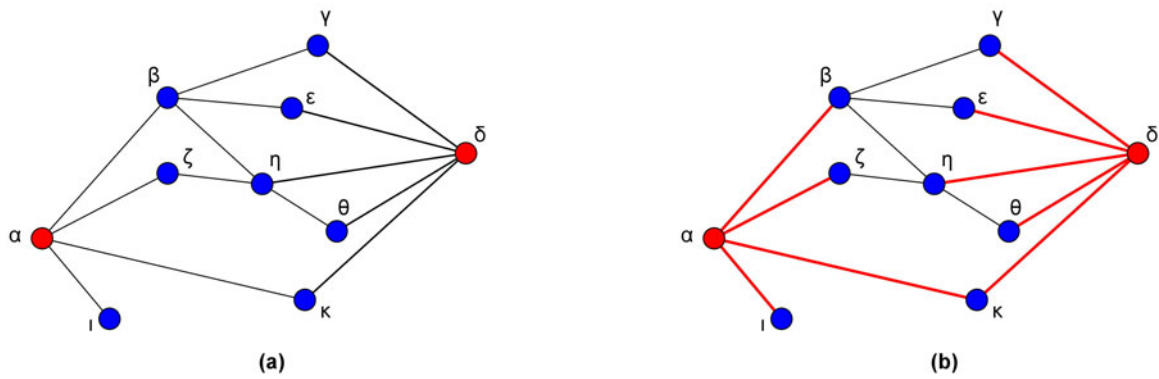
Μία λύση που προτείνεται, και φαίνεται να και η πιο λογική, είναι να αναζητήσουμε έναν αποτελεσματικό-κατάλληλο τρόπο για να διαλέξουμε ένα αντιπροσωπευτικό σύνολο κόμβων N' από το αρχικό σύνολο κόμβων N , τους οποίους θα ονομάζουμε ηγέτες. Το σύνολο αυτό είναι φυσικό να θέλουμε να είναι συνεκτικό [connected] από κατασκευής του, καθώς και τουλάχιστον ένας κόμβος-ηγέτης να βρίσκεται μέσα στην ακτίνα επικοινωνίας οποιουδήποτε κόμβου του αρχικού δικτύου. Προφανώς και δεν υπάρχει ένας και μοναδικός τρόπος εκλογής των κόμβων-ηγέτων, όπως τους αποκαλούμε [18, 67].

Ορισμός 3.4: (Επικυρίαρχο Σύνολο [Dominating Set]) Ένα σύνολο κόμβων N' , υποσύνολο ενός συνόλου N , θα ονομάζεται επικυρίαρχο [dominating] εάν κάθε κόμβος του N που δεν ανήκει στο N' γειτνιάζει με τουλάχιστον έναν κόμβο του N' . Οι κόμβοι του N' είναι γνωστοί και ως εσωτερικοί κόμβοι [internal nodes] ή και ως πύλες – κόμβοι [gateway nodes]. Το σύνολο N' θα ονομάζεται *Συνεκτικό Επικυρίαρχο Σύνολο* [Connected Dominating Set], εάν για κάθε ζεύγος κόμβων του υπάρχει μονοπάτι που να τους ενώνει και το οποίο δεν περιλαμβάνει κόμβους έξω από το N' .

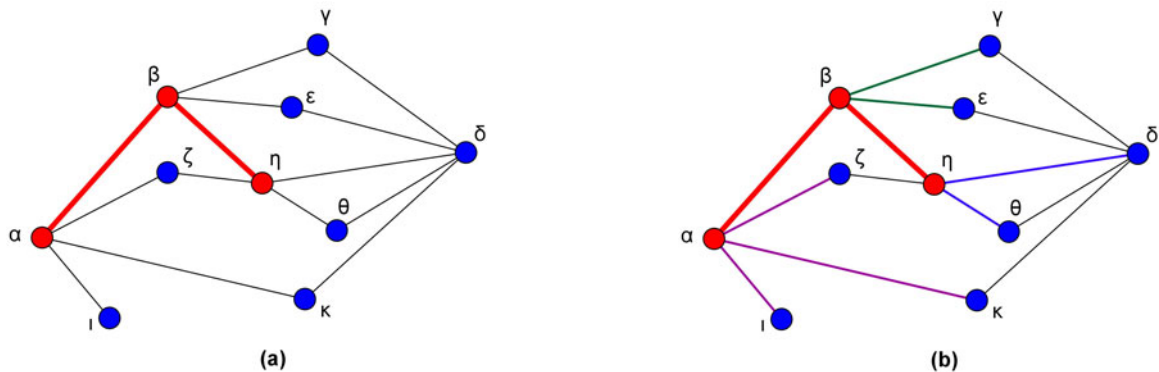
Είναι προφανές, λοιπόν, ότι εφόσον χρησιμοποιούμε τα επικυρίαρχα σύνολα για την επίτευξη καλύτερης δρομολόγησης, στόχος δεν αποτελεί η κατασκευή ενός οποιουδήποτε επικυρίαρχου συνόλου. Θα πρέπει να είναι οπωσδήποτε και συνεκτικό [connected]. Ας δούμε, λοιπόν, και κάποια παραδείγματα εύρεσης επικυρίαρχων συνόλων. Στην εικόνα 3.9 βλέπουμε αρχικά ένα γράφο, ενώ στις ακόλουθες 3.10 και 3.11 δύο διαφορετικά επικυρίαρχα σύνολα.



Εικόνα 3.9: Αρχικός γράφος. Αναζητάμε σ' αυτόν ένα επικυρίαρχο σύνολο και μάλιστα συνεκτικό.

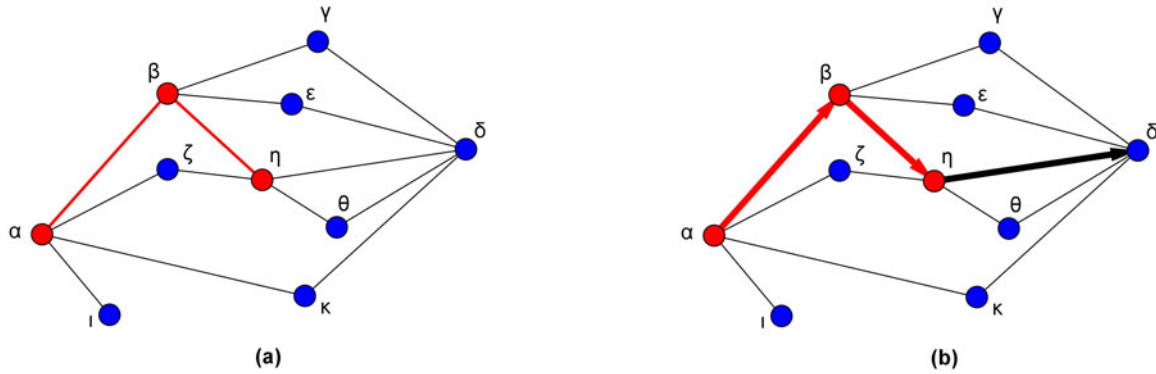


Εικόνα 3.10: Το σύνολο $N' = \{\alpha, \delta\}$ αποτελεί επικυρίαρχο σύνολο, όπως μπορούμε εύκολα να δούμε στο δεξί μέρος (b) της εικόνας. Όμως είναι εμφανές ότι δεν είναι ταυτόχρονα και συνεκτικό, όπως βλέπουμε στο αριστερό τμήμα (a) της εικόνας.



Εικόνα 3.11: Το σύνολο $N' = \{\alpha, \beta, \eta\}$ αποτελεί επικυρίαρχο σύνολο, όπως μπορούμε εύκολα να δούμε στο δεξί μέρος (b) της εικόνας. Πράγματι, με τις χρωματισμένες μωβ, μπλε και πράσινες ακμές, γίνεται εμφανές ότι κάθε κόμβος του γράφου που δεν ανήκει στο N' γειτνιάζει με κάποιον κόμβο που ανήκει σ' αυτό. Ταυτόχρονα είναι και συνεκτικό, όπως βλέπουμε στο αριστερό τμήμα (a) της εικόνας.

Άραξ και έχει γίνει, όμως, η εκλογή αυτή ενός επικυρίαρχου συνόλου, ας δούμε με ποιον τρόπο μπορεί να γίνει η δρομολόγηση [67] ενός πακέτου από έναν κόμβο α σε έναν άλλο κόμβο β , όπως φαίνεται και στην εικόνα 3.12 που ακολουθεί. Η διαδικασία δρομολόγησης χωρίζεται σε τρεις βήματα. Αρχικά, εάν ο αρχικός κόμβος α δεν είναι ένας εσωτερικός κόμβος, το πακέτο στέλνεται στον πλέον γειτονικό του κόμβο α' του συνόλου N' . Αυτός ο εσωτερικός κόμβος α' λειτουργεί τότε ως η νέα αφετηρία για να δρομολογηθεί το πακέτο μέσα στο αναγόμενο γράφο N' που αποτελείται από εσωτερικούς κόμβους και μόνο. Μέσα στο N' μπορούμε να εφαρμόσουμε οποιαδήποτε μέθοδο θέλουμε για να εξάγουμε απ' αυτό έναν επιπεδικό υπογράφο, π.χ. τον αλγόριθμο Morelia [3], και πάνω σε αυτόν να εφαρμόσουμε έναν αλγόριθμο δρομολόγησης, όπως ο Face Routing [38]. Έτσι, κάποια στιγμή, το πακέτο θα φτάσει στον προορισμό – εσωτερικό κόμβο β' , ο οποίος είτε είναι ο ίδιος ο προορισμός β είτε είναι γείτονας του κόμβου προορισμού β . Στη δεύτερη περίπτωση, ο β' προωθεί το πακέτο απευθείας στον κόμβο – προορισμό β .



Εικόνα 3.12: Έστω ότι θέλουμε να στείλουμε ένα μήνυμα από τον κόμβο α στον κόμβο δ . Όπως μπορούμε να δούμε στο αριστερό τμήμα (a) της εικόνας, ο α ανήκει στο επικυρίαρχο σύνολο N' , ενώ ο δ όχι. Έτσι, το μήνυμα ξεκινάει από τον α , εντός του N' , δρομολογείται στον κόμβο η , σε εκείνο τον κόμβο δηλαδή εντός του N' που βρίσκεται πλησιέστερα στον τελικό προορισμό δ . Τέλος, από τον η , με ένα βήμα ακόμα, φτάνει στο δ .

Αν και μοιάζει να έχει αρκετά πλεονεκτήματα αυτή η προσέγγιση των επικυρίαρχων συνόλων [dominating sets], μιας και ανάγει σχεδόν εξολοκλήρου τη δρομολόγηση επί ενός συνόλου κόμβων σε ένα σαφώς μικρότερο και πιο εύχρηστο δίκτυο, υπάρχουν απ' την άλλη πολλά προβλήματα. Το σημαντικότερο απ' αυτά είναι η κινητικότητα [mobility] των δικτύων που μελετάμε και τα επακόλουθα αυτού του γεγονότος πάνω στο προκύπτον δίκτυο από τους εσωτερικούς κόμβους.

Γι' αυτό και μια τέτοιου είδους προσέγγιση υιοθετείται ήδη στην πράξη, και μάλιστα σε εμπορικές εφαρμογές, αλλά σε υβριδικά συστήματα τηλεπικοινωνιών. Εταιρείες κινητής τηλεφωνίας, όπως η Cosmote ή η Vodafone, κάνουν χρήση μιας τέτοιας λογικής. Υπάρχουν οι σταθεροί αναμεταδότες, οι οποίοι παίζουν το ρόλο των εσωτερικών κόμβων, και οι πελάτες – κεραιές κινητών τηλεφώνων, που είναι όλοι υπόλοιποι κόμβοι. Το μήνυμα του κινητού δρομολογείται στον πλησιέστερο σταθερό αναμεταδότη και από εκεί μέσω πλέον των «εσωτερικών κόμβων» καταλήγει σε εκείνο τον σταθερό αναμεταδότη που βρίσκεται εγγύτερα στον προορισμό, όπου και καταλήγει στο επόμενο βήμα.

Πάντως, η προσπάθεια συνεχίζεται ώστε να είναι εφικτή κάποτε η χρήση των επικυρίαρχων συνόλων με στόχο τη διευκόλυνση της δρομολόγησης σε ad hoc ασύρματα δίκτυα.

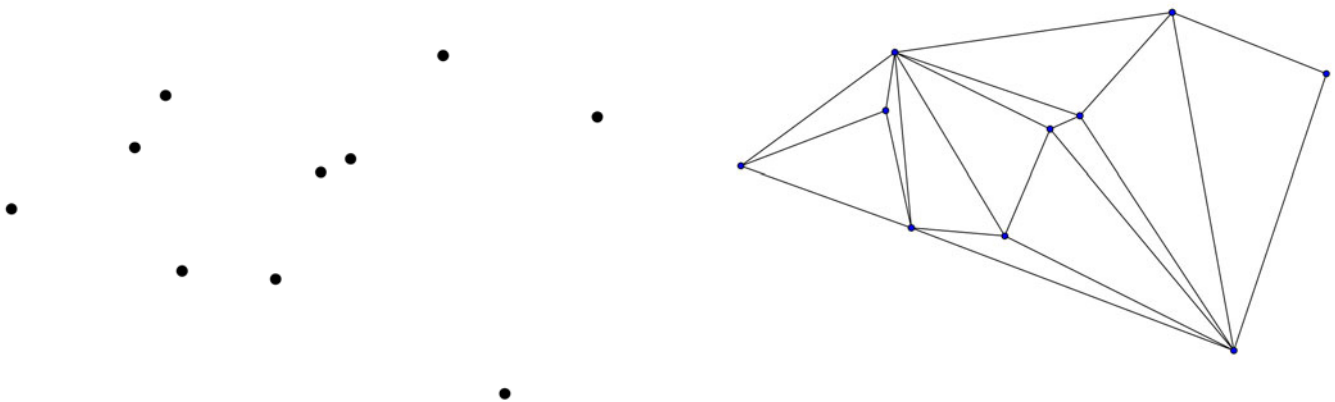
3.8 Delaunay Τριγωνοποίηση

Μέχρι τη στιγμή αυτή, στην εργασία μας επικεντρωθήκαμε στην προσπάθεια να αποσπάσουμε από τον αρχικό γράφο Γ έναν επιπεδικό υπογράφο Γ' [planar subgraph]. Αυτό έγινε με στόχο να υλοποιήσουμε πάνω στον Γ' αλγορίθμους δρομολόγησης οι οποίοι έχουν ως βασικό δομικό τους στοιχείο την ύπαρξη της επιπεδικότητας. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήσαμε αλγορίθμους όπως ο Gabriel, ο **RNG** ή ο Morelia. Οδηγηθήκαμε, όμως, σε αραιούς, κατά γενική ομολογία, γράφους, κάτι που εμποδίζει την αποτελεσματική δρομολόγηση. Για το λόγο αυτό αναγκαζόμαστε να αναζητήσουμε άλλες τεχνικές για επίτευξη πιο πυκνών γράφων.

Μια τέτοια δομή είναι η τριγωνοποίηση ή τριγωνισμός [triangulation]. Είναι σαφώς πυκνότερη από τους προαναφερθέντες γράφους και ενσωματώνει επιπλέον χαρακτηριστικά, θετικά και αρνητικά σε σχέση με ό,τι μελετάμε, πέραν της επιπεδικότητας και της πυκνότητας.

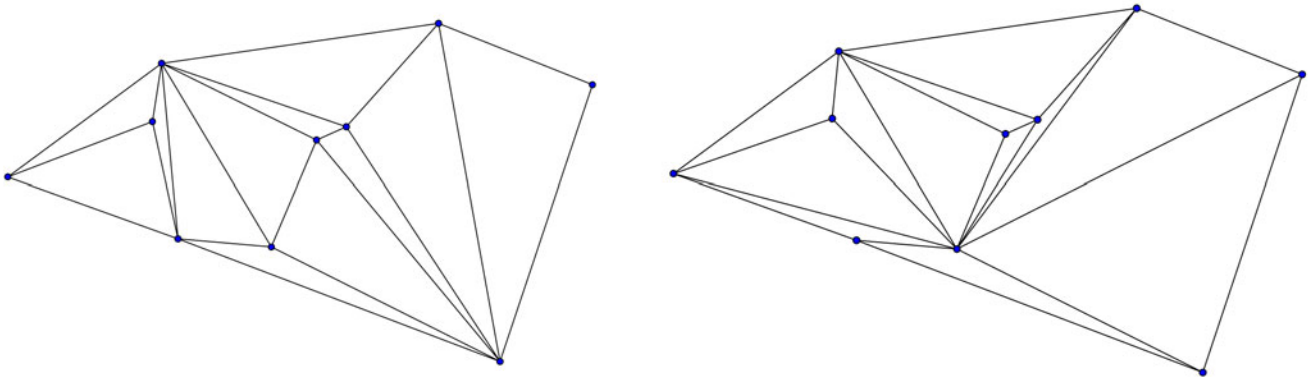
Όπως θα δούμε και στη συνέχεια είναι μια όχι νέα έννοια στην Υπολογιστική Γεωμετρία [Computational Geometry], αλλά με αρκετές εφαρμογές σε διάφορα πεδία. Τα ελπιδοφόρα χαρακτηριστικά της είναι που κάνουν την έρευνα να συνεχίζει την προσπάθεια υπερπήδησης των όποιων αρνητικών χαρακτηριστικών της για κάθε περίπτωση.

Ορισμός 3.5: (Τριγωνοποίηση [triangulation]) Καλούμε ένα γράφο Γ επίπεδη τριγωνοποίηση [plane triangulation] εάν κάθε όψη του Γ (συμπεριλαμβανομένου και της εξωτερικής όψης) φράσσεται από ένα τρίγωνο (βλέπε και εικόνα 3.13).



Εικόνα 3.13: Τριγωνοποίηση. Αριστερά βλέπουμε ένα σύνολο κόμβων, ενώ στα δεξιά βλέπουμε μία από τις δυνατές τριγωνοποιήσεις που μπορούν να δημιουργηθούν.

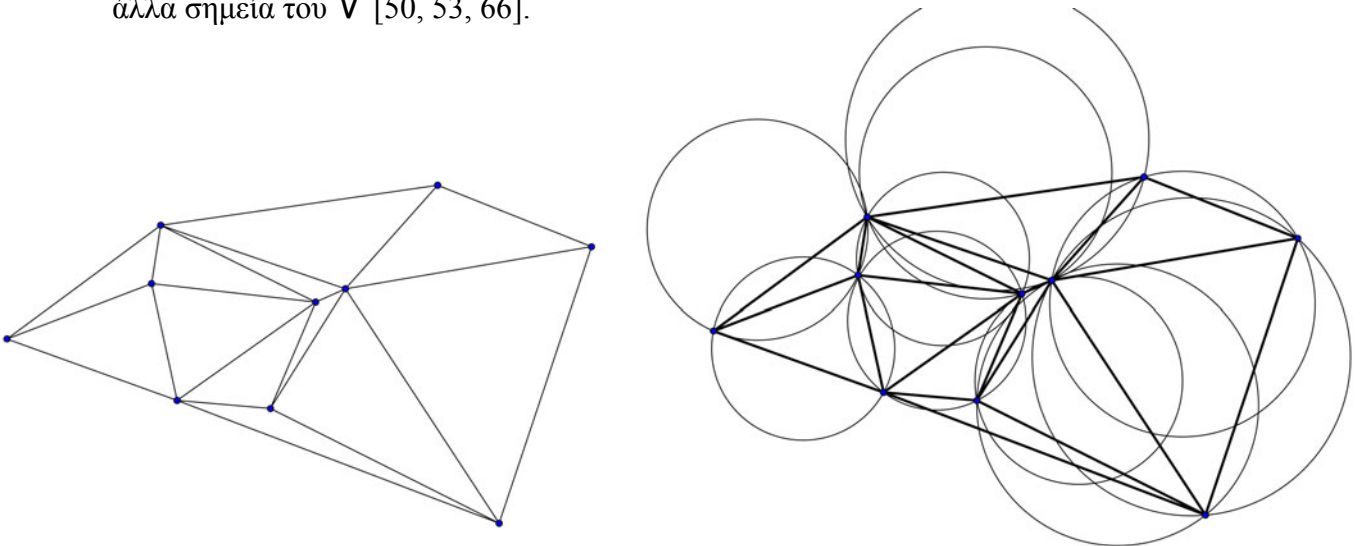
Συνήθως η τριγωνοποίηση που προκύπτει από ένα δοσμένο σύνολο κόμβων τοποθετημένων σε ένα επίπεδο δεν είναι μοναδική. Μπορούμε να διακρίνουμε στην επόμενη εικόνα 3.14 δίπλα δίπλα, δύο διαφορετικές τριγωνοποιήσεις που αντιστοιχούν στο σύνολο κόμβων που είδαμε στην εικόνα 3.13.



Εικόνα 3.14: Δύο διαφορετικές τριγωνοποιήσεις.

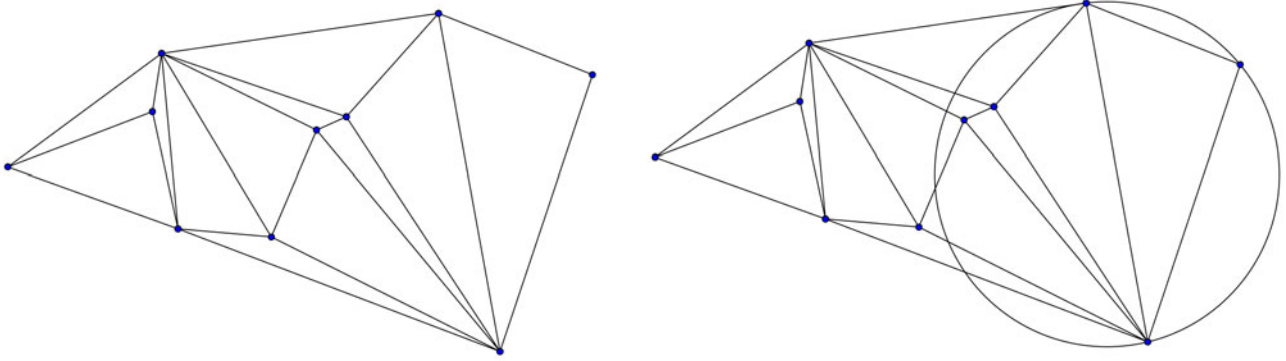
Ορισμός 3.6: (Delaunay Τριγωνοποίηση [Delaunay triangulation]) Η Delaunay τριγωνοποίηση είναι η τριγωνοποίηση της κυρτής περιοχής ενός συνόλου σημείων V , στην οποία κάθε περιγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου δεν περιέχει άλλα σημεία από το V στο εσωτερικό του.

Η Delaunay τριγωνοποίηση (βλέπε εικόνα 3....) παριστάνεται ως $Del(V)$. Ένα τρίγωνο καλείται Delaunay τρίγωνο εάν ο περιγεγραμμένος κύκλος του δεν περιέχει άλλα σημεία του V [50, 53, 66].



Εικόνα 3.15: Delaunay Τριγωνοποίηση. Η τριγωνοποίηση που βλέπουμε στα αριστερά είναι Delaunay και η απόδειξη είναι στα δεξιά. Κάποιος παρατηρητικός θα διακρίνει ότι κανένας κύκλος που διέρχεται από τρεις κόμβους δεν περιέχει άλλον στο εσωτερικό του.

Για να γίνει και ακόμα πιο κατανοητό ας δούμε σε μία από τις αρχικές τριγωνοποιήσεις που παρουσιάσαμε (βλέπε εικόνα 3.1.1) ότι δεν είναι Delaunay τριγωνοποίηση.



Εικόνα 3.16: Τριγωνοποίηση που δεν είναι Delaunay. Η τριγωνοποίηση που βλέπουμε στα αριστερά δεν είναι Delaunay. Είναι προφανές δίπλα, ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας κύκλος που διέρχεται από τρεις κόμβους και περιέχει επιπλέον και άλλον στο εσωτερικό του.

Είναι ευρέως γνωστό ότι όταν τα στοιχεία του V βρίσκονται σε γενική κυκλική θέση [general circular position], δηλαδή καμία τετράδα απ' αυτά δεν είναι ομοκυκλικά, τότε η $\text{Del}(V)$ είναι καλά ορισμένη.

Ορισμός 3.7: (μοναδιαία Delaunay τριγωνοποίηση [unit Delaunay triangulation]) Η μοναδιαία τριγωνοποίηση Delaunay ενός συνόλου σημείων V , που παριστάνεται ως $\text{UDel}(V)$, είναι απλά η τριγωνοποίηση Delaunay με όλες τις ακμές που έχουν μήκος μεγαλύτερο από μία μονάδα να έχουν αφαιρεθεί. Οι Keil και Gutwin στα [35, 36] απέδειξαν ότι η $\text{UDel}(V)$ είναι ένας k -επικαλυπτής [k -spanner] του $\text{Del}(V)$.

Ορισμός 3.8: (k -περιορισμένη Delaunay ιδιότητα [k -localized Delaunay property]) Ένα τρίγωνο $\Delta\alpha\beta\gamma$ ικανοποιεί την k -περιορισμένη Delaunay ιδιότητα [k -localized Delaunay property] εάν όλες οι ακμές του $\Delta\alpha\beta\gamma$ έχουν μήκος μικρότερο ή ίσο με μία μονάδα και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $\Delta\alpha\beta\gamma$ (που παριστάνεται ως $\text{δίσκος}(\alpha,\beta,\gamma)$) δεν περιέχει κανένα κόμβο $\mu \in V$ όπου ο μ είναι ένας k -γείτονας των α, β , ή γ .

Ορισμός 3.9: (k -περιορισμένο Delaunay τρίγωνο [k -localized Delaunay triangle]) Ένα τρίγωνο που ικανοποιεί την k -περιορισμένη Delaunay ιδιότητα καλείται k -περιορισμένο Delaunay τρίγωνο.

Ορισμός 3.10: (k -περιορισμένος Delaunay γράφος [k -localized Delaunay graph]) Ένας k -περιορισμένος Delaunay γράφος επί ενός συνόλου V από κορυφές, που παριστάνεται ως $\text{LDel}^{(k)}(V)$, αποτελείται από όλες τις Gabriel ακμές και απ' όλες τις ακμές απ' όλα τα k -περιορισμένα Delaunay τρίγωνα.

Η σχετική βιβλιογραφία αποκαλύπτει ότι μία Delaunay τριγωνοποίηση, εμφανίζει αρκετά χρήσιμα χαρακτηριστικά, τα σημαντικότερα εκ των οποίων είναι τα παρακάτω:

- ◆ Είναι επιπεδική [planar] εξ' ορισμού.
- ◆ Είναι k -επικαλυπτής [k -spanner] του πλήρη Ευκλείδειου γράφου $K(v)$ [44].
- ◆ Ο γράφος Gabriel είναι υπογράφος της Delaunay τριγωνοποίησης [44, 53].
- ◆ Έχει αποδειχθεί ([38], [8], [44] και αλλού) ότι αρκετοί αλγόριθμοι δρομολόγησης, όπως ο *Δρομολόγηση Πυξίδας [Compass Routing]*, ο *Δρομολόγηση Τυχαίας Πυξίδας [Random Compass Routing]* ή ο αλγόριθμος *Απληστης Δρομολόγησης [Greedy Routing]* εγγυώνται την παράδοση των μηνυμάτων από τον πομπό προς τον προορισμό, εάν φυσικά χρησιμοποιείται μία Delaunay τριγωνοποίηση ως τοπολογία του δικτύου.
- ◆ Το συντομότερο μονοπάτι [shortest path] μεταξύ δύο κόμβων σε μία Delaunay τριγωνοποίηση είναι μόνο κατά έναν σταθερό παράγοντα μεγαλύτερη απ' ό,τι η απόστασή τους η πραγματική. Μάλιστα, υπάρχει και ανταγωνιστικός αλγόριθμος δρομολόγησης για την Delaunay τριγωνοποίηση ([4]).

Τα πράγματα, όμως, θα ήταν υπερβολικά καλά αν υπήρχαν μόνο θετικά χαρακτηριστικά. Θα κατασκευάζαμε την Delaunay τριγωνοποίηση ενός συνόλου σημείων V και θα εφαρμόζαμε τη δρομολόγηση σε αυτήν. Όμως, κάποια μειονεκτήματα που παρατηρήθηκαν και αναφέρουμε παρακάτω μας αναγκάζουν να συνεχίσουμε την έρευνα.

- ◆ Η κατασκευή της τοπικά κοστίζει χρονικά.
- ◆ Μπορεί να περιέχει μακριές ακμές, μήκους μεγαλύτερου της μονάδας.
- ◆ Το σημαντικότερο, όμως, πρόβλημα είναι η τοπική κατασκευή [local construction] μιας Delaunay τριγωνοποίησης.

3.9 Κύρια Αποτελέσματα [Main Results]

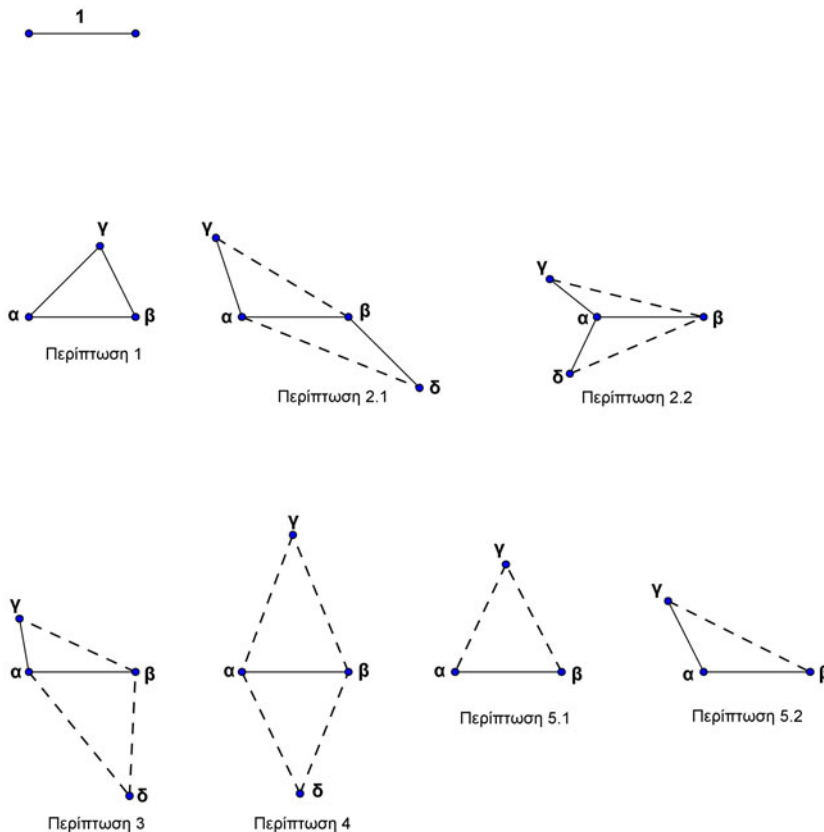
Οι Li et. al. στο [44] ορίζουν μια νέα τοπολογία που καλείται *μία τοπική Delaunay τριγωνοποίηση* [a local Delaunay triangulation]. Ο αλγόριθμος για την κατασκευή αυτής της τοπολογίας απαιτεί μία σταθερή παράμετρο $k \geq 1$ και ο γράφος που προκύπτει παριστάνεται ως $LDel^{(k)}(V)$. Σημειώστε ότι είναι $LDel^{(k+1)}(V) \subseteq LDel^{(k)}(V)$.

Στο [44] αποδεικνύονται κάποιες ενδιαφέρουσες και χρήσιμες ιδιότητες για τον $LDel^{(k)}(V), k \geq 2$. Παρόλα αυτά, ο αλγόριθμος που δίνεται για την κατασκευή του $LDel^{(k)}(V), k \geq 2$ απαιτεί ένα συνολικό κόστος επικοινωνίας [communication cost] $O(m \log n)$, όπου m είναι ο αριθμός των ακμών στον $UDG(V)$, ο οποίος μπορεί να είναι τόσο μεγάλος όσο και $O(n^2)$. Έτσι, αντί για την κατασκευή του $LDel^{(k)}(V), k \geq 2$, το [44] δίνει έναν τοπικό αλγόριθμο για την κατασκευή του $LDel^{(1)}(V)$ ο οποίος είναι $O(n \log n)$. Υπάρχει ένα πρόβλημα με τον $LDel^{(1)}(V)$ ωστόσο. Το [44] δείχνει ότι ο $LDel^{(1)}(V)$ μπορεί και να μην είναι επιπεδικός. Γι' αυτό, δίνεται ένας ακόμα αλγόριθμος για να *επιπεδοποιήσει* [planarize] τον $LDel^{(1)}(V)$. Ο γράφος που προκύπτει, ο οποίος παριστάνεται ως $PLDel(V)$, είναι ένας επιπεδικός k -επικαλυπτής του $UDG(V)$, αλλά δεν έχει κάποιο φράγμα [bound] στο μέγιστο βαθμό κόμβου. Ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος για την κατασκευή του $LDel^{(2)}(V)$ δόθηκε τελικά στο [64]. Παρόλα αυτά, η τοπολογία που προκύπτει μπορεί να περιέχει έναν κόμβο με βαθμό τόσο μεγάλο όσο και $O(n)$. Γι' αυτό το [64] περιλαμβάνει έναν αλγόριθμο για να κατασκευάζει έναν περιορισμένου βαθμού επιπεδικό επικαλυπτή [a bounded degree planar spanner] ξεκινώντας από τον $LDel^{(2)}(V)$. Αυτή η νέα τοπολογία παριστάνεται ως $BPS_2(UDG(V))$, ή πιο απλά $BPS_2(V)$.

3.10 Ο $L\text{Del}^{(k)}(V)$ είναι ένας $O(1)$ -επικαλυπτής του $UDG(V)$
[$L\text{Del}^{(k)}(V)$ is a $O(1)$ -spanner of $UDG(V)$]

Όπως σημειώθηκε και στην παράγραφο 3.3, είναι κεφαλαιώδους σημασίας [vital] ο γράφος που προκύπτει από οποιονδήποτε αλγόριθμο τοπολογικού ελέγχου (ο $L\text{Del}^{(k)}(V)$ σ' αυτήν την περίπτωση) να είναι συνεκτικός [connected]. Στην περίπτωση του $L\text{Del}^{(k)}(V)$ μπορούμε να δείξουμε το ισχυρότερο αποτέλεσμα το ότι $L\text{Del}^{(k)}(V)$ είναι ένας k -επικαλυπτής του $UDG(V)$.

Άπαξ και γνωρίζουμε ότι ο $UDel(V)$ είναι ένας επικαλυπτής του $UDG(V)$ (ορισμός αναφοράς 6 [reference definition 6]), είναι επαρκές να δείξουμε ότι ο $UDel(V)$ είναι υπογράφος του $L\text{Del}^{(k)}(V)$. Αυτό μπορεί να καταδειχθεί αποδεικνύοντας ότι κάθε ακμή (α, β) του $UDel(V)$ ανήκει επίσης και στον $L\text{Del}^{(k)}(V)$. Πρώτα παρατηρήστε ότι μιας και η ακμή (α, β) ανήκει στον $UDel(V)$, τότε $|\alpha\beta| \leq 1$. Γενικά, κάθε ακμή (α, β) του $UDel(V)$ εμπίπτει σε μία από τις πέντε ακόλουθες κατηγορίες. Η εικόνα 3.17 (από τα [44], [43], [46]) παρέχει μία εικονογράφιση για κάθε περίπτωση.



Εικόνα 3.17: Πέντε περιπτώσεις για να δείξουμε ότι ο $UDG(V)$ είναι υπογράφος του $L\text{Del}^{(k)}(V)$. Παρατήρηση: Οι συνεχείς γραμμές δηλώνουν ακμές με μήκος ≤ 1 και οι διακεκομμένες γραμμές δηλώνουν ακμές με μήκος > 1 .

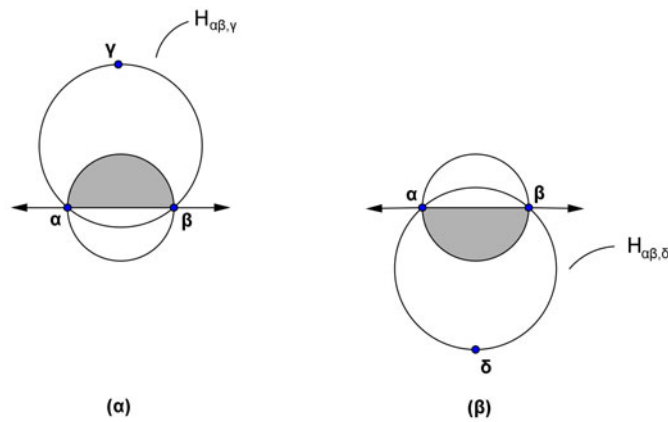
Στην **περίπτωση 1** υπάρχει ένα τρίγωνο $\Delta\alpha\beta\gamma$ πλησίον της ακμής (α,β) τέτοιο που το μήκος κάθε ακμής του τριγώνου $\Delta\alpha\beta\gamma$ να είναι μικρότερο ή ίσο της μονάδας. Εφόσον ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\Delta\alpha\beta\gamma$ δεν περιέχει καθόλου κόμβους, δεν περιέχει και κόμβους που να είναι k -γείτονες των α,β ή γ . Κατά συνέπεια το $\Delta\alpha\beta\gamma$ είναι ένα k -περιορισμένο Delaunay τρίγωνο [k -localized Delaunay triangle] και η ακμή (α,β) ανήκει στον $L\text{Del}^{(k)}(V)$.

Σε κάθε μία από τις **περιπτώσεις 2,3, και 4**, υπάρχουν δύο τρίγωνα πλησίον της ακμής (α,β) , δηλαδή $\Delta\alpha\beta\gamma$ και $\Delta\alpha\beta\delta$.

Στην **περίπτωση 2**, κάθε τρίγωνο πλησίον της ακμής (α,β) έχει ακριβώς μία ακμή με μήκος μεγαλύτερο της μονάδας.

Στην **περίπτωση 3**, ένα τρίγωνο πλησίον της ακμής (α,β) έχει μία ακμή με μήκος μεγαλύτερο της μονάδας (η ακμή (β,γ) στο σχήμα 3) και μία ακμή με μήκος μικρότερο ή ίσο του 1 (η ακμή (α,γ) στο σχήμα 3). Το άλλο τρίγωνο πλησίον της ακμής (α,β) έχει δύο ακμές με μήκος μεγαλύτερο της μονάδας (οι ακμές (α,δ) και (β,δ) στο σχήμα 3).

Στην **περίπτωση 4**, και τα δύο τρίγωνα πλησίον της ακμής (α,β) έχουν δύο ακμές με μήκος μεγαλύτερο της μονάδας.



Εικόνα 3.18: (α) Ο δίσκος (α,β,γ) περιέχει το τμήμα $\text{δίσκος}(\alpha,\beta) \cap H_{\alpha,\beta,\gamma}$.
 (β) Ο δίσκος (α,β,δ) περιέχει το τμήμα $\text{δίσκος}(\alpha,\beta) \cap H_{\alpha,\beta,\delta}$
 (περιπτώσεις 2-5).

Σε κάθε μία από τις **περιπτώσεις 2,3, και 4**, έστω $H_{\alpha,\beta,\gamma}$ να είναι το ημιεπίπεδο που ορίζεται από την (α,β) και περιέχει τον κόμβο γ . Εφόσον η (α,β) δεν είναι η μακρύτερη ακμή στο $\Delta\alpha\beta\gamma$, θα ισχύει ότι $\widehat{\alpha\gamma\beta} < \frac{\pi}{2}$. Αυτό υποδηλώνει ότι ο δίσκος (α,β,γ) περιέχει το τμήμα $\text{δίσκος}(\alpha,\beta) \cap H_{\alpha,\beta,\gamma}$ (εύκολα φαίνεται και με την εικόνα 3.18). Με ανάλογο επιχείρημα, ο δίσκος (α,β,δ) περιέχει το τμήμα

δίσκος(α, β) $\cap H_{\alpha, \beta, \delta}$. Επειδή, λοιπόν, ο περιγεγραμμένος κύκλος οποιονδήποτε τριών σημείων του $UDel(V)$ δεν περιέχει σημεία του V , αμφότεροι οι δίσκος(α, β, γ) και δίσκος(α, β, δ) δεν περιέχουν κόμβους του V . Για το λόγο αυτό, ο δίσκος(α, β) δεν περιέχει σημεία του V . Κατά συνέπεια, η (α, β) είναι μία ακμή Gabriel και προστίθεται στον $LDel^{(k)}(V)$. Βλέπε την εικόνα 3.18 παραπάνω για σχηματική περιγραφή των περιπτώσεων 2,3, και 4.

Στην **περίπτωση 5**, υπάρχει ένα μόνο τρίγωνο πλησίον της (α, β) και έχει τουλάχιστον μία ακμή με μήκος μεγαλύτερο ή ίσο της μονάδας. Εφόσον ισχύει $|\alpha\beta| \leq 1$ και υπάρχει μία ακμή του τριγώνου $\Delta\alpha\beta\gamma$ με μήκος > 1 , η (α, β) δεν είναι η μακρύτερη ακμή. Αυτό σημαίνει ότι $\widehat{\alpha\gamma\beta} < \frac{\pi}{2}$, κάτι που υποδηλώνει ότι ο δίσκος(α, β, γ) περιέχει το τμήμα δίσκος(α, β) $\cap H_{\alpha, \beta, \gamma}$. Επειδή ο δίσκος(α, β, γ) δεν περιέχει κανένα κόμβο του V , άρα ο δίσκος(α, β) δεν περιέχει κανένα κόμβο του V και είναι κατά συνέπεια μια ακμή Gabriel και προστίθεται στον $LDel^{(k)}(V)$ (βλέπε την εικόνα 3.18 (α)).

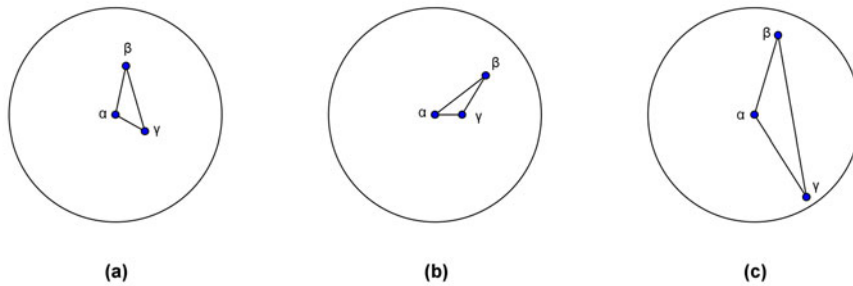
3.11 Τοπικός Αλγόριθμος για την Κατασκευή του $LDel^{(1)}(V)$ [Local Algorithm to Construct $LDel^{(1)}(V)$]

Ο τοπικός αλγόριθμος για την κατασκευή του $LDel^{(1)}(V)$ δίνεται παρακάτω. Το [43] δείχνει ότι αυτός ο αλγόριθμος έχει συνολικό κόστος επικοινωνίας $O(n \log n)$ ψηφία, όπου $n = |V|$.

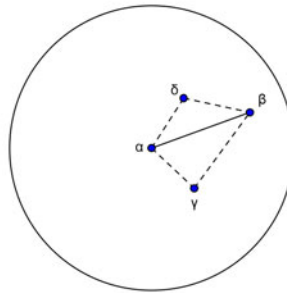
1. Κάθε κόμβος α εκπέμπει ένα μήνυμα – **ανακοίνωση** [announce message] προς όλους τους γείτονές του στο $N_1(\alpha)$ και ακούει προσεκτικά [listens] για το μήνυμα – **ανακοίνωση** που εκπέμπεται από όλους τους γείτονές του στο $N_1(\alpha)$. Το μήνυμα - **ανακοίνωση** μεταφέρει το μοναδικό αναγνωριστή [identifier] κάθε κόμβου καθώς και την Ευκλείδεια θέση του.
2. Ακολούθως, κάθε κόμβος α υπολογίζει την Delaunay τριγωνοποίηση $Del(N_1(\alpha) \cup \{\alpha\})$. Δηλαδή, επί όλων των γειτόνων του α συμπεριλαμβανομένου και του ίδιου α .
3. Για κάθε ακμή (α, β) του $Del(N_1(\alpha) \cup \{\alpha\})$, έστω $\Delta\alpha\beta\gamma$ και $\Delta\alpha\beta\delta$ δύο τρίγωνα πλησίον της (α, β) . Η ακμή (α, β) είναι μία Gabriel ακμή εάν ταυτόχρονα οι γωνίες $\widehat{\alpha\gamma\beta}$ και $\widehat{\alpha\delta\beta}$ είναι μικρότερες από $\frac{\pi}{2}$. Ο κόμβος α καταγράφει (σημειώνει) [marks] όλες τις Gabriel ακμές, οι οποίες δε θα απομακρυνθούν ποτέ από την τοπολογία.
4. Κάθε κόμβος α ανακαλύπτει όλα τα τρίγωνα $\Delta\alpha\beta\gamma$ από την $Del(N_1(\alpha) \cup \{\alpha\})$ τέτοια που $|\alpha\beta| \leq 1$ και $\widehat{\gamma\alpha\beta} \geq \frac{\pi}{3}$ (βλέπε την εικόνα 3.19). Έπειτα, ο κόμβος α ταξινομεί [sorts] όλες τις ακμές $(\alpha, \beta) \in Del(N_1(\alpha) \cup \{\alpha\})$ κατά δεξιόστροφη σειρά [clockwise order] και εκπέμπει ένα μήνυμα – **πρόταση** [proposal message] που περιέχει την ταυτότητα [identity] του α και τις ταυτότητες των ταξινομημένων κόμβων β με $(\alpha, \beta) \in Del(N_1(\alpha) \cup \{\alpha\})$. Ένα απλό ψηφίο ανάμεσα στις ταυτότητες δύο κόμβων για τους α και β υποδηλώνει το κατά πόσον το τρίγωνο $\Delta\alpha\beta\gamma$ είναι όπως περιγράφηκε παραπάνω ή όχι. Εάν ναι, ο α προτείνει να προστεθεί το $\Delta\alpha\beta\gamma$ στον $LDel^{(1)}(V)$. Κατόπιν, ο κόμβος α ακούει – προσέχει όλα τα μηνύματα – **προτάσεις** από το $N_1(\alpha)$.
5. Όταν ο κόμβος α λαμβάνει μία **πρόταση** από τον κόμβο β , ελέγχει να δει εάν ο β προτείνει να προστεθούν τα τρίγωνα $\Delta\alpha\beta\gamma$ και $\Delta\alpha\beta\delta$ στον $LDel^{(1)}(V)$ (βλέπε την εικόνα 3.20). Για κάθε τέτοιο μήνυμα, ο α αποφασίζει το κατά πόσον θα δεχθεί την προσθήκη στον $LDel^{(1)}(V)$ ή όχι. Το τρίγωνο $\Delta\alpha\beta\gamma$ ($\Delta\alpha\beta\delta$) γίνεται δεκτό από τον α εάν ανήκει στην $Del(N_1(\alpha) \cup \{\alpha\})$, αλλιώς ο α απορρίπτει το $\Delta\alpha\beta\gamma$ ($\Delta\alpha\beta\delta$). Απαξ και πάρει την απόφασή του ο κόμβος α για όλους τους $v \in N^1(\alpha)$, εκπέμπει ένα μήνυμα – **αποδοχής** [accept message] σημειώνοντας ποια τρίγωνα είναι δεκτά και ποια απορρίπτονται. Το μήνυμα – **αποδοχής**

περιλαμβάνει την ταυτότητα του α [α 's identity], τις ταυτότητες για ένα δεξιόστροφο άκουσμα [clockwise listening] των κορυφών β για τις οποίες το τρίγωνο $\Delta\alpha\beta\gamma \in \text{Del}(\mathcal{N}_1(\alpha) \cup \{\alpha\})$, καθώς και ένα ψηφίο που φανερώνει το εάν δύο τέτοιοι συνεχόμενοι [consecutive] β, β' σχηματίζουν τρίγωνο $\Delta\alpha\beta\beta'$ το οποίο έγινε δεκτό από τον α για προσθήκη στον $\text{Del}(\mathcal{N}_1(\alpha))$.

6. Ο κόμβος α προσθέτει τις ακμές (α, β) και (α, γ) στο σύνολο με τις γειτονικές ακμές του [incident set] εάν το τρίγωνο $\Delta\alpha\beta\gamma$ ανήκει στην $\text{Del}(\mathcal{N}_1(\alpha))$, και ταυτόχρονα οι κόμβοι α και β να έχουν στείλει ένα μήνυμα – **πρόταση** είτε ένα μήνυμα – **αποδοχής** για το $\Delta\alpha\beta\gamma$.



Εικόνα 3.19: (a) Το τρίγωνο $\Delta\alpha\beta\gamma$ επιλέχθηκε. (b) Το τρίγωνο $\Delta\alpha\beta\gamma$ δεν επιλέχθηκε διότι $\widehat{\gamma\alpha\beta} < \frac{\pi}{3}$. (c) Το τρίγωνο $\Delta\alpha\beta\gamma$ δεν επιλέχθηκε διότι $|\beta\gamma| > 1$.



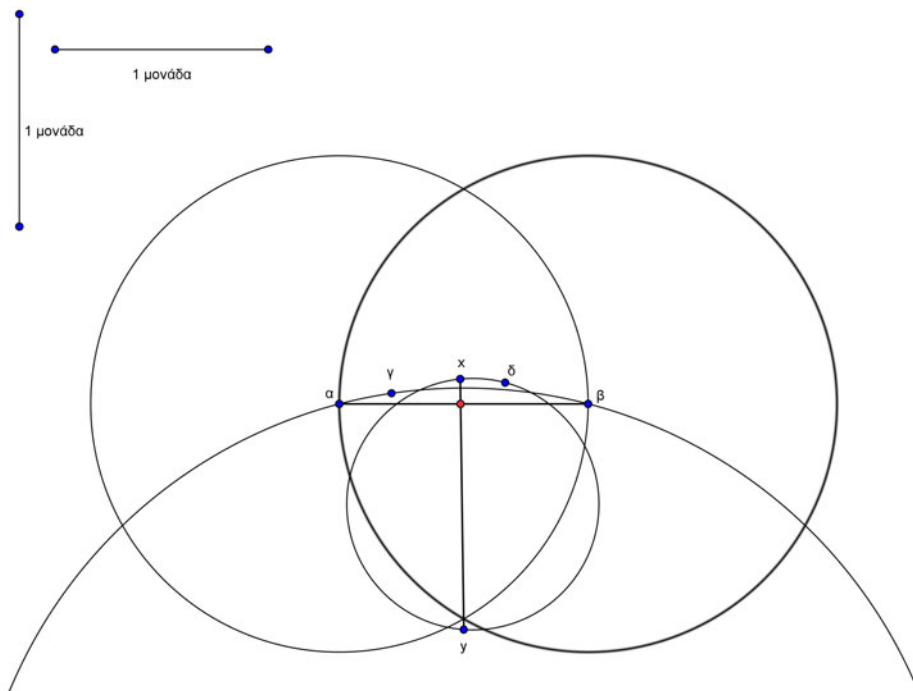
Εικόνα 3.20: Ο κόμβος α ελέγχει να δει αν ο β κάνει πρόταση προσθέτοντας τα τρίγωνα $\Delta\alpha\beta\gamma$ και $\Delta\alpha\beta\delta$.

3.11.1 Ο $\text{LDel}^{(1)}(V)$ Μπορεί και να Μην είναι Επιπεδικός [$\text{LDel}^{(1)}(V)$ May Not be Planar]

Μολονότι ο αλγόριθμος που περιγράφηκε στην παράγραφο 3.7 είναι τοπικός και αποτελεσματικός, η τοπολογία που προκύπτει ($\text{LDel}^{(1)}(V)$) μπορεί να μην είναι επιπεδική [planar]. Για ένα ευδιάκριτο παράδειγμα, δείτε την εικόνα 3.21 (από το [46]). Σ' αυτό το σχήμα, $|\alpha\beta| = |xy| = 1$, $|\alpha\gamma| = |\beta\gamma| > 1$, και ο x είναι έξω από το δίσκο(α, β, γ). Σημειώστε ότι το τρίγωνο $\Delta\alpha\beta\gamma$ είναι ένα 1-τοπικό Delaunay τρίγωνο [1-local Delaunay triangle]. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις για να μελετήσουμε.

Περίπτωση 1: Ο κόμβος δ δεν υφίσταται. Τότε η (x, y) είναι μία ακμή Gabriel και προστίθεται στον $\text{LDel}^{(1)}(V)$. Ακόμη, το τρίγωνο $\Delta\alpha\beta\gamma$ είναι ένα 1-τοπικό Delaunay τρίγωνο και προστίθεται στον $\text{LDel}^{(1)}(V)$. Και τότε οι ακμές (x, y) και (α, β) τέμνονται [intersect].

Περίπτωση 2: Ο κόμβος δ όντως υφίσταται. Τότε τα δύο τρίγωνα $\Delta\alpha\beta\gamma$ και $\Delta xy\delta$ είναι αμφότερα 1-τοπικά Delaunay τρίγωνα και προστίθενται και τα δύο στον $\text{LDel}^{(1)}(V)$. Και τότε εκ νέου οι ακμές (x, y) και (α, β) τέμνονται [intersect].



Εικόνα 3.21: Ένα παράδειγμα όπου ο $\text{LDel}^{(1)}(V)$ δεν είναι επιπεδικός.

3.11.2 Πυκνότητα του $L\text{Del}^{(1)}(V)$ [Thickness of $L\text{Del}^{(1)}(V)$]

Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.11.1, ο $L\text{Del}^{(1)}(V)$ δεν είναι βέβαιο [guaranteed] ότι είναι επιπεδικός. Εν τούτοις, είναι «σχεδόν επιπεδικός» [almost planar]. Μία ιδιότητα η οποία είναι ένα ενδεχόμενο πλεονέκτημα είναι ότι ο $L\text{Del}^{(1)}(V)$ μπορεί να αποσυντεθεί [decomposed] σε δύο υπογράφους, εκ των οποίων αμφότεροι να είναι επιπεδικοί, δηλαδή ο $L\text{Del}^{(1)}(V)$ έχει πυκνότητα [thickness] 2 .

Αυτή η ιδιότητα είναι ελπιδοφόρα διότι η κατασκευή του $L\text{Del}^{(1)}(V)$ είναι τόσο απλή. Μία ενδιαφέρουσα περιοχή για μελλοντική εργασία μπορεί να είναι η διερεύνηση του κατά πόσον υπάρχοντες αλγόριθμοι, οι οποίοι απαιτούν επιπεδικότητα, μπορούν να επεκταθούν ώστε να δρομολογήσουν σωστά σε ένα γράφο με πυκνότητα 2. Επιπροσθέτως, εάν στη ζώνη MAC [MAC layer] οι κόμβοι μπορούν να επικοινωνούν χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές ραδιοσυχνότητες [radio frequencies] (μία για κάθε επιπεδικό υπογράφο), τότε τα μηνύματα θα μπορούσαν να προωθηθούν στο επόμενο βήμα τους χρησιμοποιώντας οποιονδήποτε από τους επιπεδικούς γράφους, χωρίς να εισάγουν μάλιστα οποιαδήποτε παρεμβολή στον άλλο.

Για να δείξουμε ότι ο $L\text{Del}^{(1)}(V)$ έχει πυκνότητα 2, όλα τα τρίγωνα του $L\text{Del}^{(1)}(V)$ χωρίζονται σε δύο ομάδες που ονομάζονται *μεγάλα* τρίγωνα και *μικρά* τρίγωνα. Το τρίγωνο Δxyz είναι *μεγάλο* εάν η ακτίνα του *δίσκου* $(x, y, z) \geq 1$ και είναι *μικρό* στην αντίθετη περίπτωση. Ορίζουμε Γ_1 να είναι ο υπογράφος του $L\text{Del}^{(1)}(V)$ που περιέχει όλες τις Gabriel ακμές τις ακμές όλων των *μικρών* τριγώνων. Ορίζουμε Γ_2 να είναι ο υπογράφος του $L\text{Del}^{(1)}(V)$ που περιέχει όλες τις ακμές των *μεγάλων* τριγώνων. Παρατηρείστε ότι μία ακμή (α, β) μπορεί να προστεθεί ταυτόχρονα και στον Γ_1 και στον Γ_2 εάν είναι κοινή ακμή ενός μικρού και ενός μεγάλου τριγώνου. Ξεκάθαρα ο $L\text{Del}^{(1)}(V)$ είναι η ένωση των Γ_1 και Γ_2 . Μπορεί ακολούθως να παρουσιαστεί το ότι αμφότεροι οι Γ_1 και Γ_2 είναι επιπεδικοί δείχνοντας ότι η μόνη πιθανή τομή δύο ακμών στον $L\text{Del}^{(1)}(V)$ εμπεριέχει μία ακμή από τον Γ_1 και μία ακμή από τον Γ_2 , δηλαδή, μία ακμή από ένα *μεγάλο* τρίγωνο και η άλλη ακμή είναι είτε από ένα *μικρό* τρίγωνο είτε είναι μία Gabriel ακμή.

3.12 Τοπικός Αλγόριθμος για την Κατασκευή του $L\text{Del}^{(2)}(V)$ [Local Algorithm to Construct $L\text{Del}^{(2)}(V)$]

Ας παρουσιάσουμε, τώρα, έναν τοπικό αλγόριθμο για την κατασκευή του $L\text{Del}^{(2)}(V)$:

1. Κάθε κόμβος α συλλέγει τις πληροφορίες τοποθεσίας από το $N_2(\alpha)$ χρησιμοποιώντας την αποτελεσματική μέθοδο όπως περιγράφηκε στο [11]. Ο κόμβος α , έπειτα, υπολογίζει την τριγωνοποίηση Delaunay $\text{Del}(N_2(\alpha) \cup \{\alpha\})$.
2. Για κάθε ακμή (α, β) του $\text{Del}(N_2(\alpha) \cup \{\alpha\})$, έστω $\Delta\alpha\beta\gamma$ και $\Delta\alpha\beta\delta$ δύο τρίγωνα πλησίον [incident] της (α, β) . Η ακμή (α, β) είναι μία Gabriel ακμή εάν αμφότερες οι γωνίες $\widehat{\alpha\gamma\beta}$ και $\widehat{\alpha\delta\beta}$ είναι μικρότερες από $\frac{\pi}{2}$ και $|\alpha\beta| \leq 1$. Ο α σημειώνει [marks] όλες τις Gabriel ακμές, οι οποίες και ποτέ δε θα απομακρυνθούν από την τοπολογία.
3. Κάθε κόμβος α βρίσκει όλα τα τρίγωνα $\Delta\alpha\beta\gamma$ από την $\text{Del}(N_2(\alpha) \cup \{\alpha\})$ που και οι τρεις ακμές τους έχουν μήκος μικρότερο ή ίσο της μίας μονάδας. Εάν ισχύει $\widehat{\gamma\alpha\beta} \geq \frac{\pi}{3}$, ο κόμβος α εκπέμπει ένα μήνυμα **πρόταση** (α, β, γ) προς το $N_1(\alpha)$ για να σχηματίσει ένα περιορισμένο [localized] τρίγωνο $\Delta\alpha\beta\gamma$ στο $L\text{Del}^{(2)}(V)$. Ο κόμβος α ακούει όλα αυτά τα μηνύματα – **προτάσεις** από τους 1 – γείτονές του.
4. Όταν ο κόμβος α λαμβάνει ένα μήνυμα - **πρόταση** (α, β, γ) , αποφασίζει το εάν θα αποδεχθεί την κατασκευή του τριγώνου $\Delta\alpha\beta\gamma$ ή όχι. Εάν το $\Delta\alpha\beta\gamma$ ανήκει στην $\text{Del}(N_2(\alpha) \cup \{\alpha\})$, τότε ο α αποδέχεται την πρόταση εκπέμποντας ένα μήνυμα **αποδοχή** (α, β, γ) , ειδάλλως ο α απορρίπτει την πρόταση εκπέμποντας ένα μήνυμα **απόρριψη** (α, β, γ) .
5. Ο κόμβος α προσθέτει τις γειτονικές (προσπίπτουσες) ακμές (α, β) και (α, γ) στο σύνολο με τις γειτονικές του ακμές στο $L\text{Del}^{(2)}(V)$ εάν το τρίγωνο $\Delta\alpha\beta\gamma$ ανήκει στην $\text{Del}(N_2(\alpha) \cup \{\alpha\})$ και συνάμα αμφότεροι οι β και α να έχουν στείλει ένα μήνυμα **αποδοχή** (α, β, γ) ή ένα μήνυμα **απόρριψη** (α, β, γ) .

3.12.1 Ο $L\text{Del}^{(2)}(V)$ είναι Επιπεδικός [$L\text{Del}^{(2)}(V)$ is Planar]

Ενδιαφερόμαστε για την εύρεση ενός επιπεδικού επικαλυπτή [planar spanner] του $UDG(V)$. Από την παράγραφο 3.10 γνωρίζουμε ότι ο $L\text{Del}^{(1)}(V)$ είναι ένας επικαλυπτής του $UDG(V)$, αλλά στην παράγραφο 3.11.1 είδαμε ότι μπορεί και να μην είναι επιπεδικός. Γι' αυτό και εμείς στο εξής μελετούμε τον $L\text{Del}^{(2)}(V)$. Πάλι, από την παράγραφο 3.10 ξέρουμε ότι ο $L\text{Del}^{(2)}(V)$ είναι επικαλυπτής [spanner] του $UDG(V)$. Έτσι τώρα πρέπει να δείξουμε ότι είναι επιπεδικός [planar]. Στα [43] και [44] η επιπεδικότητα του $L\text{Del}^{(2)}(V)$ καταδεικνύεται μέσω μιας σειράς λημμάτων και θεωρημάτων. Τα λήμματα και τα θεωρήματα περιλαμβάνονται παρακάτω. Εντούτοις, οι αποδείξεις έχουν παραλειφθεί.

Λήμμα 3.1: Εάν μία ακμή (x, y) τέμνει ένα τοπικό Delaunay τρίγωνο $\Delta\alpha\beta\gamma$ [local Delaunay triangle], τότε οι κόμβοι x και y δε μπορεί να βρίσκονται αμφότεροι εντός του δίσκου (α, β, γ) . (πρώην 10)

Λήμμα 3.2: Εάν μία Gabriel ακμή (x, y) τέμνει ένα τοπικό Delaunay τρίγωνο $\Delta\alpha\beta\gamma$ [local Delaunay triangle], τότε οι κόμβοι x και y δε μπορεί να βρίσκονται αμφότεροι εκτός του δίσκου (α, β, γ) . (πρώην 11)

Θεώρημα 3.2: Ας υποθέσουμε ότι δύο τρίγωνα του $L\text{Del}^{(k)}(V), k \geq 1$, $\Delta\alpha\beta\gamma$ και $\Delta\chi\gamma z$, τέμνονται. Τότε είτε ο δίσκος (α, β, γ) περιέχει τουλάχιστον έναν από τους κόμβους $\{x, y, z\}$ ή ο δίσκος (x, y, z) περιέχει ένα από τους κόμβους $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. (πρώην 12)

Θεώρημα 3.3: Ο $L\text{Del}^{(2)}(V)$ είναι ένας επιπεδικός γράφος. (πρώην 13)

Σκιαγράφηση απόδειξης για το θεώρημα 3.3:

Αφού δύο Gabriel ακμές δεν τέμνονται, κάθε τομή εμπλέκει-αφορά [involves] ένα τοπικό (περιορισμένο) Delaunay τρίγωνο [localized Delaunay triangle]. Ας υποθέσουμε ότι η ακμή (x, y) του $L\text{Del}^{(2)}(V)$ τέμνει ένα τοπικό Delaunay τρίγωνο $\Delta\alpha\beta\gamma$.

Εάν η ακμή (x, y) είναι Gabriel ακμή, τότε το λήμμα 3.2 αναφέρει ότι είτε ο κόμβος x ή ο κόμβος y πρέπει να βρίσκεται [lie] εντός του δίσκου (α, β, γ) . Έστω ότι ο y βρίσκεται μέσα στον δίσκο (α, β, γ) .

Εάν η ακμή (\mathbf{x}, \mathbf{y}) είναι μία ακμή ενός τοπικού (περιορισμένου) Delaunay τριγώνου $\Delta\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}$, τότε το θεώρημα 3.2 δείχνει ότι είτε ο \mathbf{x} ή ο \mathbf{y} βρίσκεται μέσα στον δίσκο (α, β, γ) . Έστω ότι ο \mathbf{y} βρίσκεται μέσα στον δίσκο (α, β, γ) .

Η τριγωνική ανισότητα [triangle inequality] συνεπάγεται $|\mathbf{x}\alpha| + |\mathbf{y}\beta| < |\mathbf{x}\mathbf{y}| + |\alpha\beta| \leq 2$. Αφότου το τρίγωνο $\Delta\alpha\beta\gamma$ είναι ένα 2-περιορισμένο Delaunay τρίγωνο [2-localized Delaunay triangle], $\mathbf{y} \notin \mathbf{N}_1(\alpha) \cup \mathbf{N}_1(\beta) \cup \mathbf{N}_1(\gamma)$. Εκ τούτου $|\mathbf{y}\beta| > 1$, το οποίο υπονοεί πως $|\mathbf{x}\alpha| < 1$. Εάν ισχύει $|\mathbf{x}\alpha| < 1$ τότε $\mathbf{x} \in \mathbf{N}_1(\alpha)$, που σημαίνει ότι $\mathbf{y} \in \mathbf{N}_2(\alpha)$, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την ύπαρξη του 2-περιορισμένου Delaunay τριγώνου $\Delta\alpha\beta\gamma$.

Αν και οι αποδείξεις που παρέχονται στα [43] και [44] για τα λήμματα και τα θεωρήματα είναι σωστές (ακριβείς) [correct] για τις υποθέσεις που δίνονται στην παράγραφο 2.1, είναι εκ φύσεως βαθιά γεωμετρικές. Συγκεκριμένα βασίζονται σε μεγάλο βαθμό στο μοντέλο του γράφου μοναδιαίου δίσκου [unit disk graph model]. Όπως περιγράφηκε στο τμήμα 2.1, αυτό το μοντέλο είναι μία καταφανής υπεραπλοποίηση [oversimplification] της πραγματικής συμπεριφοράς ενός ad-hoc ασύρματου δικτύου. Τα ισχυρά θεωρητικά αποτελέσματα στα οποία καταλήγουν τα [43] και [44] μπορεί και να είναι ανεπίτευκτα όταν οι ίδιοι αλγόριθμοι χρησιμοποιηθούν πάνω σε ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο δικτύου.

3.13 Τοπικός Αλγόριθμος για την Κατασκευή του $BPS_2(UDG(V))$ [Local Algorithm to Construct $BPS_2(UDG(V))$]

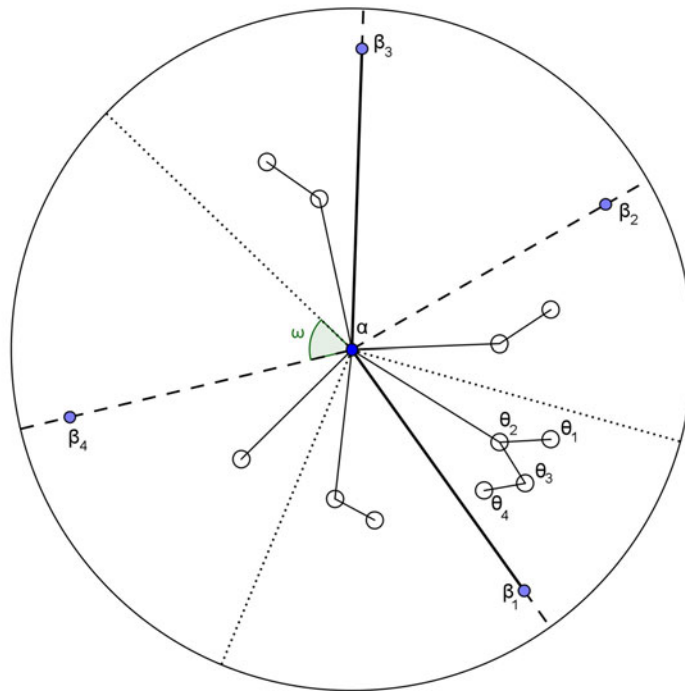
Το [64] δίνει τον ακόλουθο τοπικό αλγόριθμο για την κατασκευή του φραγμένου επιπέδικου επικαλυπτής [bounded planar spanner] $BPS_2(UDG(V))$.

1. Κατασκεύασε τον $LDel^{(2)}(V)$ όπως περιγράφηκε στην παράγραφο 3.12 έτσι ώστε κάθε κόμβος α να γνωρίζει τους γείτονές του στο $N_{LDel^{(2)}(V)}(\alpha)$ και το βαθμό δικό του βαθμό κόμβου $d(\alpha)$ [από το degree] στο $LDel^{(2)}(V)$.
2. Φτιάξε μία τοπική αρίθμηση [local ordering] π του V ως ακολούθως:
 - (α) Κάθε κόμβος α αρχικοποιείται $\pi_\alpha = 0$, δηλαδή μη διαταγμένος [unordered].
 - (β) Εάν ο α έχει $\pi_\alpha = 0$ και $d(\alpha) \leq 5$, τότε ο α ερωτά κάθε κόμβο β , από τους μη διατεταγμένους γείτονές του, τον τρέχοντα βαθμό $d(\beta)$. Εάν ο κόμβος α έχει τη μικρότερη ταυτότητα [ID] μεταξύ όλων των μη διατεταγμένων γειτόνων του β με $d(\beta) \leq 5$, τότε ο κόμβος α θέτει $\pi_\alpha = \max\{\pi_\beta \mid \beta \in N_{LDel^{(2)}(V)}(\alpha)\} + 1$ και εκπέμπει το π_α στους γείτονές του στο $N_{LDel^{(2)}(V)}(\alpha)$.
 - (γ) Όταν ο α λαμβάνει ένα μήνυμα από ένα γείτονα β που δηλώνει ότι $\pi_\beta = k$, τότε ο α μειώνει τον $d(\alpha)$ κατά ένα (δηλαδή, $d(\alpha) = d(\alpha) - 1$). Ο κόμβος α επίσης ανανεώνει [updates] το δικό του τοπικό αντίγραφο της διάταξης π_β . Σημειώστε ότι ο $d(\alpha)$ αναπαριστά τον αριθμό των γειτόνων του α που δεν έχουν ακόμη διαταχθεί. Εάν ο α βρει ότι $d(\alpha) \leq 5$ και ότι $\pi_\alpha = 0$, πηγαίνει στο βήμα 2(β). Ενώ, αν βρει $d(\alpha) = 0$ και ότι $\pi_\alpha > 0$, πηγαίνει στο βήμα 3.
3. Κατασκεύασε δομές [structures] βασισμένες σε τοπικές διατάξεις [local orderings] π ως ακολούθως:
 - (α) Αρχικοποίησε όλους τους κόμβους σε μη επεξεργασμένοι [unprocessed]
 - (β) Εάν ένας μη επεξεργασμένος [unprocessed] κόμβος α έχει την υψηλότερη τοπική διάταξη όλων των μη επεξεργασμένων γειτόνων στον $N_{LDel^{(2)}(V)}(\alpha)$, τότε έστω k ο αριθμός των επεξεργασμένων [processed] κόμβων στο $N_{LDel^{(2)}(V)}(\alpha)$. Ο κόμβος α τότε, διαιρεί [divides] την περιοχή εκπομπής του [transmission region] σε k ανοιχτούς τομείς [open sectors], χωρισμένους από τις k ακτίνες που πηγάζουν από τον α και διέρχονται από κάθε έναν απ' τους επεξεργασμένους γείτονες του

α (βλέπε το σχήμα 3.22). Έπειτα, ο κόμβος α διαιρεί κάθε τομέα σε ένα ελάχιστο αριθμό από ανοιχτούς κώνους [open cone], καθένα με βαθμό [degree] μικρότερο από ή ίσο με το ω , όπου $\omega \leq \frac{\pi}{3}$. Για κάθε ανοιχτό κώνο, έστω ότι $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ είναι οι διατεταγμένοι μη επεξεργασμένοι γείτονες του α στο $N_{L_{Def}^{(2)}(V)}(\alpha)$. Σ' αυτόν τον κώνο, πρώτα ο α προσθέτει την ακμή $\{\alpha, \theta_i\}$, όπου θ_i είναι ο κόμβος πλησιέστερα του α μεταξύ των $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$. Ο κόμβος α κατόπιν, λέει τους $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ να προσθέσουν όλες τις ακμές $\{\theta_j, \theta_{j+1}\}$, $1 \leq j < m$. Ο κόμβος α σημαδεύει [marks] τον εαυτό του ως επεξεργασμένο και αναφέρει σε όλους τους κόμβους στο $N_{L_{Def}^{(2)}(V)}(\alpha)$ ότι είναι επεξεργασμένος.

(γ) Εάν ένας μη επεξεργασμένος κόμβος β λαμβάνει ένα μήνυμα από ένα γείτονα α που του λέει να προσθέσει την ακμή (β, β') , ο β προσθέτει την ακμή (β, β') .

4. Όταν όλοι οι κόμβοι έχουν επεξεργαστεί, η προκύπτουσα τοπολογία είναι $BPS_2(UDG(V))$



Εικόνα 3.22: Αλγόριθμος για τον περιορισμό του βαθμού κόμβου.

3.13.1 Ιδιότητες του $BPS_2(UDG(V))$ [Properties of $BPS_2(UDG(V))$]

Το [64] αποδεικνύει ότι ο $BPS_2(UDG(V))$ είναι επιπεδικός [planar], έχει περιορισμένο (φραγμένο) βαθμό κόμβου [bounded node degree], και είναι t-επικαλυπτής του $UDG(V)$ [t-spanner of $UDG(V)$].

4. Γεωμετρική Δρομολόγηση [Geometric Routing]

4.1 Εισαγωγή

Οι αλγόριθμοι δρομολόγησης που χρησιμοποιήθηκαν ευρέως [commonly used] σε ενσύρματα δίκτυα τυπικά εγκαθιστούν ενδεχόμενες (εν δυνάμει) διαδρομές [implicit routes] ανάμεσα σε όλα τα ζεύγη από κόμβους του δικτύου. Αυτές οι διαδρομές ακολούθως χρησιμοποιούνται για την κατασκευή πινάκων οι οποίοι είναι αποθηκευμένοι τοπικά σε κάθε συσκευή του δικτύου που εκτελεί λειτουργία δρομολόγησης [24]. Εξαιτίας του περιορισμένου χώρου μνήμης και της επίσης περιορισμένης υπολογιστικής-επεξεργαστικής δύναμης [processing power] των ασύρματων κόμβων, και εξαιτίας της μεγάλης μεταβλητότητας-αστάθειας [volatility] της δομής του δικτύου, τέτοιοι αλγόριθμοι δρομολόγησης είναι μη αποτελεσματικοί [ineffectual] σε ad-hoc ασύρματα δίκτυα. Μία εναλλακτική προσέγγιση είναι η *γεωμετρική δρομολόγηση*, όπου εδώ η δρομολόγηση είναι βασισμένη σε γεωγραφικές συντεταγμένες των δικτυακών κόμβων αντί για μοναδικούς αναγνωριστές κόμβων [node identifiers], και όλες οι αποφάσεις δρομολόγησης λαμβάνονται βασισμένες αποκλειστικά σε τοπικές πληροφορίες [local information] [54, 52].

Δύο επικρατούσες μέθοδοι στη γεωμετρική δρομολόγηση είναι η *άπληστη δρομολόγηση* [greedy routing] και η *δρομολόγηση όψης* [face routing]. Υπάρχει μία ένταση – κόντρα μεταξύ των δύο αυτών μεθόδων δρομολόγησης. Οι άπληστες μέθοδοι είναι γρήγορες αλλά δεν εγγυώνται παράδοση (του μηνύματος). Η δρομολόγηση όψης απ' την άλλη εγγυάται την παράδοση αλλά είναι λιγότερο αποτελεσματική σε σχέση με την άπληστη μέθοδο. Πρόσφατα, αυτές οι δυο μέθοδοι έχουν συνδυαστεί σε μια προσπάθεια να συσσωρευτούν τα προσφερόμενα οφέλη και των δύο. Τέτοιοι αλγόριθμοι ταλαντεύονται μεταξύ δρομολόγησης όψης και άπληστης δρομολόγησης. Ο αποφασιστικός παράγοντας για τη βελτίωση της απόδοσης αυτών των αλγορίθμων δυικής φύσης [dual – mode algorithms] (ή αλλιώς υβριδικών αλγορίθμων) είναι τα κριτήρια που χρησιμοποιούνται για την εναλλαγή από τη μία φάση λειτουργίας στην άλλη.

Το [39] παρέχει έναν αλγόριθμο (που λέγεται GOAFR+) για τη δρομολόγηση μηνυμάτων ανάμεσα σε δύο κόμβους α και β σε ένα ad-hoc ασύρματο δίκτυο. Σε αυτό το τμήμα της εργασίας μας θα εξετάσουμε την έρευνα που οδήγησε στον GOAFR+ καθώς και τον GOAFR+ αυτόν καθ' αυτόν.

4.2 «Αμνήμων» Δρομολόγηση [Oblivious Routing]

Αρχικά η έρευνα επικεντρώθηκε σε απλές στη σύλληψή τους αλλά και την κατασκευή τους ιδέες για την δρομολόγηση ενός μηνύματος. Έγινε προσπάθεια να στηριχθεί το εγχείρημα σε όσο το δυνατόν λιγότερα προαπαιτούμενα, έτσι ώστε να είναι υλοποιήσιμο και συνάμα τα όποια αποτελέσματα να είναι και εμπορικά εκμεταλλεύσιμα.

Είμαι στον κόμβο α και θέλω να στείλω ένα μήνυμα στον κόμβο β , με τον οποίο δεν μπορώ να επικοινωνήσω απ' ευθείας. Φαντάζει πολύ λογικό οι αρχικές μου επιλογές να βασίζονται στο πως θα το καταφέρω πιο γρήγορα, πιο εύκολα. Άρα πρόκειται για «άπληστες» [greedy] επιλογές. Αυτός είναι και ο λόγος που το κεφάλαιο αυτό πήρε αρχικά την ονομασία Άπληστη Δρομολόγηση [Greedy Routing]. Το γεγονός, όμως, ότι συναντάμε αρκετές κατηγορίες που δε θα μπορούσαν να αντιπροσωπευτούν οδήγησαν στην εγκατάλειψή του και την υιοθέτηση του τρέχοντος.

Βασικός κορμός αυτής της διαδικασίας είναι ο τρόπος με τον οποίο ο κόμβος, όπου έχει φτάσει το μήνυμα, θα αποφασίσει ποιος θα είναι ο επόμενος που θα το παραλάβει. Πρέπει να δώσει απάντηση στο ερώτημα:

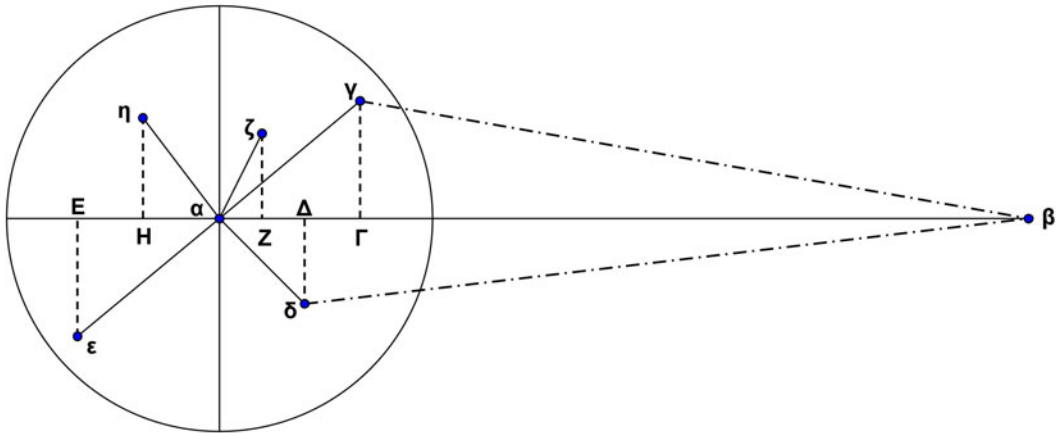
« ποιος είναι ο καλύτερος κόμβος για να προωθήσω το μήνυμα; »

Οι αλγόριθμοι αυτής της κατηγορίας διαφέρουν ουσιαστικά μόνο στον τρόπο με τον οποίο επιλέγουν τον «καλύτερο» γείτονα, στο κριτήριο που υιοθετούν για να κάνουν το επόμενο βήμα τους.

Όταν κριτήριο είναι η θετική ή αρνητική «πρόοδος» που κάνει ο αλγόριθμος ως προς τον προορισμό, έχουμε τη *Δρομολόγηση Βασιζόμενη στην Πρόοδο* [Progress routing]. Το άλλο ενδεχόμενο είναι να ενδιαφερόμαστε για την κλίση που σχηματίζει η διεύθυνση του τρέχοντος κόμβου με τον επόμενο σε σχέση με την αντίστοιχη ως προς τον προορισμό. Γι' αυτό και την κατηγορία την ονομάζουμε *Δρομολόγηση Διεύθυνσης* [Directional Routing]. Αργότερα, ο συνδυασμός αλγορίθμων που να εμφανίζουν χαρακτηριστικά και από τις δύο από τις παραπάνω κατηγορίες μας έδωσε τους υβριδικούς αλγορίθμους, ενώ η εισαγωγή της έννοιας της τυχαιότητας [randomization] μέσα σε έναν αλγόριθμο δημιουργεί μία κατηγορία από μόνη προς μελέτη, αν και όχι επισταμένα.

4.2.1 Δρομολόγηση Βασιζόμενη στην Πρόοδο [Progress routing] και Άπληστη Δρομολόγηση [Greedy routing]

Η έννοια της *πρόοδου* είναι η κεντρική ιδέα πολλών αλγορίθμων βασισμένων σε μεθόδους GPS (Global Positioning System) ή Galileo. Δοθέντος ενός κόμβου-πομπού α , η *πρόοδος* ενός κόμβου γ ορίζεται ως η προβολή, πάνω στη γραμμή που συνδέει τον α και τον τελικό προορισμό β , του ευθύγραμμου τμήματος μεταξύ του α και του πομπού γ .



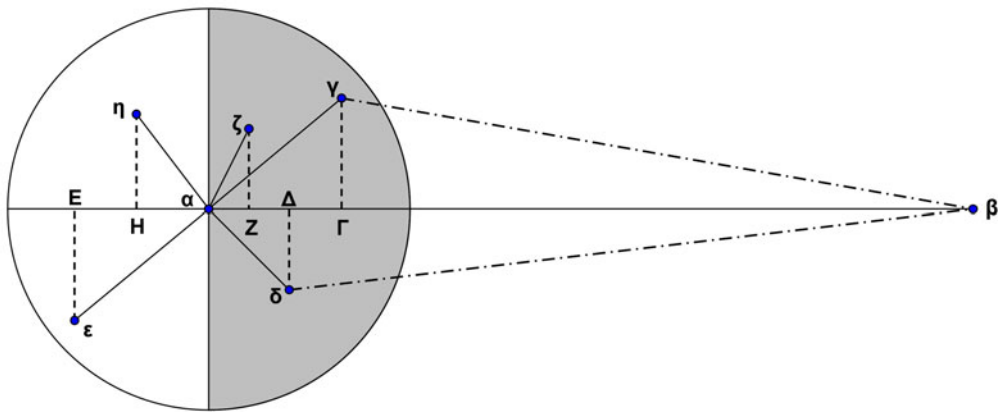
Εικόνα 4.1: Δρομολόγηση βασισμένη στην Πρόοδο. Θετική και αρνητική Πρόοδος: Οι κόμβοι γ και δ παρουσιάζουν θετική πρόοδο $\alpha\Gamma$ και $\alpha\Delta$ αντίστοιχα, ενώ π.χ. ο ϵ παρουσιάζει αρνητική πρόοδο $\alpha\epsilon$. (Σχήμα 1 σελ 6 στο [30])

Στο παραπάνω σχήμα 4.1 (από το [30]) για παράδειγμα, η πρόοδος του κόμβου α με προορισμό τον κόμβο β εάν κατευθυνθεί στον κόμβο γ , είναι το ευθύγραμμο τμήμα $\alpha\Gamma$, ενώ είναι ίση με το $\alpha\Delta$ αν επιλέξει να στείλει το μήνυμα στον κόμβο δ .

Ένας γείτονας είναι σε «εμπρόσθια κατεύθυνση» εάν η πρόοδος είναι θετική, δηλαδή αποτελεί τμήμα της ημιευθείας $\alpha\beta$, για παράδειγμα οι κόμβοι γ και δ στο παράδειγμα. Διαφορετικά, αν η πρόοδος ανήκει στην αντικείμενη ημιευθεία της $\alpha\beta$, λέμε ότι είναι σε «οπίσθια κατεύθυνση», όπως ο ϵ .

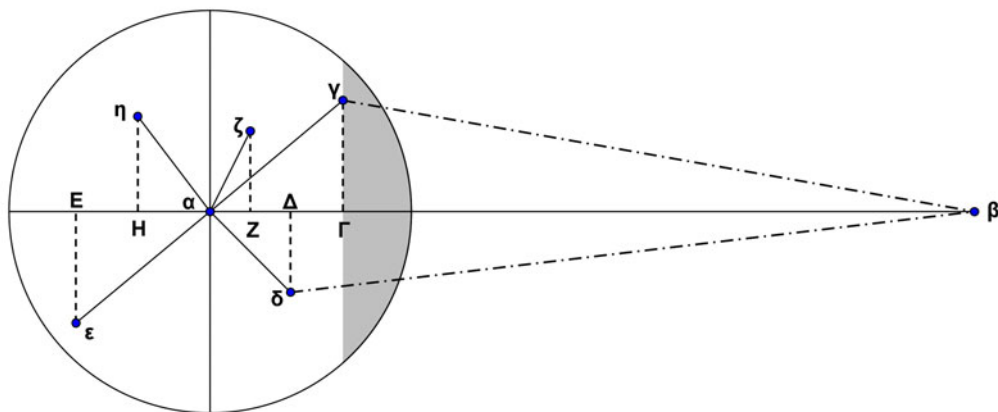
Ας δούμε μεταξύ άλλων κάποιους από τους χαρακτηριστικότερους αλγορίθμους που χρησιμοποιούν αυτές τις αρχές για να διαλέξουν μεταξύ των γειτόνων τους για το επόμενο βήμα δρομολόγησης.

Στη «**Μέθοδο Τυχαίας Πρόοδου**» [Random Progress Method] [49], τα πακέτα που κατευθύνονται προς τον β δρομολογούνται με ίση πιθανότητα προς ένα άμεσο γειτονικό κόμβο που εμφανίζει θετική πρόοδο. Για παράδειγμα, στην εικόνα 4.2 παρακάτω, ο κόμβος α μπορεί να προωθήσει το μήνυμα που παρέλαβε με προορισμό τον β σε οποιονδήποτε από τους κόμβους με θετική πρόοδο, δηλαδή τους γ , δ ή ζ . Στόχος των δημιουργών του ήταν η ελαχιστοποίηση της απαιτούμενης πληροφορίας για τη θέση των γειτόνων καθώς και η μείωση του αριθμού των λειτουργιών - ενεργειών που απαιτούνται για την προώθηση ενός μηνύματος.

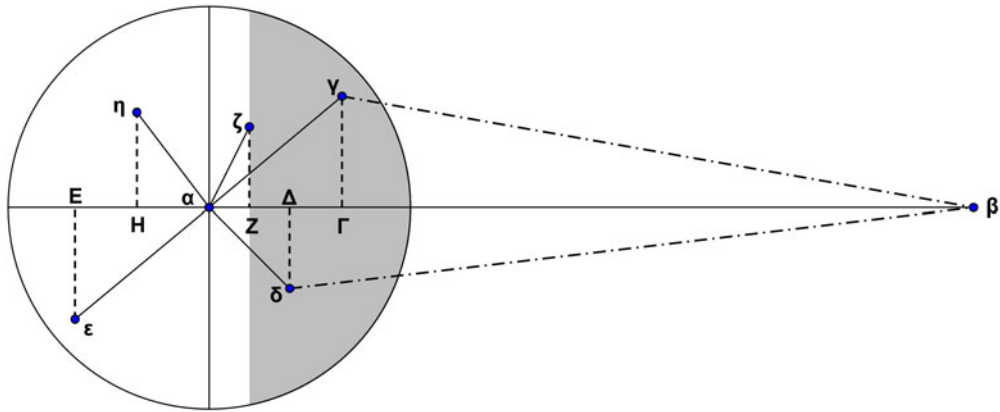


Εικόνα 4.2: Δρομολόγηση με τη μέθοδο Τυχαίας Προόδου. Επιλέγεται τυχαία οποιοσδήποτε από τους γειτονικούς κόμβους παρουσιάζει θετική πρόοδο, δηλαδή οποιοσδήποτε από τους γ , δ ή ζ .

Οι Takagi και Kleinrock [61] πρότειναν τον αλγόριθμο δρομολόγησης «**Μέγιστη Πρόοδος**» [*MFR (most forward within radius)*], κατά τον οποίο ένα πακέτο στέλνεται σε εκείνον το γείτονα που εμφανίζει τη μεγαλύτερη πρόοδο προς τον προορισμό β . Για παράδειγμα, παρακάτω στην εικόνα 4.3, ο κόμβος α θα προωθήσει το μήνυμα που μόλις κατέφθασε σ' αυτόν με προορισμό τον β στον κόμβο γ . Στόχος του αλγορίθμου αυτού ήταν η ελαχιστοποίηση των βημάτων που πρέπει να κάνει ένα πακέτο μέχρις ότου φτάσει στον προορισμό του β . Έχει θεωρηθεί μια καλή στρατηγική κυρίως σε σενάρια όπου ο αποστολέας του μηνύματος δεν μπορεί να τροποποιήσει την ισχύ του σήματος μετάδοσης ανάμεσα στον πομπό και το δέκτη. Ο αλγόριθμος **MFR** θεωρείται μετά από έρευνα ότι είναι ελεύθερος από ατέρμονες κύκλους [is probed to be a loop-free algorithm] [59]. Σύμφωνα άλλωστε με το [30], ο **MFR** είναι ο μόνος - απ' τους αλγορίθμους που στηρίζονται στην έννοια της προόδου - που είναι ανταγωνιστικός ως προς τη μετρική «μετρητή βημάτων» [hop count].

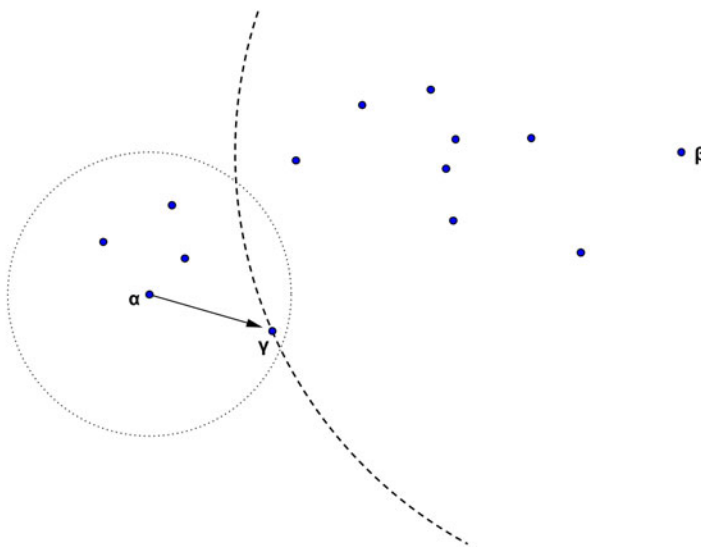


Εικόνα 4.3: Δρομολόγηση Μέγιστης Προόδου. Ο κόμβος που παρουσιάζει τη μεγαλύτερη πρόοδο είναι ο γ .



Εικόνα 4.4: Δρομολόγηση Ελάχιστης Προόδου (NFP). Ο κόμβος που παρουσιάζει τη μικρότερη πρόοδο είναι ο ζ.

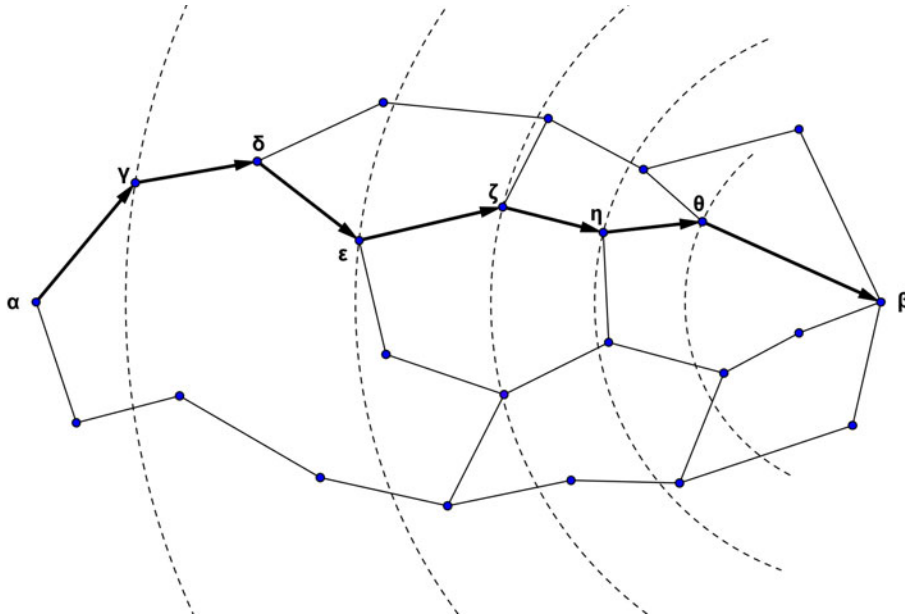
Στο [31], η μέθοδος τροποποιείται προτείνοντας να ρυθμίζεται η ισχύς του σήματος μετάδοσης. Στο μοντέλο αυτό, με τον αλγόριθμο NFP (Nearest with Forward Progress) το μήνυμα στέλνεται στον κοντινότερο γείτονα με θετική (εμπρόσθια) πρόοδο (π.χ. την παραπάνω εικόνα 4.4 στο ζ). Εάν εφαρμοστεί ο NFP σε όλους τους κόμβους του δικτύου, φαίνεται ότι η πιθανότητα για συγκρούσεις μεταξύ μηνυμάτων [packet collisions] μειώνεται δραματικά. Κατά συνέπεια, αυξάνεται και ο μέσος όρος του ρυθμού παράδοσης μηνυμάτων από οποιονδήποτε πομπό σε ένα δέκτη [48].



Εικόνα 4.5: Άπληστη Δρομολόγηση (GR). Ο κόμβος που παρουσιάζει τη μικρότερη πρόοδο είναι ο ζ. (Σχήμα 1 στο [34])

Στα 1987, ο Finn [25] πρότεινε το «άπληστο σχήμα» [greedy scheme] (ή αλλού ΑΠΛΗΣΤΟΣ αλγόριθμος) ως μία παραλλαγή της μεθόδου τυχαίας προόδου MFR, που «επιτρέπει να διαλέγουμε ως τον επόμενο κόμβο οποιονδήποτε κόμβο, ο οποίος παρουσιάζει πρόοδο προς την κατεύθυνση του προορισμού του μηνύματος». Για να παρακάμψει το πρόβλημα αυτό, ο Finn υιοθέτησε την άπληστη αρχή: «επέλεξε

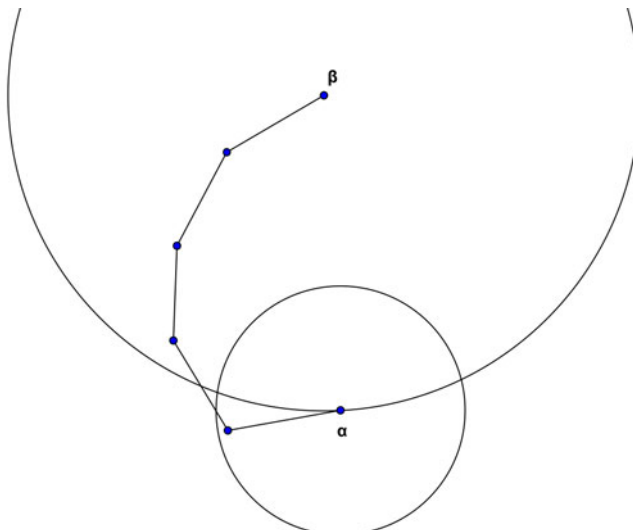
εκείνον τον κόμβο που βρίσκεται πιο κοντά στον προορισμό β ». Στο παράδειγμά μας της εικόνας 4.5 (από το [34]), ο αποστολέας κόμβος α επιλέγει τον κόμβο γ που βρίσκεται εγγύτερα στον προορισμό β απ' ό,τι οποιοσδήποτε άλλος γείτονας. Και αν δούμε το παράδειγμα στην επόμενη εικόνα 4.6, όπου έχουμε την εφαρμογή του Άπληστου αλγόριθμου, το μονοπάτι που επιλέγεται τελικά από τον αλγόριθμο είναι το $\alpha\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\theta\beta$.



Εικόνα 4.6: Άπληστη Δρομολόγηση (GR). Ο αλγόριθμος θα ακολουθήσει είναι το $\alpha\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\theta\beta$.

Κάποιος μπορεί να διερωτηθεί αν υπάρχει **πάντα** ένας γειτονικός κόμβος που είναι πλησιέστερα στον προορισμό β σε σχέση με τον τρέχοντα κόμβο. Η απάντηση είναι αρνητική. Τι συμβαίνει τότε; Πως αντιδρά στην περίπτωση αυτή ο Άπληστος αλγόριθμός μας;

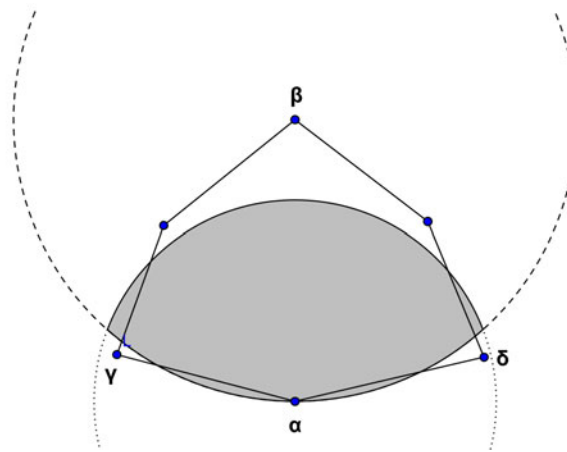
Ένα παράδειγμα χαρακτηριστικό αυτής της περίπτωσης συναντάμε στο [8] και το βλέπουμε στην παρακάτω εικόνα 4.7 (από το [48]).



Εικόνα 4.7: Αποτυχία Άπληστης Δρομολόγηση (GR). Ο αλγόριθμος δεν έχει γειτονικό κόμβο που να είναι εγγύτερα στον β απ' ό,τι ο ίδιος. Αποτέλεσμα είναι να σταματήσει.

Προφανώς αναφερόμαστε σε περιπτώσεις όπου ενώ υπάρχει διαδρομή μεταξύ του πομπού α του μηνύματος και του προορισμού β , αλλά ο αλγόριθμος αδυνατεί να το δρομολογήσει μέχρι τέλους επιτυχώς. Στο σχήμα αυτό, το ημικύκλιο γύρω από το β έχει ως ακτίνα την απόσταση μεταξύ του α και του β , και ο κύκλος περί τον α δείχνει την εμβέλεια εκπομπής του α . Παρατηρήστε την ύπαρξη βάσιμου-θεμελιωμένου [valid] μονοπατιού από τον α στο β . Το πρόβλημα εδώ, όπως εύκολα διακρίνεται στο σχήμα που ακολουθεί, είναι ότι ο κόμβος α βρίσκεται κοντύτερα στον προορισμό β απ' ό,τι οποιοσδήποτε από τους άμεσους γείτονές του. Κατά συνέπεια, η Άπληστη δρομολόγηση έχει προσεγγίσει ένα τοπικό μέγιστο [local maximum] από το οποίο δεν μπορεί να ξεφύγει.

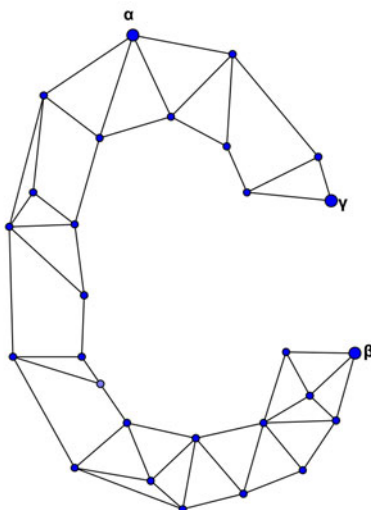
Ακριβώς το ίδιο πρόβλημα καλείται να λύσει και ο Άπληστος αλγόριθμος του παραδείγματος που αναπαρίσταται γραφικά παρακάτω, στην εικόνα 4.8 και συναντήσαμε στο [34].



Εικόνα 4.8: Αποτυχία Άπληστης Δρομολόγηση (GR). Οι γειτονικοί του α κόμβοι, γ και δ δε βρίσκονται πλησιέστερα στο β απ' ό,τι ο ίδιος. Αποτέλεσμα είναι ο αλγόριθμος να σταματήσει.

Άλλο γνωστό χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτυχίας ενός άπληστου αλγορίθμου είναι εκείνο όπου το υφιστάμενο δίκτυο πάνω στο οποίο γίνεται η δρομολόγηση

εμφανίζεται να περιλαμβάνει κόμβους που είναι κατανομημένοι σε μορφή όμοια με αυτή του κεφαλαίου γράμματος C του λατινικού αλφαβήτου, όπως φαίνεται στη διπλανή εικόνα 4.9 (από το [40]).



Εικόνα 4.9: Αποτυχία Άπληστης Δρομολόγηση (GR). Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν φτάσει στον κόμβο γ .

Ας υποθέσουμε ότι ο βορειότερος κόμβος της τοπολογίας « C » α επιθυμεί να στείλει ένα μήνυμα στον προορισμό β (το νοτιοανατολικό άκρο του « C »). Μέσω της άπληστης δρομολόγησης το μήνυμα προωθείται από την αφετηρία προς τον «καλύτερο» γείτονα, δηλ. προς την νοτιοανατολική κατεύθυνση. Στον κόμβο γ (το βορειοανατολικό άκρο του « C ») δεν υπάρχει γειτονικός κόμβος εγγύτερα στον προορισμό, και έτσι ο αλγόριθμος δρομολόγησης αποτυγχάνει.

Κατά το συγγραφέα, ο **ΑΠΛΗΣΤΟΣ** αλγόριθμος δεν πέφτει σε ατέρμονες κύκλους [loops], μιας και πάντα εξαναγκάζει το μήνυμα να κάνει ένα βήμα πιο κοντά στον προορισμό, πράγμα, όμως, που φαίνεται να καταρρίπτεται στο [7] και στα παραδείγματα της εικόνας 4.10 παρακάτω.

Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος, προτάθηκε στο [61] το μήνυμα-πακέτο να προωθηθεί σε εκείνον τον κόμβο που θα παρουσιάζει τη **μικρότερη αρνητική πρόοδο** [the least negative progress], εάν κανένας κόμβος δεν μπορεί να βρεθεί προς την εμπρόσθια κατεύθυνση. Βέβαια, αυτό ανασύρει το πρόβλημα της ατέρμονης κυκλικής κίνησης των πακέτων [looping packets], κάτι που δεν πρέπει να συμβαίνει όταν τα πακέτα προωθούνται μόνο προς την κατεύθυνση με θετική πρόοδο. Άλλοι μελετητές πρότειναν να μην προωθούνται καθόλου τα πακέτα που καταλήγουν σε κάποιο τοπικό μέγιστο [31]...

Όταν κανένας από τους γειτονικούς κόμβους δεν είναι πλησιέστερα στον β σε σχέση με τον τρέχον κόμβο, ο Finn [25] προτείνει κάποιου είδους «**πλημμυρίσματος**» [flooding], κάτι που βρίσκεται εκτός φιλοσοφίας της τρέχουσας μελέτης. Ο αλγόριθμος παρουσιάζει μη τετριμμένες λεπτομέρειες και επιπλέον **δεν εγγυάται παράδοση**.

Στη «**2-βημάτων άπληστη μέθοδο**» [2-hop greedy method] [59] ο κόμβος α επιλέγει τον καλύτερο υποψήφιο κόμβο γ ανάμεσα στους 1-βήματος γείτονες και τους 2-βημάτων γείτονες, δηλαδή στον «καλύτερο» κόμβο από αυτούς της γειτονιάς $N_2(\alpha)$ του α , και φυσικά σύμφωνα με το κριτήριο της «άπληστης αρχής». Έπειτα ο α προωθεί το μήνυμα στον καλύτερο 1-βήματος γείτονα του από σύνολο των γειτόνων των α και γ . Εδώ, λοιπόν, έχουμε εφαρμογή της έννοιας της **2-τοπικότητας** [2-locality]. Αυτή η βασική ιδέα είναι εφαρμόσιμη και σε άλλες μεθόδους.

Στη «**αποσπασματική άπληστη μέθοδο**» [disjoint greedy method] [47], κάθε ενδιαμέσος κόμβος, με το που παραλαμβάνει το μήνυμα, θα το προωθήσει στον καλύτερο γείτονά του μεταξύ αυτών που δεν έλαβαν ποτέ το μήνυμα (αποτυγχάνει εάν τέτοιος γείτονας δεν υπάρχει). Τέτοιου είδους μέθοδοι μειώνουν το ρυθμό αποτυχίας συγκρινόμενα με την άπληστη μέθοδο, *απομνημονεύοντας προηγούμενη κίνηση*. Εξαιτίας του τελευταίου χαρακτηριστικού της, αυτή αλλά και κάθε παρόμοια μέθοδος τίθενται αυτόματα εκτός της δικής μελέτης.

Οι αλγόριθμοι αυτής της κατηγορίας εμφανίζουν θετικά χαρακτηριστικά, όπως η ταχύτητα, η ευχρηστία, η απλότητα (συνήθως), αλλά όχι τα βέλτιστα επιθυμητά. Υποστηρίζουν -οι περισσότεροι- ότι από κατασκευής τους αποφεύγουν να «πέσουν» σε ατέρμονα κύκλο [100p]. Αυτό, όμως, και αν ακόμα συμβαίνει δεν είναι το μοναδικό πράγμα που θέλουμε από έναν αλγόριθμο.

Δυστυχώς δεν εγγυώνται παράδοση του μηνύματος στον προορισμό, μιας και σε ορισμένες περιπτώσεις, λόγω τοπολογίας του υφιστάμενου δικτύου, το κριτήριο για την «άπληστη» επιλογή του επόμενου κόμβου δεν ικανοποιείται, με αποτέλεσμα ο αλγόριθμος να αποτυγχάνει και να τερματίζει.

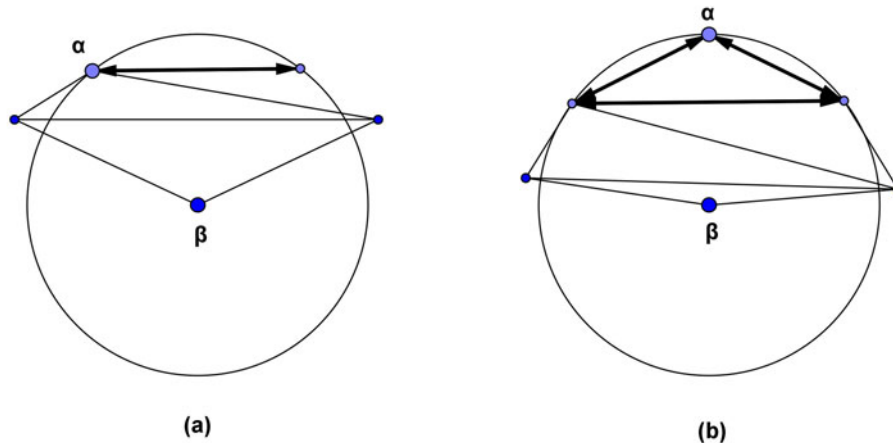
Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τα ακόλουθα συνολικά αποτελέσματα [7] για αυτήν την κατηγορία:

Ο αλγόριθμος **άπληστης δρομολόγησης** «χάνει» από μία τριγωνοποίηση T , με δύο τρόπους:

1. το πακέτο (μήνυμα) μπορεί να παγιδευτεί κινούμενο μπρος και πίσω επί μιας ακμής της τριγωνοποίησης (βλέπε παρακάτω την εικόνα 4.10 (a) (από το [7])),

ή

2. το πακέτο (μήνυμα) μπορεί να παγιδευτεί σε ένα κύκλο από τρεις ή περισσότερες κορυφές (βλέπε παρακάτω την εικόνα 4.10 (b) (από το [7])).

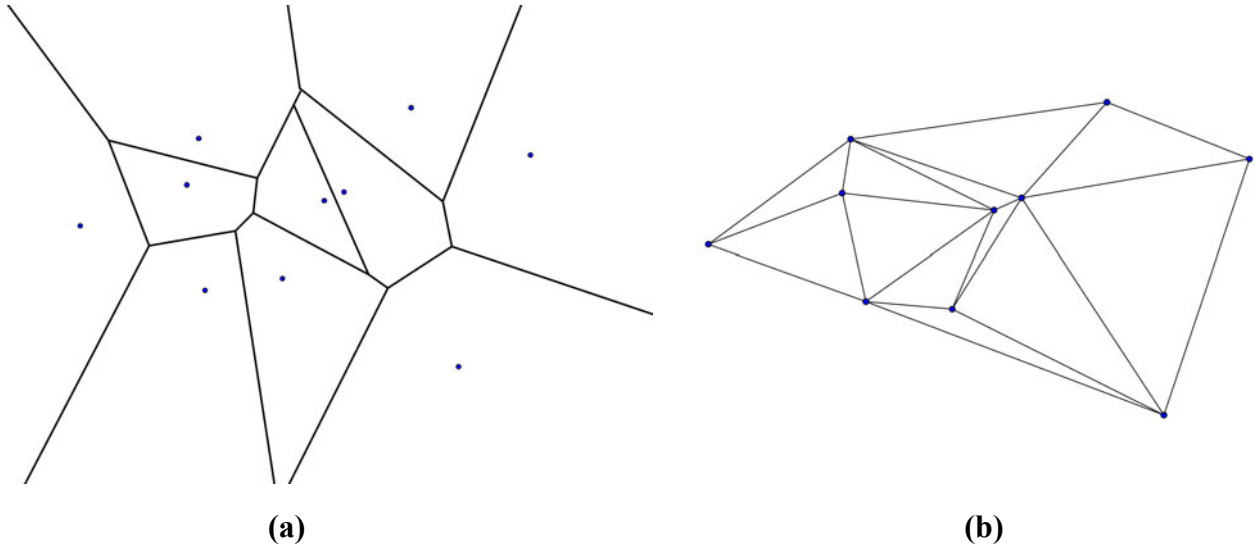


Εικόνα 4.10: Τριγωνοποίηση «νικά» την Άπληστη Δρομολόγηση (GR). Στην (a) περίπτωση ο αλγόριθμος εγκλωβίζεται μεταξύ των δύο άκρων μιας ακμής, ενώ στη (b) μεταξύ τριών κορυφών ενός κύκλου (τριγώνου).

Παρόλα αυτά, όπως φαίνεται και στο επόμενο θεώρημα [7], καμία από αυτές τις περιπτώσεις δε μπορεί να συμβεί εάν η T είναι Delaunay τριγωνοποίηση. Για λόγους πληρότητας, όμως, προηγείται ένας ορισμός.

Ορισμός 4.1: Το *Voronoi διάγραμμα* $VD(T)$ είναι μια διαμέριση ενός επιπέδου με ένα σύνολο τιμών V σε $|V|$ κυρτά πολύγωνα, που καλούνται Voronoi περιοχές. Κάθε Voronoi περιοχή περιέχει ακριβώς ένα σημείο $\kappa \in V$. Για όλα τα υπόλοιπα σημεία λ στην περιοχή, $\lambda \notin V$, και όλα τα σημεία $\mu \in \Omega - \{\kappa\}$, $|\lambda\kappa| < |\lambda\mu|$. Με άλλα λόγια, όλα τα σημεία σε μια Voronoi περιοχή βρίσκονται πλησιέστερα στο κ απ' ό,τι σε οποιοδήποτε άλλο σημείο στο V . Η Voronoi περιοχή συμβολίζεται ως $Vor(\kappa)$ [43, 56] (βλέπε εικόνα 2β).

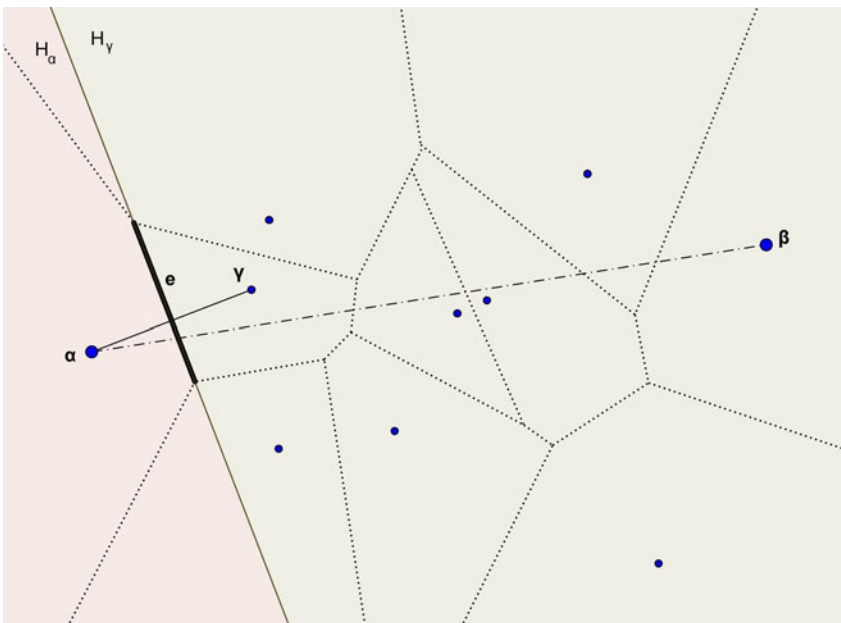
Για καλύτερη κατανόηση, παρατηρείστε ότι η Delaunayτριγωνοποίηση και το Voronoi διάγραμμα είναι το ένα ο δυικός γράφος του άλλου. Αυτό σημαίνει, ότι η ακμή (α, β) υπάρχει στην $Del(V)$ αν και μόνο αν οι $Vor(\alpha)$ και $Vor(\beta)$ μοιράζονται κάποιο κοινό σύνορο [43, 56] (σύγκρινε εικόνα 4.11 (a) με 4.11 (b)).



Εικόνα 4.11: Voronoi διάγραμμα και Delaunayτριγωνοποίηση. Και οι δύο δομές αντιστοιχούν στην ίδια τοπολογία κόμβων.

Θεώρημα 4.1: Ο ΑΠΛΗΣΤΟΣ αλγόριθμος [GREEDY algorithm] εγγυάται πάντα την παράδοση του μηνύματος, όταν εφαρμόζεται επί Delaunay τριγωνοποίησης ενός γράφου.

Απόδειξη. Προχωρούμε δείχνοντας ότι κάθε κόμβος α της T έχει ένα γείτονα που είναι αυστηρά εγγύτερα στον προορισμό β απ' ότι ο ίδιος ο α . Οπότε, σε κάθε βήμα της δρομολόγησης, το μήνυμα βρίσκεται όλο και πιο κοντά στον β και έτσι, μετά από το πολύ n βήματα, φτάνει τον β .



Εικόνα 4.12: Απόδειξη θεωρήματος.

Θεωρήστε το Voronoi διάγραμμα $VD(T)$ των κορυφών της T και έστω e να είναι η πρώτη ακμή του $VD(T)$ που τέμνεται από το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα (α, β) , όπως φαίνεται και στο προηγούμενη εικόνα 4.12 (από το [7]).

Παρατηρήστε ότι η e βρίσκεται στο σύνορο [boundary] δύο Voronoi κελιών, ένα για τον α και ένα για κάποιον άλλο κόμβο γ , και ο φορέας της e διαιρεί το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα, $H_\alpha = \{\delta : \text{απόστ}(\delta, \alpha) < \text{απόστ}(\delta, \gamma)\}$ και

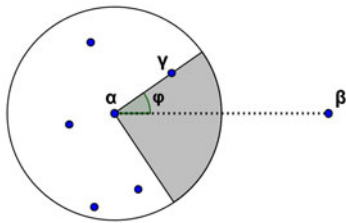
$H_\gamma = \{\delta : \text{απόστ}(\delta, \alpha) > \text{απόστ}(\delta, \gamma)\}$. Εφόσον, το Voronoi διάγραμμα είναι η δυική ευθύγραμμη όψη της Delaunay τριγωνοποίησης, η ακμή $(\gamma, \alpha) \in T$. Επίσης, από την εκλογή της e , ο $\beta \in H_\gamma$, δηλαδή, $\text{απόστ}(\beta, \alpha) > \text{απόστ}(\beta, \gamma)$ \square

Σημειώστε ότι η χρήση του Voronoi διαγράμματος γίνεται μόνο για τις ανάγκες της απόδειξης, μιας και πρόκειται για μία δομή μη τοπικά κατασκευάσιμη.

4.2.2 Δρομολόγηση Διεύθυνσης [Directional Routing]

Σε μια διαφορετική ερμηνεία του «καλύτερου γείτονα», ακόμα και του όρου «άπληστος», η επιλογή, αντί να βασιστεί στο κριτήριο της απόστασης από τον προορισμό, γίνεται με βάση τη διεύθυνση ή αλλιώς την κλίση. Ας γίνουμε πιο συγκεκριμένοι. Στην κατηγορία αυτή κατατάσσουμε αλγόριθμους που κινούνται με κριτήριο την κλίση που σχηματίζει η διεύθυνση μεταξύ του πομπού α και του τυχαίου κόμβου γ ως προς την αντίστοιχη μεταξύ του α και του τελικού δέκτη β .

Ο πλέον γνωστός αλγόριθμος είναι ο αλγόριθμος **Δρομολόγησης Πυξίδας** [Compass Routing] των Kranakis κ.ά. [38], όπου το κάθε μήνυμα βρίσκει το δρόμο του με παρόμοιο τρόπο με αυτό που ακολουθεί κάποιος που έχει μια πυξίδα στα χέρια του και προσπαθεί να φτάσει σε κάποιο σημείο του οποίου γνωρίζει τις συντεταγμένες.



Πιο συγκεκριμένα, όπως φαίνεται και στη διπλανή εικόνα 4.13 (από το [44]), το μήνυμα προωθείται σε εκείνο το γείτονα του οποίου η διεύθυνση είναι πλησιέστερη σ' αυτήν του β . Η αλλιώς επιλέγουμε εκείνον τον κόμβο γ για τον οποίο το ευθύγραμμο τμήμα $\alpha\gamma$ παρουσιάζει τη μικρότερη γωνία σε σχέση με το $\alpha\beta$.

Εικόνα 4.12: Δρομολόγηση Πυξίδας. Ο κόμβος α προωθεί το μήνυμα στον γ , αφού με αυτόν σχηματίζεται η μικρότερη γωνία ως προς τη διεύθυνση του ευθύγραμμου τμήματος $\alpha\beta$.

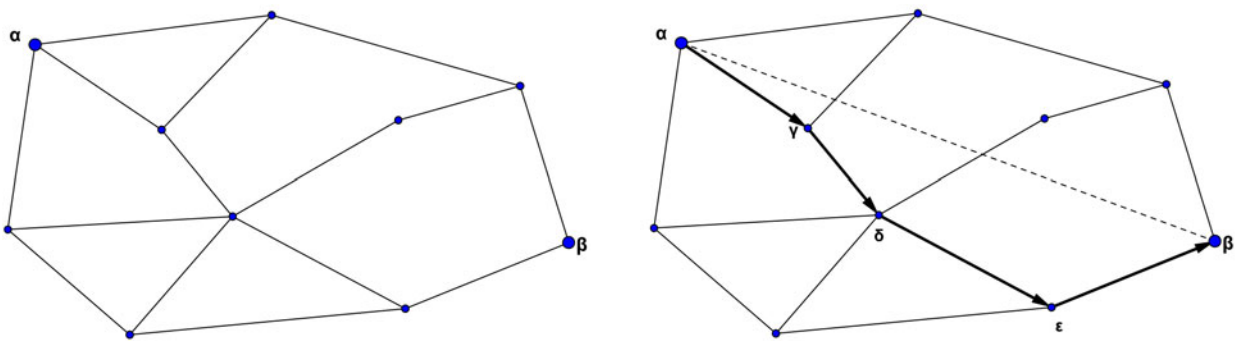
Αναλυτικά ο αλγόριθμος **Δρομολόγησης Πυξίδας** έχει ως εξής:

Δρομολόγησης Πυξίδας

1. Έστω αφετηρία να είναι ο κόμβος α , ενώ ο προορισμός του μηνύματος να είναι ο κόμβος β , ο οποίος φυσικά δε βρίσκεται στη γειτονιά $N_1(\alpha)$ του α .
2. Για κάθε έναν από τους άμεσους γείτονες του α , δηλαδή τους κόμβους που ανήκουν στο σύνολο $N_1(\alpha)$, υπολογίζουμε την κλίση του. Αυτό γίνεται βρίσκοντας για κάθε κόμβο γ απ' αυτούς τη γωνία $\widehat{\gamma\alpha\beta}$, μετρημένη είτε δεξιόστροφα είτε αριστερόστροφα. Για να πετύχουμε το παραπάνω κάνουμε χρήση των *γεωγραφικών συντεταγμένων* των άμεσα εμπλεκόμενων κόμβων.
3. Το μήνυμα προωθείται από τον α σε εκείνον τον κόμβο γ της $N_1(\alpha)$ που σχηματίζει τη μικρότερη γωνία $\widehat{\gamma\alpha\beta}$, όπως ορίστηκε παραπάνω. Σε περίπτωση ισοπαλιών, η επιλογή γίνεται στην τύχη μεταξύ των «ισοβαθμούντων».
4. Εάν ο κόμβος γ ταυτίζεται με τον προορισμό, ο αλγόριθμος τερματίζει. Διαφορετικά, με έναν αναδρομικό τρόπο, επανερχόμαστε στο βήμα 1, με αφετηρία πλέον τον κόμβο γ .

Ο αλγόριθμος **Δρομολόγησης Πυξίδας** προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει την απόσταση που ένα μήνυμα διανύει. Αυτό, βέβαια, με την έννοια της ευκλείδειας απόστασης και της αντίστοιχης μετρικής. Όχι με την έννοια της μετρικής «μετρητής βημάτων» [hop count].

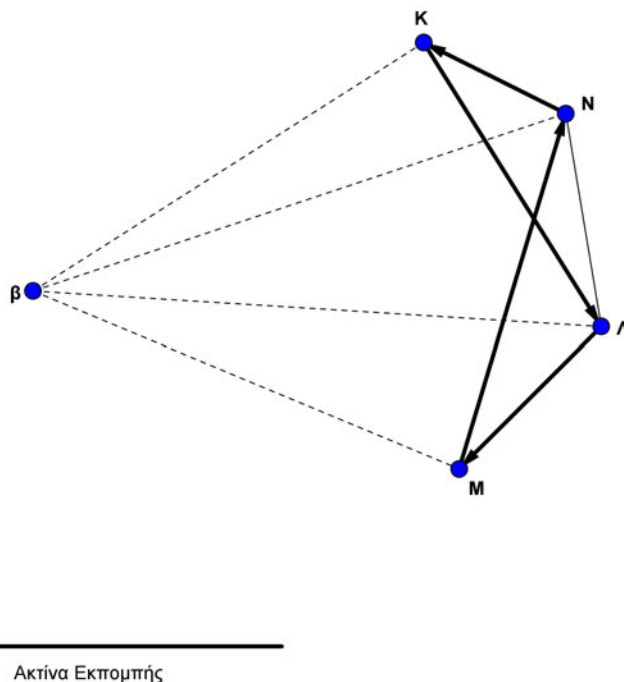
Ας δούμε και με παράδειγμα στην πράξη πως λειτουργεί ο αλγόριθμος **Δρομολόγησης Πυξίδας**. Στην παρακάτω εικόνα 4.14 (από το [38]) έχουμε στα αριστερά μας ένα γράφο, όπου ένα μήνυμα θέλει να αποσταλεί στον κόμβο β με αφετηρία τον α . Στα δεξιά της εικόνας, πλέον, μπορούμε να δούμε τη διαδρομή που επιλέγει ο συγκεκριμένος αλγόριθμος. Βλέπουμε ακόμη και το ευθύγραμμο τμήμα $\alpha\beta$, με τη διεύθυνση του οποίου γίνεται σε κάθε βήμα η σύγκριση με την τρέχουσα αντίστοιχη.



Εικόνα 4.13: Δρομολόγηση Πυξίδας. Ο κόμβος α στοχεύει να προωθήσει το μήνυμα στον β . Για το λόγο αυτό, ακολουθώντας τον αλγόριθμο Δρομολόγησης Πυξίδας, ακολουθεί το μονοπάτι $\alpha\gamma\delta\epsilon\beta$.

Στην κατηγορία αυτή εντάσσονται και άλλοι αλγόριθμοι που περιλαμβάνουν στην κατασκευή τους το *κριτήριο της πλησιέστερης διεύθυνσης* για την προώθηση ενός μηνύματος, όπως ο αλγόριθμος **DREAM** [2]. Ο τελευταίος, όμως, λόγω έτερων χαρακτηριστικών του, όπως το μερικό «πλημμύρισμα» [partial flooding] θέτει εαυτόν εκτός της παρούσας μελέτης.

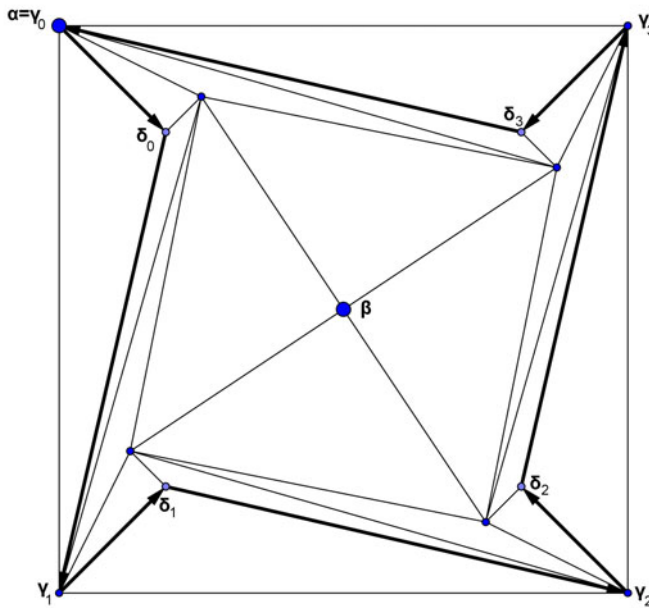
Το πρώτο ερώτημα που θέτουμε για κάθε αλγόριθμο είναι αν καταφέρνει να μην εγκλωβίζεται σε ατέρμονες κύκλους, αν είναι όπως έχει καθιερωθεί να λέγεται “**loop-free**”. Δυστυχώς, η απάντηση είναι αρνητική για κάθε αλγόριθμο αυτής της κατηγορίας. Για παράδειγμα μπορούμε να δούμε την περίπτωση που περιγράφεται στα [59, 38, 7] ή ακόμη και αυτήν του [30]. Στην δεύτερη έχουμε το αντιπαράδειγμα της ακόλουθης εικόνας 4.15.



Εικόνα 4.14: Αποτυχία Δρομολόγησης Πυξίδας. Το μήνυμα εγκλωβίζεται εξαιτίας της φιλοσοφίας του αλγορίθμου μεταξύ των τεσσάρων κόμβων K, L, M και N.

Ο ατέρμων κύκλος αποτελείται από τέσσερεις κόμβους, που σημειώνονται ως K, L, M και N. Ο γράφος είναι ένας μοναδιαίος γράφος UDG και η ακτίνα φαίνεται στην εικόνα 4.15. Ας είναι η αφετηρία του μηνύματος οποιοσδήποτε από τους κόμβους του κύκλου, π.χ. ο K. Ο κόμβος K επιλέγει τον κόμβο L για να προωθήσει το μήνυμα, μιας και η διεύθυνση του L είναι πλησιέστερη, ως προς τον προορισμό β , σε σχέση με τη διεύθυνση του άλλου γείτονά του N. Ομοίως, ο κόμβος L επιλέγει τον M, ο κόμβος M επιλέγει τον N και ο N επιλέγει τον K. Πρόσθετοι κόμβοι O μπορούν να ληφθούν εκτός των κόμβων του κύκλου, έτσι ώστε το μήνυμα να μπορέσει να παραδοθεί από τον K στον β μέσω εναλλακτικού μονοπατιού.

Στα [38, 7] έχουμε το αντιπαράδειγμα που καταδεικνύει ότι ούτε και στην περίπτωση που το υποκείμενο δίκτυο έχει τη μορφή μιας **τριγωνοποίησης** [triangulation]. Ο αναγνώστης μπορεί να πιστοποιήσει στην εικόνα 4.16, που παρατίθεται παρακάτω, ότι όταν επιχειρούμε να πορευτούμε από τον κόμβο $\alpha = \gamma_0$ στον προορισμό β κάνοντας χρήση της **Δρομολόγησης Πυξίδας**, κινούμαστε συνεχώς γύρω από τον κύκλο με σύνολο κορυφών $\{\gamma_i, \delta_i, i = 0, \dots, 3\}$.



Εικόνα 4.15: Αποτυχία Δρομολόγησης Πυξίδας. Ακόμα και σε περιπτώσεις όπου η υποκείμενη δομή είναι μια τριγωνοποίηση, δεν έχουν εξασφάλιση ότι ο αλγόριθμος Δρομολόγησης Πυξίδας θα παραδώσει το μήνυμα στον προορισμό..

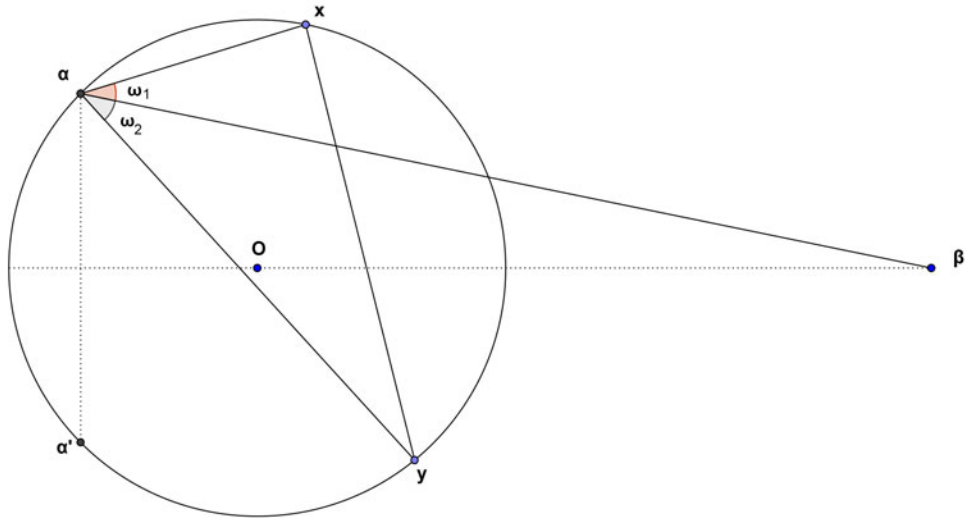
Θα πρέπει να φτάσουμε στο [38], για να έχουμε κάποιο θετικό αποτέλεσμα για τον αλγόριθμο **Δρομολόγησης Πυξίδας**:

Θεώρημα 4.2: Δεν υπάρχει *Delaunay τριγωνοποίηση [Delaunay triangulation]* που να «νικά» τον αλγόριθμο *Δρομολόγησης Πυξίδας*.

Απόδειξη. Έστω, αρχικά, \mathcal{P}_n ένα σύνολο n σημείων και $\mathcal{D}(\mathcal{P}_n)$ η *Delaunay τριγωνοποίηση* αυτού του συνόλου.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι θέλουμε να πάμε από την κορυφή α στη β στην $\mathcal{D}(\mathcal{P}_n)$. Θα δείξουμε ότι εάν η **Δρομολόγησης Πυξίδας** διαλέξει να διασχίσει την ακμή (α, γ) της $\mathcal{D}(\mathcal{P}_n)$, τότε η απόσταση του κόμβου γ από τον β είναι αυστηρά μικρότερη απ' την απόσταση του α από το β . Μιας και η $\mathcal{D}(\mathcal{P}_n)$ έχει πεπερασμένο αριθμό κορυφών, αυτό είναι επαρκές για να δείξουμε ότι κάποια στιγμή θα φτάσουμε στον β .

Έστω (α, β) το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τις κορυφές α και β , και έστω ότι τέμνει το τρίγωνο $\Delta\alpha\chi\gamma$ (δηλαδή με κορυφές α, χ, γ). Έστω \mathbf{K} ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές α, χ, γ . Έστω, ακόμη, \mathbf{O} το κέντρο του \mathbf{K} , και α' το συμμετρικό του α ως προς το ευθύγραμμο τμήμα (\mathbf{O}, β) που ενώνει το κέντρο του κύκλου και τον προορισμό (βλέπε εικόνα 4.17 (από το [38])).

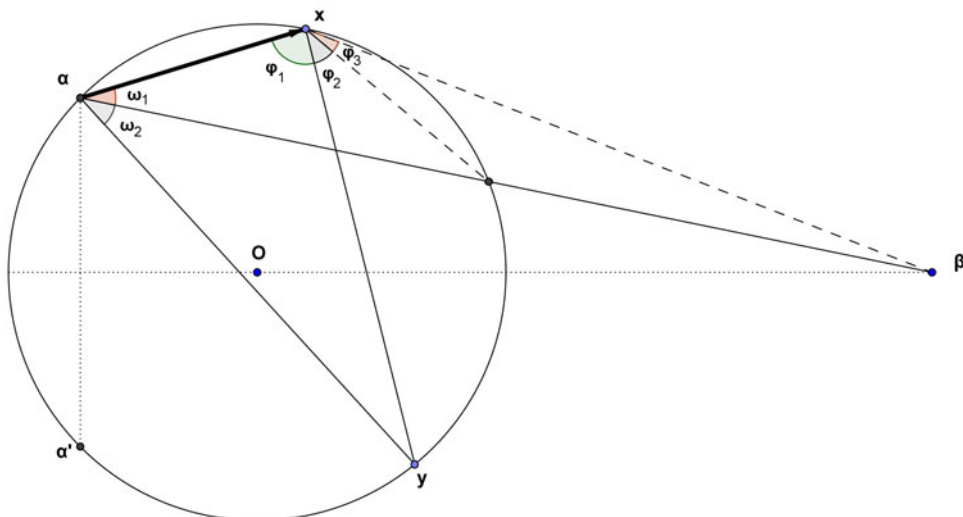


Εικόνα 4.16: Το τρίγωνο είναι μέρος μιας Delaunay τριγωνοποίησης του υφιστάμενου δικτύου. Αποδεικνύεται ότι σε κάθε βήμα του ο αλγόριθμος Δρομολόγησης Πυξίδας έρχεται όλο και πιο κοντά στον προορισμό β

Ας είναι, τέλος, ω_1 και ω_2 οι γωνίες μεταξύ των ευθυγράμμων τμημάτων (α, x) και (α, β) καθώς και μεταξύ (β, α) και (α, y) , αντίστοιχα. Δύο περιπτώσεις ανακύπτουν:

1. Να είναι $\omega_1 < \omega_2$.

Στην περίπτωση αυτή, η δρομολόγηση πυξίδας θα διαλέξει την ακμή (α, x) , και είναι εύκολο να φανεί ότι η απόσταση μεταξύ x και β είναι όντως μικρότερη απ' ό τι την αντίστοιχη μεταξύ α και β .



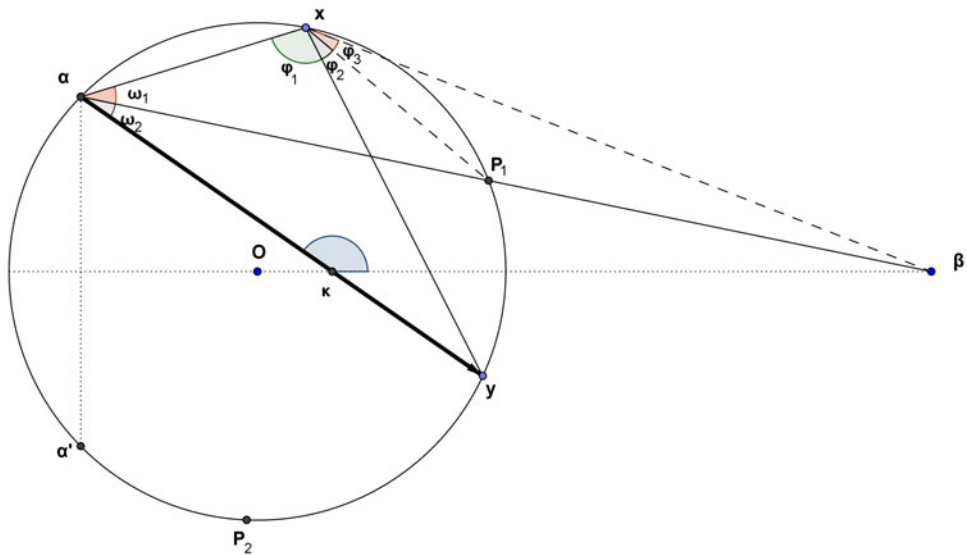
Εικόνα 4.17: Αν ισχύει $\omega_1 < \omega_2$, τότε ο α επιλέγει τον x και όχι τον y για να προωθήσει το μήνυμα.

Στην παραπάνω εικόνα 4.18, που αποτελεί τροποποίηση του αρχικού, μπορούμε να δούμε ότι:

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha\chi\beta} &= \hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 + \hat{\phi}_3 \\ &> \hat{\phi}_2 \\ &= \hat{\omega}_2 && \text{[ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο]} \\ &> \hat{\omega}_1 && \text{[από υπόθεση]} \end{aligned}$$

2. Να είναι $\hat{\omega}_2 \leq \hat{\omega}_1$, (βλέπε την εικόνα 4.19).

Τότε, η δρομολόγηση πυξίδας θα διαλέξει την ακμή (α, γ) , Έστω P_1 το σημείο τομής του ευθύγραμμου τμήματος (α, β) του κύκλου \mathbf{K} , και P_2 σημείο επί του \mathbf{K} τέτοιο που η απόσταση από το P_1 στο P_2 να είναι η ίδια με αυτήν μεταξύ του α και του P_1 . Είναι εύκολο να δούμε τώρα (***) ότι το P_2 βρίσκεται στο «ανοιχτό» τόξο $\widehat{\alpha\alpha'}$ που ενώνει τον κόμβο α με τον α' , κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Εντούτοις (*), μιας και $\omega_2 \leq \omega_1$, ο κόμβος γ θα πρέπει να βρίσκεται επί του $\widehat{\alpha\alpha'}$, και έτσι η απόστασή του από το β είναι μικρότερη από την αντίστοιχη του α από το β .



Εικόνα 4.18: Αν ισχύει $\hat{\omega}_2 \leq \hat{\omega}_1$, τότε ο α επιλέγει τον γ και όχι τον x για να προωθήσει το μήνυμα.

- (**) Από υπόθεση, το P_1 βρίσκεται στο $\widehat{\alpha\alpha'}$, πάνω από την ευθεία (O, β) .
 Άρα, το ευθύγραμμο τμήμα $\{P_1, z\}$, με z να είναι σημείο επί του $\widehat{\alpha\alpha'}$ κινούμενο από το P_1 κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, θα μεγαλώνει έως ότου $d(P_1, z) = d(P_1, \alpha)$, με το z προφανώς πριν το α' . Εκείνο το z είναι το P_2 .
- (*) Είναι $d(\alpha, P_1) = d(P_1, P_2)$, οπότε θα ισχύει και $\widehat{\alpha P_1} = \widehat{P_1 P_2}$ (1), κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Επίσης, είναι $\widehat{\omega}_2 \leq \widehat{\omega}_1$ καθώς και $\widehat{\omega}_1 < \widehat{\alpha P_1}$ (τα μέτρα τους). Συνεπώς, $\widehat{\omega}_2 < \widehat{\alpha P_1} \stackrel{(1)}{=} \widehat{P_1 P_2}$, οπότε ο κόμβος γ θα βρίσκεται ανάμεσα στα P_1 και P_2 , δηλαδή πάνω στο τόξο $\widehat{\alpha\alpha'}$. Τότε, όμως, θα έχουμε $d(\gamma, \beta) < d(\alpha, \beta)$, αφού $\widehat{\omega}_2 < \widehat{\alpha\kappa\beta}$ (αμβλεία). Άρα η απόσταση μειώνεται. \square

Καταλήγουμε με το σημαντικότερο συμπέρασμα που αφορά όλους ανεξαιρέτως τους αλγόριθμους με τους οποίους ασχολούμαστε. Κανένας, δυστυχώς, από τους αλγόριθμους της κατηγορίας αυτής δεν εγγυάται ότι μπορεί να βρει μια διαδρομή για το μήνυμα προς τον εκάστοτε προορισμό. Ούτε καν στην περίπτωση που ο γεωμετρικός μας γράφος είναι μια τριγωνοποίηση [triangulation]. Μόνο στην ειδική περίπτωση που είναι *Delaunay τριγωνοποίηση*, τότε υποστηρίζει τη **Δρομολόγηση Πυξίδας**, δηλαδή ο αλγόριθμος **Δρομολόγησης Πυξίδας** καταλήγει πάντα επιτυχώς στην παράδοση του μηνύματος όταν το υποκείμενο δίκτυο είναι μια *Delaunay τριγωνοποίηση*. Αυτό αποδεικνύεται παρακάτω, όπως είδαμε στο [7] (με ένα αποτέλεσμα ακόμα πιο ισχυρό από αυτό που μόλις είδαμε από το [38]).

Έστω $\delta\pi(u) = v$ να δηλώνει ότι ο επόμενος κόμβος που ο αλγόριθμος δρομολόγησης πυξίδας στέλνει ένα μήνυμα από τον κόμβο u , είναι ο v .

Το ακόλουθο λήμμα 4.1 δείχνει ότι κάθε τριγωνοποίηση που «νικά» τη δρομολόγηση πυξίδας, οδηγεί το πακέτο (μήνυμα) στο να παγιδευτεί σε ένα κύκλο.

Λήμμα 4.1: Έστω T , μία τριγωνοποίηση που «νικά» τη δρομολόγηση πυξίδας, και έστω β ένας κόμβος τέτοιος που ο αλγόριθμος δρομολόγησης πυξίδας να αποτυγχάνει να δρομολογήσει ένα μήνυμα σ 'αυτόν, δοθέντος κάποιου κόμβου α ως αρχή – αφετηρία. Τότε υπάρχει ένας κύκλος $K = \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{\kappa-1}$, ($\kappa \geq 3$) στην T τέτοιος ώστε να είναι $\delta\pi(\gamma_i) = \gamma_{i+1}$, για κάθε $0 \leq i < \kappa$ ¹. **(Πρόνυ 2.2)**

¹ Από δω και στο εξής, όλοι οι δείκτες θα λογίζονται $\text{mod } \kappa$.

Απόδειξη. Αφού η T «νικά» τη δρομολόγηση πυξίδας, και ο αλγόριθμος δρομολόγησης πυξίδας παίρνει την ίδια απόφαση κάθε φορά που επισκέπτεται μία κορυφή, είτε υπάρχει μία ακμή (u, v) τέτοια ώστε $\delta\pi(u) = v$ και $\delta\pi(v) = u$, είτε λαμβάνει χώρα η κατάσταση που περιγράφηκε στο λήμμα. Αποδεικνύουμε ότι δε μπορεί να υπάρχει μία τέτοια ακμή.

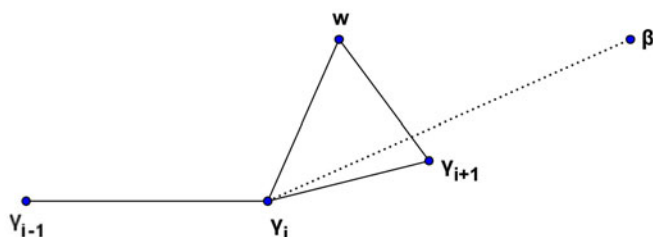
Έστω ότι υπάρχει μία τέτοια ακμή (u, v) . Τότε υπάρχει τρίγωνο Δuvw στην T α τέτοιο ώστε ο w να βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζεται από ευθεία που διέρχεται από τους κόμβους u και v , και περιλαμβάνει τον προορισμό β .

Αναφερόμενοι στην εικόνα 2.5, η κορυφή w θα πρέπει να βρίσκεται σε μία από τις περιοχές 1, 2 ή 3. Αλλά αυτό είναι άτοπο, μιας και αν ο w είναι στην περιοχή 1, τότε $\delta\pi(v) = w$, εάν ο w είναι στην περιοχή 2, τότε $\delta\pi(u) = w$ (και $\delta\pi(v) = w$), και αν ο w είναι στην περιοχή 3, τότε $\delta\pi(u) = w$. \square

Καλούμε ένα τέτοιο κύκλο, K , *κύκλο παγίδευσης* (ή *κύκλο αέναου εγκλωβισμού*) [*trapping cycle*] στην T για τον β . Στη συνέχεια, χαρακτηρίζουμε τους παγιδευτικούς κύκλους σε σχέση με μια ιδιότητα ορατότητας [*visibility property*] των τριγωνοποιήσεων. Έστω τ_1 και τ_2 , δύο τρίγωνα στην T . Τότε λέμε ότι το τ_1 επισκιάζει [*obscures*] το τ_2 , εάν υπάρχει ακτίνα (ακμή?) [*ray*] με απαρχή τον κόμβο β που τέμνει (διέρχεται μέσω) [*strikes*] πρώτα το τ_1 και έπειτα το τ_2 . Ας είναι, ακόμη, u και v δύο κορυφές του της T τέτοιες που να ισχύει $\delta\pi(u) = v$. Έπειτα, ορίζουμε Δuv ως το τρίγωνο της T που περιέχεται στο «κλειστό» ημιεπίπεδο [*closed half-plane*] που φράσσεται από το φορέα του ευθύγραμμου τμήματος (u, v) και περιέχει τον προορισμό β . Λαμβάνουμε τον ακόλουθο χρήσιμο χαρακτηρισμό των παγιδευτικών κύκλων.

Λήμμα 4.2: Έστω T , μία τριγωνοποίηση που «νικά» τη δρομολόγηση πυξίδας, και έστω $K = \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{\kappa-1}$ ένας παγιδευτικός κύκλος στην T για την κορυφή – προορισμό β . Τότε το τρίγωνο $\Delta\gamma_i\gamma_{i+1}$ είναι είτε πανομοιότυπο με, είτε επισκιάζει με το τρίγωνο $\Delta\gamma_{i-1}\gamma_i$, για κάθε $0 \leq i < \kappa$. **(Πρόην 2.3)**

Απόδειξη. Αναφερόμαστε στην εικόνα 4.19 που ακολουθεί. Υποθέτουμε ότι τα τρίγωνα $\Delta\gamma_i\gamma_{i+1}$ και $\Delta\gamma_{i-1}\gamma_i$ δεν είναι πανομοιότυπα, διαφορετικά το λήμμα είναι τετριμμένα σωστό. Έστω w η τρίτη κορυφή του τριγώνου $\Delta\gamma_i\gamma_{i+1}$. Τότε η w δε μπορεί να βρίσκεται (κείται) στη γωνία (τμήμα του επιπέδου) [*cone*] που προσδιορίζεται από τους κόμβους β, γ_i και γ_{i+1} , διότι σε μια τέτοια περίπτωση θα είχαμε $\delta\pi(\gamma_i) = w$. Αλλά τότε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τον w και τον γ_{i+1} επισκιάζει τον γ_i και ως εκ τούτου το τρίγωνο $\Delta\gamma_i\gamma_{i+1}$ επισκιάζει το τρίγωνο $\Delta\gamma_{i-1}\gamma_i$. \square



Εικόνα 4.19: Απόδειξη του λήμματος 4.2.

Μία κανονική τριγωνοποίηση [regular triangulation] [68] είναι μια τριγωνοποίηση που προκύπτει [obtained] μέσω ορθογώνιας προβολής [orthogonal projection] των όψεων του [of the lower hull] ενός 3-διάστατου ... [polytone] στο επίπεδο. Σημειώστε ότι η Delaunay τριγωνοποίηση είναι μια ειδική περίπτωση μιας κανονικής τριγωνοποίησης όπου οι κορυφές του ... [polytone] βρίσκονται μέσα σε ένα παραβολοειδές [paraboloid]. Ο Edelsbrunner [21] έδειξε ότι εάν η \mathcal{T} είναι μία κανονική τριγωνοποίηση, τότε η \mathcal{T} δεν έχει κάποιο σύνολο τριγώνων που να επισκιάζουν το ένα το άλλο κυκλικά από οποιαδήποτε οπτική γωνία [viewpoint]. Αυτό το αποτέλεσμα, σε συνδυασμό με το Λήμμα 4.2, αποφέρει [yields] το κύριο αποτέλεσμά μας επί της δρομολόγησης πυξίδας.

Θεώρημα 4.3: Δεν υπάρχει κανονική τριγωνοποίηση [regular triangulation] που να «νικά» τον αλγόριθμο δρομολόγησης πυξίδας. □

Καταλήγουμε με το συμπέρασμα ότι ο αλγόριθμος **Δρομολόγησης Πυξίδας**, παρόλο που δεν μπορεί πάντα να εγγυηθεί την παράδοση ενός μηνύματος στον προορισμό του, δε διεκδικεί δάφνες ως προς την ταχύτητά του, ενώ ακόμη το κόστος του δε μπορεί να φραγεί από το κόστος του βέλτιστου μονοπατιού από τον α στο β , εντούτοις, στην πράξη εμφανίζεται να είναι αρκετά λειτουργικός. Στις περισσότερες περιπτώσεις στην πράξη, δηλαδή σε καταστάσεις όπου έχουμε μια τυχαία κατανομή των κόμβων του δικτύου και όχι μια ιδιάζουσα ή προβληματική τοπολογία, δείχνει τα προτερήματά του και λειτουργεί επαρκώς καλά.

4.2.3 Υβριδική Δρομολόγηση I [Hybrid Routing I]

Έως τώρα, αν και μακριά η λίστα με τους «αμνήμονες» αλγορίθμους που μελετήσαμε ή και απλώς αναφέραμε, καταλήξαμε ότι εγγενώς αδυνατούν να ανταποκριθούν στο βασικό ζητούμενο για έναν γεωμετρικό ad-hoc² αλγόριθμο [geometric ad-hoc algorithm], την εγγύηση παράδοσης του μηνύματος στον προορισμό σε **κάθε** περίπτωση. Παρόλο που στην πράξη, και όχι στο εργαστήριο με τις κατασκευασμένες τοπολογίες, **συνήθως** λειτουργούν συνήθως εξαιρετικά. Το πέτυχαν, όμως όπως είδαμε προηγουμένα, για κάποια συγκεκριμένα ήδη τριγωνοποιήσεων. Σημαντικό βήμα, αλλά όχι το βέλτιστο. Φυσικά στην πορεία οι οποιεσδήποτε αποτυχίες οδηγούσαν στην προσπάθεια εύρεσης λύσεων, παράκαμψης των προβλημάτων που παρουσίαζε η μία ή η άλλη κατηγορία. Με μία από αυτές θα ασχοληθούμε παρακάτω.

Θα περιγράψουμε, στο τμήμα αυτό, έναν αιτιοκρατικό αμνήμων αλγόριθμο δρομολόγησης [deterministic oblivious routing algorithm] που «λειτουργεί» σε κάθε τριγωνοποίηση. Ο αλγόριθμος είναι ένας προσεκτικά σχεδιασμένος συνδυασμός δύο υπαρχόντων αλγορίθμων [7]. Είναι, δηλαδή, μια *υβριδική δρομολόγηση* που προκύπτει από τους παρακάτω αλγορίθμους. Ο **ΑΠΛΗΣΤΟΣ** αλγόριθμος [Greedy algorithm], ο οποίος μετακινεί ένα μήνυμα σε ένα γειτονικό κόμβο που ελαχιστοποιεί την απόσταση προς τον προορισμό β . Ο αλγόριθμος **ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΠΥΞΙΔΑΣ** [Compass Routing], που μετακινεί πάντα ένα μήνυμα σε εκείνο τον κόμβο που να είναι εγγύτερα ως προς την κατεύθυνση [most “inline”] με τον β . Και οι δύο αλγόριθμοι «νικιούνται» από συγκεκριμένους είδους τριγωνοποιήσεις, αλλά ο τρόπος με τον οποίο αυτό συμβαίνει είναι αρκετά διαφορετικός σε κάθε περίπτωση [7]. Συνδυάζοντάς τους, λαμβάνουμε έναν αλγόριθμο που «λειτουργεί» για κάθε τριγωνοποίηση [4].

Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\widehat{\kappa\lambda\mu}$ για να δηλώσουμε τη γωνία που σχηματίζεται από τις κορυφές κ, λ και μ μετρημένα με αριστερόστροφη διεύθυνση, δηλαδή αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Ας είναι $\alpha\phi(\gamma)$ ³ η κορυφή από τη γειτονιά $N(\gamma)$ του κόμβου γ , που ελαχιστοποιεί τη γωνία $\alpha\phi(\gamma), \gamma, \beta$ και ας είναι $\theta\phi(\gamma)$ ⁴ η κορυφή από το σύνολο $N(\gamma)$, που ελαχιστοποιεί τη γωνία $\beta, \gamma, \theta\phi(\gamma)$. Εάν η γ έχει ένα γείτονα δ στο ευθύγραμμο τμήμα (γ, β) , τότε $\theta\phi(\gamma) = \alpha\phi(\gamma) = \delta$. Ειδικότερα, η κορυφή β περιέχεται στη «σφήνα» $\theta\phi(\gamma), \gamma, \alpha\phi(\gamma)$. Αναφερθείτε στην εικόνα 4.20 (από το [4]) για μια καλύτερη απεικόνιση.

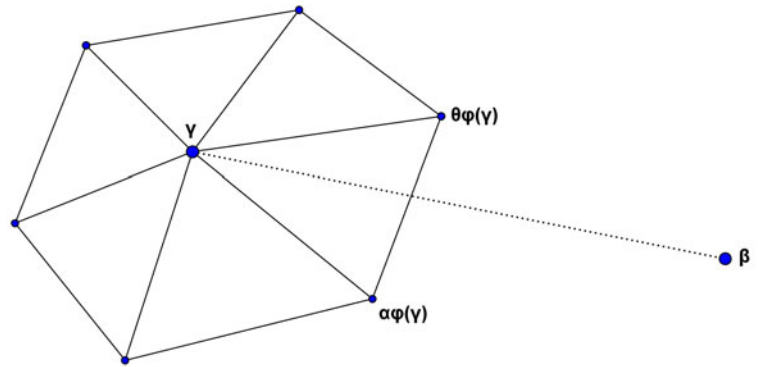
Ο **ΑΠΛΗΣΤΟΣ - ΠΥΞΙΔΑ** [greedy - compass] αλγόριθμος μετακινεί το μήνυμα πάντα σε εκείνη την κορυφή μεταξύ των $\{\theta\phi(\gamma), \alpha\phi(\gamma)\}$ που ελαχιστοποιεί την απόσταση προς τον β . Εάν οι δύο αποστάσεις είναι ίδιες, ή αν $\theta\phi(\gamma) = \alpha\phi(\gamma)$, τότε ο αλγόριθμός μας διαλέγει αυθαίρετα μία από τις $\{\theta\phi(\gamma), \alpha\phi(\gamma)\}$.

² στα ελληνικά μεταφράζεται ως «κατά συνθήκη», και παρόλο που περιγράφει απόλυτα αυτό που δηλώνει και η αντίστοιχη ης αγγλική λέξη, η δεύτερη έχει επικρατήσει παντού.

³ εκ του αρνητική φορά

⁴ εκ του θετική φορά

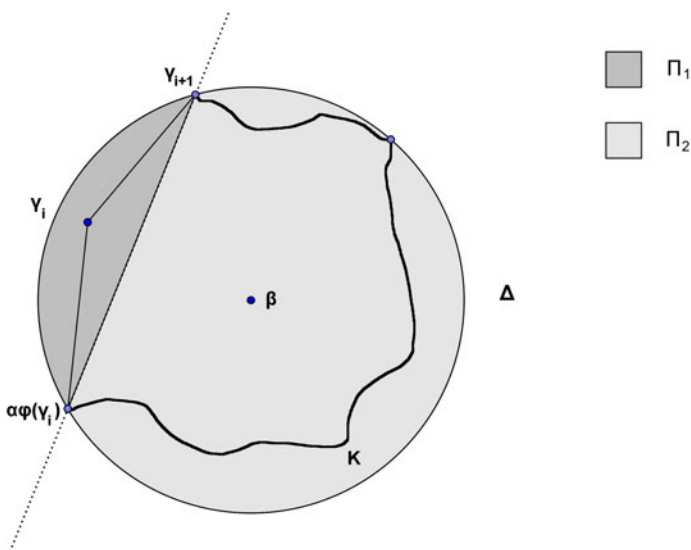
Εικόνα 4.20: Θετική και αρνητική φορά.



Θεώρημα 4.4: Ο αλγόριθμος ΑΠΛΗΣΤΟΣ - ΠΥΞΙΔΑ [GREEDY - COMPASS] «λειτουργεί» για κάθε τριγωνοποίηση.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε, υπό μορφή αντίφασης [by way of contradiction] ότι υπάρχει μια τριγωνοποίηση T και ένα ζευγάρι από κορυφές α και β τέτοιες που ο αλγόριθμος ΑΠΛΗΣΤΟΣ - ΠΥΞΙΔΑ να μην μπορεί να βρει ένα μονοπάτι από την α στη β .

Στην περίπτωση αυτή, βλέπε και την ακόλουθη εικόνα 4.21, πρέπει να υπάρχει ένας κύκλος από κορυφές $K = \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{\kappa-1}$ της T τέτοιος ώστε ο ΑΠΛΗΣΤΟΣ - ΠΥΞΙΔΑ να μετακινείται από την γ_i στην γ_{i+1} για κάθε $0 \leq i \leq \kappa$, δηλ. ο αλγόριθμος ΑΠΛΗΣΤΟΣ - ΠΥΞΙΔΑ παγιδεύεται κινούμενος ανάμεσα στις κορυφές του K (βλέπε επίσης και το Λήμμα 2.2 του [7]). Επιπλέον, προκύπτει από το Λήμμα 2.3 του [7] ότι ο προορισμός β περιέχεται στο εσωτερικό του K .



Εικόνα 4.21: Απόδειξη του Θεωρήματος.

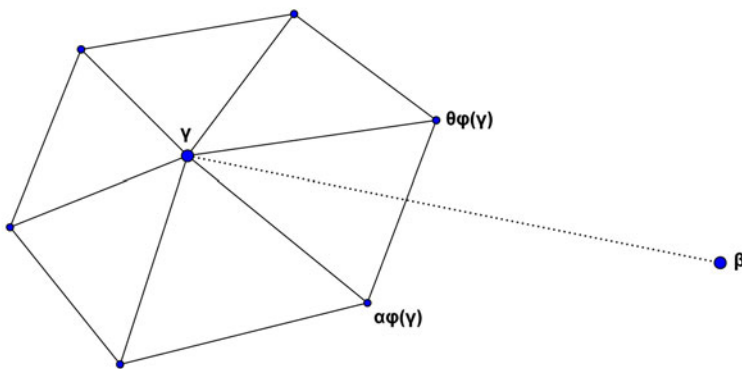
Ισχυρισμός 4.1: Όλες οι κορυφές του \mathbf{K} πρέπει να βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια ενός κυκλικού δίσκου Δ [must lie on the boundary of a disk Δ] με κέντρο το β .

Απόδειξη (του ισχυρισμού). Ας υποθέσουμε, υπό μορφή αντίφασης ότι δεν υπάρχει ένας τέτοιος δίσκος Δ . Τότε ας είναι Δ ο δίσκος με κέντρο το β ο οποίος περιλαμβάνει την πιο απομακρυσμένη κορυφή του \mathbf{K} από το β στην περιφέρειά του. Θεωρήστε μια κορυφή γ_i στο εσωτερικό του Δ τέτοια ώστε η κορυφή γ_{i+1} να βρίσκεται στην περιφέρεια του Δ (Βλέπετε στην Εικ 2). Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας (χ.β.τ.γ.) ότι $\gamma_{i+1} = \theta\phi(\gamma_i)$. Τότε θα πρέπει να ισχύει το εξής: η κορυφή $\alpha\phi(\gamma_i)$ δε βρίσκεται στο εσωτερικό του Δ , αλλιώς ο αλγόριθμος ΑΠΛΗΣΤΟΣ – ΠΥΞΙΔΑ δε θα είχε μετακινηθεί προς την γ_{i+1} . Αλλά τότε η ακμή $(\alpha\phi(\gamma_i), \theta\phi(\gamma_i))$ τέμνει το Δ σε δύο περιοχές, την Π_1 που περιέχει την γ_i και την Π_2 που περιέχει τη β . Εφόσον ο \mathbf{K} διέρχεται μέσα και από τις δύο περιοχές Π_1 και Π_2 και ο ίδιος περιέχεται στο Δ , τότε θα πρέπει ο κύκλος \mathbf{K} να εισέρχεται στην περιοχή Π_1 στην κορυφή $\alpha\phi(\gamma_i)$, ενώ να την εγκαταλείπει στην κορυφή $\gamma_{i+1} = \theta\phi(\gamma_i)$. Εντούτοις, αυτό δε μπορεί να συμβεί καθώς και οι δυο κορυφές $\alpha\phi(\alpha\phi(\gamma_i))$ και $\theta\phi(\alpha\phi(\gamma_i))$ περιέχονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από το φορέα του ευθύγραμμου τμήματος $(\alpha\phi(\gamma_i), \theta\phi(\gamma_i))$ και περιλαμβάνει τη β , και κατά συνέπεια δεν περιέχονται στην Π_1 . □

Κατ' αυτόν τον τρόπο, λοιπόν, έχουμε κατοχυρώσει ότι όλες οι κορυφές του \mathbf{K} βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια του Δ . Παρόλα αυτά, αφού ο \mathbf{K} περιέχει το β στο εσωτερικό του και η τριγωνοποίηση T είναι συνεκτική, θα πρέπει για κάποια κορυφή γ_j του \mathbf{K} , η $\alpha\phi(\gamma_j)$ ή η $\theta\phi(\gamma_j)$ να βρίσκεται στο εσωτερικό του Δ . Ας υποθέσουμε ότι αυτή είναι η $\alpha\phi(\gamma_j)$. Όμως τότε έχουμε μία αντίφαση, αφού ο αλγόριθμος ΑΠΛΗΣΤΟΣ – ΠΥΞΙΔΑ θα πήγαινε στην κορυφή $\alpha\phi(\gamma_j)$ αντί της γ_{j+1} . □

4.2.4 Τυχαιοποιημένη Δρομολόγηση Πυξίδας [Randomized Compass Routing]

Στο σημείο αυτό, μελετούμε έναν τυχαιοποιημένο αλγόριθμο δρομολόγησης [randomized routing algorithm] που δεν τον «νικά» καμία τριγωνοποίηση. Ας είναι $\theta\phi(\gamma)$ η κορυφή από τη γειτονιά $N(\gamma)$ του κόμβου γ , που ελαχιστοποιεί την κατά τη θετική φορά γωνία $\angle\beta, \gamma, \theta\phi(\gamma)$ (δηλ. κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού), ενώ έστω $\alpha\phi(\gamma)$ η κορυφή από το σύνολο $N(\gamma)$, που ελαχιστοποιεί την κατά την αρνητική φορά γωνία $\angle\beta, \gamma, \alpha\phi(\gamma)$ (δηλ. αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού) (βλέπε εικόνα 4.22 (από τα [4], [7])). Τότε ο τυχαιοποιημένος αλγόριθμος δρομολόγησης πυξίδας [randomized compass routing algorithm] μετακινεί το πακέτο (μήνυμα) σε έναν από τους κόμβους $\{\theta\phi(\gamma), \alpha\phi(\gamma)\}$, με ίση πιθανότητα.



Εικόνα 4.22: Ο αλγόριθμος Τυχαιοποιημένης Δρομολόγησης Πυξίδας επιλέγει τυχαία, δηλαδή με ίση πιθανότητα, αν θα κινηθεί στον κόμβο $\theta\phi(\gamma)$ ή στον $\alpha\phi(\gamma)$.

Πριν από τη διατύπωση οποιονδήποτε συμπερασμάτων μας για αυτόν τον αλγόριθμο και την ικανότητά του απέναντι σε διάφορες τοπολογίες δικτύου, θα πρέπει να καθορίσουμε τί ακριβώς σημαίνει για μια τριγωνοποίηση να «νικά» έναν τυχαιοποιημένο αλγόριθμο. Λέμε ότι μία τριγωνοποίηση T «νικά» έναν (τυχαιοποιημένο) αλγόριθμο δρομολόγησης εάν υπάρχει ένα ζευγάρι κορυφών α και β της T τέτοιο ώστε ένα μήνυμα με αφετηρία την α και με προορισμό τη β να έχει **πιθανότητα 0** να φτάσει στη β σε ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

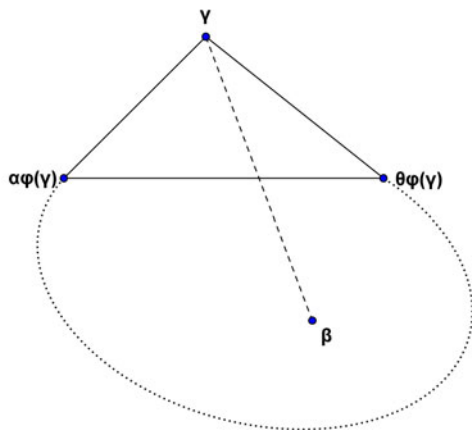
Παρατηρήστε ότι, εφόσον η τυχαιοποιημένη δρομολόγηση πυξίδας είναι «αμνήμων», αποδεικνύοντας ότι μια τριγωνοποίηση T **δε «νικά»** την τυχαιοποιημένη δρομολόγηση, υποδηλώνεται ότι ένα μήνυμα φτάνει στον προορισμό του με πιθανότητα 1. Το ακόλουθο θεώρημα δείχνει την πολλαπλή χρησιμότητα [versatility] της τυχαιοποιημένης δρομολόγησης πυξίδας.

Θεώρημα 4.5: Δεν υπάρχει τριγωνοποίηση [triangulation] που να «νικά» τον αλγόριθμο τυχαιοποιημένης δρομολόγησης πυξίδας [randomized compass routing].

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε, υπό μορφή αντίφασης [by way of contradiction] ότι υπάρχει μια τριγωνοποίηση \mathbf{T} που να «νικά» τον αλγόριθμο τυχαιοποιημένης δρομολόγησης πυξίδας. Τότε, υπάρχει μία κορυφή β της \mathbf{T} και ένα ελαχιστικό σύνολο [minimal set] \mathcal{S} από κορυφές, τέτοιο ώστε:

- (1) $\beta \notin \mathcal{S}$,
- (2) ο υπογράφος \mathcal{H} της \mathbf{T} που προκύπτει από το \mathcal{S} είναι συνεκτικός, και
- (3) για κάθε $\gamma \in \mathcal{S}$, $\theta\phi(\gamma) \in \mathcal{S}$ και $\alpha\phi(\gamma) \in \mathcal{S}$

Προσφύγετε στην εικόνα 4.23 (από το [7]) για ό,τι ακολουθεί. Η κορυφή β βρίσκεται σε κάποια όψη [face] F του \mathcal{H} . Έστω γ μία κορυφή στο σύνορο [boundary] της F τέτοια ώστε το ευθύγραμμο τμήμα (γ, β) να περιέχεται στην F . Μια τέτοια κορυφή είναι βέβαιο ότι υπάρχει [14]. Οι δύο γείτονες του κόμβου γ στο σύνορο της F πρέπει να είναι οι $\theta\phi(\gamma)$, $\alpha\phi(\gamma)$ και αυτοί δεν μπορεί να είναι η ίδια κορυφή (μιας και η F περιέχει την ακμή (γ, β) στο εσωτερικό της). Παρατηρήστε ότι, εξ ορισμού των $\theta\phi(\gamma)$ και $\alpha\phi(\gamma)$, και από το γεγονός ότι η \mathbf{T} είναι μία τριγωνοποίηση, το τρίγωνο $\Delta\theta\phi(\gamma), \gamma, \alpha\phi(\gamma)$ ανήκει στην \mathbf{T} . Αλλά αυτό είναι άτοπο, αφού τότε η κορυφή γ δεν θα βρίσκεται στο σύνορο της \mathbf{T} . □



Εικόνα 4.23: Απόδειξη του Θεωρήματος.

Αργότερα οι Bose κ.ά.[4] απέδειξαν κάτι ακόμα ισχυρότερο.

Θεώρημα 4.6: Δεν υπάρχει κυρτή υποδιαίρεση [convex subdivision] που να «νικά» τον αλγόριθμο τυχαιοποιημένης δρομολόγησης πυξίδας [randomized compass routing].

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε, υπό μορφή αντίφασης [by way of contradiction] ότι υπάρχει μια κυρτή υποδιαίρεση \mathcal{K} με δυο κορυφές α και β τέτοιες που η

πιθανότητα να προσεγγιστεί η β με αφετηρία την α χρησιμοποιώντας αυτόν τον αλγόριθμο να είναι 0. Τότε υπάρχει ένας υπογράφος H της K που περιέχει μεν την α , αλλά όχι τη β , τέτοιος ώστε για όλες τις κορυφές $\gamma \in H$, $\theta\phi(\gamma) \in H$ και $\alpha\phi(\gamma) \in H$.

Η κορυφή β βρίσκεται σε κάποια όψη [face] F του H . Ισχυριζόμαστε ότι αυτή η όψη είναι πρέπει να είναι κυρτή [convex]. Ας υποθέσουμε, χάριν της απόδειξης, το αντίθετο. Τότε υπάρχει μια συμμετρική [reflex] κορυφή γ στο σύνορο [boundary] της F τέτοια ώστε το ευθύγραμμο τμήμα (γ, β) δεν τέμνει καμία ακμή του H . Εντούτοις, αυτό δεν μπορεί να συμβεί, μιας και οι $\theta\phi(\gamma)$ και $\alpha\phi(\gamma)$ βρίσκονται στον H , και έτσι η γ δε θα ήταν συμμετρική [would not be reflex].

Εφόσον η K είναι συνεκτική, θα πρέπει να ισχύει ότι για κάποια κορυφή δ στο σύνορο της F , η $\theta\phi(\delta)$ ή η $\alpha\phi(\delta)$ περιέχεται στο εσωτερικό της F . Αλλά αυτή η κορυφή στο εσωτερικό της F βρίσκεται επίσης και στον H , κάτι που έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι η F είναι μία κυρτή όψη του H . Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι δεν υπάρχει κυρτή υποδιαίρεση που να «νικά» τον αλγόριθμο τυχαιοποιημένης δρομολόγησης πυξίδας. □

4.2.5 Γενικές παρατηρήσεις επί «Αμνημόνων» αλγορίθμων.

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με «αμνήμονες» αλγορίθμους. Βέβαια, όλοι ανεξαιρέτως ανήκουν στη μεγάλη κατηγορία των τοπικών ad-hoc ασύρματων αλγορίθμων [local ad-hoc wireless algorithms]. Είναι αυτοί που ικανοποιούν τα κριτήρια ([38], [40], [39] κ.ά):

- (1) Κάθε κόμβος α του δικτύου γνωρίζει με κάποιον τρόπο⁵ τις (ευκλείδειες) συντεταγμένες του.
- (2) Κάθε κόμβος α γνωρίζει όλους τους γείτονές του στη γειτονιά $N_1(\alpha)$ και τις (ευκλείδειες) συντεταγμένες τους. Σε κάποιες περιπτώσεις η γνώση αυτή πρέπει να επεκταθεί στην λίγο ευρύτερη γειτονιά του $N_k(\alpha)$, για κάποιο σχετικά μικρό k . Τότε είναι που μιλάμε για k -τοπικότητα [k -locality] και k -τοπικούς αλγορίθμους [k -local algorithms].
- (3) Ο αποστολέας του μηνύματος, είτε αυτός είναι ο κόμβος-αφετηρία είτε είναι κάποιος ενδιάμεσος κόμβος στον οποίο έχει καταφτάσει το μήνυμα και καλείται να παίξει το ρόλο του δρομολογητή [router], πρέπει να γνωρίζει τον προορισμό και τις αντίστοιχες συντεταγμένες του.

Σημειώστε ότι οι κόμβοι στους αλγορίθμους αυτούς δεν επιτρέπεται να αποθηκεύουν οτιδήποτε παρά μόνον από τα προσωρινώς παραμένοντα πακέτα-μηνύματα. Όπως, επίσης, δεν μπορούν οι κόμβοι να αλλοιώσουν τις τοπικές πληροφορίες που είναι αποθηκευμένες σε αυτούς. Παρατηρήστε, για παράδειγμα, ότι με την προϋπόθεση αυτή άπαξ και έχουμε εγκαταλείψει έναν κόμβο, εάν κάποια στιγμή επιστρέψουμε σε αυτόν δε θα μπορούμε να το διακρίνουμε.

Οι αλγόριθμοι, λοιπόν, που εμφανίζουν τα παραπάνω χαρακτηριστικά, είναι αυτοί μπορούν να λειτουργήσουν με μόνο αυτές τις προϋποθέσεις και τους ονομάζουμε «αμνήμονες» αλγορίθμους [oblivious algorithms].

Για τον παραπάνω λόγο, αλγόριθμοι που φαινομενικά θα έπρεπε να ανήκουν στην κατηγορία αυτή θέτουν εαυτούς εκτός μελέτης αυτής της εργασίας αλγορίθμων όπως ο **GRA** [Geographic Routing Algorithm] [33]. Ενώ είναι «άπληστος» στην αρχική και κύρια φάση του, όταν «κολλάει» κάνει χρήση αλγορίθμων **BFS** [Breadth First Search] και **DFS** [Depth First Search] για την εύρεση επιτυχούς διαδρομής η οποία όμως πρέπει να αποθηκεύεται.

- (4) Επιπρόσθετα, σε κάποιες περιπτώσεις έχουμε στη διάθεσή μας περιορισμένο χώρο αποθήκευσης, όπου μπορούμε να διατηρήσουμε ένα σταθερό αριθμό αναγνωριστών [identifiers] των κόμβων του δικτύου. Παρατηρήστε ότι αυτό υποδηλώνει ότι **σε καμία χρονική στιγμή δεν έχουμε πλήρη γνώση ολόκληρης της τοπολογίας του δικτύου μας.**

⁵ μέσω κάποιας συσκευής προσδιορισμού θέσης, όπως GPS ή GALILEO, ή μέσω κάποιας υπηρεσίας προσδιορισμού θέσης [location service] (βλέπε για διάφορες κατηγορίες στο [48]).

Η επιπρόσθετη πληροφορία που μπορεί να αποθηκευτεί είναι του εύρους των $O(\log n)$ ψηφίων [bits], δηλαδή πληροφορία για $O(1)$ κόμβους. Αυτό, όμως, μας πηγαίνει σε μια κατηγορία αλγορίθμων, που ναι μεν είναι **τοπικοί ad-hoc ασύρματοι αλγόριθμοι δρομολόγησης**, αλλά δεν είναι «αμνήμονες». Είναι οι **$O(1)$ -μνήμης αλγόριθμοι δρομολόγησης** ή αλλιώς **γεωμετρικοί ad-hoc ασύρματοι αλγόριθμοι δρομολόγησης**, που θα τους μελετήσουμε ξεχωριστά στο επόμενο μέρος.

Θυμίζουμε ότι στους «αμνήμονες» αλγορίθμους έχουμε καταρχάς και καταρχήν όλους τους αλγόριθμους που έχουν ως κινητήριο μοχλό τους κάποια άπληστη αρχή. Βασικός εκπρόσωπος, ο ομώνυμος ΑΠΛΗΣΤΟΣ αλγόριθμος. Κατά δεύτερον μελετήσαμε αυτούς που προωθούνται στο επόμενο βήμα τους βασιζόμενοι στην έννοια της «προόδου» (MFR, NFP κλπ). Εδώ, σε μια δεύτερη υποομάδα, εντάξαμε και αλγορίθμους δρομολόγησης με βάση τη διεύθυνση, όπως ο αλγόριθμος ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΠΥΞΙΔΑΣ [Compass Routing]. Επεκτείναμε την κατηγορία αυτή και σε εκείνους στους οποίους υπεισέρχεται στοιχείο τυχαιότητας [randomization].

Στις περισσότερες περιπτώσεις οι αλγόριθμοι που κατατάξαμε στην πρώτη υποκατηγορία φαίνεται ότι δίνουν το ίδιο μονοπάτι προς τον προορισμό. (βλέπε προσομοίωση στο [59] όπου σε κάποιες έχουμε και 99% ή και παραπάνω ταύτιση.) Διαφέρουν μόνο με τους αντίστοιχους της δεύτερης υποκατηγορίας.

Έχουν παρόμοιο λόγο επιτυχίας [success rate] και εννοούμε το λόγο των επιτυχημένων παραδόσεων ενός μηνύματος προς το συνολικό αριθμό των μηνυμάτων που καλούνται να παραδώσουν. Ενώ, απ' την άλλη, χρησιμοποιώντας για μετρική το «μετρητή βημάτων» [hop count] του αλγορίθμου που κάνει μέχρι τον προορισμό, εμφανίζουν παραπλήσια αποτελέσματα [30].

Όλες οι μέθοδοι, παρόλα αυτά, έχουν υψηλούς λόγους παράδοσης (του μηνύματος στον προορισμό) για πυκνούς γράφους, και χαμηλούς λόγους για αραιούς (περίπου τα μισά μηνύματα σε μέσους όρους βαθμών κόμβων κάτω από 4 δεν παραδίδονται) [30].

Το τελευταίο, σε συνδυασμό με το καταληκτικό θεώρημα του κεφαλαίου που ακολουθεί, είναι και ο σημαντικότερος λόγος για τον οποίο μεταχειριστήκαμε στην πορεία μεθόδους υβριδικές. Με συστατικά αλγορίθμους από αυτήν την κατηγορία και μόνο, έγινε προσπάθεια να συνδυαστούν τα θετικά χαρακτηριστικά εκάστων απ' αυτούς. Παρόλα αυτά, όμως, δεν έχει γίνει κατορθωτός ένας αλγόριθμος που να λειτουργεί σε κάθε κυρτή υποδιαίρεση ενός υφιστάμενου δικτύου.

Το τελευταίο γίνεται εμφανές με το ακόλουθο θεώρημα που συναντάμε στο [4] που κλείνει την κατηγορία αυτή. Είναι, κατά μία έννοια, μια «ταφόπλακα» των ελπίδων που γέννησε η απλότητα και η ευελιξία των περισσότερων από τους αλγορίθμους της κατηγορίας αυτής, ότι αυτοί από μόνοι τους «θα τα καταφέρουν».

Θα δώσουμε πρώτα, όμως, τον ορισμό της κυρτής υποδιαίρεσης.

Ορισμός 4.2: Μια *κυρτή υποδιαίρεση* είναι ένας ενσωματωμένος επίπεδος γράφος τέτοιος ώστε κάθε όψη του γράφου να είναι ένα κυρτό πολύγωνο, εκτός την εξωτερική όψη που είναι συμπλήρωμα ενός κυρτού πολυγώνου.

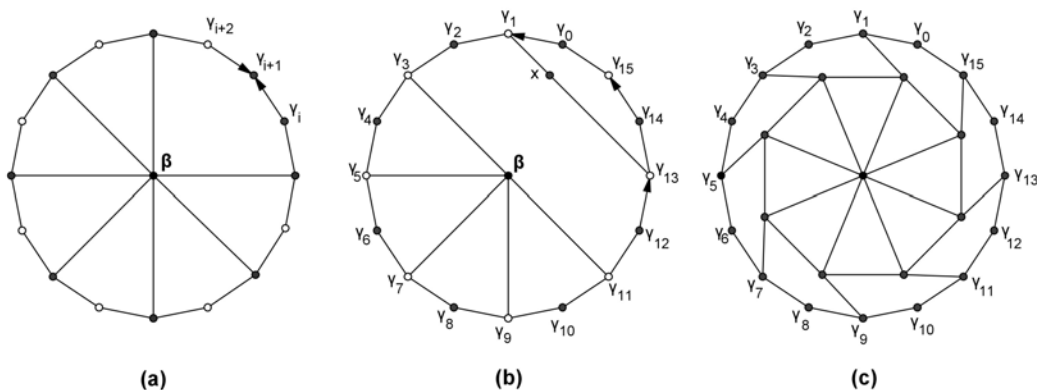
Οι τριγωνοποιήσεις είναι ειδικές περιπτώσεις κυρτών υποδιαίρεσεων όπου η κάθε όψη είναι τρίγωνο. Συνεπώς, είναι φυσιολογικό να κάνουμε τη γενίκευση από τις τριγωνοποιήσεις στις κυρτές υποδιαίρεσεις και να αναρωτηθούμε τί συμβαίνει σ' αυτές.

Θεώρημα 4.7: Κάθε αιτιοκρατικός «αμνήμων» [deterministic oblivious] αλγόριθμος δρομολόγησης πυξίδας «νικιέται» από κάποια κυρτή υποδιαίρεση [convex subdivision].

Απόδειξη. Παρουσιάζουμε μια πεπερασμένη συλλογή από κυρτές υποδιαίρεσεις [convex subdivisions] τέτοιες ώστε κάθε αιτιοκρατικός αμνήμων αλγόριθμος δρομολόγησης [deterministic oblivious routing algorithm] «νικιέται» από τουλάχιστον μία από αυτές.

Υπάρχουν 17 κορυφές που είναι κοινές σε όλες μας τις υποδιαίρεσεις. Η κορυφή - προορισμός β τοποθετείται στην αφετηρία. Οι άλλες 16 κορυφές $V = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{15}\}$ είναι οι κορυφές ενός κανονικού 16-γώνου με κέντρο την αφετηρία και τοποθετημένες κατά την αρνητική φορά, δηλαδή αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού⁶. Σε όλες τις υποδιαίρεσεις μας, οι κορυφές με «άρτια» αρίθμηση $\gamma_0, \gamma_2, \dots, \gamma_{14}$ έχουν βαθμό 2. Οι βαθμοί των άλλων κορυφών ποικίλουν. Όλες οι υποδιαίρεσεις μας περιέχουν τις ακμές του κανονικού 16-γώνου.

Ας υποθέσουμε, υπό μορφή αντίφασης [by way of contradiction] ότι υπάρχει ένας αλγόριθμος δρομολόγησης \mathcal{A} που «λειτουργεί» για κάθε κυρτή υποδιαίρεση. Αφού οι κορυφές που έχουν άρτιο αριθμό έχουν πάντα τους ίδιους δύο γείτονες σε όλες τις υποδιαίρεσεις, ο \mathcal{A} πάντα παίρνει την ίδια απόφαση σε μια συγκεκριμένη άρτια-αριθμημένη κορυφή. Έτσι, έχει νόημα να ρωτήσουμε τι πράττει ο \mathcal{A} όταν επισκέπτεται μια άρτια-αριθμημένη κορυφή, χωρίς να γνωρίζουμε τίποτα άλλο για τη συγκεκριμένη υποδιαίρεση επί της οποίας ο \mathcal{A} πραγματοποιεί μία δρομολόγηση.



Εικόνα 4.24: Απόδειξη του Θεωρήματος.

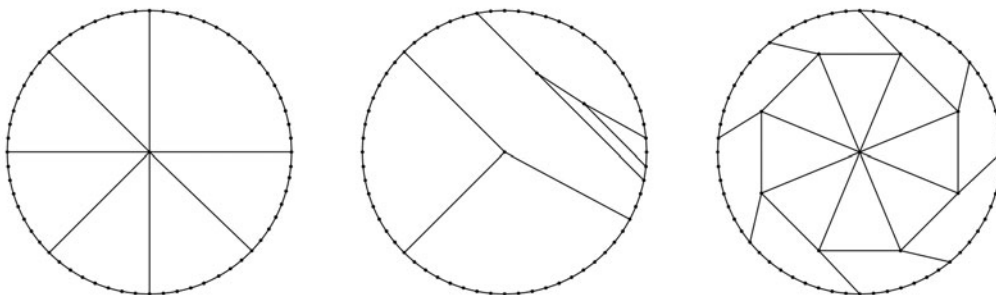
⁶ Για το υπόλοιπο της απόδειξης, όλοι οι δείκτες θα λογίζονται εμμέσως mod 16

Για κάθε κορυφή $\gamma_i \in V$, χρωματίζουμε τη γ_i μαύρη ή άσπρη ανάλογα με τη δράση του \mathcal{A} κατά την έλευσή του σ' αυτήν. Συγκεκριμένα, τη χρωματίζουμε *μαύρη* αν ο \mathcal{A} κινηθεί κατά τη θετική φορά και *άσπρη* αν κινηθεί κατά την αρνητική φορά γύρω από το κανονικό 16-γωνο. Ισχυριζόμαστε ότι όλες οι άρτια-αριθμημένες κορυφές πρέπει να έχουν το ίδιο χρώμα. Εάν όχι, τότε υπάρχουν δύο κορυφές γ_i και γ_{i+2} τέτοιες ώστε η γ_i να είναι μαύρη και η γ_{i+2} άσπρη. Τότε, εάν δεχτούμε ως αφετηρία $\alpha = \gamma_i$ στην κυρτή υποδιαίρεση που παρουσιάζεται στην εικόνα 4.24 (a) (από το [4]), ο αλγόριθμος παγιδεύεται σε μία από τις ακμές (γ_i, γ_{i+1}) ή $(\gamma_{i+1}, \gamma_{i+2})$ και δε φτάνει ποτέ στον προορισμό β , κάτι που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι ο \mathcal{A} «λειτουργεί» σε κάθε κυρτή υποδιαίρεση.

Κατά συνέπεια, ας υποθέσουμε χ.β.τ.γ. ότι όλες οι άρτια-αριθμημένες κορυφές του V είναι μαύρες, και ας θεωρήσουμε την κυρτή υποδιαίρεση της εικόνας 4.24 (b). Απ' αυτήν την εικόνα είναι φανερό ότι, εάν πάρουμε ως αφετηρία $\alpha = \gamma_1$, ο \mathcal{A} δεν μπορεί να επισκεφτεί την \times μετά τη γ_1 , αφού τότε παγιδεύεται μεταξύ των κορυφών $\{\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{14}, \gamma_{15}, \gamma_0, \gamma_1, \times\}$ και δε φτάνει ποτέ στον προορισμό β .

Παρατηρείστε ότι μπορούμε να περιστρέψουμε [rotate] την εικόνα 4.24 (b) κατά ακέραια πολλαπλάσια του $\frac{\pi}{4}$, αφήνοντας τις ετικέτες (αρίθμησης) των κορυφών στη θέση τους, και να επιχειρηματολογήσουμε παρεμφερώς για τις $\gamma_3, \gamma_5, \gamma_7, \gamma_9, \gamma_{11}, \gamma_{13}$ και γ_{15} . Εντούτοις, αυτό υποδηλώνει ότι ο \mathcal{A} «νικιέται» από την κυρτή υποδιαίρεση της εικόνας 4.24 (c) αφού αν ξεκινήσει από οποιαδήποτε κορυφή του κανονικού 16-γώνου, δεν μπαίνει ποτέ στο εσωτερικό του 16-γώνου. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι κανένας αμνήμων [oblivious] αλγόριθμος δρομολόγησης δε «λειτουργεί» για όλες τις κυρτές υποδιαίρεσεις. \square

Σημειώνουμε ότι, παρόλο που η απόδειξή μας χρησιμοποιεί υποδιαίρεσεις στις οποίες κάποιες όψεις δεν είναι απολύτως κυρτές [strictly convex] (π.χ., έχουν κορυφές με εσωτερική γωνία π), είναι εφικτό να τροποποιήσουμε την απόδειξη ώστε να χρησιμοποιούμε μόνο αυστηρώς κυρτές υποδιαίρεσεις, αλλά κάνοντας κάτι τέτοιο οδηγούμαστε σε περισσότερο κατατετμημένα διαγράμματα. Τέτοια διαγράμματα φαίνονται στην εικόνα 4.25 (από το [4]). Αφήνουμε τις λεπτομέρειες στον αναγνώστη που θα επιδείξει ενδιαφέρον.

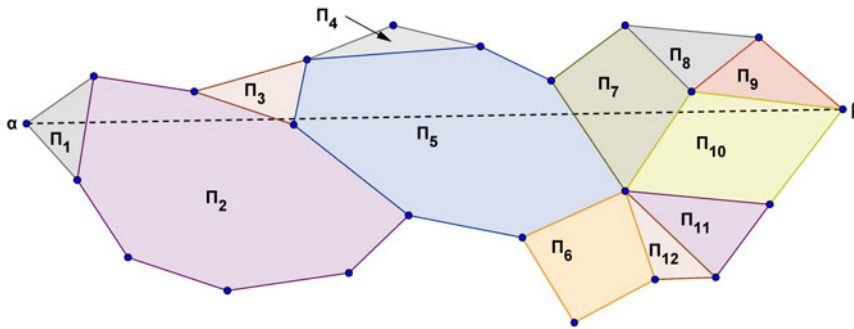


Εικόνα 4.25: Αυστηρά κυρτές υποδιαίρεσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη του Θεωρήματος.

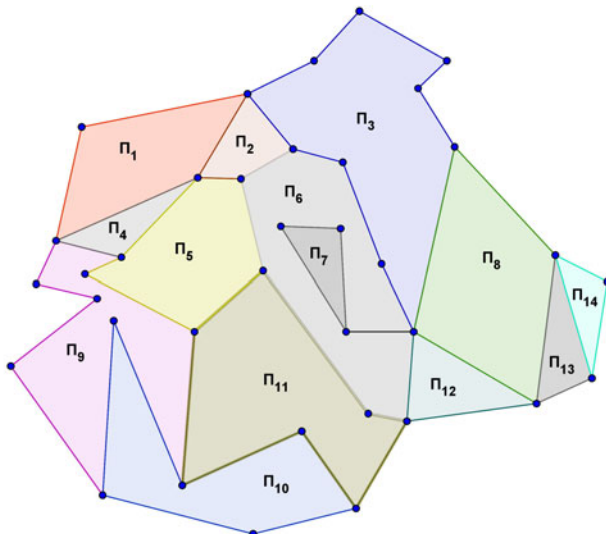
4.3 $O(1)$ -μνήμης Αλγόριθμοι Δρομολόγησης

Αλλαγή κεφαλαίου, αλλαγή και μέρους της φιλοσοφίας των αλγορίθμων. Αφήσαμε τους «αμνήμονες» και περάσαμε στους $O(1)$ -μνήμης Αλγόριθμους Δρομολόγησης. Μιλάμε για αυτούς τους αλγορίθμους όπου, πλέον, έχει επιτραπεί η αποθήκευση κάποιας επιπρόσθετης πληροφορίας. Είναι του εύρους, όπως αναφέραμε λίγο προηγούμενα, των $O(\log n)$ ψηφίων [bits], δηλαδή πληροφορία για $O(1)$ κόμβους. Ας μην ξεχνάμε, όμως, ότι είναι **τοπικοί** [local] και φυσικά παραμένουμε στην μεγάλη οικογένεια των γεωμετρικών ad-hoc ασύρματων αλγορίθμων δρομολόγησης, με ό,τι αυτό συνεπάγεται για τις ιδιότητές τους και τους περιορισμούς που απορρέουν.

Οι Κρανάκης κ.ά. στο [38] εισήγαγαν τον αλγόριθμο Δρομολόγησης Όψης [Face Routing], αρχικά με την ονομασία Δρομολόγηση Πυξίδας II [Compass Routing II], έναν τοπικό αλγόριθμο που βρίσκει ένα μονοπάτι από το α στο β σε επιπεδικό γράφο ο οποίος είναι κυρτά ενσωματωμένος [convexly embedded], δηλ. κάθε όψη του γράφου είναι κυρτή. Βέβαια, στην ίδια εργασία επέκτειναν τον αλγόριθμο ώστε να καλύπτει και γράφους που περιλαμβάνουν και μη κυρτές όψεις. Τις έννοιες των όψεων ενός γράφου, κυρτών και μη κυρτών, μπορούμε να τις κατανοήσουμε καλύτερα αν δούμε τις παρακάτω εικόνες 4.26 (από το [37]) και 4.27 (από το [40]).



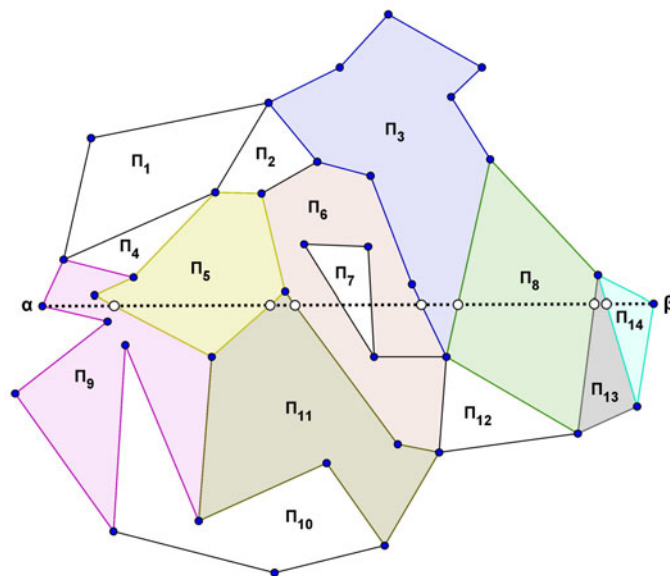
Εικόνα 4.26: Οι όψεις του γράφου, όπως και στην επόμενη εικόνα, είναι χρωματισμένες για να ξεχωρίζουν. Εδώ παρατηρούμε ότι όλες οι όψεις είναι κυρτές. Η λευκή περιοχή είναι η άπειρη εξωτερική όψη.



Εικόνα 4.27: Εδώ έχουμε ένα παράδειγμα μιας μη κυρτής ενσωμάτωσης ενός γράφου στο επίπεδο. Οι όψεις $\Pi_3, \Pi_5, \Pi_6, \Pi_9, \Pi_{10}, \Pi_{11}$ είναι όλες τους μη κυρτές.

Ο αλγόριθμος **Δρομολόγησης Όψης** είναι ένας τοπικός αλγόριθμος πληροφοριών, που εγγυάται ότι το μήνυμα θα φτάνει πάντα στον προορισμό του, κάποια στιγμή. Για την ακρίβεια, είναι ο **πρώτος** που το κατορθώνει αυτό. Προφανώς όλα τα παραπάνω στην περίπτωση που αναφερόμαστε σε έναν συνεκτικό γράφο [connected graph].

Ο αλγόριθμος ξεκινάει από τον α , καθορίζει την όψη πλησίον του α η οποία τέμνεται από το ευθύγραμμο τμήμα $\alpha\beta$. Ακολούθως διασχίζει αυτήν την όψη, σημειώνοντας ποια ακμή (u,v) τέμνεται από το $\alpha\beta$. Όταν έχει ολοκληρωθεί η διάσχιση της όψης, ο αλγόριθμος εναλλάσσει στην όψη που περιέχει την ακμή (u,v) και επαναλαμβάνει τη διαδικασία. Αυτό επαναλαμβάνεται μέχρις ότου φτάσουμε στο β (βλέπε εικόνα 4.28, από το [40]). Μιας και για κάθε όψη που παίρνει μέρος σ' αυτόν τον αλγόριθμο, κάθε ακμή διασχίζεται, το κόστος του αλγορίθμου δεν μπορεί να φραχτεί από βέλτιστο μονοπάτι [optimal path] από το α στο β [52].



Εικόνα 4.28: Ο αλγόριθμος Δρομολόγησης Όψης. Χρωματίζονται μόνο οι όψεις του γράφου που χρησιμοποιούνται κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου. Δηλαδή, οι $\Pi_9, \Pi_5, \Pi_{11}, \Pi_6, \Pi_3, \Pi_8, \Pi_{13}, \Pi_{14}$, κατά σειρά συμμετοχής στη δρομολόγηση. Μπορούμε ακόμα να δούμε με κυκλάκια άσπρα στην εικόνα να παριστάνονται τα σημεία τομής των ακμών του γράφου και του ευθύγραμμου τμήματος $\alpha\beta$.

Πάνω στον αλγόριθμο αυτό στηρίχθηκαν πάρα πολλοί κατοπινοί εξαιτίας αυτής της μοναδικής του ιδιότητας, δημιουργώντας μια κατηγορία από μόνοι τους. Ο πυρήνας των αλγορίθμων αυτών είναι η διάσχιση των όψεων του γράφου που αντιστοιχεί στο δίκτυό μας.

Ας έρθουμε, όμως, και στον αλγόριθμο **Δρομολόγησης Όψης**. Ένα βασικό χαρακτηριστικό του είναι πως **πρέπει απαραίτητως το υφιστάμενο δίκτυο να είναι επιπεδικό** [planar] ούτως ώστε να μπορέσει να λειτουργήσει. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να προηγηθεί ένας αλγόριθμος τοπολογικού ελέγχου [topology control

algorithm] και να μας δώσει μετά από επεξεργασία το δίκτυο με τα χαρακτηριστικά που χρειαζόμαστε. Αυτό, λοιπόν, μπορούμε να το πετύχουμε είτε με τον απλό αλγόριθμο του Gabriel που μας αποφέρει τον Gabriel γράφο GG του δικτύου. Εάν οι απαιτήσεις μας είναι αυξημένες σε ποιότητα και χαρακτηριστικά, μπορούμε να καταλήξουμε στον αλγόριθμο $BPS_2(UDG(V))$ ή απλά $BPS_2(V)$, με τη βοήθεια του οποίου θα έχουμε στα χέρια μας έναν περιορισμένου βαθμού επιπεδικό επικαλυπτή [a bounded degree planar spanner] γράφο.

Ας θυμηθούμε ότι οι κόμβοι και οι ακμές του γράφου $UDG(V)$ διαμερίζουν το ευκλείδειο επίπεδο σε n συνεχόμενες περιοχές (όχι απαραίτητα κυρτές) που καλούνται όψεις του $UDG(V)$. Υπάρχουν $n - 1$ πεπερασμένες και 1 μη πεπερασμένη (άπειρη) γύρω από τον $UDG(V)$, που είναι η εξωτερική όψη.

Η κεντρική ιδέα του αλγόριθμου Δρομολόγησης Όψης είναι να διασχίζουμε κατά μήκος τις όψεις οι οποίες τέμνονται από το ευθύγραμμο τμήμα (α, β) μεταξύ του πομπού του μηνύματος α και του προορισμού β .

Αναλυτικά (βλέπε εικόνα 4.28) ο αλγόριθμος Δρομολόγησης Όψης (αρχικά στο [38]: Δρομολόγηση Πυξίδας II [Compass Routing II]) έχει ως εξής:

Δρομολόγησης Όψης [Face Routing]

1. Ξεκινώντας από τον κόμβο α , έστω $\Pi = \Pi_0$ η όψη που είναι πλησίον του α και η οποία τέμνεται από το ευθύγραμμο τμήμα (α, β) που ενώνει το α με τον προορισμό β .
2. Εξερεύνησε το σύνορο της Π διασχίζοντας τις ακμές της, διαλέγοντας οποιαδήποτε από τις δύο ακμές της Π πλησίον του α . Θυμήσου το σημείο τομής τ του (α, β) με τις ακμές της Π , το οποίο είναι πλησιέστερα στο β . Αφού έχουμε διασχίσει όλες τις ακμές της Π , επιστρέφουμε στο τ . Εάν φτάσαμε στο β καθώς διατρέχαμε το σύνορο της Π , τότε έχουμε τελειώσει.
3. Το σημείο τ χωρίζει το (α, β) σε δύο ευθύγραμμα τμήματα, όπου το (τ, β) είναι αυτό το τμήμα του (α, β) που δεν έχει ακόμα «διασχιστεί». Ανανέωσε την όψη Π ώστε να είναι γειτονική του τ και ταυτόχρονα να τέμνεται από το (τ, β) , στην άμεση περιοχή του τ .
4. Πήγαινε στο βήμα 2.

Στη θεμελιώδη αυτή εργασία [38] (αλλά και με τροποποιήσεις προερχόμενες από το [40]), εκτός από τον αλγόριθμο, βρίσκουμε και την απαραίτητη θεμελίωση των ισχυρισμών που γίνονται.

Θεώρημα 4.8: Ο αλγόριθμος Δρομολόγησης Όψης [Face Routing] εγγυάται ότι θα καταλήγει πάντα στον προορισμό όταν εφαρμόζεται πάνω σε συνεκτικού γεωμετρικό γράφο.

Απόδειξη: Από τις επιλογές των όψεων στα βήματα 1 & 3, αντίστοιχα, βλέπουμε ότι στο βήμα 2 πάντα βρίσκουμε ένα σημείο τ που να είναι κοντύτερα του β απ' ότι το προηγούμενο τ , απ' το οποίο ξεκινάμε τη διαδρομή γύρω από την όψη Π . Έτσι ερχόμαστε πιο κοντά στο β σε κάθε επανάληψη (του αλγορίθμου). Και μια και υπάρχει μόνο πεπερασμένο πλήθος από τομές στο ευθύγραμμο τμήμα (α, β) και τις ακμές του $UDG(V)$, φτάνουμε στο β σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων. \square

Επιπλέον, στις [38] και [40] βρίσκουμε μελέτη του κόστους του αλγορίθμου αυτού, που φαίνεται ότι είναι γραμμικό σε σχέση με τον αριθμό των ακμών.

Θεώρημα 4.9: Το κόστος του αλγορίθμου Δρομολόγησης Όψης [Face Routing] είναι στη χειρότερη περίπτωση $\mathcal{O}(n)$, δηλαδή τερματίζει διασχίζοντας το πολύ $\mathcal{O}(n)$ ακμές, όπου n το συνολικό πλήθος των κόμβων του $UDG(V)$.

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι διαλέγοντας το τ ως την τομή (α, β) και του «συνόρου της όψης» που βρίσκεται πιο κοντά στο β , δε θα διασχίσουμε ποτέ την ίδια όψη για δεύτερη φορά.

Έπειτα, διαμερίζουμε τις ακμές E σε 2 υποσύνολα E_1 & E_2 , όπου το E_1 είναι οι ακμές που γειτνιάζουν σε μία μόνο όψη (η ίδια όψη βρίσκεται και στις δυο πλευρές της ακμής), ενώ το E_2 είναι οι ακμές που ακουμπάνε σε δύο όψεις (η ακμή κείται ανάμεσα σε δύο διαφορετικές όψεις).

Κατά τη διάρκεια της εξερεύνησης μιας όψης Π στο βήμα 2, μια ακμή του E_2 διασχίζεται το πολύ 2 φορές, ενώ μία αντίστοιχη του E_1 το πολύ 4 φορές. Μιας και οι ακμές του E_1 εμφανίζονται σε μία μόνο όψη και οι αντίστοιχες του E_2 σε δύο, όλες οι ακμές του E διασχίζονται συνολικά το πολύ 4 φορές κατά τη διάρκεια ολόκληρου του αλγορίθμου.

Κάθε όψη σε ένα επιπεδικό συνεκτικό γράφο [planar connected graph] (με 4 τουλάχιστον κόμβους) έχει το λιγότερο 3 ακμές στο σύνολό της. Αυτό, μαζί με τον τύπο του Euler για τα πολύεδρα ($n - m + f = 2$), οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο αριθμός των ακμών m φράσσεται από $m \leq 3n - 6$, το οποίο αποδεικνύει το θεώρημα. \square

Ο αλγόριθμος Δρομολόγηση Όψης είναι αυτό που χρειαζόμασταν. Είναι ένας απλός και εύκολα κατανοητός αλγόριθμος που κατάφερε να εγγυηθεί ότι κάθε μήνυμα που θα ταξιδέψει στο δίκτυό μας εν τέλει, μετά από κάποιο χρόνο, θα φτάσει στον προορισμό του. Και μόλις είδαμε ότι αυτό θα επιτευχθεί όταν ο αλγόριθμός μας διασχίσει $\mathcal{O}(n)$ το πολύ ακμές.

Δυστυχώς, όμως, δεν έχουμε καμία ένδειξη για το μήκος της Ευκλείδειας απόστασης που διασχίζει το μήνυμα με την υλοποίηση του αλγορίθμου Δρομολόγηση Όψης. Το $\mathcal{O}(n)$ δεν είναι ικανοποιητικό, μιας και ένας απλός

«αλγόριθμος πλημμυρίσματος» [flooding algorithm] θα τερματίσει σε $O(n)$ βήματα (έχοντας φτάσει και στον προορισμό προφανώς).

Χρειαζόμαστε έναν ανταγωνιστικό λόγο [ratio] της διαδρομής που έχει βρεθεί από τον αλγόριθμο ως προς τη βέλτιστη δυνατή διαδρομή [best possible route]. Είναι επιθυμητό, δηλαδή, να έχουμε έναν αλγόριθμο με κόστος που να εξαρτάται από την απόσταση μεταξύ της πηγής α και του προορισμού β του μηνύματος. Ακόμα πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να πούμε ότι **αναζητούμε έναν αλγόριθμο που το μονοπάτι που προκύπτει με την εκτέλεσή του, να φράσσεται**, ως προς την ευκλείδεια απόσταση, **από το μήκος του βέλτιστου μονοπατιού** [optimal path] **μεταξύ πηγής α και προορισμού β στο γράφο $UDG(V)$.**

Επιπλέον, η πρακτική εφαρμογή του αποκάλυψε ότι δεν είναι και τόσο εύκολα υλοποιήσιμος λόγω της φύσης του. Η αναγκαστική διάσχιση της κάθε επιλεγμένης όψης τον καθιστούν μη πρακτικό, μη εύχρηστο.

4.4 Υβριδική Δρομολόγηση II [Hybrid Routing II]

Μελετώντας τις δύο προηγούμενες κύριες κατηγορίες αλγορίθμων δρομολόγησης, «αμνήμονες» και $O(1)$ -μνήμης (ή αλλιώς γεωμετρική), παρατηρήσαμε εκ διαμέτρου αντίθετες φιλοσοφίες υλοποίησης και κατά συνέπεια χαρακτηριστικά και ιδιότητες.

Είδαμε, από τη μία μεριά, τους «**Άπληστους**» αλγόριθμους¹ [Greedy algorithms] να είναι οι πλέον λογικοί, απλοί και να είναι εξαιρετικά γρήγοροι, αλλά είτε να μην μπορούν να εγγυηθούν ότι θα παραδώσουν ένα μήνυμα στον προορισμό του σε κάθε περίπτωση ή, ακόμη χειρότερα, να εγκλωβίζονται σε κάποια κυκλική διαδρομή χωρίς διέξοδο [loop].

Από την άλλη, είχαμε τον αλγόριθμο **Δρομολόγησης Όψης** [Face routing] [38]. Εδώ δε θαυμάσαμε την ταχύτητά τους, αλλά το εξαιρετικό και, τις περισσότερες φορές απαιτούμενο, χαρακτηριστικό τους να μπορούν σε κάθε στιγμιότυπο του αλγορίθμου να είναι επιτυχείς.

Είναι απόλυτα λογικό, λοιπόν σ' αυτό το σημείο κάποιος, αντιπαραβάλλοντας τα θετικά και τα αρνητικά χαρακτηριστικά των παραπάνω αλγορίθμων, να αναρωτηθεί αν **είναι εφικτός ένας συνδυασμός τους**. Μπορούμε, δηλαδή, να έχουμε την ταχύτητα ενός «Άπληστου» αλγορίθμου με την αξιοπιστία του αλγορίθμου Δρομολόγησης Όψης; Έχει νόημα, δηλαδή, κάτι τέτοιο στην πράξη?

Τέτοιες σκέψεις οδήγησαν στην υιοθέτηση **Υβριδικών αλγορίθμων** [Hybrid routing], αλγορίθμων που αποτελούν συνδυασμό άλλων.

Βασική ιδέα :

1. Το κυρίως μέρος του αλγορίθμου λειτουργεί με «**άπληστο**» τρόπο [*greedy method*]. Σε κάθε βήμα, λοιπόν, αναζητά τον «**καλύτερο**», ανάλογα με τον αλγόριθμο που χρησιμοποιείται, γείτονα για να προωθήσει το μήνυμα.

Η στρατηγική αυτή υιοθετείται με στόχο ο αλγόριθμός μας να επιτυγχάνει μικρούς χρόνους υλοποίησης, αλλά όπως έχουμε ήδη αποδείξει και τονίζει πολλάκις σε προηγούμενο σημείο αυτής της εργασίας, δεν μπορεί επιτύχει την αποστολή της πάντοτε. Είναι οι περιπτώσεις όπου ο αλγόριθμος συναντά κάποιο τοπικό ελάχιστο [local minimum] ή παγιδεύεται σε ατέρμων κυκλική πορεία.

2. Στο σημείο αυτό λοιπόν (όπου π.χ. ο αλγόριθμος αδυνατεί να βρει κάποιον «καλύτερο» κόμβο από τον εαυτό του), *ενεργοποιούμε έναν εφεδρικό αλγόριθμο* που θα καταφέρει να εγγυηθεί ότι υπάρχει επόμενος «καλύτερος» κόμβος ή να μας βγάλει από κάποιο σημείο ενός ατέρμων κύκλου. Ένας τέτοιος είναι ο αλγόριθμος **Δρομολόγησης Όψης**. Χρησιμοποιείται, δηλαδή, ως «υπορουτίνα ξεμπλοκαρίσματος».
3. Άπαξ και καταφέρουμε να βγούμε από τη δύσκολη θέση μας, τότε ο αλγόριθμος επιστρέφει στην «**άπληστη**» **φάση** του ξανά, μέχρις ότου «ξανακολλήσει» ή τερματίσει επιτυχώς..

¹ αφού κατά μία έννοια όλοι οι αλγόριθμοι που εντάξαμε στην κατηγορία των «αμνήμωνων» βασίζονται σε μια εκδοχή της άπληστης επιλογής του επόμενου κόμβου.

Εξαιτίας της παραπάνω χρήσης τους, στις περιπτώσεις αυτές αλγόριθμοι όπως ο ομώνυμος της **Δρομολόγησης Όψης**, ονομάζονται και «**Εφεδρικοί**» [back-up algorithms], ή **συστήματα «ραχοκοκαλιάς**» [backbone systems]. Αυτοί είναι που ξελασπώνουν, ερχόμενοι από την «εφεδρεία», τον υβριδικό αλγόριθμο όποτε «κολλάει» αποτελώντας έτσι τη «ραχοκοκαλιά» του.

Κάποιοι από αυτούς τους αλγόριθμους που έχουν εμφανιστεί στη βιβλιογραφία και έχουν κερδίσει κάποια προσοχή είναι: ο **Greedy-Face**, ο **Greedy-Face-Greedy** [8], μία βελτίωση του Greedy-Face-Greedy έχουμε στο [18] μέσω εφαρμογής της έννοιας των επικυρίαρχων συνόλων [dominating sets] και με προσθήκη μιας διαδικασίας συντόμευσης 2-βημάτων [a shortcut 2-hop procedure], ο **GPSR** [34], που συμπεριλαμβάνει και γρήγορη επιστροφή [early fallback], και άλλοι πολλοί φυσικά.

Ας συγκεντρώσουμε λίγο κάποιες παρατηρήσεις και συμπεράσματα που μπορούμε να βγάλουμε για τη βασική κατηγορία των αλγορίθμων που αφορά αυτή η εργασία, τους γεωμετρικούς, είτε πρόκειται για αμιγείς (π.χ. ο **Δρομολόγησης Όψης**) είτε για υβριδικούς που έχουν ως δομικό συστατικό τους και κάποιον άλλο αλγόριθμο, όπως έναν «άπληστο».

Και άλλοι γεωμετρικοί αλγόριθμοι (κάποιοι από τους οποίους μερικώς μη αιτιοκρατικοί) προτάθηκαν που εγγυώνται ότι βρίσκουν (πάντα) τον προορισμό [8, 18], εν μέρει σε ειδικούς επιπεδικούς γράφους, όπως τριγωνοποιήσεις [triangulations] ή κυρτές υποδιαίρεσεις [convex subdivisions] [4]. Παρόλα αυτά, κανένας απ' αυτούς τους αλγόριθμους δε μπόρεσε να παρουσιάσει κάποια σημαντική βελτίωση σε σχέση με τον αυθεντικό **Δρομολόγηση Όψης [Face Routing]**.

Έχει αποδειχθεί ότι το **συντομότερο μονοπάτι** μεταξύ δύο κόμβων σε μία Delaunay τριγωνοποίηση είναι μόνο κατά ένα μικρό σταθερό παράγοντα μακρύτερο από τη μεταξύ τους απόσταση [20]. Έχει δειχθεί ακόμη και ότι *όντως υπάρχει αλγόριθμος που να είναι ανταγωνιστικός για τις Delaunay τριγωνοποιήσεις* [7]. Εντούτοις, οι Delaunay τριγωνοποιήσεις μπορεί να περιέχουν αυθαίρετα μακριές ακμές, αποκλείοντας τη χρησιμοποίησή τους για πρακτικούς λόγους, μιας και οι κόμβοι του δικτύου μπορούν να επικοινωνούν εντός μιας περιορισμένης ακτίνας εκπομπής. Συνεπώς, προτάθηκαν τοπικές προσεγγίσεις του Delaunay γράφου [28], μη παρέχοντας όμως κάποιο καλύτερο όριο για την απόδοση των αλγορίθμων δρομολόγησης. Μια πιο λεπτομερής γενική επισκόπηση μπορεί να βρεθεί στο [63].

Απ' ό,τι γνωρίζουμε, ο πρώτος αλγόριθμος που είναι ανταγωνιστικός με το συντομότερο μονοπάτι μεταξύ της αφετηρίας και του προορισμού ήταν ο **AFR** [40]. Βασικά εμπλουτίζει τον **Δρομολόγηση Όψης** κατά την έννοια μιας έλλειψης [bounding ellipse] που περιορίζει την ερευνώμενη περιοχή [restricting the researchable area]. Με ένα παράδειγμα για το κάτω φράγμα [lower bound] αποδείχθηκε ότι είναι και **ασυμπτωτικά βέλτιστος** [asymptotically optimal]. Θα περιγράψουμε τον **AFR** με περισσότερες λεπτομέρειες αργότερα στην εργασία μας.

Παρά το γεγονός, όμως, ότι είναι ασυμπτωτικά βέλτιστος, ο **AFR** δεν είναι εφαρμόσιμος στην πράξη εξαιτίας του ότι είναι καθαρά αλγόριθμος δρομολόγησης όψης. Για πρακτικούς λόγους υπήρξαν πρότερα απόπειρες συνδυασμού των «άπληστων» προσεγγίσεων και της δρομολόγησης όψης [8, 18, 34]. Καμία απ' αυτές, όμως, δεν είναι στη χειρότερη-περίπτωση [worst-case] ανταγωνιστική με το συντομότερο μονοπάτι. Οι αποτιμήσεις απόδοσης [performance assessments] έλαβαν χώρα μέσω προσομοίωσης.

Θα παρουσιάσουμε τελικά εκείνον τον αλγόριθμο που θεωρείται, εξ όσων γνωρίζουμε, ο καλύτερος με όρους απόδοσης αλγόριθμος που συνδυάζει μία άπληστη φύση με τμήματα που λειτουργούν βασισμένα στη δρομολόγηση όψης. Πρόκειται για το γεωμετρικό αλγόριθμο **GOAFR+** (προφέρεται «γκόφερ πλας») [39]. Χρησιμοποιεί τη βασική ιδέα των υβριδικών αλγορίθμων που περιγράψαμε λίγο προηγούμενα. Ο **GOAFR+** χρησιμοποιεί μια τεχνική «γρήγορης επιστροφής» [fall back technique] για να επιστρέψει στην άπληστη δρομολόγηση όσο το δυνατόν γρηγορότερα.

Οι προσομοιώσεις των **Kuhn κ.ά.** στο [39] δείχνουν ότι – επιπρόσθετα από τον περιορισμό της έρευνας σε μια προσαρμοσμένη επανακαθορισμένου μεγέθους περιοχή [adaptively resized area] – ο αλγόριθμος είναι ακόμα πιο αποδοτικός απ' ό,τι παρόμοιοι αλγόριθμοι που έχουν αναλυθεί προηγούμενα πάνω σε μέσους (τυχαίους γράφους [average (random) graphs]). Από την άλλη μεριά η θεωρητική τους ανάλυση αποδεικνύει ότι ο **GOAFR+** είναι ασυμπτωτικά βέλτιστος στη χειρότερη-περίπτωση [worst-case].

4.4.1 Φραγμένη Δρομολόγηση Όψης BFR [Bounded Face Routing (BFR)]

Ας πάρουμε, όμως, τα πράγματα από την αρχή. Το κυριότερο πρόβλημα όσον αφορά την απόδοση του (αλγορίθμου) **Δρομολόγηση Όψης** έγκειται στην αναγκαιότητα της εξερεύνησης *ολόκληρου* του συνόρου των όψεων. Είναι έτσι αδύνατον να φράξουμε το κόστος του αλγορίθμου από το κόστος του ενός βέλτιστου μονοπατιού από το α στο β . Εάν, παρόλα αυτά, γνωρίζουμε εξ αρχής το μήκος ενός βέλτιστου μονοπατιού που συνδέει την αφετηρία με τον προορισμό, ο **Δρομολόγηση Όψης** μπορεί να επεκταθεί στον **Φραγμένη Δρομολόγηση Όψης BFR** [Bounded Face Routing BFR].

Με τον **BFR** γίνεται μία προσπάθεια να περιοριστεί ο αριθμός των ακμών κάθε όψης που πρέπει να διασχιστούν. Αυτό γίνεται απεικονίζοντας μία έλλειψη που περιλαμβάνει ένα πλήρες βέλτιστο μονοπάτι [a complete optimal path].

Ας υποθέσουμε, σε πρώτο βήμα, ότι ένα άνω φράγμα $c(p^*)_{\max}$ επί το (Ευκλείδειο) μήκος $c(p^*)$ ενός βέλτιστου μονοπατιού p^* από το α στο β επί του γράφου Γ είναι γνωστό από την αρχή. Έστω, στη συνέχεια, \mathcal{E} η έλλειψη που αποτελεί το γεωμετρικό τόπο όλων των σημείων των οποίων το άθροισμα των αποστάσεών τους από τα σημεία α και β είναι σταθερό και ίσο με $c(p^*)_{\max}$, δηλαδή \mathcal{E} είναι η έλλειψη με εστίες τα α και β . Εξ ορισμού της \mathcal{E} , το συντομότερο μονοπάτι (στο ευκλείδειο επίπεδο \mathbb{R}^2) από το α στο β δια μέσου ενός σημείου εκτός της \mathcal{E} είναι μακρύτερο από p^* . Κατά συνέπεια, κάθε βέλτιστο μονοπάτι από το α στο β βρίσκεται εξολοκλήρου μέσα στην \mathcal{E} .

Αλλάζουμε το βήμα 2 του **Δρομολόγηση Όψης** ούτως ώστε πάντα να παραμένουμε εντός της \mathcal{E} .

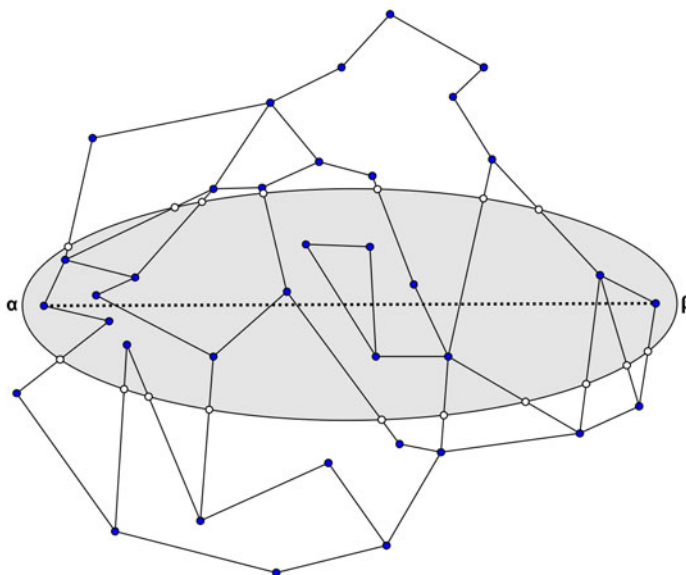
Φραγμένη Δρομολόγηση Όψης BFR

1. Ξεκινώντας από τον κόμβο α , έστω $\Pi = \Pi_0$ η όψη που είναι πλησίον του α και η οποία τέμνεται από το ευθύγραμμο τμήμα (α, β) που ενώνει το α με τον προορισμό β .
2. Όπως και πριν, εξερευνούμε την όψη Π και θυμόμαστε το καλύτερο σημείο τομής τ μεταξύ του (α, β) και των ακμών της Π . Ξεκινάμε την εξερεύνηση της Π όπως και στον **Δρομολόγηση Όψης** αρχίζοντας να κινούμαστε σε οποιαδήποτε από τις δύο δυνατές κατευθύνσεις. Συνεχίζουμε μέχρις ότου περιδιαβούμε ολόκληρη την όψη Π όπως και στον κανονικό αλγόριθμο **Δρομολόγηση Όψης** ή μέχρις ότου τμήσουμε (περάσουμε) το σύνορο της \mathcal{E} . Στη δεύτερη περίπτωση, γυρνάμε πίσω μέχρις ότου ξαναφτάσουμε στο σύνορο της \mathcal{E} . Έπειτα, σε κάθε περίπτωση, επιστρέφουμε στο τ . Εάν η εξερεύνηση της Π δεν καταλήξει σε κάποιο καλύτερο τ , δηλ. εάν το τ έχει την ίδια τιμή με την προηγούμενη επανάληψη, ο **BFR** δε βρίσκει μια διαδρομή προς το β και

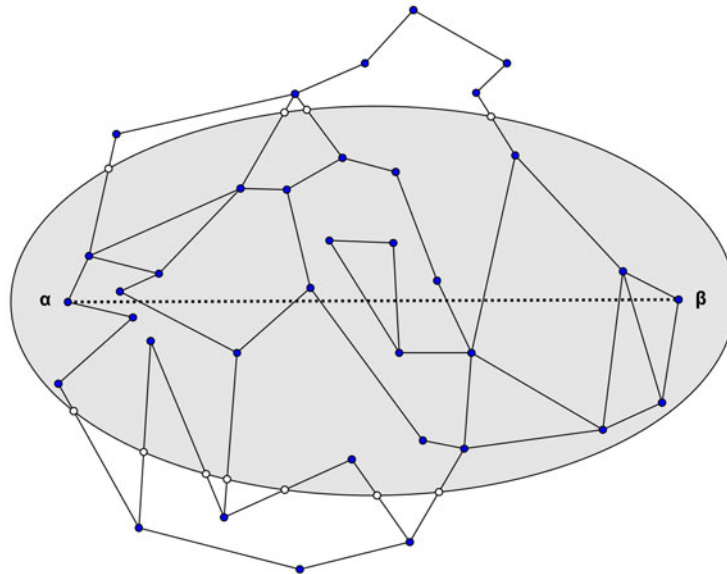
τότε επανεκινούμε τον αλγόριθμο **BFR** για να βρούμε μια διαδρομή από το τ πίσω στην αφετηρία α . Διαφορετικά συνεχίζουμε με το βήμα 3.

3. Το σημείο τ χωρίζει το (α, β) σε δύο ευθύγραμμα τμήματα, όπου το (τ, β) είναι αυτό το τμήμα του (α, β) που δεν έχει ακόμα «διασχιστεί». Ανανέωσε την όψη Π ώστε να είναι γειτονική του τ και ταυτόχρονα να τέμνεται από το (τ, β) , στην άμεση περιοχή του τ .
4. Πήγαινε στο βήμα 2.

Στην εικόνα 4.29 (από το [40]) παρακάτω, μπορούμε να παρατηρήσουμε ένα παράδειγμα όπου το άνω φράγμα $c(p^*)_{\max}$ του μήκους $c(p^*)$ ενός βέλτιστου μονοπατιού p^* έχει επιλεγεί ιδιαίτερα μικρό και κατά συνέπεια ο αλγόριθμος τερματίζει ανεπιτυχώς. Αντίθετα, στην επόμενη εικόνα 4.30 διακρίνουμε μία επιτυχή εκτέλεση του αλγορίθμου **Φραγμένη Δρομολόγηση Όψης BFR**.



Εικόνα 4.29: Φραγμένη Δρομολόγηση Πυξίδας. Δεν υπάρχει επιτυχία: το $c(p^*)_{\max}$ έχει επιλεγεί πολύ μικρό.



Εικόνα 4.30: Επιτυχής Φραγμένη Δρομολόγηση Πυξίδας.

Μιας και ο **BFR** δε διασχίζει μία ακμή περισσότερες από έναν σταθερό αριθμό φορές, και αφού ο αριθμός των ακμών σε μία έλλειψη φράσσεται από το $\mathcal{O}(|\alpha\beta|^2)^2$, το κόστος του **BFR** είναι της τάξης του $\mathcal{O}(c^2(p^*))$, όπου p^* είναι το βέλτιστο μονοπάτι από το α στο β [41] (και πιο αναλυτικά στο [40]. Με άλλα λόγια, ο **BFR** θα κάνει το πολύ $\mathcal{O}(c^2(p^*))$ βήματα μέχρις ότου φτάσει στον προορισμό.

² συνυπολογίζοντας το $\Omega(1)$ — μοντέλο καθώς και την επιπεδικότητα του γράφου.

4.4.2 Προσαρμόσιμη Δρομολόγηση Όψης AFR [Adaptive Face Routing (AFR)]

Το πρόβλημα με τον αλγόριθμο **Φραγμένη Δρομολόγηση Όψης (BFR)** είναι ότι συνήθως κανένα άνω φράγμα πάνω στο μήκος της βέλτιστης διαδρομής δε μας είναι γνωστό. Η λύση στο πρόβλημα αυτό τελικά οδηγεί στον αλγόριθμο **Προσαρμόσιμη Δρομολόγηση Όψης (AFR)**.

Ξεκινάμε καθορίζοντας μια προσεγγιστική τιμή $\widetilde{c(p^*)_{\max}}$ του -άγνωστου σε εμάς- μήκους $c(p^*)$ του βέλτιστου μονοπατιού p^* , π.χ. $\widetilde{c(p^*)_{\max}} = 2 \cdot |\alpha\beta|$. Ο αλγόριθμος **AFR** τότε εκτελεί τον **Φραγμένη Δρομολόγηση Όψης** (ως υπορουτίνα) με εκθετικά αυξανόμενο $\widetilde{c(p^*)_{\max}}$, μέχρις ότου κάποια στιγμή να προσεγγιστεί ο προορισμός β .

Προσαρμόσιμη Δρομολόγηση Όψης AFR

1. Εκτέλεσε τον **BFR** $\left[\widetilde{c(p^*)_{\max}}\right]^3$
2. Εάν η εκτέλεση του **BFR** του βήματος 1 επιτύχει, έχουμε τελειώσει. Διαφορετικά, διπλασιάζουμε την προσέγγιση $\widetilde{c(p^*)_{\max}}$ που κάναμε για μήκος της βέλτιστης διαδρομής ($\widetilde{c(p^*)_{\max}} := 2 \cdot \widetilde{c(p^*)_{\max}}$) και επιστρέφουμε στο **βήμα 1**⁴.

Παρατηρήστε ότι σε κάθε στιγμιότυπο μιας έλλειψης⁵ εκτελείται ο **BFR** (βλέπε εικόνες 4.29 και 4.30 από το προηγούμενο κεφάλαιο). Κατά συνέπεια, εάν τα α και β είναι συνδεδεμένα με κάποιο τρόπο, ο **AFR** θα ανακαλύψει εν τέλει ένα μονοπάτι από το α στο β .

Η επανάληψη αυτή (των φάσεων του αλγορίθμου) επισκιάζεται ασυμπτωτικά [asymptotically dominated] από το κόστος των βημάτων του αλγορίθμου που εκτελούνται στην τελευταία έλλειψη, εκεί όπου το μονοπάτι από το α στο β τελικά εγκαθίσταται, η περιοχή της οποίας αναλογεί κατά το περισσότερο στο τετράγωνο του κόστους του βέλτιστου μονοπατιού. Κατά συνέπεια, το κόστος⁶ του **AFR** φράσσεται επίσης από το $\mathcal{O}(c^2(p^*))$ [40, 41].

Αυτό που βλέπουμε περαιτέρω στο [40], είναι ότι ένας **γράφος κάτω φράγματος** [lower bound graph] (βλέπε εικ 8 στο [40]) αποδεικνύει πως κανένας τοπικός γεωμετρικός αλγόριθμος δρομολόγησης [no local geometric routing algorithm] που εφαρμόζεται σε ένα γράφο μοναδιαίου δίσκου **UDG** δεν μπορεί να εκτελεστεί καλύτερα [can perform better] (από το $\mathcal{O}(c^2(p^*))$). Άρα,

“Ο **AFR** είναι ασυμπτωτικά βέλτιστος”

³ εννοούμε την εκτέλεση του αλγορίθμου **BFR** με το σταθερό άθροισμα της έλλειψης να είναι $\widetilde{c(p^*)_{\max}}$.

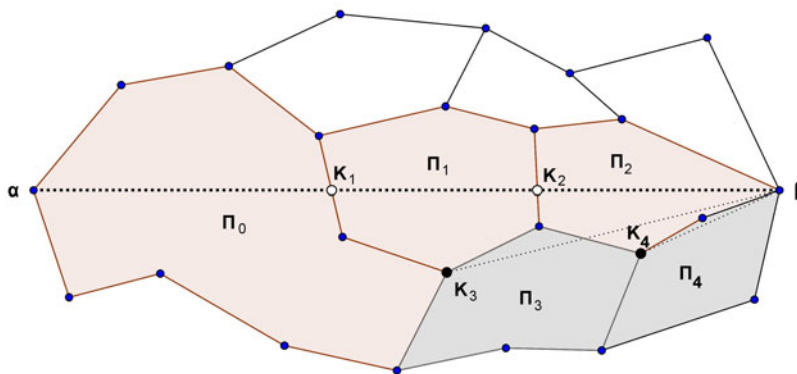
⁴ Οι ίδιοι

⁵ σε κάθε επανάληψη, δηλ. του αλγορίθμου

⁶ ως προς τη μετρική **μετρητής βημάτων** [hop count metric]

4.4.3 Εναλλακτική Δρομολόγηση Όψης OFR [Other Face Routing (OFR)]

Μια φυσική προσέγγιση για την ενίσχυση των δυνατοτήτων της άπληστης δρομολόγησης για πρακτικούς λόγους αποτελεί ο συνδυασμός αυτής της άπληστης δρομολόγησης με τον AFR. Προχώρα κατά ένα άπληστο τρόπο και χρησιμοποίησε τον AFR για να ξεφύγεις από εν δυνάμει τοπικά ελάχιστα [local minima]. Όμως, στο [41] οι **Kuhn κ.ά.** δείχνουν ότι χρησιμοποιώντας άπληστη δρομολόγηση, αυτός ο παραπάνω αλγόριθμος χάνει την προσόν του AFR, να είναι ασυμπτωτικά βέλτιστος. Παρόλα αυτά, βρήκαν [41] μια παραλλαγή του AFR (**OAFR**) του οποίου ο συνδυασμός με άπληστη δρομολόγηση (**GOAFR**) αποφέρει επιτέλους έναν αλγόριθμο που είναι ταυτόχρονα κατά τη μέση-περίπτωση αποτελεσματικός [average-case efficient] και ασυμπτωτικά βέλτιστος [asymptotically optimal].



Εικόνα 4.31: Η Δρομολόγηση Πυξίδας ξεκινάει από τον α , εξερευνά την όψη Π_0 , βρίσκει το K_1 επί του $\alpha\beta$, εξερευνά την Π_1 , βρίσκει το K_2 , και εναλλάσσεται στην Π_2 προτού προσεγγίσει το β . Ο αλγόριθμος OFR, αντιθέτως, βρίσκει το K_3 , το σημείο επί του συνόρου της Π_0 που είναι πλησιέστερο στο β , συνεχίζει για να εξερευνήσει την όψη Π_3 , όπου βρίσκει το σημείο K_4 , και τελικά φτάνει στο β δια μέσω της Π_4 .

Όμοια με την παραπάνω περιγραφή του AFR, θα εξηγήσουμε τον αλγόριθμο **OAFR** σε τρία βήματα: OFR, OBFR, και OAFR.

Ο αλγόριθμος **Εναλλακτική Δρομολόγηση Όψης OFR** διαφέρει από τον **Δρομολόγηση Όψης** κατά τον ακόλουθο τρόπο: αντί να εναλλάσσεται στην επόμενη όψη στο «καλύτερο» σημείο τομής του συνόρου της όψης με το ευθύγραμμο τμήμα (α, β) , ο **OFR** επιστρέφει –αφότου ολοκληρώσει την εξερεύνηση του συνόρου της τρέχουσας όψης– σε εκείνον τον κόμβο γ (επί του συνόρου) που βρίσκεται εγγύτερα στον προορισμό β (εικόνα 4.31 (από το [41])). Έπειτα, συνεχίζει εξερευνώντας την όψη που τέμνεται από το ευθύγραμμο τμήμα $\gamma\beta$.

Εναλλακτική Δρομολόγηση Όψης OFR

1. Ξεκινώντας από τον κόμβο α , έστω $\Pi = \Pi_0$ η όψη που είναι πλησίον του α και η οποία τέμνεται από το ευθύγραμμο τμήμα (α, β) που ενώνει το α με τον προορισμό β .
2. Εξερεύνησε το *σύνоро* της Π διασχίζοντας τις ακμές της, διαλέγοντας οποιαδήποτε από τις δύο ακμές της Π πλησίον του α . Θυμήσου το σημείο γ του συνόρου Π , το οποίο είναι πλησιέστερα στο β .
3. Αφού έχουμε διασχίσει όλες τις ακμές της Π , επιστρέφουμε στο γ . Ανανέωσε την όψη Π ώστε να είναι γειτονική του γ και ταυτόχρονα να έχει το (γ, β) στο εσωτερικό της και συνέχισε με το βήμα 2.
4. Επανάλαβε μέχρις ότου φτάσουμε στον προορισμό β .

Εάν ο αλγόριθμος εντοπίσει ασυνέχεια στο γράφο (αδυναμία εύρεσης νέου γ), αυτό μπορεί να αναφερθεί στην αφετηρία χρησιμοποιώντας ξανά τον αλγόριθμο **OFR** κατά την αντίθετη κατεύθυνση.

Διατηρώντας την πρόοδο που έχει γίνει με κατεύθυνση τον προορισμό σε κάθε όψη, ο **OFR** αποτελεί κατά κάποιο τρόπο μια πιο φυσική προσέγγιση απ' ό,τι ο **Δρομολόγηση Όψης**.

Το [41] αποδεικνύει ότι ο **OFR** προσεγγίζει το β σε $\mathcal{O}(n)$ βήματα.

4.4.4 Εναλλακτική Φραγμένη Δρομολόγηση Όψης OBFR [Other Bounded Face Routing (OBFR)]

Καθώς προσπαθούμε, λοιπόν να σχηματοποιήσουμε κάποια δήλωση επί του κόστους του **OFR**, το κύριο πρόβλημα που ανακύπτει είναι η διάσχιση ολόκληρων συνόρων από όψεις: Ανεπίσημα, ο OFR μπορεί να συναντήσει μία ασύλληπτα μεγάλη όψη, η συνολική εξερεύνηση της οποίας είναι απαγορευτικά «ακριβή» συγκρινόμενη με ένα βέλτιστο μονοπάτι από το α στο β . Για να επιλύσουμε το πρόβλημα αυτό, δανειζόμαστε το κόλπο του **AFR** για φράξουμε την περιοχή έρευνας με μία έλλειψη που περιέχει το(τα) βέλτιστο(α) μονοπάτι(α). Συνεπώς, αποκομίζουμε τον αλγόριθμο **Εναλλακτική Φραγμένη Δρομολόγηση Όψης OBFR** [41].

Χάριν απλότητας υποθέτουμε για τον OBFR ότι η αφετηρία α και ο προορισμός β συνδέονται (μέσω κάποιου μονοπατιού. Έστω $c(p^*)$ το Ευκλείδειο μήκος ενός βέλτιστου μονοπατιού και έστω \mathcal{E} η έλλειψη με εστίες α και β και με μήκος του μεγάλου άξονα να είναι $c(p^*)$ (η \mathcal{E} περιέχει όλα τα μονοπάτια από το α στο β μήκους το πολύ $c(p^*)$).

Εναλλακτική Φραγμένη Δρομολόγηση Όψης OBFR

1. Το βήμα 1 του OFR.
2. Το βήμα 2 του OFR, αλλά μην αφήσεις την \mathcal{E} : Χτυπώντας πάνω στην \mathcal{E} , συνέχισε την εξερεύνηση της τρέχουσας όψης Π κατά την αντίθετη κατεύθυνση. Κατόπιν, η εξερεύνηση της Π θα ολοκληρωθεί τη στιγμή που θα χτυπήσουμε στην \mathcal{E} για δεύτερη φορά.
3. Το βήμα 3 του OFR.
4. Το βήμα 4 του OFR.

Το [41] αποδεικνύει ότι ο OBFR προσεγγίζει το β με κόστος $\mathcal{O}(c^2(p^*))$.

4.4.5 Εναλλακτική Προσαρμόσιμη Δρομολόγηση Όψης OAFR [Other Adaptive Face Routing (OAFR)]

Μιας και δεν υπάρχει συνήθως καμία εκ των προτέρων [a priori] σχετικά με το βέλτιστο μήκος μονοπατιού, χρησιμοποιούμε αρχικά – σε αναλογία με τον AFR – μία προσέγγιση για το μέγεθος της έλλειψης. Όπως είδαμε και στον AFR, όμως, εάν η έλλειψη είναι πολύ μικρή, ο OBFR μπορεί να μη βρει ένα μονοπάτι από το α στο β . Για να το διορθώσει αυτό, ο **OAFR** επιτρέπει τον κύριο (μεγάλο) άξονα της έλλειψης, επαναληπτικά [iteratively] να διπλασιάζεται εάν το β δεν μπορεί να προσεγγιστεί χρησιμοποιώντας μονοπάτια που περιέχονται μέσα στην έλλειψη. Και αυτό μέχρι να φτάσουμε στον προορισμό.

Έστω $\mathcal{E}[c]$ να είναι η έλλειψη με εστίες α και β και με μήκος του μεγάλου άξονα να είναι c .

Εναλλακτική Φραγμένη Δρομολόγηση Όψης OBFR

1. Αρχικοποίησε την έλλειψη \mathcal{E} σε $\mathcal{E}[2 \cdot |\alpha\beta|]$.
2. Ξεκίνα τον αλγόριθμο OBFR με την έλλειψη \mathcal{E} .
3. Εάν ο προορισμός δεν έχει προσεγγιστεί διπλασίασε το μέγεθος του μεγάλου άξονα της \mathcal{E} και πήγαινε στο βήμα 2.

Παρατηρήστε ότι ο OBFR είναι ικανός να διαχωρίζει μεταξύ μη επαρκούς μεγέθους της έλλειψης και μη συνεκτικότητας των α και β . Κατά συνέπεια, ο **OAFR** εντοπίζει τη μη συνεκτικότητα του γράφου.

Το [41] αποδεικνύει ότι ο OAFR προσεγγίζει τον προορισμό β με κόστος $\mathcal{O}(c^2(p^*))$, εάν τα α και β συνδέονται, ενώ σε αντίθετη περίπτωση το αναγνωρίζει και το αναφέρει στην αφετηρία α .

Συνδυάζοντας το παραπάνω άνω φράγμα, με το συμπέρασμα στο οποίο είχαν καταλήξει οι **Kuhn κ.ά.** στο [40] ότι το κατά τη χειρότερη-περίπτωση κόστος κάθε γεωμετρικού αλγορίθμου δρομολόγησης φράσσεται από κάποιον όρο της τάξης του $\Omega(c^2(p^*))$, τους επιτρέπει να συμπεράνουν στο [41] ότι:

“Ο **OAFR** είναι ασυμπτωτικά βέλτιστος”

4.4.6 Άπληστη Δρομολόγηση GR [Greedy Routing (GR)]

Η άπληστη δρομολόγηση **GR** αξίζει να μελετηθεί όχι μόνο λόγω της απλότητάς της, τόσο καταρχήν όσο και στην υλοποίησή της. Υπεράνω όλων, ένας τέτοιος αλγόριθμος σε πυκνά υποκείμενα δίκτυα [dense networks] μπορεί επίσης να αναμένεται ότι θα βρει μονοπάτια καλής ποιότητας αποτελεσματικά. Κάποιες φορές μάλιστα υπερτερεί και του αλγορίθμου **Δρομολόγηση Όψης**.

Η άπληστη δρομολόγηση **GR** δεν είναι, παρόλα αυτά, κατορθωτή-εφικτή [feasible] καθώς δεν εγγυάται ότι ο κόμβος-προορισμός β θα προσεγγιστεί σίγουρα. Ας θυμηθούμε, όμως, τον αλγόριθμο.

Άπληστη Δρομολόγηση GR

1. Ξεκίνα από το α .
2. Προχώρα σε εκείνο τον γείτονα που βρίσκεται πιο κοντά στον προορισμό β .
3. Επανάλαβε το βήμα 2 μέχρις ότου είτε να προσεγγίσεις το β , είτε κάποιο τοπικό ελάχιστο (όσον αφορά την απόσταση από το β), δηλαδή να φτάσεις σε κάποιον κόμβο γ που να μη διαθέτει κάποιο γείτονα εγγύτερα στο β απ' ό,τι ο ίδιος ο γ .

Για παραδείγματα επιτυχημένων ή αποτυχημένων Άπληστων Δρομολογήσεων μπορούμε να ανατρέξουμε στις εικόνες 4.6 και 4.7 έως 4.10, αντίστοιχα, σε προηγούμενα κεφάλαια.

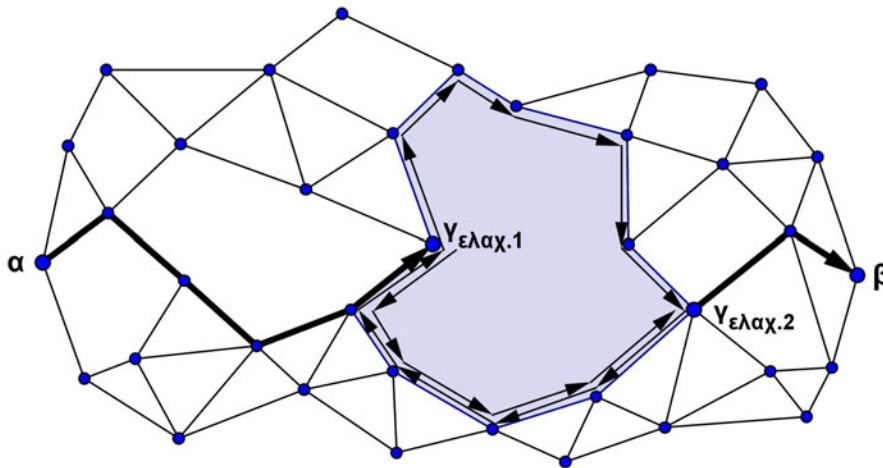
Το [28] έχει ήδη, όμως, αποδείξει⁷ ότι εάν ο **GR** προσεγγίσει το β , το κάνει με κόστος $\mathcal{O}(d^2)$, όπου $d = |\alpha\beta|$ είναι η Ευκλείδεια απόσταση ανάμεσα σε α και β .

⁷ μια σκιαγράφιση του οποίου μπορούμε δούμε στο [(22)]

4.4.7 Άπληστη Εναλλακτική Προσαρμόσιμη Δρομολόγηση Όψης GOAFR [Greedy Other Adaptive Face Routing (GOAFR)]

Εδώ, η ευκολία της κατανόησης και της υλοποίησης μιας άπληστης στρατηγικής αντιπαραβάλλεται ιδιαίτερα με την ανελαστική εξερεύνηση [inflexible exploration] των όψεων, εγγενές της δρομολόγησης όψης. Για πρακτικούς λόγους είναι αναπόφευκτο να βελτιώσουμε την αποδοτικότητα μιας παραλλαγής της δρομολόγησης όψης μέσω της ενίσχυσης των δυνατοτήτων [leveraging the potential of] της άπληστης δρομολόγησης.

Ένας τέτοιος συνδυασμός άπληστης δρομολόγησης με τον πρότερα περιγραφέντα OAFR σχηματίζεται στο [41] στον αλγόριθμο *Άπληστη Εναλλακτική Προσαρμόσιμη Δρομολόγηση Όψης GOAFR* (προφέρεται «γκόφερ»). Καταρχήν, η άπληστη δρομολόγηση χρησιμοποιείται όσο το δυνατόν περισσότερο. Τοπικά ελάχιστα που απαντώνται καθοδόν μπορούν να παρακαμφθούν με τη χρήση του OAFR (βλέπε εικόνα 4.32 (από το [41])).



Εικόνα 4.32: Ξεκινώντας από το α , ο αλγόριθμος GOAFR προχωράει με άπληστο τρόπο λειτουργίας μέχρις ότου φτάσει σε κάποιο τοπικό ελάχιστο $\gamma_{\epsilon\lambda\alpha\chi.1}$. Ο αλγόριθμος εναλλάσσεται σε φάση λειτουργίας δρομολόγησης όψης και εξερευνά το σύνορο της χρωματισμένης όψης για να βρει το $\gamma_{\epsilon\lambda\alpha\chi.2}$, τον κόμβο επί τους συνόρου της όψης που είναι πλησιέστερα στον β . Τότε ο GOAFR επιστρέφει πάλι σε άπληστο τρόπο λειτουργίας και τελικά προσεγγίζει το β . Παρατηρήστε ότι η έλλειψη του GOAFR έχει παραληφθεί χάριν απλότητας.

Είμαστε τώρα, λοιπόν, έτοιμοι να ορίσουμε τον αλγόριθμο GOAFR.

Άπληστη Εναλλακτική Προσαρμόσιμη Δρομολόγηση Όψης GOAFR

1. Αρχικοποίησε την έλλειψη \mathcal{E} σε $\mathcal{E}[2 \cdot |\alpha\beta|]$ και ξεκίνα από το α .

2. Εκτέλεσε άπληστα βήματα μέχρις ότου είτε να προσεγγίσεις το β , είτε κάποιο τοπικό ελάχιστο $\gamma_{\epsilon\lambda\alpha\chi}$. Εάν το επόμενο βήμα οδηγεί πέραν της \mathcal{E} , διπλασίασε το μήκος του μεγάλου άξονα της \mathcal{E} . Εάν, από την άλλη μεριά, έχει προσεγγιστεί κάποιο τοπικό ελάχιστο $\gamma_{\epsilon\lambda\alpha\chi}$, προχώρησε στο βήμα 3 ξεκινώντας από το $\gamma_{\epsilon\lambda\alpha\chi}$.
3. Ξεκίνα τον αλγόριθμο OAFR στην πρώτη του φάση μόνο. Διπλασίασε το μήκος του μεγάλου άξονα της \mathcal{E} , όσο περισσότερο χρειάζεται.
4. Τερμάτισε εάν ο OAFR φτάσει στον προορισμό β . Εάν ο OAFR διακρίνει μη συνεκτικότητα, αναφέρει αναλόγως στον α (μέσω χρήσης του GOAFR). Διαφορετικά, συνέχισε με το βήμα 2 στον κόμβο που είχε βρεθεί από τον OAFR και βρίσκεται πλησιέστερα στο β .

Οι **Kuhn κ.ά.** στο [41] αποδεικνύουν ότι ο GOAFR προσεγγίζει τον προορισμό β με κόστος $\mathcal{O}(c^2(p^*))$, εάν τα α και β δε συνδέονται. Αυτό είναι *ασυμπτωτικά βέλτιστο*. Επιπλέον, εάν τα α και β συνδέονται το αναγνωρίζει και το αναφέρει στην αφετηρία α .

4.4.8 Άπληστη Εναλλακτική Προσαρμόσιμη Δρομολόγηση Όψης Συν: GOAFR+ [Greedy Other Adaptive Face Routing Plus (GOAFR+)]

Στην ενότητα αυτή εισάγουμε τον αλγόριθμο GOAFR+ (προφέρεται «γκόφερ-συν»). Θα αποδείξουμε ότι αυτός ο αλγόριθμος είναι ασυμπτωτικά βέλτιστος με την προϋπόθεση ότι το υποκείμενο δίκτυο είναι ένας φραγμένου βαθμού γράφος μοναδιαίου δίσκου UDG. Οι προσομοιώσεις έδειξαν ([39]) ότι επιπλέον ο GOAFR+ είναι και αποδοτικός επί γράφων μέσου όρου [average case graphs].

Οι **Kuhn κ.ά.** στο [41] μελέτησαν μία οικογένεια παρόμοιων αλγορίθμων που συνδύαζαν άπληστη δρομολόγηση και δρομολόγηση όψης. Παρατηρήθηκε, τότε, ότι *παραλλαγές αλγορίθμων με ευρετική*⁸ που καταγίνονται με την γρήγορη επιστροφή σε άπληστο τρόπο λειτουργίας (όπως η ευρετική «Πρώτος Εγγύτερος» που οδηγεί τον αλγόριθμο να αρχίσει εκ νέου την άπληστη δρομολόγηση με το που θα συναντήσει κάποιον κόμβο πλησιέστερο στον προορισμό β απ' ό,τι η τρέχουσα φάση δρομολόγησης όψης ξεκίνησε) χάνουν το χαρακτηριστικό του να είναι ασυμπτωτικά βέλτιστοι, σε σχέση με το συντομότερο μονοπάτι. Προέκυψε ότι, όντας σε τρόπο λειτουργίας δρομολόγησης όψης, ένας αλγόριθμος απαιτείται να εξερευνησει *ολόκληρο* το σύνορο της τρέχουσας όψης έτσι ώστε να είναι ασυμπτωτικά βέλτιστος.

Αντίθετα με αυτήν την εικασία, ο αλγόριθμος GOAFR+ δεν εξερευνά απαραίτητα ολόκληρο το σύνορο της όψης κατά τη φάση της δρομολόγησης όψης και παρόλα αυτά *όντως διατηρεί* την ιδιότητα του ασυμπτωτικά βέλτιστου. Για το σκοπό αυτό ο αλγόριθμος κάνει χρήση δύο μετρητών π και τ για να ελέγχει πόσοι από τους κόμβους που προσεγγίστηκαν κατά την τρέχουσα φάση της δρομολόγησης όψης εντοπίζονται εγγύτερα (π) και πόσοι δε βρίσκονται κοντύτερα (τ) στον προορισμό β απ' ό,τι το σημείο εκκίνησης της τρέχουσας φάσης δρομολόγησης όψης. Μόλις ισχύσει κάποια συγκεκριμένη συνθήκη επιστροφής [fallback condition], ο GOAFR+ αμέσως πάει πίσω στον άπληστο τρόπο λειτουργίας.

Παράλληλα με το να είναι ασυμπτωτικά βέλτιστος, ωστόσο, προσομοιώσεις [simulations] δείχνουν ότι στη μέση-περίπτωση [average-case] ο GOAFR+ ακόμη και ξεπερνά τους καλύτερους (όχι ασυμπτωτικά βέλτιστους!) αλγόριθμους που μελετήθηκαν στο [41].

Είμαστε τώρα έτοιμοι να εξετάσουμε τον GOAFR+, ο οποίος βελτιώνεται ως προς τον GOAFR παρέχοντας πρόσθετες συνθήκες κάτω από τις οποίες ο αλγόριθμος μπορεί να αλλάξει από τη φάση δρομολόγησης όψης πίσω στην άπληστη φάση. Ο αλγόριθμος έχει παραμέτρους ρ_0, ρ και σ .

Τα ρ_0 και ρ χρησιμοποιούνται για να αλλάζουμε δυναμικά τις διαστάσεις του κύκλου (παρατηρείστε ότι η έλλειψη του OAFR είναι τώρα ένας απλός κύκλος) που χρησιμοποιείται από τον αλγόριθμο της δρομολόγησης όψης. Το σ χρησιμοποιείται για την αποφυγή διάσχισης μεγάλου αριθμού ακμών σε μια όψη όπου πολλοί κόμβοι είναι εγγύτερα στο β . Οι λεπτομέρειες του GOAFR+ είναι οι παρακάτω:

⁸ μέθοδος ενεργειών με βάση τις αποκτηθείσες εμπειρίες

Άπληστη Εναλλακτική Προσαρμοσμένη Δρομολόγηση Όψης συν GOAFR+

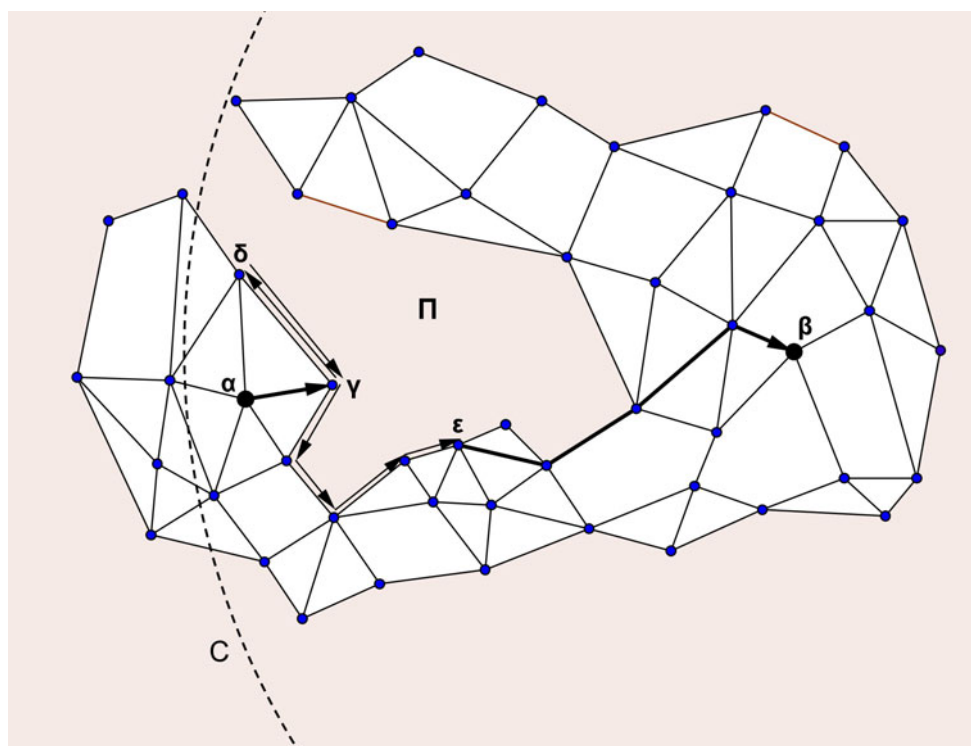
Οι παράμετροι του αλγορίθμου ρ_0, ρ και σ διαλέγονται πριν την έναρξης του αλγορίθμου και παραμένουν σταθερές κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης. Για να μπορεί ο αλγόριθμος να λειτουργεί σωστά, αυτές οι παράμετροι θα πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες $1 \leq \rho_0 \leq \rho$ και $0 < \sigma$ ⁹.

1. Ξεκίνα από το α . Αρχικοποίησε τον κύκλο C ώστε να είναι ο κύκλος με κέντρο στο β και ακτίνα $R_c = \rho_0 \cdot |\alpha\beta|$.
2. **(Φάση Άπληστης Δρομολόγησης [Greedy Routing Mode])**
Επανάλαβε κάνοντας «άπληστα» βήματα μέχρις ότου είτε το β είτε κάποιο τοπικό ελάχιστο προσεγγιστεί. Εάν προσεγγιστεί ο β , τερμάτισε τον αλγόριθμο. Εάν φτάσεις σε κάποιο τοπικό ελάχιστο πήγαινε στο βήμα 3.
Όποτε είναι δυνατόν μείωνε την ακτίνα του C σε $R_c := \frac{R_c}{\rho}$, υπό την προϋπόθεση ότι κόμβος που μόλις επισκέφτηκε να παραμείνει μέσα στον C .
3. **(Μέθοδος Δρομολόγησης Όψης [Face Routing Mode])** Ας είναι μ_i το τοπικό ελάχιστο που μόλις έφτασες. Ξεκίνα να εξερευνάς την όψη Π_i που περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{\mu_i\beta}$. Αφού τελειώσεις με την εξερεύνηση της όψης Π_i και έχοντας επιστρέψει στο μ_i , προωθήσου προς εκείνο τον κόμβο που έχει ήδη επισκεφτεί και βρίσκεται εγγύτερα στον κόμβο β και συνέχισε με το βήμα 2. Εάν δεν υπάρχει τέτοιος κόμβος λ που να έχει ήδη επισκεφτεί τέτοιος ώστε $|\lambda\beta| < |\alpha\beta|$, τότε ανέφερε στον α μη συνεκτικότητα γράφου [graph disconnection] χρησιμοποιώντας τον GOAFR+. Κατά τη διάρκεια της εξερεύνησης της όψης Π_i χρησιμοποίησε δύο μετρητές π και τ για την παρακολούθηση του αριθμού των κόμβων που προσεγγίστηκαν στο σύνορο της Π_i . Ο π μετράει τον αριθμό των κόμβων των οποίων η απόσταση από τον β είναι μικρότερη από $|\mu_i\beta|$ και ο τ μετράει τον αριθμό των κόμβων των οποίων η απόσταση από τον β δεν είναι μικρότερη από $|\mu_i\beta|$. Κάνε ειδικές ενέργειες αν κάποια από τις παρακάτω συνθήκες ισχύει:
 - (α) **Ο C συναντάται για πρώτη φορά:** Γύρνα πίσω και συνέχισε την εξερεύνηση της Π_i προς την αντίθετη κατεύθυνση.
 - (β) **Ο C συναντάται για δεύτερη φορά:** Εάν κανένας κόμβος λ που έχεις επισκεφτεί δεν έχει απόσταση $|\lambda\beta| < |\mu_i\beta|$, τότε μεγέθυνε τον κύκλο κατά $R_c := \rho \cdot R_c$ και συνέχισε με το βήμα 3 όπως αν είχες

⁹ Στις προσομοιώσεις των Kuhn κ.ά. τιμές όπως $\rho_0=1.4$, $\rho=\sqrt{2}$ και $\sigma=\frac{1}{100}$, αποδείχτηκαν αρκετά καλές για πρακτικούς σκοπούς.

ξεκινήσει από τον μ_i . Εάν υπάρχουν κόμβοι που έχουμε επισκεφτεί των οποίων η απόσταση από τον β είναι μικρότερη από $|\mu_i\beta|$, τότε προωθήσου προς τον κόμβο που βρίσκεται εγγύτερα στον β και συνέχισε με το βήμα 2.

- (γ) $\pi > \sigma \tau$: Αυτό σημαίνει ότι ο αλγόριθμος έχει επισκεφτεί περισσότερους κόμβους που βρίσκονται πιο κοντά στο β απ' ό τι στο μ_i (μέχρις ένα σταθερό παράγοντα σ [up to a constant factor σ]). Σε αυτήν την περίπτωση, προωθήσου στον κόμβο που, μέχρι τώρα, είναι πιο κοντά στον β και συνέχισε με το βήμα 2.



Εικόνα 4.33: (από το [39]) Ο αλγόριθμος **GOAFR+** ξεκινάει από τον α σε άπληστο τρόπο λειτουργίας. Στον κόμβο γ φτάνει σε ένα τοπικό ελάχιστο, έναν κόμβο χωρίς άλλο γείτονα που να είναι πλησιέστερα στο β . Ο **GOAFR+** εναλλάσσεται σε φάση λειτουργίας δρομολόγησης όψης και ξεκινά να εξερευνήσει το σύνορο της όψης Π (σε φορά αντίστροφη της φοράς των δεικτών του ρολογιού). Στον κόμβο δ ο αλγόριθμος πέφτει πάνω στον φράσσοντα κύκλο C και γυρνά πίσω για να συνεχίσει την εξερεύνηση του συνόρου της Π προς την αντίθετη κατεύθυνση. Μετά από κάθε βήμα οι μετρητές π και τ ανανεώνονται. Στον κόμβο ϵ ισχύει η συνθήκη επιστροφής $\pi > \sigma \tau$ ($\pi = 2, \tau = 4$ με την υπόθεση ότι $\frac{1}{4} \leq \sigma < \frac{1}{2}$).

Δηλαδή ο αλγόριθμος **GOAFR+** επιστρέφει πάλι σε άπληστο τρόπο λειτουργίας και συνεχίζει ώστε τελικά να προσεγγίσει το β . (Η σταδιακή μείωση του μεγέθους του C κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης του **GOAFR+** δε φαίνεται στην εικόνα

Λήμμα 4.3: Εάν οι α και β συνδέονται εντός του κύκλου C_1^{10} , ο GOAFR+ προσεγγίζει τον προορισμό β . Εάν οι α και β δε συνδέονται, ο GOAFR+ αναφέρει αντιστοίχως στην αφετηρία [39].

Απόδειξη: Πρώτα υποθέτουμε ότι υπάρχει μία σύνδεση, ένα μονοπάτι δηλαδή, α στο β εντός του κύκλου C_1 . Για το ορισμό ενός γύρου [definition] διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις: Ανάλογα με την τρέχουσα εκτέλεση του αλγορίθμου, ένας γύρος μπορεί να είναι είτε α) ένα άπληστο βήμα, β) μία φάση δρομολόγησης όψης που τερματίστηκε με γρήγορη επιστροφή, ή γ) μία φάση δρομολόγησης όψης που τερματίστηκε αφού εξερεύνησε ολόκληρο το σύνορο της τρέχουσας όψης και προωθήθηκε στον κόμβο που είναι πλησιέστερα στο β .

Δείχνουμε ότι μετά από κάθε γύρο ο αλγόριθμος βρίσκεται εγγύτερα του προορισμού β απ' ό,τι πριν το γύρο αυτό: Αυτό ισχύει για την περίπτωση α), μιας και ένα άπληστο βήμα μπορεί μόνο να μειώσει την απόσταση με το β . Βεβαίως ισχύει και στην περίπτωση β), αφού η συνθήκη επιστροφής [fallback condition] μπορεί να ισχύει μόνο αμέσως μετά την αύξηση του μετρητή π (δηλαδή αφότου έχει επισκεφτεί τουλάχιστον έναν πλησιέστερο κόμβο) και μιας και τότε ο αλγόριθμος προχωράει στον κόμβο που μέχρι τώρα έχει φανεί εγγύτερος στο β . Στη γ) περίπτωση ο αλγόριθμος προσεγγίζει το β , αφού το σύνορο της τρέχουσας εξερευνημένης όψης – αυτή η όψη περιέχει σημεία πλησιέστερα στο β απ' ό,τι τη στιγμή που ξεκίνησε αυτός ο γύρος – περιέχει ένα σημείο πλησιέστερο στο β αν και μόνο αν υπάρχει σύνδεση με το β . (Σημειώστε ότι μπορούν να κατασκευαστούν γράφοι, όπου το σύνορο μιας όψης Π περιέχει σημεία αλλά όχι κόμβους που να βρίσκονται εγγύτερα του β απ' ό,τι ένας δοσμένος συνοριακός κόμβος, στην οποία περίπτωση ο αλγόριθμος θα μπορούσε να αποτύχει. Μάλλον πρόκειται για περίπτωση σημείου τομής μεταξύ δύο ακμών {άρα όχι επιπεδικός γράφος} που να βρίσκεται πλησιέστερα στο β και ταυτόχρονα κανένας άλλος κόμβος να μην έχει αντίστοιχη ιδιότητα. Αφού, όμως, εδώ χρησιμοποιούμε ως υποκείμενο δίκτυο έναν επιπεδικό γράφο¹¹, τέτοια περίπτωση δεν μπορεί να συμβεί: Ο αλγόριθμος μπορεί να προωθηθεί σε έναν κόμβο του συνόρου της όψης πλησιέστερο στο β). Αφού, λοιπόν, ο αλγόριθμος μειώνει την απόσταση προς τον προορισμό σε κάθε γύρο, καταλήγει εν τέλει στο β .

Εάν οι α και β δε συνδέονται εντός του κύκλου C_1 , ο GOAFR+ -στη φάση της δρομολόγησης όψης- είτε πέφτει πάνω στο C_1 δύο φορές χωρίς να καταφέρνει να βρει έναν κόμβο πλησιέστερα στο β (στην οποία περίπτωση ο αλγόριθμος θα συνεχίσει σε ένα μεγαλύτερο κύκλο, κάτι που βρίσκεται εκτός του σκοπού αυτού του λήμματος), είτε εξερευνεί ολόκληρο το σύνορο της τρέχουσας όψης (σύγκρινε παραπάνω με την περίπτωση γ)) χωρίς να βρίσκει κάποιο κόμβο πλησιέστερο στο β , που συμβαίνει αν και μόνο αν οι κόμβοι α και β δε συνδέονται καθόλου. \square

¹⁰ ο κύκλος C κατά το \dot{I} -στο στιγμιότυπό του.

¹¹ συγκεκριμένα οι συγγραφείς κάνουν χρήση του Gabriel γράφου GG .

4.4.9 Ο GOAFR+ είναι Ασυμπτωτικά Βέλτιστος [GOAFR+ is Asymptotically Optimal]

Καταλήγουμε, λοιπόν, στο ακόλουθο θεώρημα που αποτελεί και τον τελικό αποτέλεσμα αυτής της εργασίας.

Θεώρημα 4.10: Έστω p^* ένα βέλτιστο μονοπάτι [optimal path] από το α στο β . Σε έναν περιορισμένου βαθμού γράφο μοναδιαίου δίσκου [bounded degree unit disk graph] ο GOAFR+ προσεγγίζει το β με κόστος $\mathcal{O}(c^2(p^*))$, εάν οι α και β συνδέονται. Εάν οι α και β δε συνδέονται, ο GOAFR+ αναφέρει αντιστοίχως στην αφετηρία [39].

Απόδειξη: Έστω $c_l(p^*)$, να είναι η Ευκλείδεια απόσταση ενός από τα μονοπάτια με το μικρότερο μήκος από το α στο β . Εάν οι α και β συνδέονται, ο κύκλος με κέντρο το β και με ακτίνα $c_l(p^*)$ περιέχει εξολοκλήρου το μονοπάτι p^* . Αφού ο GOAFR+ μεγαλώνει το φράσσοντα κύκλο [enlarges the bounding circle] σε περίπτωση που δεν περιέχει ένα μονοπάτι από τον α στο β , και σύμφωνα με την πολιτική ανανέωσης της ακτίνας που έχει ο GOAFR+ με το σταθερό παράγοντα ρ , τότε κατά τη διάρκεια της εκτέλεσής του, ο μεγαλύτερος κύκλος C θα έχει ακτίνα μικρότερη από $\rho \cdot c_l(p^*)$.

Κατά συνέπεια το συνολικό κόστος του αλγορίθμου υπολογίζεται προσθέτοντας το κόστος που ξοδεύτηκε σε κάθε κύκλο που χρησιμοποιήθηκε στον αλγόριθμο. Έστω, ακόμη, $R_{c,max}$ η ακτίνα του μεγαλύτερου κύκλου που χρησιμοποιήθηκε και k είναι ο αριθμός των κύκλων που χρησιμοποιήθηκαν. Τότε το κόστος του αλγορίθμου είναι:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \pi \left[R_{c,max} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \right)^i \right]^2 &= \frac{1 - \left(\frac{1}{\rho} \right)^{2(k+1)}}{1 - \left(\frac{1}{\rho} \right)^2} \cdot \pi R_{c,max}^2 \\ &< \frac{1 - \left(\frac{1}{\rho} \right)^{2(k+1)}}{1 - \left(\frac{1}{\rho} \right)^2} \cdot \pi (\rho \cdot c_l(p^*))^2 \\ &\in \mathcal{O}(\rho \cdot c_l(p^*))^2 \end{aligned}$$

Για να καταλήξουν στο συμπέρασμα αυτό οι συγγραφείς, αναγκάστηκαν προηγουμένως να αποδείξουν ότι όλες οι μετρικές κόστους –από τις γνωστές που αναφέραμε, συμπεριλαμβανομένου και της ευκλείδειας- είναι ισοδύναμες [equivalent] όταν αυτές εφαρμόζονται πάνω σε περιορισμένου βαθμού γράφους μοναδιαίου δίσκου [bounded degree unit disk graphs]

Παράλληλα, με το παράδειγμα του κάτω-φράγματος στο [40, εικόνα 8], αποδείχτηκε ότι κάθε γεωμετρικός αλγόριθμος είναι κάτω φραγμένος από $\Omega(c^2(p^*))$. Προκύπτει, κατά συνέπεια, ότι:

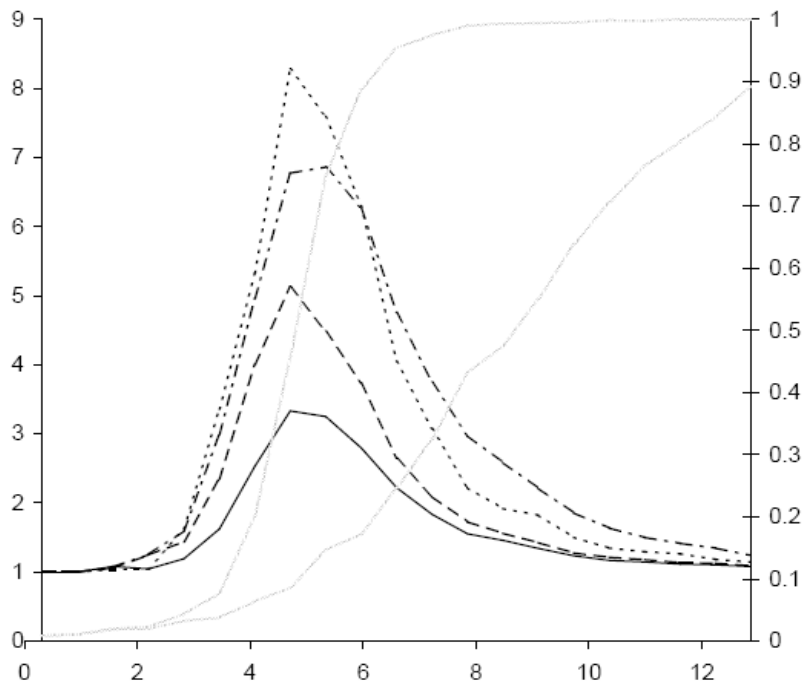
“ο GOAFR+ είναι ασυμπτωτικά βέλτιστος.”

Εάν, αντιθέτως, οι α και β δε συνδέονται, ο GOAFR+ το ανακαλύπτει (περίπτωση γ) στην απόδειξη του Λήμματος 4.2) και αναφέρει πίσω στην αφετηρία χρησιμοποιώντας τον ίδιο αλγόριθμο. □

4.4.10 Αποτελεσματικότητα του GOAFR+ στην μέση-περίπτωση [Average-case efficiency of GOAFR+]

Ο αλγόριθμος GOAFR+ περιλαμβάνει άπληστη δρομολόγηση και έναν μηχανισμό για γρήγορης επιστροφής που στόχο έχει να μειώσει το κόστος του αλγορίθμου πάνω σε μέσου-όρου γράφους [average case graphs]. Με στόχο να αποτιμήσουν την αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου στη μέση-περίπτωση, οι **Kuhn κ.ά.** χρησιμοποιούν το κατά προτίμηση περιβάλλον προσομοίωσης [custom simulation environment] που εισήγαγαν στο [41].

Οι προσομοιώσεις έλαβαν χώρα πάνω σε γράφους που δημιουργήθηκαν από τυχαία και ομοιόμορφα τοποθετημένους κόμβους σε ένα τετράγωνο πεδίο πλευράς μήκους 20 μονάδων και με τυχαία επιλογή του ζευγαριού αφετηρίας-προορισμού. Στην ίδια εργασία προσδιορίστηκε ένα κρίσιμο εύρος της πυκνότητας του δικτύου [a critical network density range] γύρω στους 4.71 ($\approx 1.5\pi$) κόμβους ανά μοναδιαίο δίσκο. Τοποθετημένη ανάμεσα σε χαμηλές πυκνότητες, όπου μόνο σε τετριμμένες περιπτώσεις οι α και β συνδέονται, και υψηλές πυκνότητες, όπου στις περισσότερες περιπτώσεις η άπληστη δρομολόγηση θα επιτύχει στην εύρεση ενός καλού μονοπατιού, αυτή η διακύμανση της πυκνότητας μορφοποιεί μια πρόκληση για τους αλγόριθμους δρομολόγησης: Γενικά το μήκος του συντομότερου μονοπατιού από την αφετηρία προς τον προορισμό είναι αισθητά μακρύτερο απ' ό,τι η (Ευκλείδεια) απόστασή τους.



Εικόνα 4.34: Απόδοση αλγορίθμων δρομολόγησης σε κρίσιμο εύρος πυκνότητας δικτύου περίπου 4.5 κόμβοι ανά μοναδιαίο δίσκο. Τιμές μέσης απόδοσης για τους GOAFR+ (συνεχής γραμμή [solid line]), GOAFR_{FC} (καμπύλη με διαδοχικές γραμμές [dashed]), GOAFR (καμπύλη με διαδοχικές γραμμές και τελείες [dash-dotted]), και GPSR (καμπύλη με διαδοχικές τελείες [dotted]) αποτυπώνονται γραφικά στον αριστερό κάθετο άξονα y. Η συνεκτικότητα του δικτύου και ο άπληστος ρυθμός επιτυχίας αποτυπώνονται γραφικά για αναφορά (στο δεξιό άξονα y).

Η εικόνα 4.34 (από το [39]) αναπαριστά τις μετρημένες τιμές απόδοσης τεσσάρων αλγορίθμων δρομολόγησης γύρω από αυτήν την κρίσιμη πυκνότητα δικτύου. Για κάθε πυκνότητα δικτύου που προσομοιώνεται η σχεδιασμένη τιμή απόδοσης [plotted performance value] είναι ο μέσος όρος των λόγων του κόστους του αλγορίθμου προς το κόστος του συντομότερου μονοπατιού (ως προς τη μετρική «μετρητής βημάτων») μετρημένων επί 2000 κατασκευασμένων τριάδων (δίκτυο, αφετηρία, προορισμός): Χαμηλές τιμές απόδοσης κρίνονται ως καλές.

Ο ρυθμός συνεκτικότητας του δικτύου –που δείχνει σε πόσα από τα δημιουργημένα δίκτυα οι α και β συνδέονται- και ο ρυθμός επιτυχίας απληστίας [greedy success rate] –που αντιπροσωπεύει το πόσο συχνά ο αλγόριθμος προσεγγίζει το β κάνοντας χρήση μόνο άπληστης δρομολόγησης- απεικονίζονται για λόγους αναφοράς [reference] και προσδιορισμού του κρίσιμου εύρους πυκνότητας.

Η εικόνα 4.34 περιέχει τις τιμές απόδοσης για τον αλγόριθμο GPSR [34], τον αλγόριθμο GOAFR και τον GOAFR_{FC} [41], καθώς επίσης και για τον GOAFR+.

Ο αλγόριθμος **GPSR** συνδυάζει άπληστη δρομολόγηση με δρομολόγηση όψης, συμπεριλαμβάνοντας και γρήγορη επιστροφή [early fallback], αλλά παρόλα αυτά δεν κάνει χρήση της έννοιας μιας φράζουσας περιοχής έρευνας [bounding searchable area].

Χρησιμοποιώντας αυτό το σκεπτικό, ο αλγόριθμος **GOAFR** γίνεται ασυμπτωτικά βέλτιστος κατά τη χειρότερη-περίπτωση [asymptotically worst-case optimal], αλλά δεν είναι αποτελεσματικός στην πράξη, μιας και –όντας σε φάση δρομολόγησης όψης- πάντα εξερευνώνται ολόκληρα σύνορα όψεων.

Για την αποφυγή αυτού αποτελέσματος, εφαρμόζεται από τον αλγόριθμο **GOAFR_{FC}** μία ευρετική γρήγορης επιστροφής [an early fallback heuristic]. Αυτός ο αλγόριθμος εμφάνισε την καλύτερη απόδοση στην κατά μέσο όρο-περίπτωση, δεν είναι όμως ασυμπτωτικά βέλτιστος στη χειρότερη-περίπτωση.

Ο **GOAFR+**, αντιθέτως, παρουσιάζει σαφώς καλύτερες τιμές απόδοσης για το κρίσιμο εύρος πυκνότητας-εκμεταλλευόμενος διαδοχικές μειώσεις του μεγέθους της φράζουσας περιοχής- και την ίδια στιγμή είναι επίσης και ασυμπτωτικά βέλτιστος στη χειρότερη-περίπτωση.

5. ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στην εργασία αυτή ασχοληθήκαμε με τη γεωμετρική δρομολόγηση σε ad-hoc ασύρματα δίκτυα [geometric routing in ad-hoc wireless networks]. Το μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε ήταν αυτό του γράφου μοναδιαίου δίσκου [Unit Disk Graph] **UDG**. Από το γράφο αυτό **UDG** κατασκευάσαμε έναν *φραγμένου βαθμού επιπεδικό επικαλυπτή* (γράφο) [*bounded degree planar spanner (graph)*]. Όπως αναφέραμε ξανά, μια τέτοια τοπολογία είναι επιθυμητή για να περιορίσουμε την κατανάλωση ενέργειας και έτσι να επεκτείνουμε τη ζωή του ad-hoc ασύρματου δικτύου. Ήδη στο σημείο αυτό έχουμε και τις πρώτες ενστάσεις. Στο [10] έχουμε τον ισχυρισμό ότι η παραδοχή ότι «χαμηλός βαθμός \Rightarrow χαμηλή παρεμβολή» δεν είναι σωστή σε μια χειρότερη-περίπτωση [in a worst-case].

Βέβαια, ο βαθμός κόμβου ενός ασύρματου δικτύου είναι μία παράμετρος που απασχολεί (και σίγουρα θα συνεχίσει να απασχολεί) την έρευνα. Ο βαθμός κόμβου δεν πρέπει να είναι πολύ μεγάλος. Διαφορετικά, ένας κόμβος με μεγάλο βαθμό πρέπει να επικοινωνήσει με πολλούς κόμβους απευθείας. Αυτό αυξάνει την παρεμβολή [interference] και την επιπλέον πληροφορία [overhead] στον κόμβο αυτό. Ο βαθμός κόμβου δεν πρέπει να είναι ούτε και πολύ μικρός: ένας μικρός βαθμός κόμβου συνήθως υποδηλώνει ότι το δίκτυο μικρή ανοχή σφάλματος [a low fault tolerance] και ότι επίσης τείνει να αυξάνει τη συνολική κατανάλωση ενέργειας του δικτύου, καθώς μπορεί να χρειάζεται να ακολουθηθούν μακρύτερα μονοπάτια. Κατά συνέπεια, ο βαθμός κόμβου είναι παράμετρος απόδοσης για την ασύρματη τοπολογία δικτύου.

Σε μία δεύτερη φάση, παρουσιάσαμε τον καλύτερο –μέχρις στιγμής– αλγόριθμο δρομολόγησης τον **GOAFR+**, που συνδύαζε άπληστη δρομολόγηση με δρομολόγηση όψης. Αποδείχτηκε *ασυμπτωτικά βέλτιστος* στη χειρότερη-περίπτωση [worst-case], ενώ ταυτόχρονα είδαμε στις προσομοιώσεις του [39] ότι είναι εξίσου αποτελεσματικός και στην πράξη.

Γιατί, όμως, ασχολούμαστε με το συγκεκριμένο είδος δρομολόγησης; Η εξάπλωση των κινητών κόμβων είναι ραγδαία σε παγκόσμιο επίπεδο και με τη σειρά της επαυξάνει την ανάγκη να διερευνούμε την δυνατότητα της μεταξύ τους επικοινωνίας, κατά συνέπεια και την έρευνα για δρομολόγηση σε ασύρματα δίκτυα. Η εξειδίκευση, όμως, περαιτέρω σε γεωμετρική δρομολόγηση έγινε εφικτή (ίσως και αναγκαία) από τη στιγμή που έγινε διαθέσιμη η τεχνολογία προσδιορισμού της ακριβούς γεωγραφικής θέσης ενός κόμβου. Συστήματα που στηρίζονται στη χρήση δορυφόρων έχουν αναπτυχθεί –όπως το αμερικάνικο **GPS** (Global Position System)– ή είναι στο στάδιο της τελικής ανάπτυξης –όπως το ευρωπαϊκό **Galileo**¹, ενώ συσκευές που να συνεργάζονται με τα συστήματα αυτά καθίστανται μέρα με τη μέρα ολοένα φθηνότερες και ευκολότερες να ενσωματωθούν σε ένα κόμβο. Ταυτόχρονα, και η Ρωσία αναπτύσσει το δικό της σύστημα, ονόματι **Glonass**, απάντηση στο αμερικανικό GPS και τοπ ευρωπαϊκό Galileo.

¹ Το πρώτο αναπτύχθηκε και διαχειρίζεται από τον αμερικάνικο στρατό, με ό,τι περιορισμούς αυτό συνεπάγεται, έχει ακρίβεια επί των γεωγραφικών συντεταγμένων του κόμβου έως και 10 μέτρα, ενώ ανά πάσα στιγμή η λειτουργία μπορεί αλλοιωθεί ή ακόμη και να διακοπεί με το πρόσχημα απειλής της ασφάλειας αμερικανικού εδάφους. Το δεύτερο, αναπτύσσεται κυρίως από ευρωπαϊκές χώρες και την Κίνα, θα εξυπηρετεί πολιτικούς και επιχειρηματικούς σκοπούς και θα έχει ακρίβεια έως και 1 περίπου μέτρο.

Ένα από τα ποιο προφανή ερωτήματα που ανακύπτει είναι: “Για ποιο λόγο πρέπει να δουλεύουμε με ασύρματα δίκτυα και να μη χρησιμοποιήσουμε την υπάρχουσα υβριδική τεχνική του συνδυασμού ασύρματης και ενσύρματης τεχνολογίας, π.χ. κλήση από κινητό σε κινητό ή σταθερό;” (βλέπε και WLAN [Wireless Local Area Network]). Το ερώτημα, δηλαδή, είναι αν έχει νόημα η ενασχόληση με «αποκλειστικά» ασύρματα δίκτυα, αν εν τέλει τέτοιου είδους δίκτυα εκτός από υλοποιήσιμα είναι και εύχρηστα ή/και απαραίτητα.

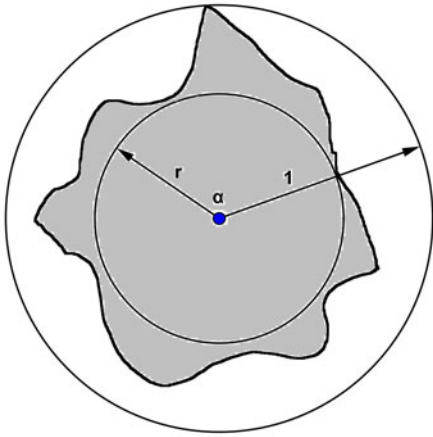
Η απάντηση είναι ότι σε πάρα πολλές περιπτώσεις ψάχνουμε έναν τρόπο ώστε με τρόπο εύκολο και ευέλικτο κόμβοι που δεν επικοινωνούν απ’ ευθείας να κατορθώσουν σύνδεση, αλλά ταυτόχρονα αυτό να γίνει χωρίς να πρέπει να γίνει χρήση υπάρχοντος ενσύρματου δικτύου. Και αυτό θέλουμε να γίνεται είτε σε μικρή είτε σε μεγάλη κλίμακα. Οι λόγοι αυτοί μπορεί να είναι *οικονομικοί*: κοστίζει ακριβιά π.χ. η χρήση του τοπικού ενσύρματου δικτύου. Μπορεί να είναι λόγοι *επιχειρηματικής ασφάλειας*: τα στελέχη μιας επιχείρησης που βρίσκονται σε μία πόλη, θέλουν να μοιράζονται μυστικά, χωρίς να κινδυνεύουν αυτά να υποκλαπούν μέσω της υποδομής της ανταγωνίστριας εταιρείας που είναι μέτοχος του ενσύρματου δικτύου. Σε μια *καταστροφή* ή ακόμα και σε ένα *πεδίο μάχης* είναι προφανής η ανάγκη επίτευξης τρόπου επικοινωνίας μεταξύ των σωστικών συνεργείων ή των διαφόρων εμπόλεμων ομάδων. Και άλλοι πολλοί, προφανώς.

Βέβαια, υπάρχουν και πολλές ενστάσεις που πρέπει να λάβει υπόψη της η μελλοντική έρευνα. Προβλήματα όπως η άμεση επαφή που πρέπει να έχουν με τους δορυφόρους οι κόμβοι, η (κατά)χρήση μπαταρίας των κόμβων, η αύξηση της κίνησης στους δορυφόρους και άλλα. Χώρια που οι δορυφόροι, όπως πρόσφατα αποδείχθηκε στο [71], επηρεάζονται και από τις ισχυρές ηλιακές καταιγίδες, πράγμα που οδηγεί π.χ. στην αύξηση των σφαλμάτων του συστήματος GPS στα 76μ.

Όλα αυτά όμως, για να κλείσουμε, έγιναν με βάση αρκετές **παραδοχές**. Με κάποιες απ’ αυτές ασχολούνται άλλες περιοχές έρευνας, ενώ άλλες ίσως προκαλέσουν μελλοντική ενασχόληση.

Κάθε πομπός που αντιστοιχεί σε έναν κόμβο του γράφου μας, έχει την ίδια σταθερή ακτίνα εκπομπής. Στην πραγματικότητα, φυσικά, δεν είναι πάντα έτσι. Η γεωμετρική δρομολόγηση, όμως, είναι αμφίβολο αν θα λειτουργήσει στην περίπτωση όπου εμφανίζεται αστάθεια στην ακτίνα μετάδοσης των κόμβων. Η αστάθεια αυτή σημαίνει ότι η περιοχή εμβέλειας ενός κόμβου παύει να είναι απαραίτητα ένας κυκλικός δίσκος και η ακτίνα μπορεί να ποικίλει από $r = (1 - \epsilon)$ έως 1 , $0 < \epsilon < 1$. Βλέπε για σχηματική απεικόνιση των προηγούμενων στην ακόλουθη εικόνα 5.1 (από το [13]).

Οι Chávez, Dobrev, Kranakis, Opatrny, Stacho, και Urrutia στο [13], καθώς και οι Barrière, Fraigniaud και Narayanan στο [1] μελέτησαν-όχι με τον ίδιο τρόπο και οι δύο ομάδες- τέτοιου είδους αστάθεια, και πρότειναν αυτό το μοντέλο ως γενίκευση του μοναδιαίου γράφου **UDG**. Με αυτό το μοντέλο μπορούν να αντιμετωπίσουν (όπως ισχυρίζονται) και ασταθείς περιπτώσεις όπου οι κόμβοι μπορούν ή δεν μπορούν να επικοινωνούν απευθείας. Τέτοιες καταστάσεις συμβαίνουν όταν υπάρχουν *εμπόδια*, όπως κτίρια, κακοκαιρία, κλπ.



Εικόνα 5.1: Φαίνεται με τη βοήθεια του γκριζου χρώματος ποια ακριβώς είναι η εμβέλεια του κόμβου α . Η ακτίνα δεν είναι σταθερή και κυμαίνεται από r έως και 1 .

- Έχουμε δεχτεί ότι ο γράφος μας είναι μία ενσωμάτωση στο ευκλείδειο επίπεδο. Μπορεί η γεωμετρική δρομολόγηση, έτσι όπως μελετήθηκε, να πραγματοποιηθεί και σε 3-διάστατο χώρο;
- Υποθέσαμε ότι η δρομολόγηση λαμβάνει χώρα ταχύτερα απ' ό,τι η κίνηση των κόμβων, δηλαδή ένας αλγόριθμος δρομολόγησης εκτελείται σε ένα προσωρινά στατικό δίκτυο. Είναι τα πράγματα έτσι πάντα και στην πράξη;
- Υπάρχουν περιπτώσεις όπου σε έναν κόμβο καταφτάνουν ταυτόχρονα πολλαπλά μηνύματα από διαφορετικές κατευθύνσεις και αποστάσεις. Στην παρούσα εργασία απλώς έχουμε αγνοήσει το ενδεχόμενο αυτό. Ίσως, μελλοντικοί αλγόριθμοι να πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τους τη συμφόρηση-συνωστισμό [congestion] στους γειτονικούς κόμβους και τη διαδικασία όπου λαμβάνεται απόφαση δρομολόγησης.
- Η *συνεκτικότητα* μελετήθηκε μόνο σε σχέση με τις σχετικές θέσεις των κόμβων και το αν κάποιος είναι ή όχι μέσα στην ακτίνα εκπομπής του άλλου. Εδώ δεν ασχοληθήκαμε με περιπτώσεις όπου οι κόμβοι εμφανίζονται ή εξαφανίζονται [idle-sleep state] κατά διαστήματα και μάλιστα μη περιοδικά.
- Ίσως θα πρέπει να μελετηθεί και ένα *σενάριο* όπου ένα μήνυμα πρέπει να μεταδοθεί σε κάθε κόμβο σε μια συγκεκριμένη περιοχή (χαρακτηρίζεται και ως «*γεω-διάχυση*» ή *geocasting*, όπως είναι ευρύτερα γνωστό). Ένα τέτοιο σενάριο μπορεί να δίνει απαντήσεις σε προβλήματα όπως η μη ακριβής γνώση των συντεταγμένων του προορισμού.
- Επίσης, το μοντέλο με τη βοήθεια του οποίου μελετήσαμε τη γεωμετρική δρομολόγηση δέχεται ότι οι κόμβοι συνιστούσαν έναν μη κατευθυνόμενο γράφο. Δεχόμαστε δηλαδή ότι αν υπάρχει απευθείας επικοινωνία μεταξύ δύο κόμβων, αυτή είναι αμφίδρομη. Τα πράγματα περιπλέκονται αν προσπαθήσουμε να φανταστούμε περιβάλλοντα όπου η προηγούμενη παραδοχή δεν ισχύει. Τέτοιες περιπτώσεις κατευθυνόμενων επιπεδικών γεωμετρικών δικτύων μελετούν οι Chávez, Dobrev, Kranakis, Opatrny, Stacho και Urrutia στο [12].

Και προφανώς αρκετές άλλες παράμετροι που μας διαφεύγουν.

Βιβλιογραφία

- [1] L. Barrière, P. Fraigniaud, and L. Narayanan: *Robust position-based routing in wireless ad hoc networks with unstable transmission ranges*, in Proceedings of the 5th International Workshop on Discrete Algorithms and Methods for Mobile Computing and Communications, 2001, pp. 19-27.
- [2] S. Basagni, I. Chlamtac, V. R. Syrotiuk, B. A. Woodward: *A distance routing effect algorithm for mobility (DREAM)*, Proc. MOBICOM, 1998, 76-84.
- [3] P. Boone, E. Chavez, L. Gleitzky, E. Kranakis, J. Opatrny, G. Salazar, and J. Urrutia: *Morelia Test: Improving the Efficiency of the Gabriel Test and Face Routing in Ad-hoc Networks*.
- [4] P. Bose, A. Brodnik, S. Carlsson, E. D. Demaine, R. Fleischer, A. López-Ortiz, P. Morin, and J. I. Munro: *Online Routing in Convex Subdivisions*, in International Symposium on Algorithms and Computation, 2000, pp. 47-59.
- [5] P. Bose, L. Devroye, W. Evans, and D. Kirkpatrick: *On the spanning ratio of Gabriel graphs and beta-skeletons*, in Proceedings of the Latin American Theoretical Informatics (LATIN), 2002.
- [6] P. Bose, J. Gudmundsson, and M. Smid: *Constructing plane spanners of bounded degree and low weight*, in Proceedings of the 10th Annual European Symposium on Algorithms (ESA), Springer-Verlag, 2002, pp. 234-246.
- [7] P. Bose and P. Morin: *Online Routing in triangulations*, in Proceedings of the 10th Annual International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC), 1999.
- [8] P. Bose, P. Morin, I. Stojmenovic and J. Urrutia: *Routing with guaranteed delivery in ad hoc wireless networks*, in Proc. of Discrete Algorithms and Methods for Mobility (DIALM'99), pages 48-55.
- [9] F. Buckley and M. Lewinter, *A friendly Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, 2003
- [10] M. Burkhardt, P. von Rickenbach, R. Wattenhofer, and A. Zollinger, *Does topology control reduce interference?*, in Proceedings of the 5th ACM International Symposium on Mobile Ad Hoc Networking and Computing (MobiHoc), ACM Press, 2004, pp. 9-19.
- [11] G. Calinescu, *Computing 2-hop neighborhoods in ad hoc wireless networks*, in Second International Conference on Ad-Hoc, Mobile and Wireless Networks (ADHOC-NOW), vol. 2865, Springer Verlag, October 2003, pp. 175-186.

Βιβλιογραφία

- [12] E. Chávez, S. Dobrev, E. Kranakis, J. Opatrny, L. Stacho, and J. Urrutia: *Route Discovery with Constant Memory in Oriented Planar Geometric Networks*, April 2004.
- [13] E. Chávez, S. Dobrev, E. Kranakis, J. Opatrny, L. Stacho, and J. Urrutia: *Local Construction of Planar Spanners in Unit Disk Graphs with Irregular Transmission Ranges*, March 2005.
- [14] V. Chvatal, *A combinatorial theorem in plane geometry*, J. of Combin. Combinatorica, 10 (1975), pp. 39-41.
- [15] Cisco Systems, Inc., *Reference Guide: Cisco Aironet Antennas and Accessories*, 2004
- [16] B. N. Clark, C. J. Colbourn, and D. S. Johnson: *Unit disk graphs*, Discrete Mathematics, 86 (1990), pp.165-177.
- [17] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein: *Introduction to Algorithms*, Second Edition [appendix B.4 Graph, 1080-1084].
- [18] S. Datta, I. Stojmenovic and J. Wu, *Internal node and Shortcut based routing with guaranteed delivery in wireless networks “Cluster Computing”*, Special issue on, Mobile Ad Hoc Networks, vol. 5, no. 2, pp. 169-178, Apr. 2002.
- [19] Reinhard Diestel: *Graph Theory*, Electronic Edition, Springer-Verlag, New York 1997, 2000.
- [20] D. Dobkin, S. Friedman, and K. Supowit, *Delaunay graphs are almost as good as complete graphs*, Discrete & Computational Geometry, 5:399-407, 1990.
- [21] H. Edelsbrunner, *An acyclic theorem for cell complexes in d dimention*, Combinatorica, 10 (1988), pp. 251-260.
- [22] D. Eppstein: *Beta-skeletons have unbounded dilation*, Tech. Rep. ICS-TR-96-15, University of California, Irvine, 1996.
- [24] B. A. Forouzan, *Data Communications and Networking*, McGraw-Hill Higher Education, New York, New York, second ed. 2001.
- [25] G. G. Finn: *Routing and addressing problems in large metropolitan-scale internetworks*, ISI Research Report ISU/RR-87-180, March 1987.
- [26] K. R. Gabriel and R. R. Sokal, *A new statistical approach to geographic variation analysis*, Systematic Zoology, 18 (1969), pp. 259-278.
- [27] J. Gao and L. Zhang, *Well-separated pair decomposition for the unit-disk graph metric and its applications*, in Proceedings of the 35th annual ACM symposium on Theory of computing, ACM Press, 2003, pp. 483-492.

- [28] J. Gao, L. J. Guibas, J. Hershberger, L. Zhang, and A. Zhu: *Geometric Spanners for Routing in Mobile Networks*, IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. 23, No. 1, 2005.
- [29] S. Ghosh, K. Lilllis, S. Pandit, and S. Pemmaraju: *Robust topology control protocols*, in 8th International Conference On Principle Of Distributed Systems (OPODIS), 2004.
- [30] S. Giordano, I. Stojmenovic, L. Blazevic: *Position Based Routing Algorithms for Ad Hoc Networks: A Taxonomy*.
- [31] T. C. Hou and V. O. K. Li, *Transmission range control in multihop packet radio networks*, IEEE Transactions on Communications, 34, 1, 1986, pp. 38-44.
- [32] J. C. Hansen and E. Schmutz, *Comparison of two CDS algorithms on random unit ball graphs*. Proceedings of the 7th Workshop on Algorithm Engineering and Experiments, 2nd Workshop on Analytic Algorithms and Combinatorics, C. Demetrescu, R. Sedgewick, and R. Tamassia, eds., SIAM, (2005), 208-213
- [33] R. Jain, A. Puri and R. Sengupta: *Geographical routing using partial information for wireless ad-hoc networks*, IEEE Personal Communication, February 2001, 48-57.
- [34] B. Karp and H. Hung, *GPSR: greedy perimeter stateless routing for wireless networks*. In Mobile Computing and Networking, pages 243-254, 2000.
- [35] J. M. Keil and C. A. Gutwin, *The Delaunay triangulation closely approximates the complete Euclidean graph*, in 1st Workshop on Algorithms and Data Structures, Springer-Verlag, 1989, pp. 47-56.
- [36] J. M. Keil and C. A. Gutwin, *Classes of graphs which approximate the complete Euclidean graph*, Discrete Computational Geometry, 7 (1992), pp. 13-28.
- [37] E. Kranakis: *Compasses, Faces, and Butterflies: Route Discovery in Ad-Hoc Networks*, School of Computer Science Carleton University.
- [38] E. Kranakis, H. Singh, and J. Urrutia: *Compass Routing on Geometric Networks*, in Proceedings of the 11th Canadian Conference on Computational Geometry, Vancouver, August 1999, pp. 51-54.
- [39] F. Kuhn, R. Wattenhofer, Y. Zhang, and A. Zollinger: *Geometric ad-hoc Routing: of theory and practice*, in Proceedings of the 22nd Annual Symposium on Principles of the Distributed Computing (PODC), ACM Press, 2003, pp. 63-72.
- [40] F. Kuhn, R. Wattenhofer, and A. Zollinger, *Asymptotically optimal geometric mobile ad-hoc routing*, in Proceedings of the 6th International Workshop on Discrete Algorithms and Methods for Mobile Computing and Communication (Dial-M), ACM Press, 2002, pp. 24-33.

- [41] F. Kuhn, R. Wattenhofer, and A. Zollinger, *Worst-case optimal and average-case efficient geometric ad-hoc routing*, in Proceedings of the 4th ACM International Symposium on Mobile Ad Hoc Networking and Computing (MobiHoc), ACM Press, 2003, pp. 267-278.
- [42] F. Kuhn and A. Zollinger, *Ad-hoc networks beyond unit disk graphs*, in Proceedings of the 2003 Joint Workshop on Foundations of Mobile Computing, ACM Press, 2003, pp. 69-78.
- [43] X.-Y. Li, G. Calinescu, and P.-J. Wan: *Distributed Construction of a planar spanner and routing for ad hoc wireless networks*, in Proceedings of the 21st IEEE Conference on Computer Communications (INFOCOM) vol. 21, 2002, pp. 1268-1277.
- [44] X.-Y. Li, G. Calinescu, P.-J. Wan, and Y. Wang: *Localized Delaunay Triangulation with application in ad hoc wireless networks*, IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 14 (2003), pp. 1035-1047.
- [45] X.-Y. Li, G. P.-J. Wan, and Y. Wang, *Power efficient and sparse spanner for wireless ad hoc networks*, in IEEE International Conference on Communication and Networks (IEEE ICCCN), 2001, pp. 564-567.
- [46] K. Lillis: *Topology Control and Geometric Routing for Wireless Ad Hoc Networks*, November 2004.
- [47] X. Lin, M. Lakshdisi and I. Stojmenovic, *Location based localized alternate, disjoint, multi-path and component routing algorithms for wireless networks*, Proc. ACM Symposium on Mobile Ad Hoc Networking & Computing MobiHoc, Long Beach, California, USA, Oct. 2001.
- [48] Martin Mauve, Jörg Widmer, and Hannes Hartenstein: *A Survey on Position-Based Routing in Mobile Ad-Hoc Networks*.
- [49] R. Nelson and L. Kleinrock: *The spatial capacity of a slotted ALOHA multihop packet radio network with capture*, IEEE Transactions on Communications, 32, 6, 1984, 684-694.
- [50] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, and S. N. Chiu, *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*, John Willey & Sons, second ed., 2000.
- [51] J. Pan, Y. T. Hou, L. Cai, Y. Shi, and S. X. Shen, *Topology control for wireless sensor networks*, in Proceedings of the 9th Annual International Conference on Mobile Computing and Networking(MOBICOM), ACM Press, 2003, pp. 286-299.
- [52] C. Papadimitriou and D. Ratajczak: *On a Conjecture Related to Geometric Routing*, in Proceedings of the 1st International Workshop on Algorithmic Aspects of Wireless Sensor Networks (ALGOSENSORS), Springer-Verlag, 2004, pp. 9-17.

- [53] F. P. Preparata and M. I. Shamos, *Computational Geometry: An Introduction*, Springer Verlag, 1991.
- [54] A. Rao, C. Papadimitriou, S. Shenker, and I. Stoica, *Geographic routing without location information*, in Proceedings of the 9th Annual International Conference on Mobile Computing and Networking(MOBICOM), ACM Press, 2003, pp. 96-108.
- [55] R. Ramanathan and R. Rosales-Hain, *Topology control of multihop wireless networks using transmit power adjustment*, in Proceedings of the 19th Annual Conference of the IEEE Computer and Communications Society (INFOCOM), vol. 2, March 2000, pp. 404-413.
- [56] J. R. Sack and J. Urrutia, *Handbook of Computational Geometry*, North-Holland, 2000.
- [57] S. Skiena, *Implementing discrete mathematics: combinatorics and graph theory with Mathematica*, Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1991.
- [58] W.-Z. Song, Y. Wang, and X.-Y. Li, *Localized algorithms for energy efficient topology in wireless ad hoc networks*, in Proceedings of the 5th ACM International Symposium on Mobile Ad Hoc Networking and Computing (MobiHoc), ACM Press, 2003, pp. 96-108.
- [59] I. Stojmenovic and X. Lin: *Loop-free hybrid single-path/flooding routing algorithms with guaranteed delivery for wireless networks*, IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems.
- [60] G. Srivastava, P. Boustead, and J. F. Chicharo: *A Comparison of Topology Control Algorithms for Ad-Hoc Networks*, 2003.
- [61] H. Takagi and L. Kleinrock: *Optimal transmission ranges for randomly distributed packet radio terminals*, IEEE Transactions on Communications, 32, 3, 1984.
- [62] G. Toussaint: *The Relative neighbourhood graph of a finite planar set*, Pattern Recognition, 12(4):261-268, 1980.
- [63] J. Urrutia. *Routing with Guaranteed Delivery in Geometric and Wireless Networks and Mobile Computing*, chapter 18, pages 393-406. John Wiley & Sons, 2002.
- [64] Y. Wang and X.-Y. Li: *Localized Construction of bounded degree and planar spanner for wireless ad hoc networks*, in Proceedings of the Joint Workshop on Foundation of Mobile Computing, ACM Press, 2003, pp. 59-68.
- [65] R. Wattenhofer: *Ad-hoc and sensor networks: Worst-case vs. average-case*, in International Zurich Seminar on Communications (IZC), 2004.

Βιβλιογραφία

- [66] R. Wattenhofer and A. Zollinger: *XTC: A practical topology control algorithm for ad-hoc networks*, in Proceedings of the 4th International Workshop on Algorithms for Wireless, Mobile, Ad Hoc and Sensor Networks (WMAN), 2004.
- [67] J. Wu and H. Li, *On Calculating Connected Dominating Set for Efficient Routing in Ad Hoc Wireless Networks*, in Proceedings of the 3rd international workshop on Discrete algorithms and methods for mobile computing and communications (DIAL M), p.7-14, August 1999, Seattle, Washington,U.S.A.
- [68] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, no. 154 in Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [69] Δ. Μ. Θηλυκός: *Σημειώσεις στη Θεωρία Γραφημάτων, 2007*, Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.
- [70] Π. Κατερίνης, Πανεπιστημιακές Παραδόσεις: *Ειδικά Θέματα Διακριτών Μαθηματικών*. [σελ. 1-19, Κεφ. 1]
- [71] Popular Science (ελληνική έκδοση), Τεύχος Οκτωβρίου 2006, σελ. 28-29.