Τροπική Λογική και Αποδειξιμότητα

Αναστασία - Μαρία Φασούλη

Διπλωματική εργασία

Επιβλέπων καθηγητής: Κωνσταντίνος Δημητρακόπουλος

μΠλ∀
Λογική και Θεωρία Αλγορίθμων και Υπολογισμού
Διαπανεπιστημιακό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

Αθήνα, Ιούνιος 2007

Πρόλογος

Η τροπική λογική αρχικά εισήχθη από τον Lewis το 1918 για να διαχωρίσει τις έννοιες της αλήθειας και της αναγκαιότητας μιας πρότασης, ώστε να αποφευχθούν τα παράδοξα που προέκυπταν αν οι δύο έννοιες συγχέονταν. Για παράδειγμα είναι αλήθεια ότι η γη έχει ακριβώς ένα φυσικό δορυφόρο, όμως δεν είναι *αναγκαίο*: Θα ήταν *δυνατό* η γη να έχει περισσότερους ή και κανέναν. Αυτές τις έννοιες ήρθαν να εκφράσουν αντίστοιχα οι τροπικοί τελεστές $\Box$ και $\Diamond$. Στην πορεία οι ίδιοι αυτοί τελεστές, με διαφορετικά αξιώματα να ορίζουν τη λειτουργία τους, άρχισαν να διαφοροποιούνται από την αρχική τους σημασία και να εκφράζουν έννοιες όπως πεποίθηση, γνώση, χρονικές και δεοντολογικές έννοιες, και βρήκαν θέση στη θεωρητική πληροφορική.

Σε αυτή την εργασία θα δούμε ότι με κατάλληλη αξιωματικοποίηση (χρησιμοποιώντας το τυποποιημένο θεώρημα του Löb ως το κύριο αξίωμα του συστήματος) οι τελεστές αυτοί εκφράζουν την αποδειξιμότητα και τη συνέπεια αντίστοιχα στην αριθμητική του Peano, PA. Η λογική που προκύπτει λέγεται *λογική της αποδειξιμότητας* ή GL προς τιμή των Gödel και M. H. Löb. Έτσι για παράδειγμα η τροπική πρόταση $\neg\Box\bot \rightarrow \neg\Box\neg\Box\bot$ εκφράζει ότι αν η αριθμητική του Peano είναι συνεπής, τότε δεν αποδεικνύεται σε αυτήν η συνέπειά της, εκφράζει δηλαδή το δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας.

Αφού δούμε χωριστά κάποιες ιδιότητες που αφορούν το GL και την PA, θα ερευνήσουμε τον τρόπο με τον οποίο σχετίζονται και θα αποδείξουμε θεωρήματα εγκυρότητας και πληρότητας του GL ως προς την PA. Αποτελέσματα όπως το θεώρημα του σταθερού σημείου για το GL, η αποκρισιμότητα του GL και η αναδρομικότητα του συνόλου των αληθών προτάσεών του, που δεν έχουν προτασιακές μεταβλητές, θα μπορούν να μεταφραστούν σε αποτελέσματα σχετικά με προτάσεις της PA που αφορούν τη συνέπειά της και αυτοαναφορικές προτάσεις, όπως η πρόταση που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του πρώτου θεωρήματος μη πληρότητας. Θα δούμε τέλος και κάποια αποτελέσματα για το GL που έχουν ενδιαφέρον ανεξάρτητα από τις εφαρμογές τους στην PA.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όσους από το οικογενειακό και φιλικό μου περιβάλλον στήριξαν την προσπάθεια αυτή, αλλά και εκείνους που απλά προσφέρθηκαν να βοηθήσουν. Ευχαριστώ ακόμα όλους τους καθηγητές μου για τις γνώσεις που αποκόμισα κατά τη φοίτησή μου στο γόνιμο περιβάλλον του Μ.Π.Λ.Α. Ευχαριστώ ιδιαιτέρως τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κωνσταντίνο Δημητρακόπουλο, στον οποίο οφείλω όχι μόνο την ιδέα για το πολύ ενδιαφέρον θέμα της εργασίας αυτής, αλλά και το ότι μου ξύπνησε την αγάπη για τη μαθηματική λογική όσο ήμουν ακόμη προπτυχιακή φοιτήτρια και, κατ' επέκταση, έγινε η αιτία να ακολουθήσω τον κύκλο σπουδών του Μ.Π.Λ.Α. Τον ευχαριστώ για το χρόνο που αφιέρωσε, παρά τις αυξημένες υποχρεώσεις του, στο να παρακολουθεί στενά την προετοιμασία της εργασίας αυτής, αλλά και για την γενικότερη υποστήριξή του.

Περιεχόμενα

1. Το GL και η σχέση του με άλλα συστήματα τροπικής λογικής

1.1 Ορισμοί

Ορισμός 1.1.1. Έστω μια άπειρη ακολουθία συμβόλων, της οποίας τα πέντε πρώτα σύμβολα είναι: $\bot$ (“πάτος, αντίφαση”), $\to$, $\Box$ (“τετράγωνο”), (και), και τα υπόλοιπα είναι προτασιακές μεταβλητές $p_0, p_1, \dots$.

Θα χρησιμοποιούμε τα “p”, “q”, ... ως συντακτικές μεταβλητές που παίρνουν τιμές από τα $p_0, p_1, \dots$ και τα “A”, “B”, ... ως μεταβλητές τροπικών προτάσεων. Αναδρομικά ορίζουμε τώρα ποιες ακολουθίες θα λέγονται **τροπικές (modal) προτάσεις**:

- Η $\bot$ είναι τροπική πρόταση.
- Κάθε προτασιακή μεταβλητή είναι τροπική πρόταση.
- Αν οι A και B είναι τροπικές προτάσεις, τότε και η $(A \to B)$ είναι τροπική πρόταση.
- Αν η A είναι τροπική πρόταση τότε και η $\Box(A)$ είναι τροπική πρόταση.

Στο εξής με τη λέξη ‘πρόταση’ θα εννοούμε “τροπική πρόταση”.

Παρατήρηση 1.1.1. Όπως και στην κλασικό προτασιακό λογισμό

1. με τη βοήθεια των $\bot$, $\to$ και $\Box$ μπορούμε να ορίσουμε και τους υπόλοιπους συνδέσμους:

$$\begin{aligned}
\neg A &\overset{\text{ορ}}{=} (A \to \bot) \\
A \lor B &\overset{\text{ορ}}{=} \neg A \to B \\
A \land B &\overset{\text{ορ}}{=} \neg(A \to B) \\
A \leftrightarrow B &\overset{\text{ορ}}{=} (A \to B) \land (B \to A) \\
\top &\overset{\text{ορ}}{=} \bot \to \bot && \text{(“κορυφή”, “αλήθεια”)} \\
\Diamond A &\overset{\text{ορ}}{=} \neg\Box\neg A && \text{(“ρόμβος”)}
\end{aligned}$$

2. Ισχύει το **λήμμα μοναδικής αναγνωσιμότητας**.

3. Παραλείπουμε μερικές παρενθέσεις σύμφωνα με τους κανόνες:

   - Παραλείπουμε τις εξωτερικές παρενθέσεις.
   - Τα $\neg$, $\Box$ και $\Diamond$ θεωρούνται ισχυρότερα από τους υπόλοιπους συνδέσμους και τα $\vee$ και $\wedge$ θεωρούνται ισχυρότερα από τα $\rightarrow$ και $\leftrightarrow$.
   - Τα $\Box$ και $\Diamond$ θεωρούνται ισοδύναμα μεταξύ τους και το ίδιο ισχύει για τα $\vee$ και $\wedge$ και για τα $\rightarrow$ και $\leftrightarrow$.

4. Μπορούμε να αποδεικνύουμε θεωρήματα με τη βοήθεια της **αρχής της επαγωγής**:

   Έστω μια ιδιότητα $\mathscr{P}$ στις τροπικές προτάσεις τέτοια ώστε $\mathscr{P}(p)$ για κάθε προτασιακή μεταβλητή p, $\mathscr{P}(\bot)$ και για κάθε A αν $\mathscr{P}(A)$ τότε $\mathscr{P}(\neg A)$ και $\mathscr{P}(\Box A)$. Τότε για κάθε τροπική πρόταση A ισχύει ότι $\mathscr{P}(A)$.

Ορισμός 1.1.2. Αναδρομικά ορίζουμε την έννοια της **υποπρότασης**:

- Η A είναι υποπρόταση της A.
- Αν $B \rightarrow C$ είναι υποπρόταση της A τότε οι B, C είναι υποπροτάσεις της A.
- Αν $\Diamond B$ είναι υποπρόταση της A τότε η B είναι υποπρόταση της A.

Λέμε ότι μια προτασιακή μεταβλητή p **περιέχεται** σε μια πρόταση A ανν η p είναι υποπρόταση της A.

Ορισμός 1.1.3. Αμετάβλητες (letterless) προτάσεις λέγονται εκείνες οι προτάσεις που δεν περιέχουν προτασιακές μεταβλητές.

Για παράδειγμα οι $\bot$, $\bot \rightarrow \bot$ και $\Box(\Box\bot \rightarrow \bot) \rightarrow \Box\bot$ είναι αμετάβλητες προτάσεις.

Ορισμός 1.1.4. Ένα **(αξιωματικό) σύστημα προτασιακής τροπικής λογικής** αποτελείται από

- ένα σύνολο προτάσεων που λέγονται **αξιώματα** και
- ένα σύνολο που αποτελείται από σχέσεις προτάσεων που λέγονται **αποδεικτικοί κανόνες**.

Ορισμός 1.1.5. Η πρόταση B είναι **άμεση συνέπεια των (deducible from)** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ βάση του αποδεικτικού κανόνα R, ανν $(A_1, A_2, \ldots, A_n, B) \in R$.

Ορισμός 1.1.6. Απόδειξη σε ένα σύστημα είναι μια πεπερασμένη ακολουθία προτάσεων τέτοια ώστε κάθε πρόταση της είτε είναι αξίωμα του συστήματος είτε είναι άμεση συνέπεια προηγούμενων προτάσεων βάση κάποιου αποδεικτικού κανόνα.

Ορισμός 1.1.7. Η πρόταση B λέγεται **θεώρημα** σε ένα σύστημα L ανν υπάρχει μια απόδειξη $A_1, A_2, \ldots, A_n$ στο L ώστε $B = A_n$. Τότε η $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι απόδειξη *του* B και γράφουμε $\mathrm{L} \vdash B$.

Ορισμός 1.1.8. Ένα σύνολο προτάσεων λέγεται **κλειστό ως προς** έναν αποδεικτικό κανόνα ανν περιέχει όλες τις προτάσεις που είναι άμεση συνέπεια των μελών του συνόλου, βάση του κανόνα.

Ορισμός 1.1.9. Έστω μία πρόταση F. Το αποτέλεσμα $F_p(A)$ (ή συντομότερα $F(A)$, αν η ταυτότητα της p προκύπτει από τα συμφραζόμενα) της **αντικατάστασης** της προτασιακής μεταβλητής p από την A στο F ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

- αν $F = p$, τότε $F_p(A) = A$,
- αν η F είναι μια προτασιακή μεταβλητή $q \neq p$, τότε $F_p(A) = q$,
- αν $F = \bot$, τότε $F_p(A) = \bot$,
- $(F \to G)_p(A) = F_p(A) \to G_p(A)$,
- $(\Box F)_p(A) = \Box(F_p(A))$.

Κάθε πρόταση $F_p(A)$ καλείται **στιγμιότυπο αντικατάστασης (substitution instance)** της F.

Ορισμός 1.1.10. Αν $p_1, p_2, \ldots, p_n$ είναι διακριτές προτασιακές μεταβλητές και $F, A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι προτάσεις, ορίζουμε την **ταυτόχρονη αντικατάσταση** $F_{p_1,p_2,\ldots,p_n}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ ανάλογα:

- αν $F = p_i$ για $1 \leqslant i \leqslant n$, τότε $F_{p_1,p_2,\ldots,p_n}(A_1, A_2, \ldots, A_n) = A_i$,
- αν η F είναι μια προτασιακή μεταβλητή $q \neq p_1, p_2, \ldots, p_n$,
  τότε $F_{p_1,p_2,\ldots,p_n}(A_1, A_2, \ldots, A_n) = q$,
- αν $F = \bot$, τότε $F_{p_1,p_2,\ldots,p_n}(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \bot$,
- $(F \to G)_p(A) = (F_{p_1,p_2,\ldots,p_n}(A_1, A_2, \ldots, A_n)) \to$
  $G_{p_1,p_2,\ldots,p_n}(A_1, A_2, \ldots, A_n))$,
- $\Box F_{p_1,p_2,\ldots,p_n}(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \Box(F_{p_1,p_2,\ldots,p_n}(A_1, A_2, \ldots, A_n))$.

Παρατήρηση 1.1.2. Η πρόταση $F_p(A)_q(B)$ δεν είναι απαραίτητα ισοδύναμη με την $F_{p,q}(A, B)$: Για παράδειγμα έστω $F = p \to q$, $A = q$ και $B = r$. Τότε $F_p(A) = q \to r$, $F_p(A)_q(B) = r \to r$, όμως $F_{p,q}(A, B) = q \to r$.

Παρ' όλ' αυτά αν ένα σύνολο προτάσεων είναι κλειστό ως προς τη (συνηθισμένη) αντικατάσταση είναι κλειστό και κάτω από την ταυτόχρονη: Έστω ότι οι $q_1, q_2, \ldots, q_n$ είναι **φρέσκες** προτασιακές μεταβλητές (δηλαδή καμία από αυτές δεν ταυτίζεται με κάποια από τις $p_1, p_2, \ldots, p_n$ και ότι δεν εμφανίζονται πουθενά στις $F, A_1, A_2, \ldots, A_n$). Τότε

$$F_{p_1,p_2,\ldots,p_n}(A_1, A_2, \ldots, A_n) = F_{p_1}(q_1)_{p_2}(q_2)\ldots_{p_n}(q_n)_{q1}(A_1)_{q2}(A_2)..._{qn}(A_n)$$

Έτσι αν κάποιο σύνολο είναι κλειστό ως προς τη (συνηθισμένη) αντικατάσταση θα περιέχει το $F_{p_1}(q_1)_{p_2}(q_2)\ldots_{p_n}(q_n)_{q1}(A_1)_{q2}(A_2)\ldots_{qn}(A_n)$
άρα το $F_{p_1,p_2,\ldots,p_n}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$

Ορισμός 1.1.11. Modus ponens είναι η σχέση που περιέχει όλες τις τριάδες της μορφής $((A \to B), A, B)$. **Γενίκευση (generalization ή necessitation)** είναι η σχέση που περιέχει όλα τα ζεύγη της μορφής $(A, \Box A)$.

Αντικατάσταση είναι η σχέση που περιέχει όλα τα ζεύγη $(F, F_p(A))$.

Ορισμός 1.1.12. Ταυτολογία σε ένα σύστημα τροπικής λογικής λέγεται ένα στιγμιότυπο αντικατάστασης μιας προτασιακής ταυτολογίας.

Ορισμός 1.1.13. Επιμεριστικό αξίωμα (distribution axiom) είναι μια πρόταση της μορφής $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

Ορισμός 1.1.14. Ένα σύστημα λέγεται **κανονικό (normal)** ανν το σύνολο των προτάσεών του

- περιέχει όλες τις ταυτολογίες και όλα τα επιμεριστικά αξιώματα και
- είναι κλειστό ως προς τους κανόνες modus ponens, γενίκευσης και αντικατάστασης.

Παρατήρηση 1.1.3. Σύμφωνα με τον αρχικό ορισμό του Kripke, τα αξιώματα ενός κανονικού συστήματος έπρεπε να περιέχουν και όλες τις προτάσεις της μορφής $\Box A \to A$. Η έννοια έγινε αργότερα γενικότερη ώστε να συμπεριλάβει και άλλα "αρκετά κανονικά" συστήματα, όπως το GL που θα μελετήσουμε.

1.2 Εφτά κανονικά συστήματα τροπικής λογικής

Στη συνέχεια παρουσιάζονται εφτά κανονικά συστήματα της τροπικής λογικής.

- Το σύνολο αξιωμάτων κάθε συστήματος περιέχει όλες τις ταυτολογίες και όλα τα επιμεριστικά αξιώματα.
- Τα υπόλοιπα αξιώματα κάθε συστήματος είναι:

Σύστημα	Αξιώματα
K	(Δεν έχει άλλα αξιώματα)
K4	$\Box A \to \Box\Box A$
T	$\Box A \to A$
S4	$\Box A \to A, \quad \Box A \to \Box\Box A$
B	$\Box A \to A, \quad A \to \Box\Diamond A$
S5	$\Box A \to A, \quad \Diamond A \to \Box\Diamond A$
GL	$\Box(\Box A \to A) \to \Box A$

  Το αξίωμα $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$ λέγεται αξίωμα του Löb.

- Οι αποδεικτικοί κανόνες είναι ο modus ponens και η γενίκευση.

Παρατήρηση 1.2.1. Οι προτάσεις στον πίνακα είναι **αξιωματικά σχήματα** δηλαδή αξίωμα θεωρείται κάθε στιγμιότυπο αντικατάστασης τους.

Ορισμός 1.2.1. Το σύστημα L′ **επεκτείνει** το σύστημα L, ανν κάθε θεώρημα του L είναι και θεώρημα του L′. Το L′ λέγεται **επέκταση** του L. Συμβολικά $\mathrm{L}' \supseteq \mathrm{L}$ και $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{L}'$.

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει άμεσα ότι

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{GL} & & \\ & & \rotatebox{90}{$\subseteq$} & & \\ & & \mathrm{K} & \subseteq & \mathrm{K4} \\ & & \rotatebox{-90}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-90}{$\subseteq$} \\ \mathrm{S5} & \supseteq & \mathrm{T} & \subseteq & \mathrm{S4} \\ & & \rotatebox{-90}{$\subseteq$} & & \\ & & \mathrm{B} & & \end{array}$$

Μετά το τέλος της παραγράφου 3.2.1 θα γίνει φανερό ότι K4⊆ GL, S4⊆S5 και B⊆S5. Έτσι ο παραπάνω πίνακας θα γίνει:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{K} & \subseteq & \mathrm{K4} & \subseteq & \mathrm{GL} \\ \rotatebox{-90}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-90}{$\subseteq$} & & \\ \mathrm{T} & \subseteq & \mathrm{S4} & & \\ \rotatebox{-90}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-90}{$\subseteq$} & & \\ \mathrm{B} & \subseteq & \mathrm{S5} & & \end{array}$$

Πρόταση 1.2.1. *Τα εφτά παραπάνω συστήματα είναι κανονικά.*

Απόδειξη. Έστω L ένα από τα παραπάνω συστήματα. Σύμφωνα με τον ορισμό 1.1.14 μένει μόνο να αποδειχθεί ότι είναι κλειστό ως προς την αντικατάσταση, δηλαδή ότι κάθε στιγμιότυπο αντικατάστασης ενός θεωρήματος είναι και αυτό θεώρημα. Έστω μια απόδειξη $F^1, \ldots, F^n$ στο L. Τότε θα δείξουμε ότι και η $F_p^1(A), \ldots, F_p^n(A)$ είναι απόδειξη.

- Αν η F^i είναι αξίωμα του L, τότε και η $F_p^i(A)$ είναι αξίωμα.
- Αν η F^i είναι άμεση συνέπεια των F^j και $F^l = F^j \to F^i$ βάση του modus ponens τότε και το $F_p^i(A)$ είναι άμεση συνέπεια των $F_p^j(A)$ και $F_p^l(A) = (F^j \to F^i)_p(A) = F_p^j(A) \to F_p^i(A)$ βάση του modus ponens.
- Αν η $F^i = \Box F^j$ είναι άμεση συνέπεια της F^j βάση της γενίκευσης τότε και το $F_p^i(A) = (\Box F^j)_p(A) = \Box(F_p^j(A))$ είναι άμεση συνέπεια της $F_p^j(A)$ βάση της γενίκευσης.

Επομένως αν η F^n έχει μια απόδειξη στο L, τότε και το στιγμιότυπο αντικατάστασής της, η $F_p^n(A)$, έχει μια απόδειξη στο L. $\dashv$

Παρατήρηση 1.2.2. Δεν πρέπει να συγχέουμε την πρόταση $A \to \Box A$ με τον κανόνα γενίκευσης. Ο κανόνας αυτός χρησιμεύει μόνο στο να παράγει νέα θεωρήματα από παλιά. Έτσι αν $\mathrm{K} \vdash A$ τότε $\mathrm{K} \vdash \Box A$ και άρα $\mathrm{K}, A \vdash \Box A$ ενώ $\mathrm{K} \nvdash A \to \Box A$. Συνεπώς $\mathrm{K}, A \vdash B \not\Rightarrow \mathrm{K} \vdash A \to B$. Δηλαδή δεν ισχύει το θεώρημα της Απαγωγής στο σύστημα K.

1.3 Τυπικά θεωρήματα

Στο εξής, εκτός αν δηλωθεί το αντίθετο, θεωρούμε ότι το L παριστάνει ένα κανονικό σύστημα.
Επίσης θα γράφουμε $A \leftrightarrow B, \leftrightarrow C$ κλπ. αντί για $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)$ κλπ.

Πρόταση 1.3.1. *Κάθε κανονικό σύστημα* L *είναι κλειστό ως προς τους κανόνες προτασιακού λογισμού (truth-functional consequence).*

Απόδειξη. Έστω ότι B είναι το συμπέρασμα ενός κανόνα προτασιακού λογισμού από τα θεωρήματα $A_1, \ldots, A_n$ του L.

Τότε $\mathrm{L} \vdash A_1 \to (\cdots \to (A_n \to B) \ldots)$ (ταυτολογία)
Άρα $\mathrm{L} \vdash B$ (εφαρμογή του κανόνα modus ponens n φορές)

⊣

Πρόταση 1.3.2. *Αν* $\mathrm{L} \vdash A \to B$ *τότε* $\mathrm{L} \vdash \Box A \to \Box B$.

Απόδειξη.
1. $\mathrm{L} \vdash A \to B$ (υπόθεση)
2. $\mathrm{L} \vdash \Box(A \to B)$ (1, γενίκευση)
3. $\mathrm{L} \vdash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ (επιμεριστικό αξίωμα)
4. $\mathrm{L} \vdash \Box A \to \Box B$ (2, 3, modus ponens)

⊣

Πόρισμα 1.3.3. *Αν* $\mathrm{L} \vdash A \leftrightarrow B$ *τότε* $\mathrm{L} \vdash \Box A \leftrightarrow \Box B$.

Απόδειξη.
1. $\mathrm{L} \vdash A \leftrightarrow B$ (υπόθεση)
2. $\mathrm{L} \vdash A \to B$ και $\mathrm{L} \vdash B \to A$ (1, προτασιακός λογισμός)
3. $\mathrm{L} \vdash \Box A \to \Box B$ και $\mathrm{L} \vdash \Box B \to \Box A$ (2, πρόταση 1.3.2)
4. $\mathrm{L} \vdash \Box A \leftrightarrow \Box B$ (3, προτασιακός λογισμός)

⊣

Πρόταση 1.3.4. *Αν* $\mathrm{L} \vdash A \to B$ *τότε* $\mathrm{L} \vdash \Diamond A \to \Diamond B$.

Απόδειξη.
1. $\mathrm{L} \vdash A \to B$ (υπόθεση)
2. $\mathrm{L} \vdash \neg B \to \neg A$ (1, προτασιακός λογισμός)
3. $\mathrm{L} \vdash \Box\neg B \to \Box\neg A$ (2, πρόταση 1.3.2)
4. $\mathrm{L} \vdash \neg\Box\neg A \to \neg\Box\neg B$ (3, προτασιακός λογισμός)
5. $\mathrm{L} \vdash \Diamond A \to \Diamond B$ (ορισμός του $\Diamond$)

⊣

Πόρισμα 1.3.5. *Αν* $\mathrm{L} \vdash A \leftrightarrow B$ *τότε* $\mathrm{L} \vdash \Diamond A \leftrightarrow \Diamond B$.

Απόδειξη. Όμοια με την απόδειξη του 1.3.3. ⊣

Πρόταση 1.3.6. $\mathrm{L} \vdash \Box(A \wedge B) \leftrightarrow \Box A \wedge \Box B$.

Απόδειξη.
1. L $\vdash A \wedge B \to A$ και $\vdash A \wedge B \to B$ (ταυτολογία)
2. L $\vdash \Box(A \wedge B) \to \Box A$ και L $\vdash \Box(A \wedge B) \to \Box B$ (1, πρόταση 1.3.2)
3. L $\vdash \Box(A \wedge B) \to \Box A \wedge \Box B$ (2, προτασιακός λογισμός)
4. L $\vdash A \to (B \to (A \wedge B))$ (ταυτολογία)
5. L $\vdash \Box A \to \Box(B \to (A \wedge B))$ (4, πρόταση 1.3.2)
6. L $\vdash \Box(B \to (A \wedge B)) \to (\Box B \to \Box(A \wedge B))$ (επιμεριστικό αξίωμα)
7. L $\vdash \Box A \to (\Box B \to \Box(A \wedge B))$ (5, 6, προτασιακός λογισμός)
8. L $\vdash \Box A \wedge \Box B \to \Box(A \wedge B)$ (7, προτασιακός λογισμός)
9. L $\vdash \Box A \wedge \Box B \leftrightarrow \Box(A \wedge B)$ (3, 8, προτασιακός λογισμός)

$\dashv$

Πόρισμα 1.3.7. L $\vdash \Box(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \leftrightarrow \Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο n, χρησιμοποιώντας την πρόταση 1.3.6. $\dashv$

Πρόταση 1.3.8. L $\vdash \Diamond(A \vee B) \leftrightarrow \Diamond A \vee \Diamond B$.

Απόδειξη.
1. L $\vdash \Box(\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow \Box\neg A \wedge \Box\neg B$ (πρόταση 1.3.6)
2. L $\vdash \neg\Box(\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg(\Box\neg A \wedge \Box\neg B)$ (1, προτασιακός λογισμός)
3. L $\vdash \neg\Box\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg\Box\neg A \vee \Box\neg B$ (1, προτασιακός λογισμός)
4. L $\vdash \Diamond(A \vee B) \leftrightarrow \Diamond A \vee \Diamond B$ (ορισμός του $\Diamond$)

$\dashv$

Πόρισμα 1.3.9. L $\vdash \Diamond(A_1 \vee \cdots \vee A_n) \leftrightarrow \Diamond A_1 \vee \cdots \vee \Diamond A_n$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο n, χρησιμοποιώντας την πρόταση 1.3.8. $\dashv$

Θεώρημα 1.3.10. Το πρώτο θεώρημα αντικατάστασης. *Για κάθε πρόταση F, αν* L $\vdash A \leftrightarrow B$, *τότε* L $\vdash F_p(A) \leftrightarrow F_p(B)$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του F.

- Αν $F = \bot$, το ζητούμενο είναι L $\vdash \bot = \bot$ που ισχύει.
- Αν $F = q$, με $q \neq p$, το ζητούμενο είναι L $\vdash q \to q$ που ισχύει.
- Αν $F = p$, το ζητούμενο είναι L $\vdash A \to B$ που ισχύει.
- Αν $F = G \to H$ το ζητούμενο είναι L $\vdash (G \to H)_p(A) \leftrightarrow (G \to H)_p(B)$, δηλαδή από τον ορισμό της αντικατάστασης L $\vdash (G_p(A) \to H_p(A)) \leftrightarrow (G_p(B) \to H_p(B))$. Η επαγωγική υπόθεση δίνει L $\vdash G_p(B) \to G_p(A)$ και L $\vdash H_p(A) \to H_p(B)$ και άρα με προτασιακό λογισμό έχουμε την ορθή φορά της ισοδυναμίας. Παρόμοια μπορεί να δειχθεί και η αντίστροφη.
- Αν η $F = \Box G$ το ζητούμενο είναι L $\vdash (\Box G)_p(A) \leftrightarrow (\Box G)_p(B)$, δηλαδή από τον ορισμό της αντικατάστασης L $\vdash \Box(G_p(A)) \leftrightarrow \Box(G_p(B)$. Η επαγωγική υπόθεση είναι L $\vdash G_p(A) \leftrightarrow G_p(B)$ και γενικεύοντας έχουμε το αποτέλεσμα. $\dashv$

Πρόταση 1.3.11. L $\vdash \Box(A \vee B) \to \Diamond A \vee \Box B$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το πρώτο θεώρημα αντικατάστασης, τον ορισμό του $\Diamond$ και νόμους του προτασιακού λογισμού έχουμε διαδοχικά:
$\mathrm{L} \vdash \Box(A \vee B) \rightarrow \Box(\neg A \rightarrow B), \rightarrow (\Box\neg A \rightarrow \Box B), \rightarrow (\neg\Diamond A \rightarrow \Box B),$
$\rightarrow (\Diamond A \vee \Box B).$ $\dashv$

Πρόταση 1.3.12. $\mathrm{L} \vdash \Box A \wedge \Diamond B \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας ξανά το πρώτο θεώρημα αντικατάστασης, τον ορισμό του $\Diamond$ και νόμους του προτασιακού λογισμού έχουμε διαδοχικά:
$\mathrm{L} \vdash \Box A \wedge \Diamond B \rightarrow \Box A \wedge \neg\Box\neg B, \rightarrow \neg(\Box A \rightarrow \Box\neg B), \rightarrow \neg\Box(A \rightarrow \neg B),$
$\rightarrow \Diamond\neg(A \rightarrow \neg B), \rightarrow \Diamond(A \wedge B).$ $\dashv$

Στο εξής θα αναφερόμαστε στα αποτελέσματα των παραπάνω προτάσεων ως κανονικότητα.

Πρόταση 1.3.13. $\mathrm{GL} \vdash \Box A \rightarrow \Box\Box A$, *δηλαδή το* GL *επεκτείνει το* K4.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το πρώτο θεώρημα αντικατάστασης και θέτοντας $B = A \wedge \Box A$ έχουμε

1. $\mathrm{GL} \vdash A \wedge \Box A \wedge \Box\Box A \rightarrow A \wedge \Box A$	(ταυτολογία)
2. $\mathrm{GL} \vdash A \rightarrow (\Box A \wedge \Box\Box A \rightarrow A \wedge \Box A)$	(1, προτασιακός λογισμός)
3. $\mathrm{GL} \vdash A \rightarrow (\Box(A \wedge \Box A) \rightarrow (A \wedge \Box A))$	(2, κανονικότητα)
4. $\mathrm{GL} \vdash A \rightarrow (\Box B \rightarrow B)$	(3, ορισμός του B)
5. $\mathrm{GL} \vdash \Box A \rightarrow \Box(\Box B \rightarrow B)$	(4, κανονικότητα)
6. $\mathrm{GL} \vdash \Box(\Box B \rightarrow B) \rightarrow \Box B$	(5, αξίωμα του Löb)
7. $\mathrm{GL} \vdash \Box A \rightarrow \Box B$	(5, 6, προτασιακός λογισμός)
8. $\mathrm{GL} \vdash \Box A \rightarrow \Box(A \wedge \Box A)$	(7, ορισμός του B)
9. $\mathrm{GL} \vdash \Box A \rightarrow \Box A \wedge \Box\Box A$	(8, κανονικότητα)
10. $\mathrm{GL} \vdash \Box A \rightarrow \Box\Box A$	(9, προτασιακός λογισμός)

$\dashv$

Παρατήρηση 1.3.1. Η πρόταση 1.3.13 έχει ως αποτέλεσμα ότι το GL επεκτείνει το K4 και συνεπώς αν $\mathrm{K4} \vdash A$ τότε $\mathrm{GL} \vdash A$.

Πρόταση 1.3.14. $\mathrm{GL} \vdash \Box(\Box A \rightarrow A) \leftrightarrow \Box A$.

Απόδειξη.

1. $\mathrm{GL} \vdash \Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$	(αξίωμα του Löb)
2. $\mathrm{GL} \vdash A \rightarrow (\Box A \rightarrow A)$	(ταυτολογία)
3. $\mathrm{GL} \vdash \Box A \rightarrow \Box(\Box A \rightarrow A)$	(2, κανονικότητα)
4. $\mathrm{GL} \vdash \Box(\Box A \rightarrow A) \leftrightarrow \Box A$	(1, 3, προτασιακός λογισμός)

$\dashv$

Πρόταση 1.3.15. $\mathrm{GL} \vdash \Box(\Box A \wedge A) \leftrightarrow \Box A$.

Απόδειξη.

1. $\mathrm{GL} \vdash \Box A \rightarrow \Box\Box A$	(αξίωμα του K4)
2. $\mathrm{GL} \vdash \Box\Box A \wedge \Box A \leftrightarrow \Box A$	(1, προτασιακός λογισμός)
3. $\mathrm{GL} \vdash \Box(\Box A \wedge A) \leftrightarrow A$	(2, κανονικότητα)

$\dashv$

Ορισμός 1.3.1. Για κάθε πρόταση A ορίζουμε την $\boxdot A \overset{\text{ορ}}{=} A \wedge \Box A$.

Ο παραπάνω ορισμός έχει νόημα, αφού, όπως θα δούμε στη συνέχεια, η πρόταση $\Box A \to A$ δεν είναι εν γένει θεώρημα του K, K4 ή του GL.

Πρόταση 1.3.16. $\mathrm{K4} \vdash \Box \boxdot A \leftrightarrow \boxdot\Box A, \leftrightarrow \Box A$.

Απόδειξη. Από την κανονικότητα του K4 έχουμε:
$\Box \boxdot A \overset{\text{ορ}}{=} \Box(A \wedge \Box A) \leftrightarrow \Box A \wedge \Box\Box A \overset{\text{ορ}}{=} \boxdot\Box A$.
και από την πρόταση 1.3.15, $\mathrm{GL} \vdash \Box \boxdot A \leftrightarrow \Box A$

$\dashv$

Πρόταση 1.3.17. $\mathrm{K4} \vdash \boxdot A \leftrightarrow \boxdot \boxdot A$.

Απόδειξη.
1. $\mathrm{K4} \vdash \boxdot \boxdot A \overset{\text{ορ}}{=} \boxdot A \wedge \Box \boxdot A \overset{\text{ορ}}{=} A \wedge \Box A \wedge \Box(A \wedge \Box A)$
$\leftrightarrow A \wedge \Box A \wedge \Box A \wedge \Box\Box A, \leftrightarrow A \wedge \Box A \wedge \Box\Box A$ (ορισμός του $\boxdot$, ταυτολογίες)
2. $\mathrm{K4} \vdash A \wedge \Box A \wedge \Box\Box A \to A \wedge \Box A$ (ταυτολογία)
3. $\mathrm{K4} \vdash \Box A \to \Box\Box A$ (αξίωμα του K4)
4. $\mathrm{K4} \vdash A \wedge \Box A \to A \wedge \Box A \wedge \Box\Box A$ (3, προτασιακός λογισμός)
5. $\mathrm{K4} \vdash \boxdot A \leftrightarrow \boxdot \boxdot A$ (1, 2, 3, προτασιακός λογισμός)

$\dashv$

Πρόταση 1.3.18. *Αν το* L *επεκτείνει το* K4 *(όπως το* GL*) και* $\mathrm{L} \vdash \boxdot A \to B$, *τότε* $\mathrm{L} \vdash \Box A \to \Box B$ *και* $\mathrm{L} \vdash \boxdot A \to \boxdot B$.

Απόδειξη.
1. $\mathrm{L} \vdash \boxdot A \to B$ (υπόθεση)
2. $\mathrm{L} \vdash \Box \boxdot A \to \Box B$ (1, κανονικότητα)
3. $\mathrm{L} \vdash \Box A \to \Box B$ (2, πρόταση 1.3.16)
4. $\mathrm{L} \vdash \boxdot A \overset{\text{ορ}}{=} A \wedge \Box A \to \Box A$ (ταυτολογία)
5. $\mathrm{L} \vdash \boxdot A \to \Box B$ (3, 4, προτασιακός λογισμός)
6. $\mathrm{L} \vdash \boxdot A \to B \wedge \Box B$ (1, 5, προτασιακός λογισμός)
7. $\mathrm{L} \vdash \boxdot A \to \boxdot B$ (ορισμός του $\boxdot$)

$\dashv$

Θεώρημα 1.3.19. Το δεύτερο θεώρημα αντικατάστασης.
$\mathrm{K4} \vdash \boxdot(A \leftrightarrow B) \to (F_p(A) \leftrightarrow F_p(B))$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του F, τυποποιώντας στο K4 την απόδειξη του πρώτου θεωρήματος αντικατάστασης 1.3.10.

- Αν $F = \bot$, αρκεί $\mathrm{K4} \vdash \boxdot(A \leftrightarrow B) \to (\bot \to \bot)$ που ισχύει ως ταυτολογία.
- Αν $F = q$, με $q \neq p$, αρκεί $\mathrm{K4} \vdash \boxdot(A \leftrightarrow B) \to (q \to q)$ που ισχύει ως ταυτολογία.
- Αν $F = p$, αρκεί $\mathrm{K4} \vdash \boxdot(A \leftrightarrow B) \to (p \to p)$ που ισχύει ως ταυτολογία.

- Αν $F = G \to H$ αρκεί $\mathrm{K4} \vdash \boxdot(A \leftrightarrow B) \to ((F_p(a) \to F_p(B))$, δηλαδή από τον ορισμό της αντικατάστασης $\mathrm{K4} \vdash \boxdot(A \leftrightarrow B) \to ((G_p(A) \to H_p(A)) \leftrightarrow (G_p(B) \to H_p(B)))$. Η επαγωγική υπόθεση δίνει $\mathrm{K4} \vdash \boxdot(A \leftrightarrow B) \to (G_p(B) \to G_p(A))$ και $\mathrm{K4} \vdash \boxdot(A \leftrightarrow B) \to (H_p(A) \to H_p(B))$ και άρα με προτασιακό λογισμό έχουμε ότι $\mathrm{K4} \vdash \boxdot(A \leftrightarrow B) \to ((G_p(A) \to H_p(A)) \to (G_p(B) \to H_p(B)))$. Παρόμοια μπορεί να δειχθεί και η αντίστροφη φορά.
- Αν η $F = \Box G$ το ζητούμενο είναι $\mathrm{K4} \vdash \boxdot(A \leftrightarrow B) \to ((\Box G)_p(A) \leftrightarrow (\Box G)_p(B))$, δηλαδή από τον ορισμό της αντικατάστασης $\mathrm{K4} \vdash \boxdot(A \leftrightarrow B) \to (\Box(G_p(A)) \leftrightarrow \Box(G_p(B))$. Η επαγωγική υπόθεση είναι $\mathrm{K4} \vdash \boxdot(A \leftrightarrow B) \to (G_p(A) \leftrightarrow G_p(B))$. Τότε από την κανονικότητα του K4 έχουμε $\mathrm{K4} \vdash \Box \boxdot (A \leftrightarrow B) \to (\Box(G_p(A)) \leftrightarrow \Box(G_p(B)))$. Από την πρόταση 1.3.16 όμως, έχουμε ότι $\mathrm{K4} \vdash \boxdot(A \leftrightarrow B) \to \Box \boxdot (A \leftrightarrow B)$ και έτσι έχουμε το ζητούμενο. ⊣

Πόρισμα 1.3.20. *$\mathrm{K4} \vdash \Box(A \leftrightarrow B) \to \Box(F_p(A) \leftrightarrow F_p(B))$ και*
$\mathrm{K4} \vdash \boxdot(A \leftrightarrow B) \to \boxdot(F_p(A) \leftrightarrow F_p(B))$.

Απόδειξη. Άμεση από το δεύτερο θεώρημα αντικατάστασης και την πρόταση 1.3.18. ⊣

Πρόταση 1.3.21. *$\mathrm{GL} \vdash \Box\bot \leftrightarrow \Box\Diamond p$.*

Απόδειξη.

1. $\mathrm{GL} \vdash \bot \to \Diamond p$	(ταυτολογία)
2. $\mathrm{GL} \vdash \Box\bot \to \Box\Diamond p$	(1, κανονικότητα)
3. $\mathrm{GL} \vdash \bot \to \neg p$	(ταυτολογία)
4. $\mathrm{GL} \vdash \Box\bot \to \Box\neg p$	(3, κανονικότητα)
5. $\mathrm{GL} \vdash \neg\Box\neg p \to \neg\Box\bot$	(4, προτασιακός λογισμός)
6. $\mathrm{GL} \vdash \Diamond p \to (\Box\bot \to \bot)$	(5, ορισμοί των $\Diamond$, $\neg$)
7. $\mathrm{GL} \vdash \Box\Diamond p \to \Box(\Box\bot \to \bot)$	(6, κανονικότητα)
8. $\mathrm{GL} \vdash \Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box\bot$	(αξίωμα του Löb)
9. $\mathrm{GL} \vdash \Box\Diamond p \to \Box\bot$	(7, 8, προτασιακός λογισμός)
10. $\mathrm{GL} \vdash \Box\bot \leftrightarrow \Box\Diamond p$	(2, 9, προτασιακός λογισμός)

⊣

Πρόταση 1.3.22. *$\mathrm{GL} \nvdash \Box p \to p$*

Απόδειξη. Ορίζουμε αναδρομικά, για τους σκοπούς της απόδειξης, για κάθε A την A^*: $\bot^* = \bot$, για κάθε προτασιακή μεταβλητή p, $p^* = p$, $(A \to B)^* = A^* \to B^*$ και $(\Box A)^* = \top$. Θα δείξουμε ότι αν $\mathrm{GL} \vdash A$ τότε η A^* είναι ταυτολογία.

- Αν η πρόταση A είναι ταυτολογία τότε ταυτολογία είναι και η A^*.
- Αν η A είναι επιμεριστικό αξίωμα τότε είναι της μορφής $\Box(B \to C) \to (\Box B \to \Box C)$ και $A^* = \top \to (\top \to \top)$ που είναι ταυτολογία.
- Αν η A είναι το αξίωμα του Löb τότε είναι της μορφής $\Box(\Box B \to B) \to \Box B$ και $A^* = \top \to \top$ που είναι ταυτολογία.

- Για τον κανόνα modus ponens έχουμε ότι αν οι B^* και $(B \to A)^*$ είναι ταυτολογίες τότε και η A^* είναι ταυτολογία.
- Για τον κανόνα της γενίκευσης έχουμε ότι αν η B^* είναι ταυτολογία τότε και η $(\Box B)^* = \top$ είναι ταυτολογία.

Δείξαμε ότι αν $\mathrm{GL} \vdash A$ τότε η A^* είναι ταυτολογία, άρα αν η $\Box p \to p$ ήταν θεώρημα του GL τότε η $(\Box p \to p)^* = \top \to p$ θα ήταν ταυτολογία και καταλήγουμε σε αντίφαση. Έτσι η $\Box p \to p$ δεν είναι θεώρημα του GL (και άρα ούτε κάποιου από τα K4, K). $\dashv$

Πρόταση 1.3.23. $\mathrm{S5} \nvdash \Box(\Box p \to p) \to \Box p$

Απόδειξη. Ορίζουμε αναδρομικά για κάθε A την A^*: $\bot^* = \bot$, για κάθε προτασιακή μεταβλητή p, $p^* = p$, $(A \to B)^* = A^* \to B^*$ και $(\Box A)^* = A^*$. Θα δείξουμε ότι αν $\mathrm{S5} \vdash A$ τότε η A^* είναι ταυτολογία.

- Αν η A είναι ταυτολογία, επιμεριστικό αξίωμα και για τον κανόνα modus ponens προχωρούμε όπως στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος.
- Αν η A είναι αξίωμα του πρώτου σχήματος του S5 τότε είναι της μορφής $\Box B \to B$ και $A^* = B \to B$ που είναι ταυτολογία.
- Αν η A είναι αξίωμα του δεύτερου σχήματος του S5 τότε είναι της μορφής $\Diamond B \to \Box\Diamond B = \neg\Box\neg B \to \Box\neg\Box\neg B$ και $A^* = \neg\neg B \to \neg\neg B$ που είναι ταυτολογία.
- Για τον κανόνα της γενίκευσης έχουμε ότι αν η B^* είναι ταυτολογία τότε και η $(\Box B)^* = B$ είναι ταυτολογία.

Δείξαμε ότι αν $\mathrm{S5} \vdash A$ τότε η A^* είναι ταυτολογία, άρα αν η $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ ήταν θεώρημα του S5 τότε η $(\Box(\Box p \to p) \to \Box p)^* = (A \to A) \to A$ θα ήταν ταυτολογία και καταλήγουμε σε αντίφαση. Έτσι η $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ δεν είναι θεώρημα του S5 (και άρα ούτε κάποιου από τα T, S4, B). $\dashv$

Πόρισμα 1.3.24. *Τα εφτά συστήματα που ορίστηκαν στην παράγραφο 1.2 είναι συνεπή δηλαδή δεν αποδεικνύουν τον $\bot$.*

Απόδειξη. Έστω (προς άτοπο) ότι L είναι ένα από τα εφτά συστήματα και δεν είναι συνεπές. Άρα είναι αντιφατικό δηλαδή $\mathrm{L} \vdash \bot$. Όμως είναι ταυτολογία για κάθε πρόταση A ότι $\bot \to A$. Έτσι $\mathrm{L} \vdash A$, δηλαδή το L αποδεικνύει όλες τις προτάσεις. Όμως, όπως είδαμε στα παραπάνω θεωρήματα, για κάθε σύστημα υπάρχει μια πρόταση που δεν αποδεικνύει και φτάσαμε σε αντίφαση. Έτσι τα εφτά συστήματα είναι συνεπή. $\dashv$

Παρατήρηση 1.3.2. Τα κανονικά συστήματα GL και T είναι συνεπή, όμως από τις προτάσεις 1.3.22 και 1.3.23 δεν υπάρχει συνεπές κανονικό σύστημα που να επεκτείνει και τα δύο.

2. Το κατηγόρημα Bew(x) και οι ιδιότητές του

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε τις αποδείξεις πέντε βασικών θεωρημάτων που αφορούν το Bew(x), το κατηγόρημα που εκφράζει την αποδειξιμότητα στην PA, και θα αρχίσουμε να διερευνούμε αν το $\Box$ του συστήματος GL εκφράζει αυτό το κατηγόρημα.

2.1 Η αριθμητική Peano

Θεωρούμε την πρωτοβάθμια γλώσσα της θεωρίας αριθμών, η οποία έχει:

- αριθμήσιμο πλήθος μεταβλητών υ_0, υ_1, $\ldots$,
- τα λογικά σύμβολα: το μηδενοθέσιο σύνδεσμο $\perp$, το διθέσιο σύνδεσμο $\rightarrow$, τον καθολικό ποσοδείκτη $\forall$, την ισότητα $=$ και τις παρενθέσεις (,) (οι υπόλοιποι σύνδεσμοι ορίζονται μέσω αυτών ως συνήθως) και
- τα μη λογικά σύμβολα: την ατομική σταθερά $\mathbf{0}$, το μονοθέσιο συναρτησιακό σύμβολο $\mathbf{s}$ (που δηλώνει τη συνάρτηση του επομένου) και τα διθέσια συναρτησιακά σύμβολα $+$ και $\cdot$ (τα $<$ και $\leqslant$ ορίζονται όπως συνήθως).

Οι όροι, τύποι, ατομικοί τύποι, κλειστοί όροι, ελεύθερες μεταβλητές, προτάσεις (ή κλειστοί τύποι) ορίζονται όπως συνήθως.

Η αριθμητική του Peano, που συμβολίζουμε PA, είναι μια αξιωματικοποίηση της θεωρίας αριθμών. Έχει αποδεικτικούς κανόνες τον modus ponens και την γενίκευση (αν F τότε $\forall \upsilon F$), ένα σύνολο λογικών αξιωμάτων για την πρωτοβάθμια λογική, τα παρακάτω μη-λογικά αξιώματα (υποθέτοντας ότι η x είναι η υ_0 και y είναι η υ_1):

(1) $\mathbf{0} \neq \mathbf{s}x$

(2) $\mathbf{s}x = \mathbf{s}y \rightarrow x = y$

(3) $x + \mathbf{0} = x$

(4) $x + \mathbf{s}y = \mathbf{s}(x + y)$

(5) $x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

(6) $x \cdot \mathbf{s}y = (x \cdot y) + x$

και το αξιωματικό σχήμα της επαγωγής

$$(\forall x(x = \mathbf{0} \to F) \wedge \forall y[\forall x(x = y \to F) \to \forall x(x = \mathbf{s}y \to F)]) \to F, \text{ με } x \neq y$$

Ή ισοδύναμα, αν ορίσουμε το $r_x(t)$ ως το αποτέλεσμα της αντικατάστασης της μεταβλητής x από τον όρο στον όρο r:

$$F_x(\mathbf{0}) \to (\forall x(F \to F_x(\mathbf{s}x)) \to F)$$

Ορισμός 2.1.1. Ένα αξιωματικό σύστημα θα λέγεται **συνεπές (consistent)** ανν δεν αποδεικνύει τον $\perp$. Μια πρόταση λέγεται **αληθής** ανν είναι αληθής στο προτιθέμενο μοντέλο, **αποδείξιμη (proovable)** ανν υπάρχει απόδειξη στο σύστημα, **συνεπής (consistent)** ανν με την προσθήκη της ως αξίωμα το σύστημα είναι συνεπές, **ανατρέψιμη (disproovable, refutable)** ανν αποδεικνύεται η άρνησή της και **αποκρίσιμη (decidable)** ανν είναι είτε αποδείξιμη είτε ανατρέψιμη. Στο εξής, αν δεν διευκρινίζεται, οι παραπάνω όροι θα αναφέρονται στην PA.

Κάθε κλειστός όρος **υποδηλώνει (denotes)** έναν μοναδικό φυσικό αριθμό. Το **ψηφίο (noumeral)** $\boldsymbol{i}$ είναι το αποτέλεσμα της εφαρμογής i φορές του συμβόλου $\mathbf{s}$ πριν από το $\mathbf{0}$. Για παράδειγμα το $\mathbf{4}$ είναι το $\boldsymbol{ssss}\mathbf{0}$ και το $\mathbf{0}$ είναι το $\mathbf{0}$. Το $\boldsymbol{i}$ υποδηλώνει τον φυσικό i.

Η PA μπορεί να εκφράσει πιο πολύπλοκες συναρτήσεις μέσω των ψευδοόρων:

Ορισμός 2.1.2. Ένας τύπος $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ της γλώσσας της αριθμητικής λέγεται **ψευδοόρος (pterm)** (ως προς την y) ανν $\mathrm{PA} \vdash \exists! y F(x_1, \ldots, x_n, y)$. Γράφουμε $f(x_1, \ldots, x_n)$ στη θέση του $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ και χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $A(f(x_1, \ldots, x_n))$ για να δηλώσουμε τον τύπο $\exists y(F(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge A(y))$ ή τον ισοδύναμό του $\forall y(F(x_1, \ldots, x_n, y) \to A(y))$ (αφού $\mathrm{PA} \vdash \exists! y F(x_1, \ldots, x_n, y)$).

Ορισμός 2.1.3. Ένας τύπος λέγεται **αυστηρά $\boldsymbol{\Sigma}_1$** ανν είναι μέλος της παραγόμενης κλάσης από τους τύπους της μορφής $u = v$, $\mathbf{0} = u$, $\mathbf{s} = v$, $u + v = w$, $u \cdot v = w$ και τους συνδέσμους $\wedge$, $\vee$, $\exists$, (άρα και από τον $\exists_<$), $\forall_<$, αλλά όχι τον $\forall$. Λέγεται δε Σ_1 αν είναι (αποδείξιμα) ισοδύναμος με έναν αυστηρά Σ_1 τύπο.

Συμπεραίνουμε ότι και οι $x < y$, $x \neq y$ (που είναι ισοδύναμος με τον $x < y \vee y < x$) είναι Σ_1, και έτσι η άρνηση κάθε ατομικού (μόνο) τύπου είναι Σ_1. Ακόμα η κλάση Σ_1 είναι κλειστή και ως προς την αντικατάσταση μεταβλητών από κλειστούς όρους.

Ορισμός 2.1.4. Ένας τύπος A λέγεται $\boldsymbol{\Delta}_1$ ανν οι τύποι A και $\neg A$ είναι Σ_1.

Ο παραπάνω ορισμός δίνει ότι οι ατομικοί τύποι και οι τύποι της μορφής $t < t'$ είναι Δ_1 τύποι και ότι η κλάση Δ_1 είναι κλειστή ως προς τους συνδέσμους $\neg$ $\wedge$, $\vee$, $\exists_<$, $\forall_<$ και ως προς την αντικατάσταση μεταβλητών από κλειστούς όρους.

Παρατήρηση 2.1.1. Αν ο τύπος $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ είναι Σ_1 ψευδοόρος τότε είναι και Δ_1. Αυτό ισχύει γιατί, αφού $\mathrm{PA} \vdash \exists! y F(x_1, \ldots, x_n, y)$, ο τύπος $\neg F(x_1, \ldots, x_n, y)$ είναι ισοδύναμος με τον Σ_1 τύπο $\exists z(F(x_1, \ldots, x_n, z) \wedge z \neq y)$ και άρα είναι Σ_1.

Πρόταση 2.1.1. *Αν η αληθής πρόταση S είναι Σ_1, τότε* $\mathrm{PA} \vdash S$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathrm{PA} \vdash S$ για κάθε αληθή αυστηρά Σ_1 πρόταση S, γιατί αν η S είναι Σ_1 τότε υπάρχει μια αυστηρά Σ_1 πρόταση T ισοδύναμη με την S, δηλαδή θα ισχύει $\mathrm{PA} \vdash S \leftrightarrow T$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα modus ponens έχουμε ότι $\mathrm{PA} \vdash T$. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στην πολυπλοκότητα της S.

- Αν η S είναι ατομικός τύπος. Ο S δεν μπορεί να είναι ο $\perp$ γιατί δεν είναι αληθής. Άρα ο S είναι της μορφής $t = t'$ και οι t και t' είναι κλειστοί. Έστω ότι οι t και t' υποδηλώνουν τους i και i'. Με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του κλειστού όρου t προκύπτει ότι αν ο t υποδηλώνει τον φυσικό i τότε $\mathrm{PA} \vdash t = \boldsymbol{i}$. Έτσι $\mathrm{PA} \vdash t = i$ και $\mathrm{PA} \vdash t' = i'$. Αφού ο $t = t'$ είναι αλήθής, τότε $i = i'$ και άρα $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i'}$. Έτσι $\mathrm{PA} \vdash t = \boldsymbol{i} \wedge t' = \boldsymbol{i}$, δηλαδή $\mathrm{PA} \vdash t = t'$.
- Αν η S είναι της μορφής $S_1 \wedge S_2$, τότε αφού είναι αληθής πρέπει και οι S_1 και S_2 να είναι αληθείς. Έτσι, από την επαγωγική υπόθεση $\mathrm{PA} \vdash S_1$ και $\mathrm{PA} \vdash S_2$ και άρα $\mathrm{PA} \vdash S_1 \wedge S_2$.
- Αν η S είναι της μορφής $S_1 \vee S_2$, τότε αφού είναι αληθής πρέπει ο S_1 ή ο S_2 να είναι αληθής. Έτσι, από την επαγωγική υπόθεση $\mathrm{PA} \vdash S_1$ ή $\mathrm{PA} \vdash S_2$ και σε κάθε περίπτωση ισχύει $\mathrm{PA} \vdash S_1 \vee S_2$.
- Αν η S είναι της μορφής $\exists x F$ τότε $F(\boldsymbol{i})$, τότε αφού είναι αληθής πρέπει η $F(\boldsymbol{i})$ είναι αληθής για κάποιο i, γιατί πρέπει να αληθεύει στο προτιθέμενο μοντέλο. Έτσι από την επαγωγική υπόθεση $\mathrm{PA} \vdash \exists x F$.
- Αν η S είναι της μορφής $(\forall x < \boldsymbol{i})F$, τότε αφού είναι αληθής πρέπει η $F(\boldsymbol{j})$ να είναι αληθής για κάθε $j < i$. Έτσι, από την επαγωγική υπόθεση $\mathrm{PA} \vdash F(\boldsymbol{j})$ για κάθε $j < i$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $\mathrm{PA} \vdash F(\boldsymbol{0}), \ldots, \mathrm{PA} \vdash F(\boldsymbol{i-1})$, άρα $\mathrm{PA} \vdash F(\boldsymbol{0}) \wedge \cdots \wedge F(\boldsymbol{i-1})$, δηλαδή $\mathrm{PA} \vdash (\forall x < \boldsymbol{i})F$. ⊣

Πρόταση 2.1.2. *Έστω $F(x_1, \ldots, x_n)$ ένας Δ_1 τύπος. Τότε $\mathrm{PA} \vdash F(\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n)$ ή $\mathrm{PA} \vdash \neg F(\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n)$, δηλαδή τα στιγμιότυπα αντικατάστασης των Δ_1 τύπων είναι αποκρίσιμα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού ο $F(x_1, \ldots, x_n)$ είναι Δ_1 τότε οι προτάσεις $F(\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n)$ και $\neg F(\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n)$ είναι Σ_1. Όμως μια από αυτές είναι αληθής και άρα, από το θεώρημα 2.1.1, αποδείξιμη. ⊣

Η PA αποδεικνύει τις συνήθεις ιδιότητες των φυσικών αριθμών, όπως τις ιδιότητες των πράξεων και την αρχή ελαχίστου. Ως συνήθως ορίζουμε το Σ_1 τύπο $d|x$ (διαιρεί), τους Σ_1 ψευδοόρους $\mathrm{Rm}(x, d, r)$ (υπόλοιπο) και $\mathrm{Monus}(x, y, z)$ (ή $x - y$)(μείον), τους Δ_1 τύπους $\mathrm{Prime}(x)$ (πρώτος) και $\mathrm{RelativelyPrime}(a, b)$ (πρώτοι μεταξύ τους), τους Σ_1 ψευδοόρους lcm (ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο), Max (μέγιστο) κ.ο.κ. Η PA αποδεικνύει το κινέζικο θεώρημα υπολοίπων και τα σχετικά θεωρήματα με τον Σ_1 ψευδοόρο $\mathrm{Beta}(a, b, i, r)$, που εκφράζει τη β-συνάρτηση του Gödel. Με τη βοήθεια των παραπάνω μπορούμε να κατασκευάσουμε μια από τις συνήθεις κωδικοποιήσεις Gödel έτσι ώστε να μεταφέρουμε εκφράσεις της μεταγλώσσας μέσα στην PA και να την αναγκάσουμε να αποδείξει προτάσεις που αναφέρονται στον εαυτό της. Για παράδειγμα:

- Ο Δ_1 τύπος FinSeq(s) εκφράζει ότι s είναι αριθμός Gödel μιας πεπερασμένης ακολουθίας.
- Ο Σ_1 ψευδοόρος lh(s) εκφράζει τη συνάρτηση που αναθέτει σε κάθε αριθμό Gödel μιας πεπερασμένης ακολουθίας το μήκος της.
- Ο Σ_1 ψευδοόρος num(x) εκφράζει τη συνάρτηση που αναθέτει σε κάθε i τον αριθμό Gödel του ψηφίου του.
- Ο Σ_1 ψευδοόρος var(x) εκφράζει τη συνάρτηση που αναθέτει σε κάθε i τον αριθμό Gödel της i-οστής μεταβλητής.
- Ο Σ_1 ψευδοόρος sub(t, i, x) εκφράζει τη συνάρτηση της αντικατάστασης της i-οστής μεταβλητής στον τύπο του έχει τιμή x από τον όρο που έχει τιμή t.
- Ο Σ_1 ψευδοόρος $\mathrm{su(x,y,z)} = \mathrm{sub}(\mathrm{num}(x), \mathrm{var}(y), z)$ εκφράζει τη συνάρτηση που αναθέτει σε κάθε i,j,k τον αριθμό Gödel του αποτελέσματος $F_{v_j}(\boldsymbol{i})$ της αντικατάστασης της j-οστής μεταβλητής με το $\boldsymbol{i}$ στον τύπο με αριθμό Gödel k. Για παράδειγμα $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{su}(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ulcorner v_2 + v_7 = v_3 \urcorner) = \ulcorner \mathbf{1} + v_7 = v_3 \urcorner$.
- Ο Formula(x) εκφράζει ότι ο x είναι αριθμός Gödel ενός τύπου.
- Ο ModusPonens(x, y, z) εκφράζει ότι ο z είναι αριθμός Gödel μιας πρότασης που μπορεί να προκύψει με τον κανόνα modus ponens από τις προτάσεις με αριθμούς Gödel x και y. Τέλος
- Ο Δ_1 τύπος Pf(y, x) εκφράζει ότι y είναι αριθμός Gödel μιας πεπερασμένης ακολουθίας προτάσεων και x είναι αριθμός Gödel της τελευταίας πρότασης της ακολουθίας.

Ορισμός 2.1.5. Με $\ulcorner S \urcorner$ συμβολίζουμε το ψηφίο του αριθμού Gödel της πρότασης S.

Παράδειγμα 2.1.1. Η εικασία του Goldbach μπορεί να εκφραστεί στην PA ως η εξής πρόταση G:

$$(\forall n > 1)(\exists p < 2n)(\exists q < 2n)[\mathrm{Prime}(p) \wedge \mathrm{Prime}(q) \wedge \ 2 \cdot n = p + q]$$

και έτσι η $\neg G$ είναι Σ_1. Έστω ότι η G είναι ψευδής. Τότε αφού η $\neg G$ είναι Σ_1 και αληθής το Θεώρημα 2.1.1 δίνει ότι $\mathrm{PA} \vdash \neg G$, δηλαδή η G είναι ανατρέψιμη και άρα αποκρίσιμη. Το περίεργο συμπέρασμα που μπορεί να βγει από τον παραπάνω συλλογισμό είναι ότι αν η G δεν είναι αποκρίσιμη τότε είναι αληθής!

2.2 Βασικές Ιδιότητες του Bew(x)

Ορισμός 2.2.1. Ορίζουμε ως Bew(x) (από τη γερμανική λέξη beweisbar) τον τύπο $\exists x \mathrm{Pf}(y, x)$. Ο τύπος αυτός εκφράζει ότι ο x είναι αριθμός Gödel μιας αποδείξιμης πρότασης.

Ορισμός 2.2.2. Έστω ότι ο τύπος F έχει ελεύθερες μεταβλητές τις $v_{k_1}, \ldots, v_{k_m}$, με $k_1 < \cdots < k_m$. Ορίζουμε τον τύπο

$$\mathrm{Bew}[\,F\,] = \mathrm{Bew}(\mathrm{su}(v_{k_m}, \boldsymbol{k_m}, \ldots, \mathrm{su}(v_{k_2}, \boldsymbol{k_2}, \mathrm{su}(v_{k_1}, \boldsymbol{k_1}, \ulcorner F \urcorner)) \ldots)).$$

Παρατήρηση 2.2.1. Ο παραπάνω ορισμός οδηγεί στα εξής συμπεράσματα:

- Ο $\mathrm{Bew}[\,F\,]$ έχει τις ίδιες ελεύθερές μεταβλητές με τον F.
- Ο $\mathrm{Bew}[\,F\,]$ είναι αληθής για τους αριθμούς $i_1, \ldots, i_m$ αν και μόνο αν $\mathrm{PA} \vdash F_{v_{k_1}}(\boldsymbol{i_1}) \ldots_{v_{k_m}}(\boldsymbol{i_m})$.
- Αν ο F δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές, είναι δηλαδή πρόταση, τότε ο $\mathrm{Bew}[\,F\,]$ ταυτίζεται με τον $\mathrm{Bew}(\ulcorner F \urcorner)$.

Άμεση συνέπεια των πιο πάνω ορισμών είναι η επόμενη

Πρόταση 2.2.1. *Ο τύπος* $\mathrm{Bew}(x)$ *είναι* Σ_1 *άρα, αν* S *είναι μια πρόταση, ο τύπος* $\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$ *είναι* Σ_1. ⊣

Πρόταση 2.2.2. *Για κάθε πρόταση* S,

$$\text{αν } \mathrm{PA} \vdash S, \text{ τότε } \mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner). \tag{i}$$

Απόδειξη. Η πρόταση $\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$ είναι Σ_1 από την προηγούμενη πρόταση και είναι αληθής, αφού $\mathrm{PA} \vdash S$. Έτσι από το Θεώρημα 2.1.1, $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$. ⊣

Πρόταση 2.2.3. *Για όλες τις προτάσεις* S, T,

$$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner S \to T \urcorner) \to (\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner T \urcorner)). \tag{ii}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να τυποποιήσουμε στην PA το παρακάτω επιχείρημα: Η πεπερασμένη ακολουθία που σχηματίζεται αν ενώσουμε την απόδειξη της πρότασης $S \to T$, την απόδειξη της πρότασης S και την πρόταση T είναι απόδειξη της πρότασης T εξαιτίας του κανόνα modus ponens. ⊣

Οι δύο παρακάτω προτάσεις αποτελούν γενικεύσεις των δύο προηγούμενων.

Πρόταση 2.2.4. *Για κάθε τύπο* F,

$$\text{αν } \mathrm{PA} \vdash F, \text{ τότε } \mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[\,F\,].$$

Απόδειξη. Έστω ότι ο τύπος F έχει ελεύθερες μεταβλητές τις $v_{k_1}, \ldots, v_{k_m}$, με $k_1 < \cdots < k_m$ και έστω S η πρόταση $\forall v_{k_1} \ldots \forall v_{k_m} F$. Τότε, αφού $\mathrm{PA} \vdash F$, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της γενίκευσης, ισχύει $\mathrm{PA} \vdash S$ και εξαιτίας της προηγούμενης πρότασης $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$.

Μπορούμε να τυποποιήσουμε στην PA το παρακάτω επιχείρημα ώστε να συμπεράνουμε ότι $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to \mathrm{Bew}[\,F\,]$: Έστω $\mathrm{PA} \vdash S$. Με m εφαρμογές λογικού αξιώματος έχουμε ότι $\mathrm{PA} \vdash \forall v_{k_1} \ldots \forall v_{k_m} F \to F_{v_{k_1}}(\boldsymbol{i_1}) \ldots_{v_{k_m}}(\boldsymbol{i_m})$, δηλαδή $\mathrm{PA} \vdash S \to F_{v_{k_1}}(\boldsymbol{i_1}) \ldots_{v_{k_m}}(\boldsymbol{i_m})$. Με εφαρμογή του κανόνα modus ponens (όπως στο προηγούμενο θεώρημα) έχουμε ότι $\mathrm{PA} \vdash F_{v_{k_1}}(\boldsymbol{i_1}) \ldots_{v_{k_m}}(\boldsymbol{i_m})$.

Τελικά, συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε ότι $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[\,F\,]$. ⊣

Πρόταση 2.2.5. *Για όλους τους τύπους* F, G,

$$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[\,F \to G\,] \to (\mathrm{Bew}[\,F\,] \to \mathrm{Bew}[\,G\,]).$$

Αποδειξη. Η απόδειξη είναι ίδια με αυτήν της πρότασης 2.2.3, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η αντικατάσταση των ψηφίων στους F, G, αντιστοιχεί με αυτή στον $F \to G$. ⊣

Η παρακάτω πρόταση είναι γενίκευση της τυποποίησης της πρότασης 2.1.1.

Πρόταση 2.2.6. *Για κάθε* Σ_1 *τύπο* F,

$$\mathrm{PA} \vdash F \to \mathrm{Bew}[F].$$

Αποδειξη. Καταρχάς θα δείξουμε ότι αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathrm{PA} \vdash G \to \mathrm{Bew}[G]$ για κάθε αυστηρά Σ_1 τύπο G. Έστω ότι ο τύπος F είναι Σ_1. Τότε υπάρχει ένας αυστηρά Σ_1 τύπος G ισοδύναμος με τον F. Έχουμε

1. $\mathrm{PA} \vdash G \to F$ (G ισοδύναμος με την F)
2. $\mathrm{PA} \vdash G \to \mathrm{Bew}[G]$ (υπόθεση, ο G είναι αυστηρά Σ_1)
3. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[G \to F]$ (1, πρόταση 2.2.4)
4. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[G \to F] \to (\mathrm{Bew}[G] \to \mathrm{Bew}[F])$ (πρόταση 2.2.5)
5. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[G] \to \mathrm{Bew}[F]$ (3, 4, modus ponens)
6. $\mathrm{PA} \vdash G \to \mathrm{Bew}[F]$ (2, 5, προτ. λογισμός)

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του F.

• Αν ο F είναι ατομικός τύπος τότε, όπως και στην απόδειξη της πρότασης 2.1.1, το ζητούμενο αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας βασικές ιδιότητες των ψηφίων.

• Αν ο F είναι της μορφής $G \wedge H$.

1. $\mathrm{PA} \vdash G \to \mathrm{Bew}[G]$, $\mathrm{PA} \vdash H \to \mathrm{Bew}[H]$ (επαγωγική υπόθεση)
2. $\mathrm{PA} \vdash F \to \mathrm{Bew}[G]$, $\mathrm{PA} \vdash F \to \mathrm{Bew}[H]$ (1, προτ. λογισμός)
3. $\mathrm{PA} \vdash G \to (H \to F)$ (προτ. λογισμός)
4. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[G \to (H \to F)]$ (3, πρόταση 2.2.4)
5. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[G \to (H \to F)] \to$
   $(\mathrm{Bew}[G] \to \mathrm{Bew}[H \to F])$ (πρόταση 2.2.5)
6. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[H \to F] \to (\mathrm{Bew}[H] \to \mathrm{Bew}[F])$ (πρόταση 2.2.5)
7. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[G] \to (\mathrm{Bew}[H] \to \mathrm{Bew}[F])$ (4, 5, 6, προτ. λογισμός)
8. $\mathrm{PA} \vdash F \to \mathrm{Bew}[F]$ (2, 7, προτ. λογισμός)

• Αν ο F είναι της μορφής $G \vee H$.

1. $\mathrm{PA} \vdash G \to \mathrm{Bew}[G]$ (επαγωγική υπόθεση)
2. $\mathrm{PA} \vdash G \to F$ (προτ. λογισμός)
3. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[G \to F]$ (2, πρόταση 2.2.4)
4. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[G \to F] \to (\mathrm{Bew}[G] \to \mathrm{Bew}[F])$ (πρόταση 2.2.5)
5. $\mathrm{PA} \vdash G \to \mathrm{Bew}[F]$ (4, 3, 1, προτ. λογισμός)
6. $\mathrm{PA} \vdash H \to \mathrm{Bew}[F]$ (όμοια με τα βήματα 1-5)
7. $\mathrm{PA} \vdash (G \to \mathrm{Bew}[F]) \to$
   $((H \to \mathrm{Bew}[F]) \to (F \to \mathrm{Bew}[F]))$ (προτ. λογισμός)
8. $\mathrm{PA} \vdash F \to \mathrm{Bew}[F]$ (7, 5, 6, modus ponens)

• Αν ο F είναι της μορφής $\exists x G$.

1. $\mathrm{PA} \vdash G \to \mathrm{Bew}[\,G\,]$ (επαγωγική υπόθεση)
2. $\mathrm{PA} \vdash G \to F$ (κατηγορηματικός λογισμός)
3. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[\,G \to F\,]$ (2, πρόταση 2.2.4)
4. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[\,G \to F\,] \to (\mathrm{Bew}[\,G\,] \to \mathrm{Bew}[\,F\,])$ (πρόταση 2.2.5)
5. $\mathrm{PA} \vdash G \to \mathrm{Bew}[\,F\,]$ (4, 3, 1, προτ. λογισμός)
6. $\mathrm{PA} \vdash F \to \mathrm{Bew}[\,F\,]$ (5, κατηγορηματικός λογισμός, η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο F)

• Αν ο F είναι της μορφής $(\forall x < y)G$, δηλαδή $\forall x(x < y \to G)$. Έστω ότι η μεταβλητή y είναι η v_k.

1. $\mathrm{PA} \vdash G \to \mathrm{Bew}[\,G\,]$ (επαγωγική υπόθεση)
2. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{su}(y, \boldsymbol{k}, \ulcorner F_y(\mathbf{0}) \urcorner) =$ $= \ulcorner F_y(\mathbf{0}) \urcorner = \mathrm{su}(\mathbf{0}, \boldsymbol{k}, \ulcorner F \urcorner)$ (ορισμός του su, η y δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο $F_y(\mathbf{0})$)
3. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[\,F_y(\mathbf{0})\,] \leftrightarrow \mathrm{Bew}[\,F_y\,](\mathbf{0})$ (2, ορισμός του Bew[ ])
4. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{su}(y, \boldsymbol{k}, \ulcorner F_y(\mathbf{s}y) \urcorner) = \mathrm{su}(\mathbf{s}y, \boldsymbol{k}, \ulcorner F \urcorner)$ (ορισμός του su)
5. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[\,F_y(\mathbf{s}y)\,] \leftrightarrow \mathrm{Bew}[\,F\,]_y(\mathbf{s}y)$ (4, ορισμός του Bew[ ])
6. $\mathrm{PA} \vdash F_y(\mathbf{0}) \leftrightarrow \forall x(x < 0 \to G_y(\mathbf{0}))$ (ορισμός αντικατάστασης)
7. $\mathrm{PA} \vdash \neg\, x < \mathbf{0}$ (τυπικό θεώρημα της PA)
8. $\mathrm{PA} \vdash F_y(\mathbf{0})$ (6, 7, κατηγορηματικός λογισμός)
9. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[\,F_y(\mathbf{0})\,]$ (8, πρόταση 2.2.4)
10. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[\,F_y\,](\mathbf{0})$ (3, 9, modus ponens)
11. $\mathrm{PA} \vdash F_y(\mathbf{0}) \to \mathrm{Bew}[\,F_y\,](\mathbf{0})$ (10, προτ. λογισμός)
12. $\mathrm{PA} \vdash (F \to \mathrm{Bew}[\,F\,])_y(\mathbf{0})$ (11, ορισμός αντικατάστασης)
13. $\mathrm{PA} \vdash (\forall x < y)G \land G \leftrightarrow (\forall x < \mathbf{s}y)G$ (τυπικό θεώρημα της PA)
14. $\mathrm{PA} \vdash F \land G \leftrightarrow F_y(\mathbf{s}y)$ (13, ορισμός αντικατάστασης)
15. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[\,F \land G \to F_y(\mathbf{s}y)\,]$ (15, πρόταση 2.2.4)
16. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[\,F \land G \to F_y(\mathbf{s}y)\,] \to$ $(\mathrm{Bew}[\,F \land G\,] \to \mathrm{Bew}[\,F_y(\mathbf{s}y)\,])$ (πρόταση 2.2.5)
17. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[\,F \land G\,] \to \mathrm{Bew}[\,F_y(\mathbf{s}y)\,]$ (15, 16, modus ponens)
18. $\mathrm{PA} \vdash F \to (G \to F \land G)$ (προτ. λογισμός)
19. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[\,F\,] \to (\mathrm{Bew}[\,G\,] \to \mathrm{Bew}[\,F \land G\,])$ (18, όμοια με 3-7 της περίπτωση της σύζευξης)
20. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[\,F\,] \land \mathrm{Bew}[\,G\,] \to \mathrm{Bew}[\,F \land G\,]$ (19, πρ. λογισμός)
21. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}[\,F\,] \land \mathrm{Bew}[\,G\,] \to \mathrm{Bew}[\,F_y(\mathbf{s}y)\,]$ (17, 20, πρ. λογ.)
22. $\mathrm{PA} \vdash (F \to \mathrm{Bew}[\,F\,]) \to (F \land G \to \mathrm{Bew}[\,F\,] \land \mathrm{Bew}[\,G\,])$ (1, πρ. λογισμός)
23. $\mathrm{PA} \vdash (F \to \mathrm{Bew}[\,F\,]) \to (F_y(\mathbf{s}y) \to \mathrm{Bew}[\,F_y(\mathbf{s}y)\,])$ (22, 14, 21, πρ. λογ.)
24. $\mathrm{PA} \vdash (F \to \mathrm{Bew}[\,F\,]) \to (F_y(\mathbf{s}y) \to \mathrm{Bew}[\,F\,]_y(\mathbf{s}y))$ (5, πρ. λογισμός)
25. $\mathrm{PA} \vdash (F \to \mathrm{Bew}[\,F\,]) \to (F \to \mathrm{Bew}[\,F\,])_y(\mathbf{s}y))$ (24, ορ. αντικατάστασης)
26. $\mathrm{PA} \vdash \forall y((F \to \mathrm{Bew}[\,F\,]) \to (F \to \mathrm{Bew}[\,F\,])_y(\mathbf{s}y))$ (25, κατηγ. λογισμός)
27. $\mathrm{PA} \vdash F \to \mathrm{Bew}[\,F\,]$ (12, 26, αξίωμα επαγωγής)

$\dashv$

Στην περίπτωση που ο τύπος F είναι πρόταση, έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

Πρόταση 2.2.7. *Για κάθε Σ_1 πρόταση S,*

$$\mathrm{PA} \vdash S \to \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner). \qquad \dashv$$

Πρόταση 2.2.8. *Για κάθε τύπο S,*

$$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \urcorner). \quad \dashv \tag{iii}$$

Παρατήρηση 2.2.2. Οι συνθήκες

$$\boxed{\begin{array}{rl} \text{(i)} & \text{αν } \mathrm{PA} \vdash S, \text{τότε } \mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \\ \text{(ii)} & \mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner S \to T \urcorner) \to (\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner T \urcorner)) \\ \text{(iii)} & \mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \urcorner) \end{array}}$$

είναι γνωστές ως **συνθήκες αποδειξιμότητας (derivability conditions)** των Hilbert - Bernays - Löb (για το Bew(x) και την PA). Λέγονται έτσι γιατί, όπως θα δούμε, αυτές είναι ικανές συνθήκες ώστε σε μια θεωρία να ισχύει το δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας. Πιο συγκεκριμένα αν Z είναι μια απλή θεωρία αριθμών στην οποία αποδεικνύονται τα έξι πρώτα αξιώματα της PA, το σχήμα $\forall x(x \neq \mathbf{0} \to \exists y(x = \mathbf{s}y))$ και για κάποιο κατηγόρημα $B(x)$ αποδεικνύονται στην Z οι παραπάνω συνθήκες με το $B(x)$ να παίζει το ρόλο του Bew(x), τότε αν η Z είναι συνεπής Z $\nvdash \neg B(\ulcorner \perp \urcorner)$.

Πρόταση 2.2.9. Το γενικευμένο λήμμα διαγωνιοποίησης. *Θεωρούμε τις διακεκριμένες μεταβλητές $y_0, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m$. Εισάγουμε την συντομογραφία "z" έτσι ώστε να σημαίνει "$z_1, \ldots, z_m$". Έστω οι τύποι $P_0(y_0, \ldots, y_n, \mathsf{z}), \ldots, P_n(y_0, \ldots, y_n, \mathsf{z})$ της* PA *στους οποίους οι ελεύθερες μεταβλητές είναι μεταξύ των $y_0, \ldots, y_n, \mathsf{z}$. Τότε υπάρχουν τύποι $S_0(\mathsf{z}), \ldots, S_0(\mathsf{z})$ της* PA, *στους οποίους οι ελεύθερες μεταβλητές είναι μεταξύ των z, τέτοιοι ώστε*

$$\mathrm{PA} \vdash S_0 \leftrightarrow P_0(\ulcorner S_0(\mathsf{z}) \urcorner, \ldots, \ulcorner S_n(\mathsf{z}) \urcorner, \mathsf{z}),$$
$$\vdots$$
$$\mathrm{PA} \vdash S_n \leftrightarrow P_n(\ulcorner S_0(\mathsf{z}) \urcorner, \ldots, \ulcorner S_n(\mathsf{z}) \urcorner, \mathsf{z}).$$

Απόδειξη. Έστω Subst$(w, x_0, \ldots, x_n, y)$ ένας Σ_1 ψευδοόρος που εκφράζει τη συνάρτηση της οποίας η τιμή στα $a, b. \ldots, b_n$ είναι ο αριθμός Gödel του αποτελέσματος της αντικατάστασης των μεταβλητών $x_0, \ldots, x_n$ με τα ψηφία $\boldsymbol{b_0, \ldots, b_n}$ στον τύπο με αριθμό Gödel a. Για κάθε $i \leqslant n$ έστω k_i ο αριθμός Gödel του τύπου

$$P_i(\mathrm{subst}(x_0, x_0, \ldots, x_n), \ldots, \mathrm{subst}(x_n, x_0, \ldots, x_n), \mathsf{z})$$

και έστω $S_i(\mathsf{z})$ ο τύπος

$$P_i(\mathrm{subst}(\boldsymbol{k_0}, \boldsymbol{k_0}, \ldots, \boldsymbol{k_n}), \ldots, \mathrm{subst}(\boldsymbol{k_n}, \boldsymbol{k_0}, \ldots, \boldsymbol{k_n}), \mathsf{z}).$$

Το αποτέλεσμα της αντικατάστασης των μεταβλητών $x_0, \dots, x_n$ με τα ψηφία $\boldsymbol{k_0}, \dots, \boldsymbol{k_n}$ στον τύπο με αριθμό Gödel k_i είναι ο τύπος $S_i(\mathsf{z})$ και έτσι ο τύπος

$$\mathrm{subst}(\boldsymbol{k_i}, \boldsymbol{k_0}, \dots, \boldsymbol{k_n}) = \ulcorner S_i(\mathsf{z}) \urcorner$$

είναι αληθής και Σ_1. Έτσι, από την πρόταση 2.1.1

$$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{subst}(\boldsymbol{k_i}, \boldsymbol{k_0}, \dots, \boldsymbol{k_n}) = \ulcorner S_i(\mathsf{z}) \urcorner$$

που δίνει το αποτέλεσμα. ⊣

Άμεσο πόρισμα του γενικευμένου λήμματος διαγωνιοποίησης αποτελεί η

Πρόταση 2.2.10. Το λήμμα διαγωνιοποίησης. *Έστω ο τύπος της* PA $P(x)$, *που έχει ελεύθερη μεταβλητή μόνο την x. Τότε υπάρχει πρόταση I της* PA, *που ονομάζεται σταθερό σημείο της $P(x)$, τέτοια ώστε*

$$\mathrm{PA} \vdash I \leftrightarrow P(\ulcorner I \urcorner).$$ ⊣

Ορισμός 2.2.3. Ορίζουμε τον τύπο $\mathrm{Con}(x)$, έτσι ώστε για κάθε πρόταση S, $\mathrm{Con}(\ulcorner S \urcorner) = \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S \urcorner)$. Ο τύπος αυτός υποδηλώνει ότι ο x είναι αριθμός Gödel μιας πρότασης συνεπούς με την PA. Ορίζουμε ακόμα Con να είναι η πρόταση $\neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)$, δηλαδή η $\mathrm{Con}(\ulcorner \top \urcorner)$ που δηλώνει ότι η PA είναι συνεπής.

Ορισμός 2.2.4. Λέμε ότι η PA είναι **ω-συνεπής** ανν δεν υπάρχει Δ_1 τύπος $A(x)$ τέτοιος ώστε:

- $\mathrm{PA} \vdash \exists x A(x)$ και
- για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{PA} \vdash \neg A(\boldsymbol{n})$.

Πρόταση 2.2.11. *Αν η* PA *είναι ω-συνεπής και* $\mathrm{PA} \nvdash S$, *τότε* $\mathrm{PA} \nvdash \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$.

Απόδειξη. Αν $\mathrm{PA} \nvdash S$ τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{PA} \vdash \neg \mathrm{Pf}(\boldsymbol{m}, \ulcorner S \urcorner)$ και αν η PA είναι ω-συνεπής, τότε $\mathrm{PA} \nvdash \exists x \mathrm{Pf}(x, \ulcorner S \urcorner)$, δηλαδή $\mathrm{PA} \nvdash \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$. ⊣

Πόρισμα 2.2.12. *Αν η* PA *είναι ω-συνεπής , τότε* $\mathrm{PA} \nvdash \bot$, $\mathrm{PA} \nvdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)$ *και γενικά* $\mathrm{PA} \nvdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \dots \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner) \urcorner)$. ⊣

Πρόταση 2.2.13. *Αν* $\mathrm{PA} \nvdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)$, *τότε υπάρχει πρόταση G* **μη αποκρίσιμη**, *δηλαδή*

$$\mathrm{PA} \nvdash G \text{ και } \mathrm{PA} \nvdash \neg G.$$

Απόδειξη. Στην απόδειξη αυτή χρησιμοποιούμε μόνο τις συνθήκες αποδειξιμότητας (i) και (ii). Επειδή $\mathrm{PA} \nvdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)$, ισχύει λόγω της (ii) ότι $\mathrm{PA} \nvdash \bot$. Από το λήμμα διαγωνιοποίησης, με τον τύπο $\neg \mathrm{Bew}(x)$ να παίζει το ρόλο της $P(x)$, υπάρχει πρόταση G τέτοια ώστε

$$\mathrm{PA} \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner G \urcorner). \tag{D}$$

- Έστω ότι
  1. $\mathrm{PA} \vdash G$
  2. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner G \urcorner)$ (1, (i))
  3. $\mathrm{PA} \vdash \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner G \urcorner)$ (1, (D))
  4. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner G \urcorner) \to \perp$ (3, ορισμός του $\neg$)
  5. $\mathrm{PA} \vdash \perp$ (2, 4, modus ponens)

- Έστω ότι
  1. $\mathrm{PA} \vdash \neg G$
  2. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg G \urcorner)$ (1, (i))
  3. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner G \urcorner)$ (1, (D))
  4. $\mathrm{PA} \vdash G \to (\neg G \to \perp)$ (προτ. λογισμός)
  5. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner G \to (\neg G \to \perp) \urcorner)$ (4, (i))
  6. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner G \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg G \to \perp \urcorner)$ (5, (ii))
  7. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner G \urcorner) \to (\mathrm{Bew}(\ulcorner \neg G \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \perp \urcorner))$ (6, (ii))
  8. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \perp \urcorner)$ (2, 3, 7, modus ponens)

Επειδή και στις δύο περιπτώσεις ερχόμαστε σε αντίφαση με την υπόθεση, ισχύει ότι $\mathrm{PA} \nvdash G$ και $\mathrm{PA} \nvdash \neg G$. ⊣

Θεώρημα 2.2.14. Το πρώτο θεώρημα μη πληρότητας για την PA. *Αν η* PA *είναι ω-συνεπής, τότε υπάρχει πρόταση G μη αποκρίσιμη.*

Απόδειξη. Από το πόρισμα 2.2.12 και την πρόταση 2.2.13. ⊣

Θεώρημα 2.2.15. Το θεώρημα του Löb.

$$\textit{Αν } \mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to S \textit{ τότε } \mathrm{PA} \vdash S.$$

Απόδειξη. Στην απόδειξη αυτή χρησιμοποιούμε μόνο τις συνθήκες αποδειξιμότητας (i), (ii) και (iii). Από το λήμμα διαγωνιοποίησης, με τον τύπο $\mathrm{Bew}(x) \to S$ να παίζει το ρόλο της $P(x)$, υπάρχει πρόταση I τέτοια ώστε

1. $\mathrm{PA} \vdash I \leftrightarrow (\mathrm{Bew}(\ulcorner I \urcorner) \to S)$
2. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner I \to (\mathrm{Bew}(\ulcorner I \urcorner) \to S) \urcorner)$ (1, (i))
3. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner I \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \mathrm{Bew}(\ulcorner I \urcorner) \to S \urcorner)$ (2, (ii))
4. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner I \urcorner) \to (\mathrm{Bew}(\ulcorner \mathrm{Bew}(\ulcorner I \urcorner) \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner))$ (3, (ii))
5. $\mathrm{PA} \vdash (\mathrm{Bew}(\ulcorner I \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \mathrm{Bew}(\ulcorner I \urcorner) \urcorner)) \to$
   $(\mathrm{Bew}(\ulcorner I \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner))$ (4, προτ. λογισμός)
6. $\mathrm{PA} \vdash (\mathrm{Bew}(\ulcorner I \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \mathrm{Bew}(\ulcorner I \urcorner) \urcorner)$ ((iii))
7. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner I \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$ (5, 6, modus ponens)
8. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to S$ (υπόθεση)
9. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner I \urcorner) \to S$ (7, 8, προτ. λογισμός)
10. $\mathrm{PA} \vdash I$ (1, 9)
11. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner I \urcorner)$ (10, (i))
12. $\mathrm{PA} \vdash S$ (9, 11)

⊣

Το 1952 ο Leon Henkin έθεσε την ερώτηση αν το σταθερό σημείο S του τύπου $\mathrm{Bew}(x)$ είναι ή όχι αποδείξιμο. Το θεώρημα του M. H. Löb ανακαλύφθηκε για να απαντήσει αυτή την ερώτηση. Αφού $\mathrm{PA} \vdash S \leftrightarrow \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$ τότε $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to S$ και άρα $\mathrm{PA} \vdash S$.

Θεώρημα 2.2.16. Το δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας για την PA.

$$\text{Αν η PA είναι συνεπής, τότε } \mathrm{PA} \nvdash \mathrm{Con}.$$

Απόδειξη. Έστω ότι η PA είναι συνεπής. Εάν ίσχυε ότι $\mathrm{PA} \vdash \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)$ δηλαδή ότι $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner) \to \bot$, το θεώρημα του Löb θα έδινε ότι $\mathrm{PA} \vdash \bot$. Αυτό όμως δηλώνει ότι η PA δεν είναι συνεπής, αντίθετα με την υπόθεση. Έτσι $\mathrm{PA} \nvdash \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)$, δηλαδή $\mathrm{PA} \nvdash \mathrm{Con}$. $\dashv$

Πρόταση 2.2.17. *Η PA δεν αποδεικνύει προτάσεις της μορφής* $\neg\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$.

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει πρόταση S τέτοια ώστε

1. $\mathrm{PA} \vdash \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$	
2. $\mathrm{PA} \vdash \bot \to S$	(1, προτ. λογισμός)
3. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \to S \urcorner)$	(2, (i))
4. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$	(3, (ii))
5. $\mathrm{PA} \vdash \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)$	(4, προτ. λογισμός)
6. $\mathrm{PA} \vdash \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)$	(1, 5, modus ponens)
7. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Con}$	(6, ορισμός της Con)

και από το δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας καταλήξαμε σε άτοπο. $\dashv$

Πόρισμα 2.2.18. *Η PA δεν αποδεικνύει προτάσεις της μορφής* $\mathrm{Con}(\ulcorner S \urcorner)$. $\dashv$

Παρατήρηση 2.2.3. Το θεώρημα τού Löb δείχνει πόσο "μετριόφρων" είναι η PA. Όχι μόνο δεν αποδεικνύει τη συνέπειά της γενικά, αλλά ούτε καν σε σχέση με κάποια (ακόμα και μη αποκρίσιμη!) πρόταση S, δηλαδή δεν αποδεικνύει ότι αν αποδεικνύει την S τότε αυτή είναι αληθής. Η PA δεν αποδεικνύει την $\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to S$ παρά μόνο όταν είναι υποχρεωμένη εκ των πραγμάτων να το κάνει, όταν δηλαδή αποδεικνύει την S.

2.3 Το θεώρημα της αριθμητικής εγκυρότητας

Σε αυτή την παράγραφο θα αποδείξουμε το θεώρημα της αριθμητικής εγκυρότητας για το GL, που δείχνει ότι το $\Box$ στο GL ερμηνεύεται ως $\mathrm{Bew}(x)$. Θα ορίσουμε ακόμα το σύστημα GLS και θα αποδείξουμε και για αυτό ένα αντίστοιχο θεώρημα.

Ορισμός 2.3.1. Πραγματοποίηση (realization) είναι μια συνάρτηση που αναθέτει σε κάθε προτασιακή μεταβλητή μια πρόταση της PA. Συχνά συμβολίζουμε τις πραγματοποιήσεις με $*$ ή με $\#$.

Η **μετάφραση (translation)** A^* μιας τροπικής πρότασης ως προς μια πραγματοποίηση $*$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

- $\bot^* = \bot$
- $p^* = *(p)$, όπου p προτασιακή μεταβλητή
- $(A \to B)^* = (A^* \to B^*)$
- $(\Box A)^* = \mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner)$

Αφού οι σύνδεσμοι $\wedge$, $\vee$ και $\neg$ ορίζονται μέσω των $\bot$ και $\to$ και εξαιτίας του παραπάνω ορισμού, η μετάφραση ως προς μια πραγματοποίηση $*$ ενός αληθοσυναρτησιακού συνδυασμού προτάσεων είναι ο ίδιος αληθοσυναρτησιακός συνδυασμός των μεταφράσεων αυτών των προτάσεων. Ειδικότερα συμπεραίνουμε ότι $(\Diamond A)^* = \mathrm{Con}(\ulcorner A^* \urcorner)$.

Παρατήρηση 2.3.1. Με επαγωγή μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι αν $*$ και $\#$ είναι δύο πραγματοποιήσεις που αναθέτουν τις ίδιες προτάσεις της PA σε όλες τις προτασιακές μεταβλητές της τροπικής πρότασης A τότε $A^* = A^{\#}$. Συνεπώς αν A είναι μια αμετάβλητη πρόταση τότε η πρόταση A^* της PA δεν εξαρτάται από την $*$.

Πρόταση 2.3.1. *Αν* $\mathrm{K4} \vdash A$*, τότε για κάθε πραγματοποίηση* $*$*,* $\mathrm{PA} \vdash A^*$*.*

Απόδειξη. Με επαγωγή στο ύψος της απόδειξης της A.

- Αν η πρόταση A είναι ταυτολογία, και άρα είναι ταυτολογικός αληθοσυναρτησιακός συνδυασμός τροπικών προτάσεων, τότε η A^* είναι ο ίδιος ταυτολογικός αληθοσυναρτησιακός συνδυασμός προτάσεων της PA, άρα ταυτολογία. Συνεπώς $\mathrm{PA} \vdash A^*$.
- Αν η A είναι επιμεριστικό αξίωμα τότε είναι της μορφής $\Box(B \to C) \to (\Box B \to \Box C)$ και $A^* = \mathrm{Bew}(\ulcorner B^* \to C^* \urcorner) \to (\mathrm{Bew}(\ulcorner B \urcorner)^* \to \mathrm{Bew}(\ulcorner C \urcorner)^*)$. Εξαιτίας της συνθήκης αποδειξιμότητας (ii), $\mathrm{PA} \vdash A^*$.
- Αν A είναι αξίωμα του K4 τότε είναι της μορφής $\Box B \to \Box\Box B$ και $A^* = \mathrm{Bew}(\ulcorner B \urcorner)^* \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \mathrm{Bew}(\ulcorner B^* \urcorner) \urcorner)$. Εξαιτίας της συνθήκης αποδειξιμότητας (iii), $\mathrm{PA} \vdash A^*$.
- Αν η A προκύπτει από την $B \to A$ και την B με τον κανόνα modus ponens έχουμε ότι αν $\mathrm{PA} \vdash (B \to A)^*$, δηλαδή $\mathrm{PA} \vdash B^* \to A^*$, και $\mathrm{PA} \vdash B^*$ τότε από τον κανόνα modus ponens $\mathrm{PA} \vdash A^*$.
- Αν η A προκύπτει από την B με τον κανόνα της γενίκευσης, δηλαδή $A = \Box B$ έχουμε ότι αν $\mathrm{PA} \vdash B^*$ τότε εξαιτίας της συνθήκης αποδειξιμότητας (i), $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner B^* \urcorner)$, δηλαδή $\mathrm{PA} \vdash (\Box B^*)$ και άρα $\mathrm{PA} \vdash A^*$. $\dashv$

Ορισμός 2.3.2. "Κανόνας του Löb" λέγεται ο αποδεικτικός κανόνας τροπικής λογικής που από το $\vdash \Box A \to A$, συμπεραίνει το $\vdash A$, είναι δηλαδή το ζεύγος $(\Box A \to A, A)$.

Ορισμός 2.3.3. K4LR είναι το σύστημα τροπικής λογικής που έχει τα αξιώματα και τους αποδεικτικούς κανόνες του K4 και επιπλέον έχει ως αποδεικτικό κανόνα τον κανόνα του Löb.

Πρόταση 2.3.2. *Αν* $\mathrm{K4LR} \vdash A$*, τότε για κάθε πραγματοποίηση* $*$*,* $\mathrm{PA} \vdash A^*$*.*

Απόδειξη. Στην απόδειξη της πρότασης 2.3.1 προσθέτουμε και την περίπτωση η A να προκύπτει από την $\Box A \to A$ με τον κανόνα του Löb. Έχουμε ότι αν PA $\vdash (\Box A \to A)^*$, δηλαδή PA $\vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner) \to A^*$, τότε εξαιτίας του Θεωρήματος 2.2.15 του Löb, PA $\vdash A^*$. ⊣

Πρόταση 2.3.3. *Τα συστήματα* GL *και* K4LR *έχουν τα ίδια θεωρήματα.*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι GL $\vdash A$ ανν K4LR $\vdash A$. Έστω ότι GL $\vdash A$. Θα δείξουμε ότι K4LR $\vdash \Box(\Box A \to A) \to \Box A$. Θέτουμε $B = \Box A \to A$.

1. K4LR $\vdash \Box(\Box B \to \Box A) \to (\Box\Box B \to \Box\Box A)$ (επιμεριστικό αξίωμα)
2. K4LR $\vdash \Box B \to \Box\Box B$ (αξίωμα του K4)
3. K4LR $\vdash (\Box\Box B \to \Box\Box A) \to (\Box B \to \Box\Box A)$ (2, προτ. λογισμός)
4. K4LR $\vdash \Box(\Box B \to \Box A) \to (\Box B \to \Box\Box A)$ (1, 3, προτ. λογισμός)
5. K4LR $\vdash \Box B \to (\Box\Box A \to \Box A)$ (ορισμός του B, επιμεριστικό αξίωμα)
6. K4LR $\vdash (\Box B \to \Box\Box A) \to (\Box B \to \Box A)$ (5, προτ. λογισμός)
7. K4LR $\vdash \Box(\Box B \to \Box A) \to (\Box B \to \Box A)$ (4, 6, προτ. λογισμός)
8. K4LR $\vdash \Box B \to \Box A$ (7, Löb)
9. K4LR $\vdash \Box(\Box A \to A) \to \Box A$ (8, ορισμός του B)

Άρα αν GL $\vdash A$ τότε K4LR $\vdash A$. αντίστροφα έστω ότι K4LR $\vdash A$. Σύμφωνα με την πρόταση 1.3.13 GL $\vdash \Box A \to \Box\Box A$. Ακόμα το GL είναι κλειστό ως προς τον κανόνα του Löb:

1. GL $\vdash \Box A \to A$ (υπόθεση του κανόνα του Löb)
2. GL $\vdash \Box(\Box A \to A)$ (1, γενίκευση)
3. GL $\vdash \Box(\Box A \to A) \to \Box A$ (αξίωμα του Löb)
4. GL $\vdash \Box A$ (2, 3, modus ponens)
5. GL $\vdash A$ (1, 5, modus ponens)

Άρα αν K4LR $\vdash A$ τότε GL $\vdash A$.Έτσι τελικά GL $\vdash A$ ανν K4LR $\vdash A$. ⊣

Θεώρημα 2.3.4. Αριθμητικής εγκυρότητας για το GL.
Αν GL $\vdash A$, *τότε για κάθε πραγματοποίηση* $*$, PA $\vdash A^*$.

Απόδειξη. Αποτελεί πόρισμα των δύο προηγούμενων προτάσεων. ⊣

Επίσης, όπως απέδειξε ο Robert Solovay, ισχύει και το αντίστροφο αυτού του θεωρήματος. Το αποτέλεσμα αυτό λέγεται "θεώρημα της αριθμητικής πληρότητας για το GL" και θα δούμε την απόδειξή του σε επόμενο κεφάλαιο.

Ας δούμε τώρα κάποια παραδείγματα στα οποία μέσω της μελέτης του GL μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για την αποδειξιμότητα στην PA, χρησιμοποιώντας το θεώρημα 2.3.4.

Ορισμός 2.3.4. Αν S, T είναι προτάσεις της PA θα λέμε **αριθμητικοποίηση (arithmetization)** κάποιου ισχυρισμού τη μεταφορά της έκφρασης του ισχυρισμού αυτού από τη μεταγλώσσα στην τυπική γλώσσα της PA, όπως δηλώνει ο πίνακας:

Ισχυρισμός	Αριθμητικοποίηση
η S είναι αποδείξιμη (στην PA)	$\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$
η S είναι συνεπής (με την PA)	$\neg\mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S \urcorner) = \mathrm{Con}(\ulcorner S \urcorner)$
η S είναι ανατρέψιμη	$\mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S \urcorner) = \neg\mathrm{Con}(\ulcorner S \urcorner)$
η S είναι αποκρίσιμη	$\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \vee \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S \urcorner)$
η S (αποδείξιμα) συνεπάγεται την T	$\mathrm{Bew}(\ulcorner S \to T \urcorner)$
η PA είναι συνεπής	$\neg\mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner) = \mathrm{Con}$
$\vdots$	$\vdots$

και οι λογικοί σύνδεσμοι της μεταγλώσσας μεταφέρονται στην τυπική γλώσσα με τον προφανή τρόπο. Θα λέμε ότι ένας ισχυρισμός είναι αποδείξιμος ανν η αριθμητικοποίηση του αποδεικνύεται στην PA.

Πρόταση 2.3.5. *Το δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας για την* PA *είναι αποδείξιμο.*

Απόδειξη.

1. $\mathrm{GL} \vdash \Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box\bot$ (αξίωμα του Löb)
2. $\mathrm{GL} \vdash \Box\neg\Box\bot \to \Box\bot$ (1, ορισμός του $\neg$)
3. $\mathrm{GL} \vdash \neg\Box\bot \to \neg\Box\neg\Box\bot$ (2, προτ. λογισμός)
4. $\mathrm{PA} \vdash (\neg\Box\bot \to \neg\Box\neg\Box\bot)^*$ (3, θεώρημα 2.3.4)
5. $\mathrm{PA} \vdash \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner\bot\urcorner) \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner\neg\mathrm{Bew}(\ulcorner\bot\urcorner)\urcorner)$ (4, ορισμός μετάφρασης)
6. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Con} \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner\mathrm{Con}\urcorner)$ (5, ορισμός της Con)

Η τελευταία πρόταση είναι η αριθμητικοποίηση του ισχυρισμού ότι αν η PA είναι συνεπής, τότε $\mathrm{PA} \nvdash \mathrm{Con}$, δηλαδή του δεύτερου θεωρήματος μη πληρότητας για την PA. ⊣

Πρόταση 2.3.6. *Είναι αποδείξιμο ότι αν η συνέπεια της* PA *είναι συνεπής, τότε είναι μη αποκρίσιμη.*

Απόδειξη.

1. $\mathrm{GL} \vdash \Box\bot \to \Box\Box\bot$ (πρόταση 1.3.13)
2. $\mathrm{GL} \vdash \neg\Box\Box\bot \to \neg\Box\bot$ (1, προτ. λογισμός)
3. $\mathrm{GL} \vdash \neg\Box\bot \to \neg\Box\neg\Box\bot$ (βήματα 1-3 της προηγούμενης πρότασης)
4. $\mathrm{GL} \vdash \neg\Box\Box\bot \to \neg\Box\neg\Box\bot$ (2, 3, προτ. λογισμός)
5. $\mathrm{GL} \vdash \neg\Box\Box\bot \to (\neg\Box\neg\Box\bot \wedge \neg\Box\Box\bot)$ (4, προτ. λογισμός)
6. $\mathrm{PA} \vdash (\neg\Box\Box\bot \to (\neg\Box\neg\Box\bot \wedge \neg\Box\Box\bot))^*$ (5, θεώρημα 2.3.4)
7. $\mathrm{PA} \vdash \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner\mathrm{Bew}(\ulcorner\bot\urcorner)\urcorner) \to$ (6, ορ. μετάφρασης)
   $(\neg\mathrm{Bew}(\ulcorner\neg\mathrm{Bew}(\ulcorner\bot\urcorner)\urcorner) \wedge \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner\mathrm{Bew}(\ulcorner\bot\urcorner)\urcorner))$
8. $\mathrm{PA} \vdash \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner\neg\mathrm{Con}\urcorner) \to (\neg\mathrm{Bew}(\ulcorner\mathrm{Con}\urcorner) \wedge \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner\neg\mathrm{Con}\urcorner))$ (7, ορ. της Con)
9. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Con}(\ulcorner\mathrm{Con}\urcorner) \to (\neg\mathrm{Bew}(\ulcorner\mathrm{Con}\urcorner) \wedge \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner\neg\mathrm{Con}\urcorner))$ (8, ορ. της Con)

Η τελευταία πρόταση είναι η αριθμητικοποίηση του ισχυρισμού της πρότασης. ⊣

Πρόταση 2.3.7. Το τυποποιημένο θεώρημα του Löb. *Το θεώρημα του Löb είναι αποδείξιμο.*

Απόδειξη.

1. $\mathrm{GL} \vdash \Box(\Box p \to p) \to p$ (αξίωμα του Löb)
2. $\mathrm{PA} \vdash (\Box(\Box p \to p) \to p)^*$, για κάθε $*$ (1, θεώρημα 2.3.4)
3. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to S \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$, για κάθε S (2, κάθε S είναι $*p$ για κάποια $*$)

Η τελευταία πρόταση είναι η αριθμητικοποίηση του ισχυρισμού ότι αν $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to S$, τότε $\mathrm{PA} \vdash S$, δηλαδή του θεωρήματος του Löb. ⊣

Πρόταση 2.3.8.

$$\text{Αν } \mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner R \urcorner) \wedge \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to S \text{ τότε } \mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner R \urcorner) \to S.$$

Απόδειξη.

1. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner R \urcorner) \wedge \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to S$ (υπόθεση)
2. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner R \urcorner) \to (\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to S)$ (1, προτ. λογισμός)
3. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner R \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \mathrm{Bew}(\ulcorner R \urcorner) \urcorner)$ ((iii))
4. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \mathrm{Bew}(\ulcorner R \urcorner) \to (\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to S) \urcorner)$ (2, (i))
5. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \mathrm{Bew}(\ulcorner R \urcorner) \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner (\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to S) \urcorner)$ (4, (ii))
6. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to S \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$ (τυποποιημένο θεώρημα του Löb)
7. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner R \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$ (3, 5, 6, προτ. λογισμός)
8. $\mathrm{PA} \vdash (\mathrm{Bew}(\ulcorner R \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)) \to (\mathrm{Bew}(\ulcorner R \urcorner) \to S)$ (2, προτ. λογισμός)
9. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner R \urcorner) \to S$ (7, 8, modus ponens)

⊣

Πρόταση 2.3.9. *Το σύστημα* GL *δεν είναι κλειστό ως προς τον κανόνα* $(A, \Diamond A)$.

Απόδειξη. Ενώ η $\top$ είναι θεώρημα του GL, η $\Diamond\top$ δεν είναι: αν ήταν, τότε από το θεώρημα 2.3.4 $\mathrm{PA} \vdash (\Diamond\top)^*$, δηλαδή $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Con}$, κάτι που έρχεται σε αντίφαση με το δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας. ⊣

Ορισμός 2.3.5. GLS λέγεται το σύστημα τροπικής λογικής που έχει ως αξιώματα όλα τα θεωρήματα του GL και όλες τις προτάσεις τις μορφής $\Box A \to A$ και μοναδικό αποδεικτικό κανόνα τον modus ponens.

Μέχρι τώρα δεν έχουμε αναφερθεί στο γεγονός ότι τα θεωρήματα της PA είναι αληθείς προτάσεις. Θα το λάβουμε υπόψην στην επόμενη απόδειξη.

Θεώρημα 2.3.10. Αριθμητικής εγκυρότητας για το GLS.
Αν $\mathrm{GLS} \vdash A$, *τότε για κάθε πραγματοποίηση* $*$, *η πρόταση* A^* *είναι αληθής.*

Απόδειξη. Με επαγωγή στο ύψος της απόδειξης του A.

- Αν $\mathrm{GL} \vdash A$ τότε από την πρόταση 2.3.4, για κάθε πραγματοποίηση $*$, $\mathrm{PA} \vdash A^*$ και άρα η A^* είναι αληθής.
- Αν η A είναι της μορφής $\Box B \to B$ τότε η $A^* = \mathrm{Bew}(\ulcorner B^* \urcorner) \to B^*$ είναι αληθής γιατί αν $\mathrm{PA} \vdash B^*$ τότε η B^* είναι αληθής.
- Αν η A προκύπτει από την $B \to A$ και την B με τον κανόνα modus ponens, έχουμε ότι αν η $(B \to A)^* = B^* \to A^*$ και η B^* είναι αληθείς, τότε η A^* είναι αληθής.

$\dashv$

Ο Solovay απέδειξε το αντίστροφο και αυτού του θεωρήματος, το "θεώρημα της αριθμητικής πληρότητας για το GLS". Θα δούμε και αυτή την απόδειξη σε επόμενο κεφάλαιο.

Πρόταση 2.3.11. *Το* GLS *δεν είναι κλειστό ως προς τον κανόνα της γενίκευσης.*

Απόδειξη. Η $\Box\bot \to \bot$, δηλαδή η $\neg\Box\bot$, είναι αξίωμα και άρα θεώρημα του GLS, όμως η $\Box\neg\Box\bot$ δεν είναι θεώρημα του GLS: αν ήταν, τότε από το θεώρημα 2.3.10 η $(\Box\neg\Box\bot)^*$, δηλαδή η $\mathrm{Bew}(\ulcorner\neg\mathrm{Bew}(\ulcorner\bot\urcorner)\urcorner) = \mathrm{Bew}(\ulcorner\mathrm{Con}\urcorner)$, θα ήταν αληθής, άρα θα ήταν αποδείξιμη η συνέπεια της αριθμητικής, κάτι που έρχεται σε αντίφαση με το δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας. $\dashv$

Πόρισμα 2.3.12. *Το* GLS *δεν είναι κανονικό σύστημα τροπικής λογικής.* $\dashv$

Πρόταση 2.3.13. *Το σύστημα* GLS *είναι κλειστό ως προς τον κανόνα* $(A, \Diamond A)$.

Απόδειξη.

1. $\mathrm{GLS} \vdash A$	(υπόθεση)
2. $\mathrm{GLS} \vdash \Box\neg A \to \neg A$	(αξίωμα του GLS)
3. $\mathrm{GLS} \vdash A \to \neg\Box\neg A$	(2, προτ. λογισμός)
4. $\mathrm{GLS} \vdash A \to \Diamond A$	(3, προτ. λογισμός)
5. $\mathrm{GLS} \vdash \Diamond A$	(1, 4, modus ponens)

$\dashv$

Πόρισμα 2.3.14. *Οι προτάσεις* $\top$, $\Diamond\top$, $\Diamond\Diamond\top$, … *είναι θεωρήματα του* GLS. $\dashv$

3. Μοντέλα Kripke τροπικής λογικής

3.1 Σημασιολογία και εγκυρότητα

Ορισμός 3.1.1. **Σχέση (relation)** R από ένα μη κενό σύνολο A σε ένα μη κενό σύνολο B λέγεται ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$. Ιδιαίτερα, αν $A = B$ τότε η R λέγεται σχέση στο σύνολο A. Γράφουμε xRy αντί του $(x, y) \in R$.

Ορισμός 3.1.2. Μια σχέση R στο W λέγεται

- **αυτοπαθής(reflexive)** ανν $\forall x \in W$, xRx
- **αναυτοπαθής(irreflexive)** ανν $\nexists x \in W$, xRx
- **συμμετρική (symmetric)** ανν $\forall x, y \in W$ $(xRy \to yRx)$
- **αντισυμμετρική (antisymmetric)** ανν $\forall x, y \in W$, $(xRy \wedge yRx \to x = y)$
- **μεταβατική (transitive)** ανν $\forall x, y, z \in W (xRy \wedge yRz \to xRz)$
- **ευκλείδεια (euclidean)** ανν $\forall x, y, z \in W (xRy \wedge xRz \to yRz)$
- **σχέση ισοδυναμίας(equivalence ralation)** ανν είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική
- **καλά ορισμένη** ανν για κάθε μη κενό $X \subseteq W$ υπάρχει R-ελαχιστικό στοιχείο, δηλαδή $\exists w \in W (\nexists x \in X, xRw)$
- **αντίστροφα καλά ορισμένη** ανν για κάθε μη κενό $X \subseteq W$ υπάρχει R-μεγιστικό στοιχείο, δηλαδή $\exists w \in W (\nexists x \in X, wRx)$

Πρόταση 3.1.1. *Μια σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας ανν είναι αυτοπαθής και ευκλείδεία.*

Απόδειξη. Έστω ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας. Από τον ορισμό είναι αυτοπαθής. Έστω wRx και wRy. Επειδή η R είναι συμμετρική, xRw κι επειδή είναι μεταβατική, xRy άρα η R είναι ευκλείδεια.

Αντίστροφα, έστω ότι η R είναι αυτοπαθής και ευκλείδεία. Από τον ορισμό είναι αυτοπαθής. Έστω wRx. Τότε επειδή η R είναι αυτοπαθής, wRw, και επειδή είναι ευκλείδεια, xRw, άρα η R είναι συμμετρική. Έστω τώρα ότι wRx και xRy.

Τότε επειδή η R είναι συμμετρική xRw, και επειδή είναι ευκλείδεια wRy, άρα η R είναι μεταβατική. $\dashv$

Στη συνέχεια ορίζουμε τα μοντέλα του Kripke στα οποία υπάρχουν διάφοροι πιθανοί κόσμοι, κάποιοι από τους οποίους διαθέτουν προσβασιμότητα σε άλλους και οι πρώτοι μπορούν να επηρεάσουν τι θα ισχύει στους δεύτερους.

Ορισμός 3.1.3. Πλαίσιο (frame) $\mathfrak{F}$ λέγεται ένα διατεταγμένο ζεύγος (W, R) που αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο W και μία σχέση R στο W. Το (W, R) λέγεται πεπερασμένο, αν το W είναι πεπερασμένο. Τα στοιχεία του W λέγονται **(πιθανοί) κόσμοι**. Το W λέγεται **πεδίο (domain)** και η R **σχέση προσβασιμότητας (accesibility relation)**. Μπορούμε να διαβάζουμε το xRy "ο x **βλέπει** τον y". Το πλαίσιο (W, R) λέμε ότι έχει κάποια ιδιότητα σχέσεων ανν η R έχει αυτή την ιδιότητα. Για παράδειγμα λέμε ότι το (W, R) είναι μεταβατικό ανν η R είναι μεταβατική.

Ορισμός 3.1.4. Αποτίμηση (valuation) V σε ένα σύνολο W είναι μια σχέση από το W στο σύνολο των προτασιακών μεταβλητών. Μπορούμε να διαβάζουμε το wVp "ο w **επαληθεύει (verifies)** την p" ή "η p αληθεύει στο w" ή η p ισχύει στον w.

Ορισμός 3.1.5. Μοντέλο (model) $\mathfrak{M}$ λέγεται το διατεταγμένο ζεύγος $(\mathfrak{F}, V)$, όπου $\mathfrak{F} = (W, R)$ είναι ένα πλαίσιο και V είναι μια αποτίμηση στο W. Ισοδύναμα μοντέλο λέγεται η διατεταγμένη τριάδα (W, R, V). Λέμε ότι το μοντέλο (W, R, V) **βασίζεται** στο πλαίσιο (W, R). Το μοντέλο (W, R, V) λέμε ότι έχει κάποια ιδιότητα σχέσεων ανν το πλαίσιο στο οποίο βασίζεται έχει αυτή την ιδιότητα (δηλαδή αν η R έχει αυτή την ιδιότητα).

Ορισμός 3.1.6. Για κάθε τροπική πρόταση A, κάθε μοντέλο $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ και κάθε κόσμο $w \in W$ ορίζουμε αναδρομικά τη σχέση $M, w \vDash A$ ως εξής:

- $\mathfrak{M}, w \nvDash \bot$
- $\mathfrak{M}, w \vDash p$ ανν wVp, όπου p προτασιακή μεταβλητή
- $\mathfrak{M}, w \vDash A \to B$ ανν (αν $\mathfrak{M}, w \vDash A$ τότε $\mathfrak{M}, w \vDash B$)
  ανν ($\mathfrak{M}, w \nvDash A$ ή $\mathfrak{M}, w \vDash B$)
- $\mathfrak{M}, w \vDash \Box A$ ανν για κάθε x τέτοιο ώστε wRx, $\mathfrak{M}, x \vDash A$

Θα γράφουμε ακόμα $w \vDash A$ αντί του $\mathfrak{M}, w \vDash A$, όταν είναι ξεκάθαρο από τα συμφραζόμενα σε ποιο μοντέλο αναφερόμαστε. Θα διαβάζουμε "η A αληθεύει στο w".

Εξαιτίας του παραπάνω ορισμού και του ορισμού των υπολοίπων συνδέσμων ισχύει το

Πόρισμα 3.1.2.

- $\mathfrak{M}, w \vDash \top$
- $\mathfrak{M}, w \vDash \neg A$ *ανν* $\mathfrak{M}, w \nvDash A$

- $\mathfrak{M}, w \models A \wedge B$ *ανν* $(\mathfrak{M}, w \models A$ *και* $\mathfrak{M}, w \models B)$
- $\mathfrak{M}, w \models A \vee B$ *ανν* $(\mathfrak{M}, w \models A$ *ή* $\mathfrak{M}, w \models B)$
- $\mathfrak{M}, w \models A \leftrightarrow B$ *ανν* $(\mathfrak{M}, w \models A$ *ανν* $\mathfrak{M}, w \models B)$
- $\mathfrak{M}, w \models \Diamond A$ *ανν υπάρχει* x *τέτοιο ώστε* wRx *και* $\mathfrak{M}, x \models B$
- $\mathfrak{M}, w \models \boxdot A$ *ανν για κάθε* x *τέτοιο ώστε* $(wRx$ *ή* $w = x)$, $\mathfrak{M}, x \models A$ ⊣

Ορισμός 3.1.7. Έστω ένα μοντέλο $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ και έστω μια πρόταση A.
Η A λέγεται **αληθής** σε έναν κόσμο w του $\mathfrak{M}$ ανν $\mathfrak{M}, w \models A$.
Η A λέγεται **έγκυρη (valid)** στο $\mathfrak{M}$ ανν για κάθε $w \in W$, η A είναι αληθής στον κόσμο w.
Η A λέγεται **έγκυρη** στο πλαίσιο $\mathfrak{F} = (W, R)$ ανν είναι έγκυρη σε όλα τα μοντέλα που βασίζονται στο $\mathfrak{F}$.
Η A είναι **ικανοποιήσιμη** στο $\mathfrak{M}$ ανν υπάρχει $w \in W$ τέτοιο ώστε η A να είναι αληθής στον w του $\mathfrak{M}$.
Τέλος η A είναι **ικανοποιήσιμη** σε ένα πλαίσιο $\mathfrak{F} = (W, R)$ ανν η A είναι ικανοποιήσιμη σε κάποιο μοντέλο που βασίζεται στο $\mathfrak{F}$.

Πρόταση 3.1.3. *Αν* $\mathrm{K} \vdash A$, *τότε η* A *είναι έγκυρη σε όλα τα μοντέλα και όλα τα πλαίσια.*

Απόδειξη. Με επαγωγή στο ύψος της απόδειξης του A. Θα δείξουμε ότι η A είναι έγκυρη στο $\mathfrak{M} = (W, R, V)$. Έστω $w \in W$.

- Αν η πρόταση A είναι ταυτολογία, και άρα είναι ταυτολογικός αληθοσυναρτησιακός συνδυασμός τροπικών προτάσεων, τότε από τον ορισμό του $\mathfrak{M}, w \models A$, έχουμε ότι $w \models A$ ανν ισχύει ο ίδιος ταυτολογικός συνδυασμός προτάσεων της μορφής $w \models B$ στη μεταγλώσσα, που ισχύει ως ταυτολογία.
- Αν η A προκύπτει από την $B \to A$ και την B με τον κανόνα modus ponens έχουμε ότι αν $w \models B \to A$, δηλαδή (αν $w \models B$ τότε $w \models A$), και $w \models B$, τότε $w \models A$.
- Αν η A είναι επιμεριστικό αξίωμα τότε είναι της μορφής $\Box(B \to C) \to (\Box B \to \Box C)$. Έστω ότι $w \models \Box(B \to C)$ και $w \models \Box B$. Τότε για κάθε x τέτοιο ώστε wRx, έχουμε $x \models B \to C$ και $x \models B$. Έτσι, όπως στην προηγούμενη περίπτωση, για κάθε x τέτοιο ώστε wRx, $x \models C$, δηλαδή $w \models \Box C$. Άρα $w \models \Box(B \to C) \to (\Box B \to \Box C)$.
- Αν η A προκύπτει από την B με τον κανόνα της γενίκευσης, δηλαδή $A = \Box B$, έστω ότι η A είναι έγκυρη στο $\mathfrak{M}$, δηλαδή η A είναι αληθής για κάθε κόσμο του $\mathfrak{M}$, και έστω τυχαίο $w \in W$. Τότε η A είναι αληθής για κάθε x τέτοιο ώστε wRx, και άρα $w \models \Box A$. Τελικά, αφού το w ήταν τυχαίο, η πρόταση $\Box A$ είναι έγκυρη στο $\mathfrak{M}$. ⊣

Πρόταση 3.1.4. *Δεν αληθεύει πάντα ότι αν μια πρόταση είναι έγκυρη σε ένα μοντέλο, τότε κάθε στιγμιότυπο αντικατάστασης είναι έγκυρο σε αυτό το μοντέλο.*

Αποδειξη. Έστω $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ έτσι ώστε για κάθε w, ισχύει ότι wVp αλλά δεν ισχύει ότι wVq. Τότε το p είναι έγκυρο στο $\mathfrak{M}$, αλλά το q, που είναι το στιγμιότυπο αντικατάστασης $p_p(q)$, δεν είναι έγκυρο στο $\mathfrak{M}$. $\dashv$

Πρόταση 3.1.5. *Αν η πρόταση F είναι έγκυρη στο πλαίσιο (W, R), τότε κάθε στιγμιότυπο αντικατάστασης $F_p(A)$ της F, είναι έγκυρο σε αυτό το πλαίσιο.*

Αποδειξη. Έστω τυχαία αποτίμηση V στο W και $\mathfrak{M} = (W, R, V)$. Ορίζουμε την αποτίμηση V' στο W ως εξής: $wV'p$ ανν $\mathfrak{M}, w \vDash A$ και $wV'q$ ανν wVq, για κάθε $q \neq p$. Έστω $\mathfrak{M}' = (W, R, V)$. Με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του F αποδεικνύουμε ότι $\mathfrak{M}', w \vDash F$ ανν $\mathfrak{M}, w \vDash F_p(A)$. Επειδή η F είναι έγκυρη στο (W, R), ισχύει ότι $\mathfrak{M}, w \vDash F$ και άρα $\mathfrak{M}, w \vDash F_p(A)$. Αυτό αποδείχθηκε για τυχαία V και τυχαίο w, έτσι η $F_p(A)$ είναι έγκυρη στο πλαίσιο (W, R). $\dashv$

Ορισμός 3.1.8. Έστω μια σχέση προσβασιμότητας R σε ένα σύνολο W. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τη σχέση R^i αναδρομικά ως εξής:
$R^0 = \{(w, w) |\ w \in W\}$ είναι η ταυτοτική σχέση στο W και
$R^{i+1} = \{(w, y) |\ w, y \in W \wedge \exists x \in W(wR^ix \wedge xRy)\}$.
Έτσι $R^1 = R$ και wR^iy ανν $\exists x_0 \ldots \exists x_n(w = x_0R \ldots Rx_i = y)$.

Ορισμός 3.1.9. Έστω μια τροπική πρόταση A. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ορίζουμε την πρόταση $\Box^iA$ αναδρομικά ως εξής: $\Box^0A = A$ και $\Box^{i+1}A = \Box\Box^iA$. Όμοια ορίζουμε την πρόταση $\Diamond^iA$.

Πρόταση 3.1.6. *Έστω ένα πλαίσιο $\mathfrak{F} = (W, R)$. Τότε $w \vDash \Box^iA$ ανν για κάθε y τέτοιο ώστε wR^iy, $y \vDash A$. Ακόμα $w \vDash \Diamond^iA$ ανν υπάρχει y τέτοιο ώστε wR^iy και $y \vDash A$.*

Αποδειξη. Το πρώτο σκέλος ανάγεται στο δεύτερο, αφού με επαγωγή μπορεί να δειχθεί ότι $w \vDash \Box^iA$ ανν $w \vDash \neg\Diamond^i\neg A$.

Με επαγωγή στο i αποδεικνύουμε το δεύτερο σκέλος της πρότασης. Για $i = 0$ ισχύει από το πόρισμα 3.1.2. Υποθέτοντας ότι ισχύει για i θα δείξουμε ότι ισχύει για $i + 1$. $w \vDash \Diamond^{i+1}A$ ανν $w \vDash \Diamond\Diamond^iA$ ανν υπάρχει x, τέτοιο ώστε wRx και $x \vDash \Diamond^iA$ ανν (από την επαγωγική υπόθεση) υπάρχει x τέτοιο ώστε wRx και υπάρχεί y τέτοιο ώστε xR^iy και $y \vDash A$ ανν υπάρχει y τέτοιο ώστε $wR^{i+1}y$ και $y \vDash A$. $\dashv$

Ορισμός 3.1.10. Ορίζουμε τον **τροπικό βαθμό (modal degree)** $d(A)$, μιας πρότασης A, αναδρομικά ως εξής:

- $d(\bot) = 0$
- $d(p) = 0$, όπου p προτασιακή μεταβλητή
- $d(A \to B) = \max(d(A), d(B))$
- $d(\Box A) = d(A) + 1$

Δηλαδή ο $d(A)$ είναι ο μέγιστος αριθμός φωλιασμένων εμφανίσεων του $\Box$ στην A.

Πρόταση 3.1.7. Η αρχή της συνέχειας. *Έστω τα μοντέλα $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ και $\mathfrak{N} = (X, S, U)$. Υποθέτουμε ότι $d(A) = n$, ότι όλες οι προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στην A ανήκουν σε ένα σύνολο προτασιακών μεταβλητών P, ότι $X \supseteq \{x|\ \exists i \leqslant n\ (wR^i x)\}$, ότι $S = R|_X = \{(x, y)|\ x, y \in X \wedge xRy\}$ και ότι για κάθε $x \in X$ και κάθε $p \in P$, xUp ανν xVp. Τότε για κάθε $w \in W$ $\mathfrak{M}, w \models A$ ανν $\mathfrak{N}, w \models A$.*

Απόδειξη. Με επαγωγή στην πολυπλοκότητα της υποπρότασης B της A, θα δείξουμε ότι αν για κάποιο i, ισχύει $wR^i x$ και $d(B) \leqslant n - i$, και άρα $x \in X$, τότε $\mathfrak{M}, x \models B$ ανν $\mathfrak{N}, x \models B$. Το αποτέλεσμα έπεται, αφού $wR^0 w$ και $d(A) \leqslant n - 0$.

- Αν $B = \bot$ τότε $\mathfrak{M}, x \not\models \bot$ και $\mathfrak{N}, x \not\models \bot$.
- Αν $B = p$, όπου p προτασιακή μεταβλητή, τότε $\mathfrak{M}, x \models p$ ανν xVp ανν xUp ανν $\mathfrak{N}, x \models p$.
- Αν $B = C \to D$. Έστω $d(C \to D) \leqslant n - i$, δηλαδή $\max(d(C), d(D)) \leqslant n - i$. Τότε $d(C), d(D) \leqslant n - i$ και από την επαγωγική υπόθεση $\mathfrak{M}, x \models C$ ανν $\mathfrak{N}, x \models C$, και $\mathfrak{M}, x \models D$ ανν $\mathfrak{N}, x \models D$. Συνεπώς $\mathfrak{M}, x \models B$ ανν $\mathfrak{N}, x \models B$.
- Αν $B = \Box C$. Έστω $wR^i x$ και $d(B) \leqslant n - i$. Τότε $d(B) = d(C) + 1$, άρα $d(C) \leqslant n - i - 1$. Αν xRy τότε $wR^{i+1} y$ και τότε $y \in X$, άρα xSy. Έτσι έχουμε διαδοχικά $\mathfrak{M}, x \models B$ ανν για κάθε y με xRy, $\mathfrak{M}, y \models C$ ανν για κάθε y με xSy, $\mathfrak{M}, y \models C$ ανν, από την επαγωγική υπόθεση, για κάθε y με xSy, $\mathfrak{N}, y \models C$ ανν $\mathfrak{N}, x \models C$. $\dashv$

Ορισμός 3.1.11. Έστω $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, $w \in W$, $X = \{x|\ \exists i\ (wR^i x)\}$, $S = \{(x, y)|\ x, y \in X \wedge xRy\}$ και για κάθε $x \in X$ και κάθε προτασιακή μεταβλητή p, xUp ανν xVp. Τότε το $\mathfrak{N} = (X, S, U)$ ονομάζεται **παραγόμενο υπομοντέλο (generated submodel)** του $\mathfrak{M}$ από το w.

Πρόταση 3.1.8. Η αρχή του παραγόμενου υπομοντέλου. *Έστω $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ και $\mathfrak{N} = (X, S, U)$ το παραγόμενο υπομοντέλο του $\mathfrak{M}$ από ένα $w \in W$. Τότε $\mathfrak{M}, w \models A$ ανν $\mathfrak{N}, w \models A$.*

Απόδειξη. Έστω P το σύνολο όλων των προτασιακών μεταβλητών και $n = d(A)$. Τότε $X \supseteq \{x|\ \exists i \leqslant n\ (wR^i x)\}$ και το ζητούμενο έπεται από την αρχή της συνέχειας. $\dashv$

Πόρισμα 3.1.9. *Θεωρούμε τα μοντέλα $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ και $\mathfrak{N} = (W, R, U)$, την πρόταση A και το $w \in W$. Αν για κάθε x τέτοιο ώστε $\exists i \geqslant 0 (wR^i x)$ και για κάθε προτασιακή μεταβλητή p που περιέχεται στην A, xVp ανν xUp, τότε $\mathfrak{M}, w \models A$ ανν $\mathfrak{N}, w \models A$.* $\dashv$

Θεώρημα 3.1.10.
(α) Η $\Box p \to \Box\Box p$ είναι έγκυρη στο πλαίσιο (W, R) ανν η R είναι μεταβατική.
(β) Η $\Box p \to p$ είναι έγκυρη στο πλαίσιο (W, R) ανν η R είναι αυτοπαθής.
(γ) Η $p \to \Box\Diamond p$ είναι έγκυρη στο πλαίσιο (W, R) ανν η R είναι συμμετρική.
(δ) Η $\Diamond p \to \Box\Diamond p$ είναι έγκυρη στο πλαίσιο (W, R) ανν η R είναι ευκλείδεια.

Απόδειξη.
(α) Υποθέτουμε ότι η $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ είναι έγκυρη στο (W, R) και ότι $wRxRy$. Έστω αποτίμηση V τέτοια ώστε για κάθε $z \in W$, zVp ανν wRz. Τότε wRx, άρα $w \models \Box p$, άρα, από την υπόθεση, $w \models \Box\Box p$, συνεπώς $y \models p$ άρα wRy.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η R είναι μεταβατική και θεωρούμε τυχαία αποτίμηση V. Έστω $w \models p$ και $wRxRy$. Τότε, λόγω μεταβατικότητας της R, wRy, και, αφού $w \models \Box p$ και wRy, $y \models p$. Έτσι, αφού $wRxRy$, $w \models \Box\Box p$.
(β) Ομοίως, για $w \in W$, με V τέτοια ώστε για κάθε $x \in W$, xVp ανν wRx.
(γ) Ομοίως, για $w \in W$, με V τέτοια ώστε για κάθε $z \in W$, zVp ανν $z = w$.
(δ) Ομοίως, αν υποθέσουμε ότι wRx, wRy, με V τέτοια ώστε για κάθε $z \in W$, zVp ανν $z = y$. ⊣

Θεώρημα 3.1.11. Έξι θεωρήματα εγκυρότητας.
(α) Αν K $\vdash A$*, τότε η A είναι έγκυρη σε όλα τα πλαίσια.*
(β) Αν K4 $\vdash A$*, τότε η A είναι έγκυρη σε όλα τα μεταβατικά πλαίσια.*
(γ) Αν T $\vdash A$*, τότε η A είναι έγκυρη σε όλα τα αυτοπαθή πλαίσια.*
(δ) Αν S4 $\vdash A$*, τότε η A είναι έγκυρη σε όλα τα αυτοπαθή και μεταβατικά πλαίσια.*
(ε) Αν B $\vdash A$*, τότε η A είναι έγκυρη σε όλα τα αυτοπαθή και συμμετρικά πλαίσια.*
(στ) Αν S5 $\vdash A$*, τότε η A είναι έγκυρη σε όλα τα αυτοπαθή και ευκλείδεια πλαίσια, δηλαδή σε όλα τα πλαίσια που η σχέση προσβασιμότητάς τους είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη.
(α) Είναι η πρόταση 3.1.3.
(β) Από την πρόταση 3.1.10 και την απόδειξη του θεωρήματος 3.1.3, παρατηρώντας ότι κάθε αξίωμα της μορφής $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ είναι στιγμιότυπο αντικατάστασης της πρότασης $\Box p \rightarrow \Box\Box p$, που είναι έγκυρη σε όλα τα μεταβατικά πλαίσια.
(γ)-(ε) Όμοια με το (β).
(στ) Όμοια με το (β), λαμβάνοντας υπόψην και την πρόταση 3.1.1. ⊣

Πρόταση 3.1.12. *Αν η R είναι αντίστροφα καλά ορισμένη, τότε είναι αναυτοπαθής.*

Απόδειξη. Αν υπήρχε $w \in W$ τέτοιο ώστε wRw ,το $\{w| \ w \in W\}$ θα ήταν μη κενό σύνολο χωρίς R-μεγιστικό στοιχείο. ⊣

Πρόταση 3.1.13. *Η R είναι αντίστροφα καλά ορισμένη ανν δεν υπάρχει άπειρη R-αλυσίδα $x_1 R \ldots R x_i R x_{i+i} R \ldots$.* ⊣

Πρόταση 3.1.14. Επαγωγή στην αντίστροφη της R. *Έστω μοντέλο $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, τέτοιο ώστε η R είναι αντίστροφα καλά ορισμένη, και ψ μια ιδιότητα στο W. Ισχύει ότι αν για κάθε $w \in X$ και για κάθε x, τέτοιο ώστε wRx, $\psi(x)$, τότε για κάθε $w \in W$, $\psi(w)$.*

Απόδειξη. Έστω ότι για κάθε $w \in W$ και για κάθε x, τέτοιο ώστε wRx, $\psi(x)$. Ορίζουμε $X = \{w \in W | \neg\psi(w)\}$. Έστω ότι $w \in W$, δηλαδή $\neg\psi(w)$. Τότε υπάρχει x τέτοιο ώστε wRx και $\neg\psi(x)$, δηλαδή $x \in X$. Συνεπώς το X δεν έχει R-μεγιστικό στοιχείο και, αφού η R είναι αντιστρόφως καλά ορισμένη, το X είναι κενό. Έτσι για κάθε $w \in W$, $\psi(w)$. ⊣

Θεώρημα 3.1.15. *Η $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ είναι έγκυρη στο πλαίσιο (W, R) ανν η R είναι μεταβατική και αντίστροφα καλά ορισμένη.*

Απόδειξη. Έστω ότι η $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ είναι έγκυρη στο πλαίσιο (W, R).

Για τη μεταβατικότητα: Όπως στο θεώρημα 3.1.11, όλα τα θεωρήματα του GL είναι έγκυρα στο (W, R), και επειδή, από την πρόταση 1.3.13, $\mathrm{GL} \vdash \Box p \to \Box\Box p$, η $\Box p \to \Box\Box p$ είναι έγκυρη στο (W, R). Άρα από την πρόταση 3.1.10, το (W, R) είναι μεταβατικό.

Για το ότι η R είναι αντίστροφα καλά ορισμένη: Έστω προς άτοπο ένα μη κενό σύνολο X που δεν έχει R-μεγιστικό στοιχείο. Έστω $w \in X$ και V αποτίμηση στο W, τέτοια ώστε για κάθε $a \in W$, aVp ανν $a \notin X$. Έστω $x \in W$, τέτοιο ώστε wRx και $x \nvDash p$, άρα $x \in X$. Επειδή το x δεν είναι R-μεγιστικό στοιχείο του X, υπάρχει $y \in X$ με xRy. Τότε $y \nvDash p$ και άρα $x \nvDash \Box p$. Έτσι $x \vDash \Box p \to p$ και άρα $w \vDash \Box(\Box p \to p)$. Όμως, επειδή το w δεν είναι R-μεγιστικό στοιχείο του X, υπάρχει $x \in X$ με wRx. Τότε $x \nvDash p$ και άρα $w \nvDash \Box p$. Έτσι $w \nvDash \Box(\Box p \to p) \to \Box p$, που είναι άτοπο εξαιτίας της εγκυρότητας της $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$.

Αντίστροφα, έστω ότι η R είναι μεταβατική και αντίστροφα καλά ορισμένη και έστω $w \nvDash \Box p$. Τότε υπάρχει $z \in W$ τέτοιο ώστε $z \nvDash p$, άρα το σύνολο $X = \{x \in W | wRx \wedge x \nvDash p\}$ είναι μη κενό και άρα έχει R-μεγιστικό στοιχείο x. Άρα αν xRy τότε $y \notin X$, δηλαδή $\neg wRy$ ή $y \vDash p$. Όμως, wRx και xRy, άρα από τη μεταβατικότητα, wRy, έτσι $y \vDash p$. Συνεπώς $x \vDash \Box p$, άρα $x \nvDash \Box p \to p$ και $w \nvDash \Box(\Box p \to p)$. Τελικά, με αντιθετοαναστροφή, αν $w \vDash \Box(\Box p \to p)$ τότε $w \vDash \Box p$, δηλαδή η $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ είναι έγκυρη στο (W, R). ⊣

Πρόταση 3.1.16. *Έστω ότι το $\mathfrak{F} = (W, R)$ είναι πεπερασμένο και μεταβατικό. Τότε το $\mathfrak{F}$ είναι αναυτοπαθές ανν είναι αντίστροφα καλά ορισμένο.*

Απόδειξη. Η μια φορά είναι πόρισμα της πρότασης 3.1.12. Έστω προς άτοπο ότι το $\mathfrak{F}$ δεν είναι αντίστροφα καλά ορισμένο. Τότε, από την πρόταση 3.1.13, υπάρχει άπειρη R-αλυσίδα $x_1R \ldots Rx_iRx_{i+i}R \ldots$ και για κάθε $i < j$, από τη μεταβατικότητα της R, x_iRx_j και εξαιτίας της αναυτοπάθειας της R, $x_i \neq x_j$. Άρα το W είναι άπειρο, άτοπο. ⊣

Θεώρημα 3.1.17. *Αν $\mathrm{GL} \vdash A$, τότε*
(α) η A είναι έγκυρη σε όλα τα μεταβατικά και αντίστροφα καλά ορισμένα πλαίσια και
(β) η A είναι έγκυρη σε όλα τα πεπερασμένα μεταβατικά και αναυτοπαθή πλαίσια.

Απόδειξη. Από το θεώρημα 3.1.15 όπως στην απόδειξη της πρότασης 3.1.11 και λαμβάνοντας υπόψην την πρόταση 3.1.16. ⊣

Συνήθως σκεφτόμαστε τις κλάσεις πλαισίων σαν μοντέλα μιας τυπικής γλώσσας που έχει μοναδικό κατηγορηματικό σύμβολο το R. Για παράδειγμα, ένα πλαίσιο είναι μεταβατικό ανν η πρωτοβάθμια πρόταση $\forall x \forall y \forall z(xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$ αληθεύει σε αυτό το πλαίσιο. Όμως αυτό δεν ισχύει πάντα, όπως δείχνει η παρακάτω πρόταση. Όταν ισχύει για κάποια κλάση πλαισίων, αυτή λέγεται **στοιχειώδης (elementary)**.

Πρόταση 3.1.18. *Δεν υπάρχει πρωτοβάθμια πρόταση που να αληθεύει στο πλαίσιο (W, R) ανν το (W, R) είναι αντίστροφα καλά ορισμένο, δηλαδή η κλάση πλαισίων, που είναι αντίστροφα καλά ορισμένα, δεν είναι στοιχειώδης.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι η πρωτοβάθμια πρόταση λ είναι ένα αντιπαράδειγμα. Τότε η λ δηλώνει ότι η R είναι αντίστροφα καλά ορισμένη, δηλαδή από την πρόταση 3.1.13, δεν υπάρχουν άπειρες ακολουθίες $x_0Rx_1R\ldots$. Ορίζουμε $\sigma_n(x_o, x_1 \ldots, x_n) = x_0Rx_1 \wedge x_1Rx_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}Rx_n$ και $\Sigma = \{\lambda\} \cup \{\sigma_n | \ n \in \mathbb{N}\}$. Επειδή κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ ικανοποιείται, χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συμπάγειας για τον προτασιακό λογισμό, συμπεραίνουμε ότι και το Σ ικανοποιείται, δηλαδή σε κάποιο πλαίσιο που ικανοποιείται από τη λ υπάρχει άπειρη αλυσίδα. Το λ εκφράζει, όμως, το ακριβώς αντίθετο, άτοπο. ⊣

Αν το πλαίσιο (W, R) είναι επίσης και μεταβατικό έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.1.19. *Δεν υπάρχει πρωτοβάθμια πρόταση που να αληθεύει στο πλαίσιο (W, R) ανν το (W, R) είναι μεταβατικό και αντίστροφά καλά ορισμένο, δηλαδή η κλάση πλαισίων, που είναι μεταβατικά και αντίστροφα καλά ορισμένα, δεν είναι στοιχειώδης.*

Απόδειξη. Όμοια με την προηγούμενη απόδειξη, με τη λ να δηλώνει ότι η R είναι μεταβατική και αντίστροφα καλά ορισμένη και ορίζοντας το $\Sigma = \{\lambda\} \cup \{\forall x \forall y \forall z(xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)\}\{\sigma_n | \ n \in \mathbb{N}\}$. ⊣

Παρατήρηση 3.1.1. Τα θεωρήματα 3.1.16 και 3.1.17, μας βοηθούν να ξεπεράσουμε τα προβλήματα που προκύπτουν από την προηγούμενη πρόταση.

Στην πρόταση 3.1.15 είδαμε ότι η $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$ είναι έγκυρη ακριβώς στα πλαίσια που είναι μεταβατικά και αντίστροφα καλά ορισμένα. Όμως:

Πρόταση 3.1.20. *Δεν υπάρχει τροπική πρόταση που είναι έγκυρη ακριβώς στα αντίστροφα καλά ορισμένα πλαίσια.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι η τροπική πρόταση A, με τροπικό βαθμό $n = d(A)$ είναι ένα αντιπαράδειγμα. Ορίζουμε $W = \mathbb{N}$ και $R = \{(w, x) | \ w, x \in W \wedge w + 1 = x\}$, δηλαδή η R είναι η σχέση επομένου του $\mathbb{N}$. Τότε το (W, R) δεν είναι αντίστροφα καλά ορισμένο άρα υπάρχει αποτίμηση V και $w \in W$ τέτοιοι ώστε $w \nvDash A$. Ορίζουμε ακόμα $X = \{w, w + 1, \ldots, w + n\}$, $S = R|_X = \{(x, y) | \ x, y \in X \wedge xRy\}$, και για κάθε p που περιέχεται στην A, xUp ανν xVp. Από την αρχή της συνέχειας $(X, S, U), w \nvDash A$. Όμως το (X, S) είναι πεπερασμένο και άρα αντίστροφα καλά ορισμένο, άτοπο. ⊣

3.2 Πληρότητα και αποκρισιμότητα

Σε αυτή την παράγραφο αποδεικνύουμε τα αντίστροφα των θεωρημάτων 3.1.17 και 3.1.11. Για αυτόν το σκοπό, υιοθετούμε προσωρινά τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 3.2.1. Ορίζουμε πότε ένα πλαίσιο είναι **κατάλληλο (appropriate)** για κάποιο από τα εφτά κανονικά συστήματα που έχουμε δει.
(α) Όλα τα πλαίσια είναι κατάλληλα για το K.
Ένα πλαίσιο είναι κατάλληλο για το
(β) K4 ανν είναι μεταβατικό.
(γ) T ανν είναι αυτοπαθές.
(δ) S4 ανν είναι αυτοπαθές και μεταβατικό.
(ε) B ανν είναι αυτοπαθές και συμμετρικό.
(στ) S5 ανν είναι αυτοπαθές και ευκλείδειο, δηλαδή ανν η σχέση προσβασιμότητάς του είναι σχέση ισοδυναμίας.
(ζ) GL ανν είναι μεταβατικό και αντίστροφα καλά ορισμένο.
Ένα μοντέλο λέγεται κατάλληλο αν βασίζεται σε κάποιο κατάλληλο πλαίσιο.

Έστω L ένα από αυτά τα συστήματα.

Θεώρημα 3.2.1. Το θεώρημα της πληρότητας.
(α) Αν η πρόταση A είναι έγκυρη σε όλα τα πεπερασμένα πλαίσια που είναι κατάλληλα για το L*, τότε* $\mathrm{L} \vdash A$.
(β) Αν η πρόταση A είναι έγκυρη σε όλα τα πλαίσια που είναι κατάλληλα για το L*, τότε* $\mathrm{L} \vdash A$.

Αποδειξη.

Το (β) είναι άμεση συνέπεια του (α).
Έστω μια πρόταση D τέτοια ώστε $\mathrm{L} \nvdash D$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα πεπερασμένο πλαίσιο, που εξαρτάται από την D και είναι κατάλληλο για το L, τέτοιο ώστε η A να μην είναι έγκυρη σε αυτό.

Ορισμός 3.2.2. Μια πρόταση θα λέγεται D-**τύπος** ανν είναι υποπρόταση της D ή άρνηση μιας υποπρότασης της D.

Παρατήρηση 3.2.1. Επειδή το πλήθος των υποπροτάσεων της D, και άρα των D-τύπων, είναι πεπερασμένο, υπάρχουν μόνο πεπερασμένα το πλήθος σύνολα D-τύπων και έχουν πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία.

Ορισμός 3.2.3. Ένα σύνολο X από D-τύπους θα λέγεται **L-συνεπές**, ή απλά συνεπές, αν δεν υπάρχει κίνδυνος παρανόησης, ανν $\mathrm{L} \nvdash \neg \bigwedge X$. Το X θα λέγεται **μεγιστικά συνεπές** ανν είναι συνεπές και για κάθε υποπρόταση A του D, είτε $A \in X$ είτε $\neg A \in X$.

Πρόταση 3.2.2. *Αν το X είναι συνεπές, τότε περιέχεται σε κάποιο μεγιστικά συνεπές σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω A_1, A_2, $\dots A_n$ μια απαρίθμηση των υποπροτάσεων του D. Ορίζουμε αναδρομικά τα σύνολα

$$X_0 = X \qquad \text{και} \qquad X_{k+1} = \begin{cases} X_k \cup \{A_k\}, & \text{αν αυτό είναι συνεπές} \\ X_k \cup \{\neg A_k\}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Τότε για κάθε k με $0 \leqslant k \leqslant n$, το σύνολο X_k είναι συνεπές και το σύνολο $\cup_{k=0}^{n} X_k$ είναι μεγιστικά συνεπές. ⊣

Επειδή L $\nvdash D$, το σύνολο $\{\neg D\}$ είναι συνεπές και άρα υποσύνολο κάποιου μεγιστικά συνεπούς συνόλου y.

Ορίζουμε το μοντέλο $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, με W το σύνολο των μεγιστικά συνεπών μοντέλων, το οποίο δεν είναι κενό, αφού $y \in W$, wVp ανν η p εμφανίζεται στην D και $p \in w$, και R μια σχέση προσβασιμότητας, τέτοια ώστε να ισχύουν:

(1) Για κάθε υποπρόταση $\Box B$ του D και κάθε $w \in W$, $\Box B \in w$ ανν για κάθε x τέτοιο ώστε wRx, $B \in x$.

(2) Το (W, R) είναι κατάλληλο για το L.

Λήμμα 3.2.3. *Για κάθε υποπρόταση A της D και κάθε $w \in W$, $A \in w$ ανν $w \vDash A$.*

Απόδειξη. Με επαγωγή στην πολυπλοκότητα της A, χρησιμοποιώντας τη συνθήκη (1) για την περίπτωση που $A = \Box B$. ⊣

Επειδή το y είναι μεγιστικά συνεπές και $\neg D \in y$, έχουμε ότι $D \notin y$ και, από το λήμμα, $y \nvDash D$. Αυτό σημαίνει ότι το D δεν είναι έγκυρο στο μοντέλο $\mathfrak{M}$, και άρα δεν είναι έγκυρο στο πλαίσιο (W, R). Όμως, από την παρατήρηση 3.2.1, το (W, R) είναι πεπερασμένο και, αφού η R πληροί τη συνθήκη (2), το (W, R) είναι κατάλληλο για την L.

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, μένει να ορίσουμε μια σχέση προσβασιμότητας για κάθε ένα από τα εφτά συστήματα, που να ικανοποιεί τις συνθήκες (1) και (2).

Για το K. Ορίζουμε wRx ανν για κάθε $\Box B \in w$, $B \in x$.
(2) Όλα τα πλαίσια είναι κατάλληλα για το K, άρα και το (W, R).
(1,$\Rightarrow$) Αν $\Box B \in w$ και wRx, τότε από τον ορισμό της R, $B \in x$.
(1,$\Leftarrow$) Πρέπει να δείξουμε ότι αν $\Box B \notin w$, τότε υπάρχει x τέτοιο ώστε wRx και $B \notin x$. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $\Box B \notin w$. Θεωρούμε το

$$X = \{C | \ \Box C \in w\} \cup \{\neg B\}.$$

Έστω, προς άτοπο, ότι το X δεν είναι K-συνεπές. Τότε
K $\vdash \neg \bigwedge X$, δηλαδή
K $\vdash \neg(\bigwedge\{C | \ \Box C \in w\} \wedge \neg B)$, άρα
K $\vdash \bigwedge\{C | \ \Box C \in w\} \to B$. Από την κανονικότητα του K προκύπτει ότι
K $\vdash \bigwedge\{\Box C | \ \Box C \in w\} \to \Box B$.
Τότε επειδή το w είναι μεγιστικά συνεπές, $\Box B \in w$, που είναι άτοπο. Έτσι το X

είναι συνεπές και άρα υπάρχει κάποιο μεγιστικά συνεπές σύνολο x τέτοιο ώστε $X \subseteq x$. Επειδή $\neg B \in X \subseteq x$ και το x είναι μεγιστικά συνεπές, $B \notin x$. Ακόμα, αν $\Box C \in w$, τότε $C \in X \subseteq x$, άρα, εξ ορισμού, wRx.

Για το K4. Ορίζουμε wRx ανν για κάθε $\Box B \in w$, ισχύουν $B \in x$ και $\Box B \in x$.
(2) Έστω wRx και xRy. Τότε, για κάθε $\Box B \in w$, $\Box B \in x$, άρα και $B \in y$ και $\Box B \in y$. Άρα wRy και η R είναι μεταβατική.
(1,$\Rightarrow$) Όμοια με την περίπτωση του K.
(1,$\Leftarrow$) Πρέπει να δείξουμε ότι αν $\Box B \notin w$, τότε υπάρχει x τέτοιο ώστε wRx και $B \notin x$. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $\Box B \notin w$. Θεωρούμε το

$$X = \{C |\ \Box C \in w\} \cup \{\Box C |\ \Box C \in w\} \cup \{\neg B\}.$$

Έστω, προς άτοπο, ότι το X δεν είναι K4 συνεπές. Τότε
$\mathrm{K4} \vdash \neg \bigwedge X$, δηλαδή
$\mathrm{K4} \vdash \neg(\bigwedge\{C |\ \Box C \in w\} \wedge (\bigwedge\{\Box C |\ \Box C \in w\} \wedge \neg B)$, άρα
$\mathrm{K4} \vdash \bigwedge\{C |\ \Box C \in w\} \wedge (\bigwedge\{\Box C |\ \Box C \in w\} \rightarrow B$.
Από την κανονικότητα του K4 προκύπτει ότι
$\mathrm{K4} \vdash \bigwedge\{\Box C |\ \Box C \in w\} \wedge (\bigwedge\{\Box\Box C |\ \Box C \in w\} \rightarrow \Box B$. Όμως για κάθε C
$\mathrm{K4} \vdash \Box C \rightarrow \Box\Box C$, έτσι
$\mathrm{K4} \vdash \bigwedge\{\Box C |\ \Box C \in w\} \rightarrow \Box B$. Τότε επειδή το w είναι μεγιστικά συνεπές, $\Box B \in w$, που είναι άτοπο. Έτσι το X είναι συνεπές και άρα υπάρχει κάποιο μεγιστικά συνεπές σύνολο x τέτοιο ώστε $X \subseteq x$. Επειδή $\neg B \in X \subseteq x$ και το x είναι μεγιστικά συνεπές, $B \notin x$. Ακόμα, αν $\Box C \in w$, τότε $C, \Box C \in X \subseteq x$, άρα, εξ ορισμού, wRx.

Για το T. Ορίζουμε την R όπως στην περίπτωση του K.
(2) Έστω $w \in W$. Το w είναι μεγιστικά T-συνεπές. Όμως $\mathrm{T} \vdash \Box B \rightarrow B$ και άρα αν $w \models \Box B$, τότε $w \models B$. Έτσι, από τον ορισμό, wRw και άρα η R είναι αυτοπαθής.
(1) Όμοια με την περίπτωση του K.

Για το S4. Ορίζουμε την R όπως στην περίπτωση του K4.
Αφού $\mathrm{S4} \vdash \Box B \rightarrow B$, η απόδειξη είναι όμοια με αυτή της περίπτωσης για το T.

Για το B. Ορίζουμε wRx ανν για κάθε $\Box B \in w$, $B \in x$ και για κάθε $\Box B \in x$, $B \in w$. Εργαζόμαστε όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις, με

$$X = \{C |\ \Box C \in w\} \cup \{\neg\Box E |\ \Box E \text{ είναι υποπρόταση της } D \textit{ και } \neg E \in w\} \cup \{\neg B\}.$$

Για το S5. Ορίζουμε wRx ανν για κάθε $\Box B$, $\Box B \in w$ ανν $\Box B \in x$. Η απόδειξη ακολουθεί τις ίδιες γραμμές, με

$$X = \{\Box C |\ \Box C \in w\} \cup \{\neg\Box E |\ \neg\Box E \in w\} \cup \{\neg B\}.$$

Για το GL. Ορίζουμε wRx ανν για κάθε $\Box B \in w$, ισχύει ότι $B \in x$, ότι $\Box B \in x$

και ότι υπάρχει $\Box E \in x$ τέτοιο ώστε $\neg\Box E \in w$.
(2) Έστω wRx και xRy. Τότε, για κάθε $\Box C \in w$, $\Box C \in x$ άρα και $C \in y$ και $\Box C \in y$. Ακόμα, αφού wRx, υπάρχει $\Box E \in x$ τέτοιο ώστε $\neg\Box E \in w$ και άρα, αφού xRy, $\Box E \in y$ και $\neg\Box E \in w$. Έτσι wRy και η R είναι μεταβατική.
Έστω προς άτοπο wRw. Τότε υπάρχει $\Box E \in w$ τέτοιο ώστε $\neg\Box E \in w$, δηλαδή το w δεν είναι GL-συνεπές, άτοπο. Έτσι wRy και η R είναι αναυτοπαθής.
Το (W, R) είναι πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές άρα, από την πρόταση 3.1.16, είναι μεταβατικό και αντίστροφα καλά ορισμένο, δηλαδή κατάλληλο για το GL.
(1,$\Rightarrow$) Όμοια με την περίπτωση του K.
(1,$\Leftarrow$) Πρέπει να δείξουμε ότι αν $\Box B \notin w$, τότε υπάρχει x τέτοιο ώστε wRx και $B \notin x$. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $\Box B \notin w$. Θεωρούμε το

$$X = \{C, \Box C |\ \Box C \in w\} \cup \{\neg B, \Box B\}.$$

Έστω, προς άτοπο, ότι το X δεν είναι GL συνεπές. Τότε
$\mathrm{GL} \vdash \neg \bigwedge X$, δηλαδή
$\mathrm{GL} \vdash \neg(\bigwedge\{C, \Box C |\ \Box C \in w\} \wedge \Box B \wedge \neg B)$, άρα
$\mathrm{GL} \vdash \bigwedge\{C, \Box C |\ \Box C \in w\} \wedge \Box B \to B$ που σημαίνει
$\mathrm{GL} \vdash \bigwedge\{C, \Box C |\ \Box C \in w\} \to (\Box B \to B)$. Από την κανονικότητα του GL,
$\mathrm{GL} \vdash \bigwedge\{\Box C, \Box\Box C |\ \Box C \in w\} \to \Box(\Box B \to B)$. Επειδή όμως
$\mathrm{GL} \vdash \Box(\Box B \to B) \to B$ και για κάθε C,
$\mathrm{GL} \vdash \Box C \to \Box\Box C$, τελικά έχουμε
$\mathrm{GL} \vdash \{\Box C |\ \Box C \in w\} \to \Box B$.
Τότε επειδή το w είναι μεγιστικά συνεπές, $\Box B \in w$, που είναι άτοπο. Έτσι το X είναι συνεπές και άρα υπάρχει κάποιο μεγιστικά συνεπές σύνολο x τέτοιο ώστε $X \subseteq x$. Επειδή $\neg B \in X \subseteq x$ και το x είναι μεγιστικά συνεπές, $B \notin x$. Ακόμα, αν $\Box C \in w$, τότε $C, \Box C \in X \subseteq x$, άρα, εξ ορισμού, wRx.

Έτσι ολοκληρώθηκε η απόδειξη του θεωρήματος της πληρότητας. Βοηθούμενοι από την ανάλυση που κάναμε στην απόδειξή του, μπορούμε να καταλήξουμε στο εξής αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.2.4. *Αν* L *είναι ένα από τα εφτά συστήματα, τότε το* L *είναι αποκρίσιμο, δηλαδή υπάρχει αλγόριθμος που αποφασίζει πάντα αν μια τυχαία πρόταση* D *είναι θεώρημά του ή όχι.*

Απόδειξη. Έστω k το πλήθος των υποπροτάσεων της D. Επειδή για κάθε υποπρόταση A της D, κάθε μεγιστικά συνεπές σύνολο υποπροτάσεων της D περιέχει ακριβώς μια από τις A και $\neg A$, υπάρχουν το πολύ 2^k μεγιστικά συνεπή σύνολα D-τύπων. Από την προηγούμενη απόδειξη συμπεραίνουμε ότι αν $\mathrm{L} \nvdash D$ τότε υπάρχει πεπερασμένο μοντέλο $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ με το πολύ 2^k κόσμους, που σε κάποιον από αυτούς η D δεν είναι αληθής. Ακόμα βλέπουμε ότι προϋπόθεση του wVp είναι το p να εμφανίζεται στην D. Ισχύει ότι $\mathrm{L} \vdash D$ αν δεν υπάρχει κανένας κόσμος w σε κανένα μοντέλο ώστε $W \nvDash D$. Έχουμε να ελέγξουμε μόνο πεπερασμένα το πλήθος (2^{2^k}) πεπερασμένα μοντέλα και άρα, αφού μπορούμε να τα διατρέξουμε, υπάρχει αλγόριθμος που να αποφασίζει.

$\dashv$

Ορισμός 3.2.4. Ένα πλαίσιο (W, R) ονομάζεται **δέντρο** ανν

(i) Για κάθε $w \in W$ αν xRw και yRw τότε $x = y$, δηλαδή το w είναι προσβάσιμο από το πολύ έναν κόσμο.

(ii) Υπάρχει μοναδικό στοιχείο του W, το οποίο ονομάζεται **ρίζα**, που δεν είναι προσβάσιμο από κανέναν κόσμο.

(iii) Η R είναι ακυκλική, δηλαδή δεν υπάρχει ακολουθία της μορφής $x_0Rx_1 \dots Rx_nRx_0$.

Ένα πλαίσιο (W, R) ονομάζεται **δάσος** ανν είναι ξένη ένωση δέντρων, δηλαδή το πεδίο του είναι ξένη ένωση των πεδίων των δέντρων και η σχέση προσβασιμότητάς του είναι ξένη ένωση των σχέσεων προσβασιμότητας των δέντρων.

Πρόταση 3.2.5. *Αν μια πρόταση A είναι έγκυρη σε όλα τα πεπερασμένα μεταβατικά και αναυτοπαθή δάση, τότε* $\mathrm{GL} \vdash A$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ ένα πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές μοντέλο. Θα ακολουθήσουμε μια διαδικασία που θα μας επιτρέψει όταν ακολουθούμε μια σχέση προσβασιμότητας να θεωρούμε κάθε κόσμο σαν νέο, ώστε να "ξεμπλέξουμε" δέντρα και να κατασκευάσουμε ένα δάσος.

Έστω X το σύνολο που περιέχει όλες τις πεπερασμένες R-ακολουθίες, δηλαδή τις ακολουθίες της μορφής $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ για όλα τα n, τέτοιες ώστε για κάθε $i < n$, x_iRx_{i+1}.Έστω, ακόμα, η σχέση S τέτοια ώστε sSr ανν η ακολουθία r επεκτείνει γνήσια την s, δηλαδή για κάποια n, m με $n < m$, $s = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ και $r = (x_0, x_1, \dots, x_m)$.

Το (W, R) είναι ακυκλικό γιατί, αν είχε κύκλο, τότε επειδή είναι μεταβατικό θα υπήρχε $w \in W$ τέτοιο ώστε wRw, άτοπο. Επειδή είναι και πεπερασμένο, το (X, S) είναι επίσης πεπερασμένο. Το (X, S) είναι ακόμα προφανώς μεταβατικό και αναυτοπαθές.

Ορίζουμε τώρα, αν $s = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, sUp ανν x_nVp.

Αν $\mathfrak{N} = (X, S, U)$ και A μια πρόταση, με επαγωγή στην πολυπλοκότητα της A μπορεί να δειχθεί ότι $\mathfrak{N}, s \vDash A$ ανν $\mathfrak{M}, x_n \vDash A$. Συνεπώς αν μια πρόταση A είναι έγκυρη σε όλα τα πεπερασμένα μεταβατικά και αναυτοπαθή δάση, τότε είναι έγκυρη και σε όλα τα πεπερασμένα μεταβατικά και αναυτοπαθή πλαίσια.

Όμως από το θεώρημα της πληρότητας 3.2.1 και την πρόταση 3.1.16, έχουμε ότι αν μια πρόταση A είναι έγκυρη σε όλα τα πεπερασμένα μεταβατικά και αναυτοπαθή πλαίσια, τότε $\mathrm{GL} \vdash A$. ⊣

Πόρισμα 3.2.6. *Αν μια πρόταση A είναι έγκυρη σε όλα τα πεπερασμένα μεταβατικά και αναυτοπαθή δέντρα, τότε* $\mathrm{GL} \vdash A$.

Απόδειξη. Από την αρχή του παραγόμενου υπομοντέλου 3.1.8 και την παρατήρηση ότι κάθε παραγόμενο υπομοντέλο ενός δάσους είναι δέντρο. ⊣

4. Αποτελέσματα για το GL

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε κάποια αποτελέσματα για τις αμετάβλητες προτάσεις, δηλαδή τις προτάσεις που δεν περιέχουν προτασιακές μεταβλητές, και πώς αυτά εφαρμόζονται στην PA.

4.1 Αμετάβλητες προτάσεις σε κανονική μορφή

Ορισμός 4.1.1. Μια αμετάβλητη πρόταση λέμε ότι είναι σε **κανονική μορφή** ανν είναι αληθοσυναρτησιακός συνδυασμός προτάσεων της μορφής $\Box^i\bot$, για κάποιο $i \in \mathbb{N}$

Λήμμα 4.1.1.
(α) Για κάθε $0 \leqslant i \leqslant j$, $\mathrm{GL} \vdash \Box^i\bot \to \Box^j\bot$
(β) Για κάθε $0 \leqslant i \leqslant j$, $\mathrm{GL} \vdash \Diamond^j\top \to \Diamond^i\top$

Απόδειξη. (α) Με επαγωγή στα i, j, αφού $\mathrm{GL} \vdash \bot \to \Box\bot$ και για κάθε πρόταση D, $\mathrm{GL} \vdash \Box D \to \Box\Box D$.
(β) Από τον ορισμό της $\top$ και αντιθετοαντιστροφή. $\dashv$

Θεώρημα 4.1.2. (κανονικής μορφής για αμετάβλητες προτάσεις) *Αν A είναι μια αμετάβλητη πρόταση, τότε υπάρχει αμετάβλητη πρόταση B σε κανονική μορφή τέτοια ώστε* $\mathrm{GL} \vdash B \leftrightarrow C$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στην πολυπλοκότητα της A. Αν $A = \bot$ ή είναι της μορφής $B \to C$ με B και C σε κανονική μορφή, το ζητούμενο ισχύει. Μένει η περίπτωση που η A είναι της μορφής $\Box B$ με B σε κανονική μορφή. Αφού η B είναι αληθοσυναρτησιακός συνδυασμός προτάσεων της μορφής $\Box^i\bot$ μπορεί να γραφτεί σε κανονική συζευκτική μορφή: $\mathrm{GL} \vdash B \leftrightarrow C_1 \wedge \cdots \wedge C_k$
με $C_r = \Box^{n_{r,1}}\bot \vee \cdots \vee \Box^{n_{r,p}}\bot \vee \neg\Box^{m_{r,1}}\bot \vee \cdots \vee \neg\Box^{m_{r,q}}\bot$ όταν $1 \leqslant r \leqslant k$.
Όμως από την κανονικότητα
$\mathrm{GL} \vdash \Box(C_1 \wedge \cdots \wedge C_k) \leftrightarrow \Box C_1 \wedge \cdots \wedge \Box C_k$, δηλαδή
$\mathrm{GL} \vdash A \leftrightarrow \Box C_1 \wedge \cdots \wedge \Box C_k$.

Έστω $C = \Box^{n_1}\bot \vee \cdots \vee \Box^{n_p}\bot \vee \neg\Box^{m_1}\bot \vee \cdots \vee \neg\Box^{m_q}\bot$. Αρκεί να δείξουμε ότι η $\Box C$ είναι ισοδύναμη με μια πρόταση σε κανονική μορφή. Μπορούμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, αφού $\mathrm{GL} \vdash C \leftrightarrow \Box^0\bot \vee C$ να θεωρήσουμε ότι υπάρχει κάποια θετική εμφάνιση $\Box^{n_r}\bot$ ανάμεσα στις διαζεύξεις της C. Από το λήμμα 4.1.1 $\mathrm{GL} \vdash C \leftrightarrow \Box^n\bot \vee \neg\Box^m\bot$, με $n = \max(n_1, \ldots, n_p)$ και $\min(m_1, \ldots, m_q)$.

Αν δεν εμφανίζεται η $\neg\Box^m\bot$, τότε $\mathrm{GL} \vdash C \leftrightarrow \Box^n\bot$, άρα από την κανονικότητα $\mathrm{GL} \vdash \Box C \leftrightarrow \Box^{n+1}\bot$ και η $\Box C$ είναι ισοδύναμη με μια πρόταση σε κανονική μορφή.

Αν εμφανίζεται η $\neg\Box^m\bot$, τότε $\mathrm{GL} \vdash C \leftrightarrow (\Box^m\bot \to \Box^n\bot)$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Αν $m \leqslant n$, από το λήμμα 4.1.1 συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{GL} \vdash C$, άρα $\mathrm{GL} \vdash \Box C$, δηλαδή $\mathrm{GL} \vdash \Box C \leftrightarrow \top$, κι έτσι η C είναι ισοδύναμη με μια πρόταση σε κανονική μορφή.

Αν $n < m$, δηλαδή $n+1 \leqslant m$,

1. $\mathrm{GL} \vdash \Box^{n+1}\bot \to \Box^m\bot$	(από το λήμμα 4.1.1)
2. $\mathrm{GL} \vdash (\Box^m\bot \to \Box^n\bot) \to (\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot)$	(1, προτασιακός λογισμός)
3. $\mathrm{GL} \vdash \Box(\Box^m\bot \to \Box^n\bot) \to \Box(\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot)$	(2, κανονικότητα)
4. $\mathrm{GL} \vdash \Box(\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot) \to \Box^{n+1}\bot$	(αξίωμα του Löb)
5. $\mathrm{GL} \vdash \Box(\Box^m\bot \to \Box^n\bot) \to \Box^{n+1}\bot$	(3, 4, προτασιακός λογισμός)
6. $\mathrm{GL} \vdash \Box^n\bot \to (\Box^m\bot \to \Box^n\bot)$	(προτασιακός λογισμός)
7. $\mathrm{GL} \vdash \Box^{n+1}\bot \to \Box(\Box^m \to \Box^n)$	(6, κανονικότητα)
8. $\mathrm{GL} \vdash \Box C \leftrightarrow \Box^{n+1}\bot$	(5, 7, προτασιακός λογισμός)

κι έτσι η C είναι ισοδύναμη με μια πρόταση σε κανονική μορφή και σε αυτή την περίπτωση. $\dashv$

Ορισμός 4.1.2. Αναδρομικά ορίζουμε πότε μια πρόταση της PA λέγεται **σταθερή (constant)**:

- Η $\bot$ είναι σταθερή πρόταση.
- Αν οι S και T είναι σταθερές προτάσεις, τότε και η $(S \to T)$ είναι σταθερή πρόταση.
- Αν η S είναι σταθερή πρόταση τότε και η $\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$ είναι σταθερή πρόταση.

Πρόταση 4.1.3. *Για κάθε σταθερή πρόταση S υπάρχει μοναδική αμετάβλητη πρόταση A τέτοια ώστε για κάθε πραγματοποίηση $*$, $S = A^*$.*

Απόδειξη. Ονομάζουμε A την τροπική πρόταση που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε κάθε υποπρόταση της μορφής $\mathrm{Bew}(\ulcorner B \urcorner)$ με $\Box B$. Τότε από την παρατήρηση 2.3.1 για κάθε πραγματοποίηση $*$, ισχύει ότι $S = A^*$. $\dashv$

Η κλάση των σταθερών προτάσεων περιέχει αριθμητικοποιήσεις ενδιαφερουσών ισχυρισμών που εμπλέκουν τις έννοιες της αποδειξιμότητας και της συνέπειας, όπως ότι η συνέπεια της PA δεν είναι αποδείξιμη και όπως το δεύτερο θεώρημα της πληρότητας. Ο Harvey Friedman που τις εισήγαγε, έθεσε το ερώτημα αν το σύνολο των αληθών σταθερών προτάσεων είναι αναδρομικό, δηλαδή αν υπάρχει αλγόριθμος που να αποφασίζει αν μια σταθερή πρόταση είναι ή όχι αληθής. Το θεώρημα 4.1.2 οδηγεί σε καταφατική απάντηση:

Θεώρημα 4.1.4.
(α) Υπάρχει αλγόριθμος που αποφασίζει αν μια σταθερή πρόταση είναι ή όχι αληθής.

(β) Υπάρχει αλγόριθμος που αποφασίζει αν μια σταθερή πρόταση είναι ή όχι αποδείξιμη στην PA.

Απόδειξη. (α) Έστω μια σταθερή πρόταση S της PA και A μια αμετάβλητη τροπική πρόταση, τέτοια ώστε για κάθε πραγματοποίηση $*$, $A^* = S$. Τότε από το θεώρημα 4.1.2 υπάρχει αμετάβλητη πρόταση B σε κανονική μορφή ισοδύναμη με την A. Έτσι η S είναι ισοδύναμη με τη B^* που είναι αληθοσυναρτησιακός συνδυασμός προτάσεων της μορφής

$$(\Box^i\bot)^* = \underbrace{\mathrm{Bew}(\ulcorner \mathrm{Bew}(\ulcorner \ldots \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)\urcorner)\urcorner)}_{i \text{ φορές}}.$$

Επειδή για κάθε i η πρόταση αυτή είναι ψευδής, αν C η πρόταση που προκύπτει αν ξαναγράψουμε τη B "ξεχνώντας" κάθε εμφάνιση του $\Box$, η C^* έχει την ίδια αληθοτιμή με την B^* και την S. Η αληθοτιμή της C^* όμως μπορεί να υπολογιστεί, αφού η C^* είναι αληθοσυναρτησιακός συνδυασμός του $\bot$.

(β) Αρκεί να αποφασίσουμε αν η $\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$, δηλαδή η $(\Box A)^*$, είναι αληθής. Αυτό γίνεται όπως στο (α).

$\dashv$

Παράδειγμα 4.1.1. Για να δείξουμε ότι η πρόταση $S = \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)$, που είναι η αριθμητικοποίηση της συνέπειας της PA δεν είναι αποκρίσιμη με τον τρόπο που περιγράψαμε πιο πάνω, θεωρούμε την αμετάβλητη πρόταση που μεταφράζεται στην $\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$, την $\Box\neg\Box\bot = \Box(\Box\bot \to \bot)$, που από το αξίωμα του Löb, είναι ισοδύναμη την $\Box\bot$. "Ξεχνώντας" την εμφάνιση του $\Box$ βλέπουμε ότι η $\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$ είναι ψευδής, και άρα η S δεν είναι αποδείξιμη. Θεωρούμε ακόμα την αμετάβλητη πρόταση που μεταφράζεται στην $\mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S \urcorner)$, την $\Box\neg\neg\Box\bot = \Box\Box\bot$. "Ξεχνώντας" τις εμφανίσεις του $\Box$ βλέπουμε ότι η $\mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S \urcorner)$ είναι ψευδής, και άρα ούτε η $\neg S$ είναι αποδείξιμη. Έτσι τελικά η S είναι μη αποκρίσιμη.

4.2 Τάξη και Ίχνος

Ορισμός 4.2.1. Έστω $\mathfrak{F} = (W, R)$ ένα πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές πλαίσιο και μια R-αλυσίδα του, $w_n R \ldots R w_0$. Επειδή το $\mathfrak{F}$ είναι μεταβατικό, αν $j > i$ τότε $w_j R w_i$ και επειδή είναι αναυτοπαθές, $w_i \neq w_j$. Συνεπώς οι αλυσίδες είναι ακυκλικές και είναι σε πεπερασμένο πλαίσιο, άρα το μήκος τους n φράσεται από το πλήθος $|W|$ των κόσμων του πλαισίου. Για κάθε κόσμο $w \in W$, λοιπόν, υπάρχει ένα μέγιστο n τέτοιο ώστε από το w να ξεκινάει μια αλυσίδα μήκους n, $w = w_n R \ldots R w_0$. Ορίζουμε την **τάξη (rank)** $\rho(w) = \rho_{(W,R)}(w)$ του κόσμου w αυτό το μέγιστο n. Αν δεν υπάρχει x τέτοιο ώστε wRx ορίζουμε $\rho(w) = 0$. Μια αλυσίδα από το w μήκους $\rho(w)$ λέγεται **μέγιστης τάξης**.

Λήμμα 4.2.1. *Αν wRx τότε $\rho(w) > \rho(x)$.*

Απόδειξη. Αν wRx τότε μια από τις αλυσίδες του w είναι η $wRxR \ldots Rx_0$, όπου $xR \ldots Rx_0$ μια αλυσίδα μέγιστης τάξης του x. Η μέγιστη αλυσίδα του w θα είναι μεγαλύτερη ή ίση σε μήκος με αυτή, έτσι $\rho(w) \geqslant \rho(x) + 1$ δηλαδή $\rho(w) > \rho(x)$. $\dashv$

Λήμμα 4.2.2. *Αν $\rho(w) > i$ τότε υπάρχει x τέτοιο ώστε wRx και $\rho(x) = i$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\rho(w) = n > i$ και μια μέγιστης τάξης αλυσίδα $w = w_n R \dots R w_0$. Θέτουμε $x = w_i$. Έχουμε ότι $\rho(x) \geqslant i$. Έστω, προς άτοπο ότι $\rho(x) = j \geqslant i$. Τότε υπάρχει αλυσίδα μήκους j $w_i = x = x_j R \dots R x_0$ και άρα $wR \dots R w_i = x_j R \dots R x_0$ κι έτσι $\rho(w) \geqslant n - i + j > n$, άτοπο. ⊣

Ορισμός 4.2.2. Ορίζουμε το **ίχνος (trace)** $[\![A]\!]$ μιας αμετάβλητης πρότασης A που είναι ένα σύνολο φυσικών αριθμών, αναδρομικά:

- $[\![\bot]\!] = \varnothing$
- $[\![A \to B]\!] = (\mathbb{N} - [\![A]\!]) \cup [\![B]\!]$
- $[\![\Box A]\!] = \{n |\ \forall i < n\ (i \in [\![A]\!])\}$

έτσι, για τους υπόλοιπους συνδέσμους, που ορίζονται από αυτούς, έχουμε ότι

- $[\![\neg A]\!] = \mathbb{N} - [\![A]\!]$
- $[\![A \wedge B]\!] = [\![A]\!] \cap [\![B]\!]$
- $[\![A \leftrightarrow B]\!] = ([\![\mathbb{N} - A]\!] \cap [\![\mathbb{N} - B]\!]) \cup ([\![A]\!] \cap [\![B]\!])$
- $[\![\Diamond A]\!] = \{n |\ \exists i < n\ (i \in [\![A]\!])\}$

Παράδειγμα 4.2.1. $[\![\Box\bot]\!] = \{0\}$, $[\![\Box\Box\bot]\!] = \{0, 1\}$, $[\![\neg\Box\bot]\!] = N - \{0\}$, $[\![\Box\Box\bot \wedge \neg\Box\bot]\!] = \{1\}$.

Λήμμα 4.2.3.
(α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $[\![\Box^n \bot]\!] = \{i |\ i < n\}$.
(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $[\![\neg(\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot)]\!] = [\![\Box^{n+1}\bot \wedge \neg\Box^n\bot]\!] = \{n\}$.

Απόδειξη. (α) Με επαγωγή στο n.
(β) Από τον ορισμό του ίχνους και το (α). ⊣

Ορισμός 4.2.3. Ένα σύνολο φυσικών αριθμών X λέγεται **συμπεπερασμένο (cofinite)** ανν το συμπλήρωμά του, $\mathbb{N} - X$, είναι πεπερασμένο.

Λήμμα 4.2.4. *Για κάθε αμετάβλητη πρόταση A, $[\![A]\!]$ είναι είτε πεπερασμένο είτε συμπεπερασμένο.*

Απόδειξη. Με επαγωγή στην πολυπλοκότητα της A. ⊣

Πρόταση 4.2.5. *Έστω $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ ένα πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές μοντέλο, ένας κόσμος $w \in W$ και μια αμετάβλητη πρόταση A. Τότε*

$$\mathfrak{M}, w \vDash A \text{ ανν } \rho(w) \in [\![A]\!].$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στην πολυπλοκότητα της A δείχνουμε ότι για κάθε κόσμο w, $w \vDash A$ ανν $\rho(w) \in [\![A]\!]$.

- Αν $A = \bot$ τότε $w \nvDash \bot$ και $\rho(w) \notin [\![\bot]\!]$.

- Αν $A = B \to C$ τότε $w \vDash B \to C$ ανν $w \nvDash B$ ή $w \vDash C$ ανν, από την επαγωγική υπόθεση, $\rho(w) \notin [\![B]\!]$ ή $\rho(w) \in [\![C]\!]$ ανν $\rho(w) \in [\![B \to C]\!]$.
- Αν $A = \Box B$. Διατυπώνοντας αντιθετοαντίστροφα τον ορισμό, $n \notin [\![\Box B]\!]$ ανν $\exists i < n(i \notin [\![B]\!])$.

  Αν $w \nvDash \Box B$ τότε $\exists x(wRx \wedge x \nvDash B)$ και, από την επαγωγική υπόθεση, $\rho(x) \notin [\![B]\!]$. Επειδή wRx, από το λήμμα 4.2.1 $\rho(w) > \rho(x)$ και έτσι $\rho(w) \notin [\![\Box B]\!]$.

  Αντιστρόφως αν $\rho(w) \notin [\![\Box B]\!]$ τότε $\exists i < \rho(w)(i \notin [\![B]\!])$. Από το λήμμα 4.2.2 $\exists x(wRx \wedge \rho(x) = i)$ και από την επαγωγική υπόθεση $x \nvDash B$ και άρα $w \nvDash \Box B$. ⊣

Πρόταση 4.2.6. *Για κάθε αμετάβλητη πρόταση A,*

$$\mathrm{GL} \vdash A \text{ ανν } [\![A]\!] = \mathbb{N}.$$

Αποδειξη. Έστω ότι $\mathrm{GL} \vdash A$ και $n \in \mathbb{N}$. Ένα μοντέλο $\mathfrak{M}$ με πλαίσιο μια αλυσίδα με $n+1$ κόσμους είναι πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές. Για το πρώτο στοιχείο της αλυσίδας w ισχύει ότι $\rho(w) = n$. Έχουμε ότι $\mathfrak{M}, w \vDash A$ και άρα από την προηγούμενη πρόταση $n = \rho(w) \in [\![A]\!]$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε n, $[\![B]\!] = \mathbb{N}$.

Αντίστροφα, αν $\mathrm{GL} \nvdash A$, υπάρχει ένα πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές μοντέλο $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ και $w \in W$ τέτοιο ώστε $\mathfrak{M}, w \nvDash A$ και τότε, από την προηγούμενη πρόταση, $\rho(w) \notin [\![A]\!]$. ⊣

Πρόταση 4.2.7. *Αν A, B αμετάβλητες προτάσεις, τότε*

$$\mathrm{GL} \vdash A \to B \text{ ανν } [\![A]\!] \subseteq [\![B]\!]$$
$$\text{και άρα } \mathrm{GL} \vdash A \leftrightarrow B \text{ ανν } [\![A]\!] = [\![B]\!].$$

Αποδειξη. $\mathrm{GL} \vdash A \to B$ ανν, από την πρόταση 4.2.6, $[\![A \to B]\!] = \mathbb{N}$ ανν $(\mathbb{N} - [\![A]\!]) \cup [\![B]\!] = \mathbb{N}$ ανν $\forall n \in \mathbb{N}(n \notin [\![A]\!] \vee n \in [\![B]\!])$ ανν $\forall n \in \mathbb{N}(n \in [\![A]\!] \to n \in [\![B]\!])$ ανν $A \subseteq B$. ⊣

Πρόταση 4.2.8.
(α) Έστω ότι το $[\![A]\!]$ είναι πεπερασμένο και
$B = \bigvee\{\neg(\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot) |\ n \in [\![A]\!]\}$. *Τότε* $\mathrm{GL} \vdash A \leftrightarrow B$.
(β) Έστω ότι το $[\![A]\!]$ είναι συμπεπερασμένο και
$B = \bigwedge\{\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot |\ n \notin [\![A]\!]\}$. *Τότε* $\mathrm{GL} \vdash A \leftrightarrow B$.

Αποδειξη. (α) Χρησιμοποιώντας το λήμμα 4.2.3, έχουμε

$$[\![B]\!] = \bigcup_{n \in [\![A]\!]} [\![\neg(\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot)]\!] = \bigcup_{n \in [\![A]\!]} \{n\} = [\![A]\!]$$

και τότε, από την πρόταση 4.2.7, $\mathrm{GL} \vdash A \leftrightarrow B$.

(β) Έχουμε ότι $\neg B = \bigvee\{\neg(\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot) |\ n \in [\![\neg A]\!]\}$. Επειδή το A είναι συμπεπερασμένο, το $\neg A$ είναι πεπερασμένο και από το (α) έχουμε ότι $[\![\neg A]\!] = [\![\neg B]\!]$. Τότε από την πρόταση 4.2.7, $\mathrm{GL} \vdash \neg A \leftrightarrow \neg B$, δηλαδή $\mathrm{GL} \vdash A \leftrightarrow B$. ⊣

Παρατήρηση 4.2.1. Η παραπάνω πρόταση, σε συνδυασμό με το λήμμα 4.2.4, δίνει ακόμα έναν τρόπο να βρίσκουμε από μια αμετάβλητη πρόταση A μια αμετάβλητη πρόταση B σε κανονική μορφή ισοδύναμη με την A.

Τα δύο παρακάτω θεωρήματα αποτελούν ειδικές περιπτώσεις των θεωρημάτων αριθμητικής πληρότητας του Solovay, για αμετάβλητες προτάσεις.

Θεώρημα 4.2.9. *Έστω A μια αμετάβλητη πρόταση και $*$ μια τυχαία πραγματοποίηση. Τότε*

$$\mathrm{GLS} \vdash A \text{ ανν η } A^* \text{ είναι αληθής.}$$

Απόδειξη. Η μια κατεύθυνση είναι το θεώρημα 2.3.10. Έστω ότι η A^* είναι αληθής. Από το λήμμα 4.2.4 υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

- Αν το $[\![A]\!]$ είναι πεπερασμένο, τότε από την πρόταση 4.2.8 (α) $\mathrm{GL} \vdash A \leftrightarrow \bigvee\{\neg(\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot)|\ n \in [\![A]\!]\}$.
  Αν $[\![A]\!] = \varnothing$, τότε $\mathrm{GL} \vdash A \leftrightarrow \bot$. Από το θεώρημα 2.3.4 $\mathrm{PA} \vdash A^* \leftrightarrow \bot$ και άρα η A είναι ψευδής.
  Αν $[\![A]\!] \neq \varnothing$, τότε $\mathrm{PA} \vdash A \leftrightarrow \bigvee\{\neg((\Box^{n+1}\bot)^* \to (\Box^n\bot)^*)|\ n \in [\![A]\!]\}$ και επειδή η πρόταση $(\Box^{n+1}\bot)^*$ είναι ψευδής για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η A είναι και πάλι ψευδής.
  Έτσι το $[\![A]\!]$ δεν μπορεί να είναι πεπερασμένο.
- Αν το $[\![A]\!]$ είναι συμπεπερασμένο, τότε από την πρόταση 4.2.8 (β) $\mathrm{GL} \vdash A \leftrightarrow \bigwedge\{\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot|\ n \notin [\![A]\!]\}$.
  Επειδή η πρόταση $\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot$ είναι αξίωμα του GLS, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{GLS} \vdash A$. ⊣

Θεώρημα 4.2.10. *Έστω A μια αμετάβλητη πρόταση και $*$ μια τυχαία πραγματοποίηση. Τότε*

$$\mathrm{GL} \vdash A \text{ ανν } \mathrm{PA} \vdash A^*$$

Απόδειξη. Η μια κατεύθυνση είναι το θεώρημα 2.3.4. Έστω ότι $\mathrm{PA} \vdash A^*$. Στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος είδαμε ότι αν το $[\![A]\!]$ είναι πεπερασμένο, το A είναι ψευδές και άρα $\mathrm{PA} \nvdash A$. Άρα από το λήμμα 4.2.4 το $[\![A]\!]$ είναι συμπεπερασμένο.
Από την πρόταση 4.2.8 $\mathrm{GL} \vdash A \leftrightarrow \bigwedge\{\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot|\ n \notin [\![A]\!]\}$ και άρα $\mathrm{PA} \vdash A^* \leftrightarrow \bigwedge\{(\Box^{n+1}\bot)^* \to (\Box^n\bot)^*|\ n \notin [\![A]\!]\}$. Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $i \notin [\![A]\!]$. Τότε αφού $\mathrm{PA} \vdash A^*$,
$\mathrm{PA} \vdash (\Box^{i+1}\bot)^* \to (\Box^i\bot)^*$, δηλαδή
$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner(\Box^{i+1}\bot)^*\urcorner) \to (\Box^i\bot)^*$ και άρα από το θεώρημα του Löb 2.2.15 $\mathrm{PA} \vdash (\Box^i\bot)^*$. Όμως αυτό είναι άτοπο, αφού η πρόταση $(\Box^i\bot)^*$ είναι ψευδής.
Έτσι $[\![A]\!] = \mathbb{N}$, έτσι από την πρόταση 4.2.6 $\mathrm{GL} \vdash A$. ⊣

Οι παρακάτω προτάσεις αποκτούν ιδιαίτερο ενδιαφέρον όταν ειδωθούν κάτω από το πρίσμα του θεωρήματος 2.3.4 της αριθμητικής εγκυρότητας.

Πρόταση 4.2.11. (Goldfarb). *Για κάθε αμετάβλητη πρόταση A,*

$$\mathrm{GL} \vdash \neg\Box A \wedge \neg\Box\neg A \to \Diamond\Diamond\top.$$

Απόδειξη. Για κάθε A, $0 \in [\![\Box A]\!]$, άρα $0 \notin [\![\neg\Box A]\!]$ και έτσι $0 \notin [\![\neg\Box A \wedge \neg\Box\neg A]\!]$. Αν $0 \in [\![A]\!]$, τότε $1 \in [\![\Box A]\!]$ και άρα $1 \notin [\![\neg\Box A]\!]$. Αν $0 \notin [\![A]\!]$, τότε $0 \in [\![\neg A]\!]$, δηλαδή $1 \in [\![\Box\neg A]\!]$ και άρα $1 \notin [\![\neg\Box\neg A]\!]$. Σε κάθε περίπτωση $1 \notin [\![\neg\Box A \wedge \neg\Box\neg A]\!]$. Έτσι $[\![\neg\Box A \wedge \neg\Box\neg A]\!] \subseteq \mathbb{N} - \{0,1\} = [\![\Diamond\Diamond\top]\!]$ και από την πρόταση 4.2.7 έχουμε το ζητούμενο. $\dashv$

Πόρισμα 4.2.12. *Για κάθε αμετάβλητη πρόταση A,*

$$\mathrm{GL} \nvdash \Diamond\top \rightarrow \neg\Box A \wedge \neg\Box\neg A.$$

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι $\mathrm{GL} \vdash \Diamond\top \rightarrow \neg\Box A \wedge \neg\Box\neg A$. Τότε από την πρόταση 4.2.11, $\mathrm{GL} \vdash \Diamond\top \rightarrow \Diamond\Diamond\top$ και άρα από την πρόταση 4.2.7, $[\![\Diamond\top]\!] \subseteq [\![\Diamond\Diamond\top]\!]$, δηλαδή $\mathbb{N} - \{0\} \subseteq \mathbb{N} - \{0,1\}$ που είναι άτοπο. $\dashv$

Το προηγούμενο πόρισμα εξαιτίας της αριθμητικής εγκυρότητας, δηλώνει ότι η PA δεν μπορεί να αποδείξει τη μη αποκρισιμότητα καμιάς σταθερής πρότασης, ούτε από την υπόθεση ότι η PA είναι συνεπής.

Πρόταση 4.2.13. *Για κάθε αμετάβλητη πρόταση A, αν*

$$\textit{αν } \mathrm{GL} \vdash \Diamond\top \rightarrow A \textit{ αλλά } \mathrm{GL} \nvdash A \textit{ τότε } \mathrm{GL} \vdash A \leftrightarrow \Diamond\top.$$

Απόδειξη. Από την πρόταση 4.2.7 έχουμε ότι $A \supseteq [\![\Diamond\top]\!] = \mathbb{N} - \{0\}$ και ότι $[\![A]\!] \neq \mathbb{N}$. Έτσι $[\![A]\!] = \mathbb{N} - \{0\} = [\![\Diamond\top]\!]$ και από την πρόταση 4.2.7, $\mathrm{GL} \vdash A \leftrightarrow \Diamond\top$. $\dashv$

Η προηγούμενη πρόταση δηλώνει ότι δεν υπάρχει σταθερή πρόταση αυστηρά ασθενέστερη της συνέπειας της PA.

Πρόταση 4.2.14. *Για κάθε αμετάβλητη πρόταση A,*

$$\textit{αν } \mathrm{GL} \nvdash \neg A \textit{ τότε υπάρχει } n \in \mathbb{N} \textit{ τέτοιο ώστε } \mathrm{GL} \nvdash A \rightarrow \Diamond^n\top.$$

Απόδειξη. Έστω ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{GL} \vdash A \rightarrow \Diamond^n\top$. Τότε από την πρόταση 4.2.7 έχουμε ότι $[\![A]\!] \subseteq [\![\Diamond^n\top]\!] = [\![\neg\Box^n\bot]\!]$, άρα $[\![\neg A]\!] \supseteq [\![\Box^n\bot]\!]$. Επειδή από το λήμμα 4.2.3 ισχύει $[\![\Box^n\bot]\!] = \{i |\ i < n\}$, έχουμε $[\![\neg A]\!] \supseteq \{i |\ i < n\}$. Αυτό όμως ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $[\![\neg A]\!] = \mathbb{N}$. Έτσι, από την πρόταση 4.2.6, $\mathrm{GL} \vdash \neg A$. $\dashv$

Αυτή η πρόταση δηλώνει ότι καμία σταθερή πρόταση δεν είναι ισχυρότερη από όλες τις προτάσεις της μορφής "η συνέπεια της PA", "η συνέπεια της συνέπειας της PA" κ.ο.κ.

4.3 Ανταναχλάσεις και επαναλαμβανόμενοι ισχυρισμοί συνέπειας

Ορισμός 4.3.1. Ανταναχλάση (reflection) μιας πρότασης S της PA λέγεται η πρόταση $\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \rightarrow S$.

Λαμβάνοντας υπόψην αυτόν τον ορισμό το θεώρημα του Löb είναι ο ισχυρισμός ότι αν η αντανάκλαση μιας πρότασης S είναι αποδείξιμη, τότε και η S είναι αποδείξιμη.

Πρόταση 4.3.1. *Δεν υπάρχει συνεπής με την* PA *πρόταση S που να συνεπάγεται όλες τις αντανακλάσεις.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει πρόταση S τέτοια ώστε για κάθε πρόταση R, $\mathrm{PA} \vdash S \to (\mathrm{Bew}(\ulcorner R \urcorner) \to R)$. Τότε για $R = \neg S$

1. $\mathrm{PA} \vdash S \to (\mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S \urcorner) \to \neg S)$
2. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S \urcorner) \to (S \to \neg S)$ (1, προτ. λογισμός)
3. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S \urcorner) \to (\neg S)$ (2, προτ. λογισμός)
4. $\mathrm{PA} \vdash \neg S$ (4, Löb)

και άρα η πρόταση S δεν είναι συνεπής με την PA. ⊣

Πρόταση 4.3.2. *Έστω ένα μεταβατικό μοντέλο $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ τέτοιο ώστε για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ $w_n R \dots R w_0$, και $X = \{\Box A_i \to A_i |\ i < n\}$. Τότε υπάρχει $j \leqslant n$ τέτοιο ώστε $w_j \vDash \bigwedge X$.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι για κάθε $j \leqslant n$, $w_j \nvDash \bigwedge X$, δηλαδή υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $w_j \nvDash \Box A_i \to A_i$. Από την αρχή του περιστερώνα για κάποιο $i \in \mathbb{N}$ υπάρχουν k, l με $0 \leqslant k < l \leqslant n$ τέτοια ώστε $w_k \nvDash \Box A_i \to A_i$ και $w_l \nvDash \Box A_i \to A_i$. Άρα $w_k \nvDash A_i$ και $w_l \vDash \Box A_i$. Επειδή όμως το $\mathfrak{M}$ είναι μεταβατικό, $w_l R w_k$ που είναι άτοπο. ⊣

Πρόταση 4.3.3. (Leivant) *Αν $X = \{\Box A_i \to A_i |\ i < n\}$ και $\mathrm{GL} \vdash \bigwedge X \to (\Box^k p \to p)$, τότε $k \leqslant n$.*

Απόδειξη. Έστω $W = \{n, \dots, 1, 0, -1\}$, wRx ανν $w > x$ και wVp ανν $w = -1$. Το $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ είναι μεταβατικό και αντίστροφα καλά ορισμένο. Έστω προς άτοπο ότι $k > n$. Αν $0 \leqslant j \leqslant n$, τότε $j \nvDash p$ και $j \vDash \Box^{j+1} p$, άρα $j \vDash \Box^k p$ και συνεπώς $j \vDash \neg(\Box^k p \to p)$. Όμως από την πληρότητα του GL $j \vDash \bigwedge X \to (\Box^k p \to p)$ και άρα $j \nvDash \bigwedge X$ που είναι άτοπο λόγω της πρότασης 4.3.2. ⊣

Πρόταση 4.3.4. *Αν $X = \{\Box A_i \to A_i |\ i < n\}$ τότε $\mathrm{GL} \vdash \Box(\bigwedge X \to \Diamond^n \top) \to (\Diamond^n \top \to \bigwedge X)$.*

Απόδειξη. Έστω ένα μεταβατικό και αντίστροφα καλά ορισμένο μοντέλο $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ και $w \in W$ τέτοιο ώστε $w \vDash \Box(\bigwedge X \to \Diamond^n \top)$ και $w \vDash \Diamond^n \top$, άρα $\rho(w) \geqslant n$. Έστω $j < n$. Τότε $j < \rho(w)$ και από το λήμμα 4.2.2 υπάρχεί w_j τέτοιο ώστε $w R w_j$ και $\rho(w_j) = j$. Έτσι $w_j \vDash \bigwedge X \to \Diamond^n \top$. Όμως $\rho(w_j) = j < n$, και άρα $w_j \nvDash \Diamond^n \top$, έτσι $w_j \nvDash \bigwedge X$. Από την πρόταση 4.3.2 όμως, υπάρχει $j \leqslant n$ τέτοιο ώστε $w_j \vDash \bigwedge X$, άρα $w \vDash \bigwedge X$. Από το θεώρημα της πληρότητας έχουμε το ζητούμενο. ⊣

Ορισμός 4.3.2. Ονομάζουμε **n-οστή επανάληψη της συνέπειας** την πρόταση $C_n = (\Diamond^n \top)^* = \mathrm{Con}(\ulcorner \dots \mathrm{Con}(\ulcorner \mathrm{Con} \urcorner) \urcorner)$.

Πρόταση 4.3.5. *Αν* $\mathrm{PA} \vdash \bigwedge\{\mathrm{Bew}(\ulcorner S_i \urcorner) \to S_i |\ i < n\} \to C_n$*, τότε* $\mathrm{PA} \vdash C_n \to \bigwedge\{\mathrm{Bew}(\ulcorner S_i \urcorner) \to S_i |\ i < n\}$.

Αποδειξη. Έστω ότι
$\mathrm{PA} \vdash \bigwedge\{\mathrm{Bew}(\ulcorner S_i \urcorner) \to S_i |\ i < n\} \to C_n$. Τότε
$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \bigwedge\{\mathrm{Bew}(\ulcorner S_i \urcorner) \to S_i |\ i < n\} \to C_n \urcorner)$.
Έστω οι n διακεκριμένες προτασιακές μεταβλητές $p_0, \ldots, p_{n-1}$ και πραγματοποίηση $*$ τέτοια ώστε για κάθε $i < n$, $p_i^* = S_i$. Τότε η πρόταση 4.3.4 δίνει ότι
$\mathrm{GL} \vdash \Box(\bigwedge\{\Box p_i \to p_i |\ i < n\} \to \Diamond^n \top) \to (\Diamond^n \top \to (\bigwedge\{\Box p_i \to p_i |\ i < n\})$.
Από την αριθμητική εγκυρότητα
$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \bigwedge\{\mathrm{Bew}(\ulcorner S_i \urcorner) \to S_i |\ i < n\} \to C_n \urcorner) \to$
$(C_n \to \bigwedge\{\mathrm{Bew}(\ulcorner S_i \urcorner) \to S_i |\ i < n\})$ και άρα
$\mathrm{PA} \vdash C_n \to \bigwedge\{\mathrm{Bew}(\ulcorner S_i \urcorner) \to S_i |\ i < n\}$. ⊣

Πρόταση 4.3.6. $\mathrm{PA} \vdash C_n \leftrightarrow \bigwedge\{(\Box^{i+1}\bot \to \Box^i \bot)^* |\ 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$.

Αποδειξη. Ισχύει ότι $\mathrm{GL} \vdash (\Diamond \top) \leftrightarrow (\Box\bot \to \bot)$.
Εξαιτίας του λήμματος 4.1.1, αν $0 \leqslant i \leqslant n-1$ τότε $\Box^i\bot \to \Box^n\bot$ και $\bot \to \Box^{i-1}\bot$.
Έτσι αν $0 \leqslant i \leqslant n-1$, τότε $\mathrm{GL} \vdash \Diamond\top \to (\Box^{i+1}\bot \to \Box^i\bot)$ άρα και
$\mathrm{GL} \vdash \Diamond\top \to \bigwedge\{\Box^{i+1}\bot \to \Box^i\bot |\ 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$ και από την αριθμητική εγκυρότητα έχουμε το ζητούμενο.
Η αντίστροφη φορά είναι προφανής. ⊣

Πρόταση 4.3.7. *Δεν υπάρχει σύζευξη με λιγότερες από n ανταναχλάσεις (από το σύνολο* $\bigwedge\{\Box^{i+1} \to \Box^i |\ 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$*) που να συνεπάγεται στην* PA *τον* C_n.

Αποδειξη. Έστω προς άτοπο $m < n$ και σύζευξη R με m ανταναχλάσεις τέτοια ώστε $\mathrm{PA} \vdash R \to C_n$. Από το λήμμα 4.1.1 $\mathrm{GL} \vdash \Diamond^n\top \to \Diamond^m\top$, και άρα $\mathrm{PA} \vdash C_n \to C_m$. Έτσι $\mathrm{PA} \vdash R \to C_m$. Όμως, όπως στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης $\mathrm{PA} \vdash C_m \to R$ και έτσι $\mathrm{PA} \vdash C_m \to C_n$. Από το θεώρημα 4.2.10 $\mathrm{GL} \vdash \Diamond^m\top \to \Diamond^n\top$ και από την πρόταση 4.2.7, $[\![\Diamond^m\top]\!] \subseteq [\![\Diamond^n\top]\!]$, δηλαδή $\mathbb{N} - \{i |\ i < m\} \subseteq \mathbb{N} - \{i |\ i < n\}$, που είναι άτοπο. ⊣

Πρόταση 4.3.8. $\mathrm{GL} \vdash (\Box\Box\bot \to \Box\bot) \wedge (\Box\bot \to \bot) \leftrightarrow \neg\Box\Box\bot$.

Αποδειξη. Η ορθή φορά είναι προφανής. Για την αντίστροφη
$\mathrm{GL} \vdash \neg\Box\Box\bot \to (\Box\Box\bot \to \Box\bot)$ και, αφού
$\mathrm{GL} \vdash \Box\bot \to \Box\Box\bot$, με αντιθετοαντιστροφή έχουμε ότι
$\mathrm{GL} \vdash \neg\Box\Box\bot \to (\Box\bot \to \bot)$. ⊣

Η πρόταση αυτή δίνει γι την PA:
$\mathrm{PA} \vdash (\mathrm{Bew}(\ulcorner \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner) \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)) \wedge (\mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner) \to \bot) \leftrightarrow$
$\neg\mathrm{Bew}(\ulcorner \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner) \urcorner)$.
Όμως στη συνέχεια θα δούμε ότι η πρόταση $\neg\mathrm{Bew}(\ulcorner \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner) \urcorner)$ δεν μπορεί να προκύψει από μια μόνο ανταναχλαση.

Πρόταση 4.3.9. $\mathrm{GL} \vdash \Box((\Box p \to p) \to \neg\Box\Box\bot) \to \Box\Box\bot$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ένα μεταβατικό και αντίστροφα καλά ορισμένο μοντέλο $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ και έστω προς άτοπο $w \in W$ τέτοιο ώστε $w \vDash \Box((\Box p \to p) \to \neg\Box\Box\bot)$ και $w \nvDash \Box\Box\bot$. Τότε $w \vDash \Diamond\Diamond\top$ και άρα $\rho(w) \geqslant 2$.
Άρα από το λήμμα 4.2.2 υπάρχει x με wRx, τέτοιο ώστε $\rho(x) = 1$. Τότε $x \vDash (\Box p \to p) \to \neg\Box\Box\bot$ και $x \nvDash \Diamond\Diamond\top$, δηλαδή $x \nvDash \neg\Box\Box\bot$. Έτσι $x \nvDash (\Box p \to p)$, άρα $x \vDash \Box p$.
Επειδή $\rho(x) = 1$ από το λήμμα 4.2.2 υπάρχει y με xRy, τέτοιο ώστε $\rho(y) = 0$. Τότε όμως $y \vDash p$ και άρα $y \vDash \Box p \to p$. Από τη μεταβατικότητα wRy και άρα $y \vDash (\Box p \to p) \to \neg\Box\Box\bot$. Συνεπώς $y \vDash \neg\Box\Box\bot$, δηλαδή $y \vDash \Diamond\Diamond\top$ που είναι άτοπο αφού $\rho(y) = 0$. Άρα $w \vDash \Box((\Box p \to p) \to \neg\Box\Box\bot) \to \Box\Box\bot$ και από το θεώρημα της πληρότητας έχουμε το ζητούμενο. ⊣

Εξαιτίας της αριθμητικής εγκυρότητας η παραπάνω πρόταση δίνει ότι $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner(\mathrm{Bew}(\ulcorner p\urcorner) \to p) \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner\Box\bot\urcorner)\urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner\mathrm{Bew}(\ulcorner\bot\urcorner)\urcorner)$ και άρα αν $\mathrm{PA} \vdash (\mathrm{Bew}(\ulcorner p\urcorner) \to p) \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner\Box\bot\urcorner)$ τότε $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner\bot\urcorner)$, που δεν ισχύει. Έτσι δεν υπάρχει αντανάκλαση που συνεπάγεται στην PA την $\neg\mathrm{Bew}(\ulcorner\mathrm{Bew}(\ulcorner\bot\urcorner)\urcorner)$.

4.4 Το θεώρημα κανονικής μορφής για τις αμετάβλητες προτάσεις δεν γενικεύεται για κάθε τροπική πρόταση

Σε αυτή την παράγραφο αποδεικνύουμε ένα θεώρημα του Solovay που δείχνει ότι δεν υπάρχει θεώρημα "κανονικής μορφής" για τις μη μεταβλητές προτάσεις.

Ορισμός 4.4.1. Ορίζουμε τα σύνολα τροπικών προτάσεων H_n αναδρομικά ως εξής:
H_0 είναι το σύνολο που περιέχει τις προτάσεις που περιέχουν μόνο την προτασιακή μεταβλητή p και είναι ισοδύναμες στο GL με κάποια από τις p, $\neg p$, $\top$ και $\bot$. H_{n+1} είναι το σύνολο που περιέχει τις προτάσεις που περιέχουν μόνο την προτασιακή μεταβλητή p και είναι ισοδύναμες στο GL με έναν αληθοσυναρτησιακό συνδυασμό προτάσεων της μορφής $\Diamond^r A$, όπου $A \in H_n$ και $r \geqslant 0$.

Πρόταση 4.4.1. *Κάθε πρόταση που περιέχει μόνο την προτασιακή μεταβλητή p ανήκει σε κάποιο H_n.* ⊣

Πρόταση 4.4.2. *Κάθε αμετάβλητη πρόταση ανήκει στο H_1.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Απο το θεώρημα κανονικής μορφής για αμετάβλητες προτάσεις, κάθε αμετάβλητη πρόταση είναι ισοδύναμη με έναν αληθοσυναρτησιακό συνδυασμό προτάσεων της μορφής $\Box^r\bot$, δηλαδή $\neg\Diamond^r\top$. ⊣

Πρόταση 4.4.3. *Αν $m \leqslant n$ τότε $H_m \subseteq H_n$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι $A \in H_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε, αφού $\mathrm{GL} \vdash A \leftrightarrow \Diamond^0 A$, $A \in H_{n+1}$. Με επαγωγή προκύπτει το ζητούμενο. ⊣

Το θεώρημα του Solovay δηλώνει όμως ότι η ακολουθία $\{H_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ είναι *γνησίως* αύξουσα.

Θεώρημα 4.4.4. (Solovay). *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $H_n \neq H_{n+1}$.*

Απόδειξη. Αναδρομικά ορίζουμε την ακολουθία τροπικών προτάσεων A_n, ως εξής: $A_0 = \top$, $A_1 = \Diamond p$ και $A_{n+1} = \Diamond(p \wedge A_n)$. Για παράδειγμα, $A_4 = \Diamond(p \wedge \Diamond(p \wedge \Diamond(p \wedge \Diamond p)))$. Ακόμα $\mathrm{GL} \vdash A_1 \leftrightarrow \Diamond(p \wedge A_0)$ και ο αναδρομικός ορισμός έχει έννοια και για $n = 1$.

Καταρχάς αποδεικνύουμε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $A_n \in H_n$. Για $n = 0$ έχουμε ότι $A_0 \in H_0$. Αν τώρα $A_n \in H_n$, τότε επειδή $p \in H_0 \subseteq H_n$, $p \wedge A_n \in H_n$, δηλαδή $A_{n+1} \in H_{n+1}$.

Για να αποδείξουμε το θεώρημα αρκεί να δείξουμε ότι $A_n \notin H_{n+1}$. Έστω $W = A \cup B \cup C$ με $A = \{a_{-1}, a_0, a_1, \dots\}$, $B = \{b_0, b_1, \dots\}$ και $C = \{c_0, c_1, \dots\}$. Έστω ακόμα R η μεταβατική (αλλά όχι αυτοπαθής) κλειστότητα της S, έτσι ώστε wSx ανν ισχύει μια από τις παρακάτω:

$$\begin{array}{rccc}
\forall n \geqslant -1, & a_{n+1} S a_n & b_{n+2} S a_n & c_{n+1} S a_n \\
\forall n \geqslant 0, & b_{n+1} S b_n & c_{n+1} S b_n & a_{n+2} S b_n \\
\forall n \geqslant 0, & c_{n+1} S c_n & a_{n+1} S c_n & b_{n+1} S c_n
\end{array}$$

Η S φαίνεται στο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, dash, dotted] & \vdots \arrow[d, dash, dotted] & \vdots \arrow[d, dash, dotted] \\
a_3 \arrow[d] \arrow[dr] & c_3 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & b_3 \arrow[dl] \arrow[d] \\
a_2 \arrow[d] \arrow[dr] & c_2 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & b_2 \arrow[dl] \arrow[d] \\
a_1 \arrow[d] \arrow[dr] & c_1 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & b_1 \arrow[dl] \arrow[d] \\
a_0 \arrow[d] & c_0 \arrow[dl] & b_0 \\
a_{-1} & &
\end{tikzcd}$$

Έστω τέλος μια αποτίμηση V τέτοια ώστε wVp ανν $w \in A \cup B$. Θεωρούμε το μοντέλο $\mathfrak{M} = (W, R, V)$. Συνεχίζουμε αποδεικνύοντας με επαγωγή ότι αν $A \in H_n$ και $n \geqslant 0$, τότε $a_n \vDash A$ ανν $b_n \vDash A$.

Για $n = 0$ έχουμε ότι $a_0 \vDash p$ και $b_0 \vDash p$ και με επαγωγή στην πολυπλοκότητα της A, $a_0 \vDash A$ ανν $b_0 \vDash A$.

Αν τώρα για κάθε $B \in H_n$, $a_n \vDash B$ ανν $b_n \vDash B$ και $A \in H_{n+1}$, με επαγωγή στην πολυπλοκότητα της A, επειδή $a_{n+1} \vDash p$ και $b_{n+1} \vDash p$, θα έχουμε ότι $a_{n+1} \vDash A$

και $b_{n+1} \vDash A$, αν δείξουμε πρώτα ότι για κάθε $B \in H_n$ και $r \leqslant 0$, $a_{n+1} \vDash \Diamond^r B$ και $b_{n+1} \vDash \Diamond^r B$.

Έστω $r = 1$. Έστω ότι $a_{n+1} \vDash \Diamond B$. Τότε $\exists d(a_{n+1}Rd \wedge d \vDash B)$. Αφού $a_{n+1}Rd$, υπάρχει $k \geqslant 1$ τέτοιο ώστε $a_{n+1}S^k d$.
Αν $\varkappa = 1$ από τον ορισμό παρατηρούμε ότι αν $a_{n+1}Sd$ τότε $d = a$ ή $d = c_n$ και άρα $d = a_n$ ή $b_{n+1}Sd$.
Αν $k \geqslant 2$, $a_{n+1}S^k d$ ανν $b_{n+1}S^k d$.
Έτσι αν $a_{n+1}Rd$ τότε $d = a_n$ ή $b_{i+1}Rd$.
Αν $d = a_n$ τότε $b_{n+1}Rb_n$ και αφού $a_n \vDash B$, από την επαγωγική υπόθεση $b_n \vDash B$ και άρα $\exists d(b_{n+1}Rd \wedge d \vDash B)$.
Αν $b_{n+1}Rd$, τότε $\exists d(b_{n+1}Rd \wedge d \vDash B)$ (το ίδιο d).
Έτσι σε κάθε περίπτωση συμπεραίνουμε ότι $a_{n+1} \vDash \Diamond B$. Ανάλογα αποδεικνύεται και το αντίστροφο.

Αν $r \geqslant 2$, όπως πριν επαληθεύουμε ότι για κάθε $d \in W$, $a_{n+1}R^r d$ ανν $b_{n+1}R^r d$. Έτσι $a_{n+1} \vDash \Diamond^r B$ ανν $b_{n+1} \vDash \Diamond^r B$. Έτσι η επαγωγή δίνει τώρα ότι αν $A \in H_n$, τότε $a_{n+1} \vDash A$ και $b_{n+1} \vDash A$.

Τέλος $a_n \vDash A_{n+1}$, αφού για κάθε $i \geqslant -1$ $a_i \vDash p$ και $a_nR \ldots Ra_0Ra_{-1} \vDash A_{n+1}$, όμως δεν υπάρχει αλυσίδα με το ίδιο μήκος που ξεκινάει από το b_n και σε κάθε κόσμο αυτής της ακολουθίας να αληθεύει το p και άρα $b_n \nvDash A_{n+1}$. Άρα $A_{n+1} \notin H_n$. ⊣

4.5 Η μη συμπάγεια του GL

Το θεώρημα της συμπάγειας για την πρωτοβάθμια λογική δηλώνει ότι αν G είναι ένα σύνολο προτάσεων και για κάθε πεπερασμένο $H \subseteq G$ το H αληθεύει σε κάποιο μοντέλο, τότε υπάρχει ένα μοντέλο στο οποίο αληθεύει το G. Σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε ότι για το δεν ισχύει παρόμοιο αποτέλεσμα για το GL.

Ορισμός 4.5.1. Έστω $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, $w \in W$ και G ένα σύνολο τροπικών προτάσεων. Τότε $w \vDash G$ ανν για κάθε $A \in G$, $w \vDash A$ και άρα $\mathfrak{M} \vDash G$ ανν για κάθε $w \in W$, $w \vDash G$.

Θεώρημα 4.5.1. (Fine, Rautenberg) *Υπάρχει σύνολο τροπικών προτάσεων G τέτοιο ώστε, ενώ για κάθε πεπερασμένο $H \subseteq G$ υπάρχει μοντέλο $\mathfrak{M}_H$, κατάλληλο για το GL, τέτοιο ώστε $\mathfrak{M}_H \vDash H$, δεν υπάρχει μοντέλο $\mathfrak{M}$, κατάλληλο για το GL, τέτοιο ώστε $\mathfrak{M} \vDash G$.*

Πρωτη αποδειξη. Θεωρούμε την άπειρη ακολουθία διακεκριμένων προτασιακών μεταβλητών $p_0, p_1 \ldots$, το σύνολο $G = \{\Diamond p_0\} \cup \{\Box(p_i \to \Diamond p_{i+1}) | \ i \in \mathbb{N}\}$ και τα υποσύνολά του, $H_n = \{\Diamond p_0\} \cup \{\Box(p_i \to \Diamond p_{i+1}) | \ i < n\}$ (άρα $H_0 = \{\Diamond p_0\}$). Τότε για κάθε πεπερασμένο $H \subseteq G$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $H \subseteq H_n$.

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $W = \{-1, 0, 1, \ldots, n\}$, wRx ανν $w < x$ και wVp_i ανν $w = i$ (και άρα δεν υπάρχει p τέτοιο ώστε $-1Vp$). Το μοντέλο $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ είναι πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές, και άρα κατάλληλο για το GL. Το H_n είναι αληθές στο -1, άρα και κάθε υποσύνολό του. Έτσι για κάθε πεπερασμένο $H \subseteq G$ υπάρχει μοντέλο $\mathfrak{M}_H (= \mathfrak{M}_{H_n}$, αν $H \subseteq H_n)$ κατάλληλο για το GL τέτοιο ώστε $\mathfrak{M}_H \vDash H$.

Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει μοντέλο $\mathfrak{M}$ κατάλληλο για το GL, δηλαδή μεταβατικό και αντίστροφα καλά ορισμένο, τέτοιο ώστε $\mathfrak{M}_H \vDash G$. Θεωρούμε $w \in W$. Τότε $w \vDash G$, άρα $w \vDash \Diamond p_0$, δηλαδή υπάρχει x τέτοιο ώστε wRx και $x \vDash p_0$. Ακόμα για κάθε $y \in W$, $y \vDash G$, άρα για κάθε $i \in \mathbb{N}$, $y \vDash p_i \rightarrow \Diamond p_{i+1}$. Έτσι αν $y \vDash p_i$, τότε υπάρχει $z \in W$ τέτοιο ώστε $z \vDash p_{i+1}$.

Δημιουργείται έτσι μια άπειρη R-αλυσίδα από το w, και από την πρόταση 3.1.13 το W δεν είναι αντίστροφα καλά ορισμένο και καταλήξαμε σε άτοπο. $\dashv$

Δευτερη αποδειξη. **(Goldfarb)** Αυτή η απόδειξη διασκευάζει την προηγούμενη ώστε να χρειαζόμαστε μόνο μία προτασιακή μεταβλητή.

Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τις προτάσεις $C_i = p \wedge \Box^i \bot$, $B_i = \Diamond C_i$ και $A_i = \neg B_i \wedge B_{i+1}$. Τότε όμοια με την πρώτη απόδειξη μπορεί να αποδειχθεί ότι για το σύνολο $G = \{\Diamond A_0\} \cup \{\Box(A_i \rightarrow \Diamond A_{i+1}) | \; i \in \mathbb{N}\}$ δεν υπάρχει μοντέλο $\mathfrak{M}$ κατάλληλο για το GL τέτοιο ώστε $\mathfrak{M} \vDash G$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όμως, θα δείξουμε ότι υπάρχει μοντέλο $\mathfrak{M}_{H_n}$ κατάλληλο για το GL τέτοιο ώστε για το υποσύνολο του G, $H_n = \{\Diamond A_0\} \cup \{\Box(A_i \rightarrow \Diamond A_{i+1}) | \; i < n\}$, να ισχύει $\mathfrak{M}_{H_n} \vDash H$. Θεωρούμε το πλαίσιο (W, R), που είναι η μεταβατική κλειστότητα του παρακάτω διαγράμματος, δηλαδή wRx ανν υπάρχει ακολουθία βελών από το w στο x και zVp ανν υπάρχει i τέτοιο ώστε $z = x_i$.

$$
\begin{array}{rcl}
G & =\!\!\!\dashv & w \\
 & & \downarrow \\
A_0 = \neg B_0 \wedge B_1 & =\!\!\!\dashv & w_0 \longrightarrow x_0 \\
 & & \downarrow \\
A_1 = \neg B_1 \wedge B_2 & =\!\!\!\dashv & w_1 \longrightarrow x_1 \longrightarrow y_{11} \\
 & & \downarrow \\
A_2 = \neg B_2 \wedge B_3 & =\!\!\!\dashv & w_2 \longrightarrow x_2 \longrightarrow y_{21} \longrightarrow y_{22} \\
 & & \downarrow \\
A_3 = \neg B_3 \wedge B_4 & =\!\!\!\dashv & w_3 \longrightarrow x_3 \longrightarrow y_{31} \longrightarrow y_{32} \longrightarrow y_{33} \\
 & & \downarrow \\
 & & \vdots \\
 & & \downarrow \\
A_i = \neg B_i \wedge B_{i+1} & =\!\!\!\dashv & w_i \longrightarrow x_i \longrightarrow y_{i1} \longrightarrow y_{i2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow y_{i3} \\
 & & \downarrow \\
 & & \vdots \\
 & & \downarrow \\
A_n = \neg B_n \wedge B_{n+1} & =\!\!\!\dashv & w_n \longrightarrow x_n \longrightarrow y_{n1} \longrightarrow y_{n2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow y_{n3}
\end{array}
$$

Το μοντέλο $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ είναι κατάλληλο για το GL. Τότε για κάθε $i \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $x_i \vDash C_{i+1}$ και αφού $w_i R x_i$, $w_i \vDash B_{i+1}$. Από την άλλη πλευρά $\mathrm{GL} \vdash \neg B_i \leftrightarrow \Box(p \rightarrow \Diamond^i \top)$ και για κάθε $i \in \mathbb{N}$, αφού από το x_i ξεκινάει αλυσίδα μήκους i, $x_i \vDash \Diamond^i \top$. Όμως $z \vDash p$ ανν υπάρχει i τέτοιο ώστε $z = x_i$, άρα κάθε προσβάσιμος κόσμος από το w_i στον οποίο είναι αληθής η p είναι αληθής και η $\Diamond^i\top$, και τελικά $w_i \models A_i$ και $w \models H_n$. $\dashv$

Παρατήρηση 4.5.1. Δεν μπορούμε να αποδείξουμε το παραπάνω θεώρημα χωρίς να χρησιμοποιήσουμε καμία προτασιακή μεταβλητή, γιατί, από την απόδειξη του θεωρήματος της κανονικής μορφής 4.1.2, κάθε πρόταση του συνόλου G κάθε άπειρο σύνολο θα είναι ισοδύναμο με ένα πεπερασμένο. Έτσι, αν περιοριστούμε στα σύνολα αμετάβλητων προτάσεων το θεώρημα της συμπάγειας ισχύει.

5. Το θεώρημα σταθερού σημείου

Το θεώρημα σταθερού σημείου, που θα αποδείξουμε σε αυτό το κεφάλαιο, είναι το αποτέλεσμα της τροπικής λογικής που έχει τις πιο εντυπωσιακές εφαρμογές στη μελέτη της αποδειξιμότητας.

5.1 Κάποιες σχετικές προτάσεις

Ορισμός 5.1.1. Μια πρόταση λέγεται **τροπικοποιημένη** στην προτασιακή μεταβλητή p, ανν κάθε εμφάνιση της p στην A είναι μέσα στο πεδίο εφαρμογής κάποιας εμφάνισης του $\Box$, ισοδύναμα ανν η A είναι αληθοσυναρτησιακός συνδυασμός προτάσεων της μορφής $\Box D$ και προτασιακών μεταβλητών διάφορων της p.

Στο εξής θα θεωρούμε ότι όποτε αναφερόμαστε σε σταθερό σημείο μιας πρότασης, θα εννοούμε ότι η πρόταση αυτή είναι τροπικοποιημένη στην p και ότι το σταθερό σημείο είναι σταθερό σημείο ως προς p, εκτός αν αναφέρεται το αντίθετο. Ακόμα κάποιες φορές θα γράφουμε $A(p)$ αντί A.

Θυμίζουμε ότι $\boxdot A \stackrel{\text{ορ}}{=} A \wedge \Box A$ και το πόρισμα 3.1.2: $\mathfrak{M}, w \vDash \boxdot A$ ανν για κάθε x τέτοιο ώστε (wRx ή $w = x$), $\mathfrak{M}, x \vDash A$.

Ορισμός 5.1.2. Αν η A περιέχει την p και H είναι μια πρόταση που περιέχει μόνο προτασιακές μεταβλητές που περιέχονται στην A εκτός από την p, και

$$\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow A) \leftrightarrow \boxdot(p \leftrightarrow H),$$

τότε η H λέγεται **σταθερό σημείο** της A (ως προς p).

Το θεώρημα σταθερού σημείου δηλώνει ότι κάθε πρόταση A, που είναι τροπικοποιημένη στην p, έχει σταθερό σημείο.

Πρόταση 5.1.1. *Αν η H είναι σταθερό σημείο της A, τότε*

$$\mathrm{GL} \vdash \Box(p \leftrightarrow A) \leftrightarrow \Box(p \leftrightarrow H).$$

Απόδειξη.

1. $\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow A) \leftrightarrow \boxdot(p \leftrightarrow H)$ (το H είναι σταθερό σημείο)
2. $\mathrm{GL} \vdash \Box \boxdot (p \leftrightarrow A) \leftrightarrow \Box \boxdot (p \leftrightarrow H)$ (1, κανονικότητα)
3. $\mathrm{GL} \vdash \Box \boxdot (p \leftrightarrow A) \leftrightarrow \Box(p \leftrightarrow A)$ (πρόταση 1.3.16)
4. $\mathrm{GL} \vdash \Box \boxdot (p \leftrightarrow H) \leftrightarrow \Box(p \leftrightarrow H)$ (πρόταση 1.3.16)
5. $\mathrm{GL} \vdash \Box(p \leftrightarrow A) \leftrightarrow \Box(p \leftrightarrow H)$ (2, 3, 4, προτ. λογισμός)

$\dashv$

Πρόταση 5.1.2. Μοναδικότητα του σταθερού σημείου. *Έστω H ένα σταθερό σημείο της A. Τότε η I, που περιέχει μόνο προτασιακές μεταβλητές που περιέχονται στην A εκτός από την p, είναι σταθερό σημείο της A ανν $\mathrm{GL} \vdash H \leftrightarrow I$.*

Απόδειξη. Για την ευθεία φορά, επειδή
$\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow A) \leftrightarrow \boxdot(p \leftrightarrow H)$ και
$\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow A) \leftrightarrow \boxdot(p \leftrightarrow I)$, έχουμε ότι
$\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow H) \leftrightarrow \boxdot(p \leftrightarrow I)$. Αφού στην I δεν εμφανίζεται η p, αντικαθιστώντας την p με την H, έχουμε ότι
$\mathrm{GL} \vdash \boxdot(H \leftrightarrow H) \leftrightarrow \boxdot(H \leftrightarrow I)$ και άρα $\mathrm{GL} \vdash H \leftrightarrow I$.

Για την αντίστροφη φορά, αν $\mathrm{GL} \vdash H \leftrightarrow I$, από το πρώτο θεώρημα αντικατάστασης 1.3.10, για $F = \boxdot(p \leftrightarrow p)$, έχουμε ότι
$\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow H) \leftrightarrow \boxdot(p \leftrightarrow I)$ και αφού
$\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow A) \leftrightarrow \boxdot(p \leftrightarrow H)$, έχουμε
$\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow A) \leftrightarrow \boxdot(p \leftrightarrow I)$. $\dashv$

Πρόταση 5.1.3. (Bernardi) *Έστω μια πρόταση A τροπικοποιημένη στην p που δεν περιέχει την q και $A' = A(q)$. Τότε*

$$\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow A) \wedge \boxdot(q \leftrightarrow A') \to (p \leftrightarrow q).$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε υποπρόταση B της $A \wedge p$, $\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow A) \wedge \boxdot(q \leftrightarrow A') \to (B \leftrightarrow B')$, όπου B' είναι η πρόταση $B(q)$ (και άρα η p' είναι η q).

Έστω προς άτοπο ένα πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές μοντέλο $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ και $w \in W$ ελάχιστης τάξης, τέτοιο ώστε $w \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A) \wedge \boxdot(q \leftrightarrow A')$, αλλά για κάποια υποπρόταση B της $A \wedge p$, $w \nvDash B \leftrightarrow B'$.

- Αν $B = \bot$ τότε $w \nvDash \bot \leftrightarrow \neg\bot$, άτοπο.
- Αν $B = p$ τότε $w \nvDash p \leftrightarrow q$ άρα $w \vDash p \leftrightarrow \neg q$. Τότε, αφού $w \vDash (p \leftrightarrow A) \wedge (q \leftrightarrow A')$, $w \vDash A \leftrightarrow \neg A'$, άτοπο.
- Αν $B = C \to D$. Τότε από την επαγωγική υπόθεση, $w \vDash C \leftrightarrow C'$ και $w \vDash D \leftrightarrow D'$, άρα $w \vDash (C \to D) \leftrightarrow (C' \to D')$, δηλαδή $w \vDash (C \to D) \leftrightarrow (C \to D)'$, άτοπο.
- Αν $B = \Box D$. Παρατηρούμε ότι αν wRx, τότε $w \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A) \wedge \boxdot(q \leftrightarrow A')$, αλλά επειδή το w είναι ελάχιστης τάξης για τις ιδιότητες που του προσδώσαμε, $x \vDash D \leftrightarrow D'$. Έτσι $w \vDash \Box D$, ανν για κάθε x με wRx, $x \vDash D$, ανν για κάθε x με wRx, $x \vDash D'$ ανν $w \vDash \Box D'$, άτοπο. $\dashv$

Πρόταση 5.1.4. *Αν* $\mathrm{GL} \vdash H \leftrightarrow A(H)$ *και* $\mathrm{GL} \vdash I \leftrightarrow A(I)$, *τότε* $\mathrm{GL} \vdash H \leftrightarrow I$.

Απόδειξη. Αν $\mathrm{GL} \vDash H \leftrightarrow A(H)$ και $\mathrm{GL} \vdash I \leftrightarrow A(I)$, τότε $\mathrm{GL} \vdash \boxdot(H \leftrightarrow A(H)) \wedge \boxdot(I \leftrightarrow A(I))$. Από την πρόταση 5.1.3 $\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow A(p)) \wedge \boxdot(q \leftrightarrow A(q)) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$ και με αντικατάσταση πρώτα της p από το H και μετά της q από το I, $\mathrm{GL} \vdash \boxdot(H \leftrightarrow A(H)) \wedge \boxdot(I \leftrightarrow A(I)) \rightarrow (H \leftrightarrow I)$. Έτσι $\mathrm{GL} \vdash H \leftrightarrow I$. $\dashv$

Η πρόταση που ακολουθεί δικαιολογεί την ορολογία "σταθερό σημείο".

Πρόταση 5.1.5. *Η H είναι σταθερό σημείο της A ανν* $\mathrm{GL} \vdash H \leftrightarrow A(H)$.

Απόδειξη. Αν η H είναι σταθερό σημείο της A, τότε $\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow A) \leftrightarrow \boxdot(p \leftrightarrow H)$. Αντικαθιστώντας την p με την H, έχουμε ότι $\mathrm{GL} \vdash \boxdot(H \leftrightarrow A(H)) \leftrightarrow \boxdot(H \leftrightarrow H)$, άρα $\mathrm{GL} \vdash H \leftrightarrow A(H)$.

Αν $\mathrm{GL} \vdash H \leftrightarrow A(H)$ τότε από το θεώρημα σταθερού σημείου (του οποίου την απόδειξη θα δούμε αργότερα) υπάρχει σταθερό σημείο I της A και τότε, όπως είδαμε στην απόδειξη της ορθής φοράς, $\mathrm{GL} \vdash I \leftrightarrow A(I)$. Από το 5.1.4, $\mathrm{GL} \vdash H \leftrightarrow I$, άρα το H είναι σταθερό σημείο της A. $\dashv$

Πρόταση 5.1.6. *Έστω ότι η A είναι τροπικοποιημένη στην p και η H είναι μια πρόταση που περιέχει μόνο προτασιακές μεταβλητές που περιέχονται στην A εκτός από την p. Τότε η H είναι σταθερό σημείο της A αν*

$$\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow A) \rightarrow (p \leftrightarrow H).$$

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι $\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow H) \rightarrow \boxdot(p \leftrightarrow A)$. Από την πρόταση 1.3.18, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow H) \rightarrow (p \leftrightarrow A)$.

Έστω προς άτοπο ότι $\mathrm{GL} \nvdash \boxdot(p \leftrightarrow H) \rightarrow (p \leftrightarrow A)$. Τότε από το θεώρημα της πληρότητας υπάρχει πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές μοντέλο $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ τέτοιο ώστε $\mathfrak{M} \nvDash \boxdot(p \leftrightarrow H) \rightarrow (p \leftrightarrow A)$ και άρα υπάρχει w ελάχιστης τάξης τέτοιο ώστε $\mathfrak{M}, w \nvDash \boxdot(p \leftrightarrow H) \rightarrow (p \leftrightarrow A)$, και άρα $\mathfrak{M}, w \vDash p \leftrightarrow H$, αλλά $\mathfrak{M}, w \nvDash (p \leftrightarrow A)$. Έστω wRx. Τότε $\mathfrak{M}, x \vDash \boxdot(p \leftrightarrow H)$. Επειδή το w είναι ελάχιστης τάξης τέτοιο ώστε $\mathfrak{M}, w \vDash \boxdot(p \leftrightarrow H)$ και το x είναι μικρότερης τάξης από το w, $\mathfrak{M}, x \vDash p \leftrightarrow A$.

Έστω V' τέτοιο ώστε

$$wV'p \text{ ανν } \neg wVp \text{ και}$$
$$zV'p \text{ ανν } zVp, \text{ αν } x \neq w \text{ ή } q \neq p$$

Θεωρούμε το μοντέλο $\mathfrak{N} = (W, R, V')$, που είναι πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές.

Η A είναι αληθοσυναρτησιακός συνδυασμός προτάσεων της μορφής $\Box D$ και προτασιακών μεταβλητών q διάφορων της p. Έχουμε ότι:
$\mathfrak{M}, w \vDash \Box D$ ανν για κάθε x με wRx $\mathfrak{M}, x \vDash D$, ανν, από το πόρισμα 3.1.9, για κάθε x με wRx $\mathfrak{N}, x \vDash D$, ανν $\mathfrak{N}, w \vDash \Box D$.
Ακόμα για κάθε $q \neq p$, $\mathfrak{M}, w \vDash p$ ανν $\mathfrak{M}, w \vDash p$.
Έτσι $\mathfrak{M}, w \vDash A$ ανν $\mathfrak{N}, w \vDash A$.

$\mathfrak{N}, w \vDash p$ ανν, από τον ορισμό του $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}, w \nvDash p$, ανν, επειδή $\mathfrak{M}, w \nvDash p \leftrightarrow A$, $\mathfrak{M}, w \vDash A$ ανν $\mathfrak{N}, w \vDash A$. Έτσι $\mathfrak{N}, w \vDash p \leftrightarrow A$. Επίσης αν wRx είδαμε ότι

$\mathfrak{M}, x \vDash p \leftrightarrow A$. Έτσι, από το πόρισμα 3.1.9, $\mathfrak{N}, x \vDash p \leftrightarrow A$. Καταλήγουμε στο ότι $\mathfrak{N}, x \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A)$

Από το πόρισμα 3.1.9, επειδή το p δεν περιέχεται στο H, $\mathfrak{N}, w \vDash H$ ανν $\mathfrak{M}, w \vDash H$ ανν $\mathfrak{M}, w \vDash p$ ανν $\mathfrak{N}, w \nvDash p$. Έτσι $\mathfrak{N}, w \nvDash H \leftrightarrow p$.

Έχουμε λοιπόν ότι $\mathfrak{N}, w \nvDash \boxdot(p \leftrightarrow A) \to (p \to H)$ και από το θεώρημα της εγκυρότητας GL $\nvdash \boxdot(p \leftrightarrow A) \to (p \to H)$, που είναι άτοπο. ⊣

5.2 Η ειδική περίπτωση του θεωρήματος σταθερού σημείου

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το θεώρημα σταθερού σημείου στην ειδική περίπτωση που η A περιέχει μόνο μία προτασιακή μεταβλητή. Η ειδική περίπτωση αποδείχθηκε πριν τη γενική από τους Bernardi και Smorynski ανεξάρτητα. Στην απόδειξη γίνεται χρήση της έννοιας της τάξης και μιας τροποποιημένης έννοιας του ίχνους. Αυτή η απόδειξη δείχνει τη στενή σχέση που συνδέει την ειδική περίπτωση του θεωρήματος σταθερού σημείου και του θεωρήματος κανονικής μορφής για αμετάβλητες προτάσεις 4.1.2.

Ορισμός 5.2.1. Μια πρόταση B λέγεται **p-πρόταση** ανν δεν περιέχει άλλη μεταβλητή εκτός από την p, ισοδύναμα ανν η B είναι αληθοσυναρτησιακός συνδυασμός της p και προτάσεων της μορφής $\Box D$, όπου D είναι μία p-πρόταση.

Παρατήρηση 5.2.1. Μια p-πρόταση A με n το πλήθος εμφανίσεις του $\Box$, που είναι τροπικοποιημένη στην p, είναι αληθοσυναρτησιακός συνδυασμός n το πλήθος προτάσεων της μορφής $\Box D$, όχι απαραίτητα διαφορετικών, όπου D είναι p-πρόταση. Ονομάζουμε τις προτάσεις αυτές $\Box D_1, \ldots, \Box D_n$. Έτσι κάθε υποπρόταση B της A είναι αληθοσυναρτησιακός συνδυασμός της p και των $\Box D_1, \ldots, \Box D_n$.

Στη συνέχεια γενικεύουμε την έννοια του ίχνους, αφού πρώτα σταθεροποιήσουμε μια p-πρόταση A τροπικοποιημένη στην p και με τροπικό βαθμό n.

Ορισμός 5.2.2. Θεωρούμε μια απαρίθμηση όλων των p - προτάσεων, έτσι ώστε όλοι οι αληθοσυναρτησιακοί συνδυασμοί να έπονται των συστατικών τους με την εξαίρεση ότι η p έπεται της A. Τη σταθεροποιούμε και στο εξής θα αναφερόμαστε σε αυτήν ως **στάνταρ απαρίθμηση**.

Ορισμός 5.2.3. Ορίζουμε την έννοια του **A-ίχνους** $[\![B]\!]_A$, μιας p-πρότασης B. Με διπλή αναδρομή, την εξωτερική στο m και την εσωτερική στη στάνταρ απαρίθμηση, ορίζουμε πότε ισχύει ότι $m \in [\![B]\!]_A$:

- $[\![\bot]\!]_A = \varnothing$
- $[\![B \to C]\!]_A = (\mathbb{N} - [\![B]\!]_A) \cup [\![C]\!]_A$
- $[\![\Box B]\!]_A = \{n | \ \forall i < n \ (i \in [\![B]\!]_A)\}$
- $[\![p]\!]_A = [\![A]\!]_A$

έτσι, για τους υπόλοιπους συνδέσμους, που ορίζονται από αυτούς, έχουμε ότι

- $[\![\neg B]\!]_A = \mathbb{N} - [\![B]\!]_A$
- $[\![B \wedge C]\!]_A = [\![B]\!]_A \cap [\![C]\!]_A$
- $[\![B \leftrightarrow C]\!]_A = ([\![\mathbb{N} - B]\!]_A \cap [\![\mathbb{N} - C]\!]_A) \cup ([\![B]\!]_A \cap [\![C]\!]_A)$
- $[\![\Diamond B]\!]_A = \{n \mid \exists i < n \; (i \in [\![B]\!]_A)\}$

Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, θα γράφουμε απλούστερα $[\![B]\!]$.

Το επόμενο λήμμα είναι το αντίστοιχο του λήμματος 4.2.3.

Λήμμα 5.2.1.
(α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $[\![\Box^n \bot]\!] = \{i \mid i < n\}$.
(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $[\![\neg(\Box^{n+1}\bot \to \Box^n \bot)]\!] = [\![\Box^{n+1}\bot \wedge \neg\Box^n\bot]\!] = \{n\}$. $\dashv$

Η επόμενη πρόταση αντιστοιχεί στην πρόταση 4.2.5.

Πρόταση 5.2.2. *Έστω $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ ένα πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές μοντέλο τέτοιο ώστε $\mathfrak{M} \vDash p \leftrightarrow A$, ένας κόσμος $w \in W$ και μια p-πρόταση B. Τότε*

$$\mathfrak{M}, w \vDash B \text{ ανν } \rho(w) \in [\![B]\!].$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε διπλή επαγωγή: μια εξωτερική πλήρη επαγωγή στην $\rho(w)$ και μια εσωτερική απλή επαγωγή στην στάνταρ απαρίθμηση για να δείξουμε ότι για κάθε κόσμο w, $w \vDash B$ ανν $\rho(w) \in [\![B]\!]$.

Η εξωτερική επαγωγική υπόθεση είναι ότι η πρόταση ισχύει για κάθε x τέτοιο ώστε $\rho(x) < \rho(w)$ και η εσωτερική ότι ισχύει για όλες τις προτάσεις που εμφανίζονται πριν την B στην στάνταρ απαρίθμηση.

- Αν $B = \bot$ τότε $w \nvDash \bot$ και $\rho(w) \notin [\![\bot]\!]$.
- Αν $B = C \to D$ τότε $w \vDash C \to D$ ανν $w \nvDash C$ ή $w \vDash D$ ανν, από την εσωτερική επαγωγική υπόθεση, $\rho(w) \notin [\![C]\!]$ ή $\rho(w) \in [\![D]\!]$ ανν $\rho(w) \in [\![C \to D]\!]$.
- Αν $B = \Box D$. Διατυπώνοντας αντιθετοαντίστροφα τον ορισμό, $n \notin [\![\Box D]\!]$ ανν $\exists i < n (i \notin [\![D]\!])$.

  Αν $w \nvDash \Box D$ τότε $\exists x (wRx \wedge x \nvDash D)$, άρα $\rho(x) < \rho(w)$ και, από την εξωτερική επαγωγική υπόθεση, $\rho(x) \notin [\![D]\!]$. Επειδή wRx, από το λήμμα 4.2.1 $\rho(w) > \rho(x)$ και έτσι $\rho(w) \notin [\![\Box D]\!]$.

  Αντιστρόφως αν $\rho(w) \notin [\![\Box D]\!]$ τότε $\exists i < \rho(w) (i \notin [\![D]\!])$. Από το λήμμα 4.2.2 $\exists x (wRx \wedge \rho(x) = i)$, άρα $\rho(x) < \rho(w)$ και από την εξωτερική επαγωγική υπόθεση $x \nvDash D$ και άρα $w \nvDash \Box D$.
- Αν $B = p$ τότε $w \vDash p$ ανν $w \vDash A$ ανν από την εσωτερική επαγωγική υπόθεση, $\rho(w) \in [\![A]\!]$ ανν, αφού $[\![p]\!] = [\![A]\!]$, $\rho(w) \in [\![p]\!]$ $\dashv$

Λήμμα 5.2.3. *Αν η B είναι υποπρόταση της A και n είναι ο αριθμός υποπροτάσεων της A της μορφής $\Box D$, τότε είτε $[\![B]\!] \subseteq \{0, \ldots, n\}$ είτε $[\![B]\!] \supseteq \mathbb{N} - \{0, \ldots, n\}$.*

Αποδειξη. Καταρχάς παρατηρούμε ότι

$$j \in [\![\Box D]\!] \text{ ανν } \forall k \leqslant j (k \in [\![\Box D]\!]). \tag{5.1}$$

Αυτό ισχύει γιατί αν $j \in [\![\Box D]\!]$ τότε $\forall i \leqslant j (i \in [\![D]\!])$ και επειδή $k \leqslant j$, $\forall i \leqslant k (i \in [\![D]\!])$, δηλαδή $k \in [\![\Box D]\!]$.

Κατόπιν δείχνουμε ότι

$$\begin{gathered}\text{Υπάρχει } i \text{ με } 0 \leqslant i \leqslant n, \text{ τέτοιο ώστε για κάθε υποπρόταση } \Box D \text{ της } A \\ i \in [\![\Box D]\!] \text{ ανν } i+1 \in [\![\Box D]\!].\end{gathered} \tag{5.2}$$

Έστω προς άτοπο ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε για κάθε i με $0 \leqslant i \leqslant n$, υπάρχει υποπρόταση $\Box D$ της A έτσι ώστε $i \in [\![\Box D]\!]$ ανν $i+1 \notin [\![\Box D]\!]$.
Αν $i \notin [\![\Box D]\!]$ και $i+1 \in [\![\Box D]\!]$ καταλήγουμε σε άτοπο εξαιτίας της (5.1).
Αν $i \in [\![\Box D]\!]$ και $i+1 \notin [\![\Box D]\!]$ υπάρχουν μόνο n προτάσεις της A της μορφής $\Box D$, οι $\Box D_1, \ldots, \Box D_n$ και το i παίρνει $n+1$ το πολύ το πλήθος τιμές. Έτσι, από την αρχή του περιστερώνα, υπάρχει μια υποπρόταση $\Box D$ και i, j, με $0 \leqslant i < j \leqslant n$, τέτοια ώστε $i \in [\![\Box D]\!]$, $i+1 \notin [\![\Box D]\!]$, $j \in [\![\Box D]\!]$ και $j+1 \notin [\![\Box D]\!]$.
Όμως επειδή $j \in [\![\Box D]\!]$ και $i < j$, από την (5.1) $i+1 \in [\![\Box D]\!]$, που είναι άτοπο.

Ακόμα δείχνουμε ότι

$$\begin{gathered}\text{Αν για κάθε υποπρόταση } \Box D \text{ της } A,\ i \in [\![\Box D]\!] \text{ ανν } i+1 \in [\![\Box D]\!] \\ \text{τότε για κάθε υποπρόταση } B \text{ της } A,\ i \in [\![B]\!] \text{ ανν } i+1 \in [\![B]\!].\end{gathered} \tag{5.3}$$

Αν για κάθε υποπρόταση $\Box D$ της A, $i \in [\![\Box D]\!]$ ανν $i+1 \in [\![\Box D]\!]$, τότε επειδή η A είναι αληθοσυναρτησιακός συνδυασμός των $\Box D_1, \ldots, \Box D_n$, έχουμε ότι $i \in [\![A]\!]$ ανν $i+1 \in [\![A]\!]$
και αφού $[\![A]\!] = [\![p]\!]$, έχουμε ότι $i \in [\![p]\!]$ ανν $i+1 \in [\![p]\!]$.
Επειδή κάθε υποπρόταση της A είναι αληθοσυναρτησιακός συνδυασμός της p και των $\Box D_1, \ldots, \Box D_n$, για κάθε υποπρόταση B της A, ισχύει ότι $i \in [\![B]\!]$ ανν $i+1 \in [\![B]\!]$.

Τέλος με επαγωγή στο $l \geqslant 0$ δείχνουμε ότι

$$\begin{gathered}\text{Υπάρχει } i \text{ με } 0 \leqslant i \leqslant n \text{ τέτοιο ώστε για κάθε } l > 0 \text{ και κάθε υποπρόταση } B \text{ της } A \\ i+l \in [\![B]\!] \text{ ανν } i+l+1 \in [\![B]\!].\end{gathered} \tag{5.4}$$

Στα βήματα της επαγωγής το i παραμένει σταθερό.

- Για $l = 0$ από τις (5.2) και (5.3) έχουμε ότι υπάρχει i με $0 \leqslant i \leqslant n$ τέτοιο ώστε για κάθε υποπρόταση B της A, $i \in [\![B]\!]$ ανν $i+1 \in [\![B]\!]$.
- Υποθέτουμε ότι για κάθε υποπρόταση B της A, $i+l \in [\![B]\!]$ ανν $i+l+1 \in [\![B]\!]$.
  Αν η D είναι υποπρόταση της A, από την (5.1) έχουμε ότι
  για κάθε $k < i+l+1$, $k \in [\![D]\!]$ ανν για κάθε $k < i+l+2$, $k \in [\![D]\!]$, δηλαδή
  για κάθε υποπρόταση $\Box D$ της A, $i+l+1 \in [\![\Box D]\!]$ ανν $i+l+2 \in [\![\Box D]\!]$.
  Από την (5.3)
  για κάθε υποπρόταση B της A, $i+l+1 \in [\![B]\!]$ ανν $i+l+2 \in [\![B]\!]$.

Έτσι η (5.2) ισχύει και άρα υπάρχει i με $0 \leqslant i \leqslant n$ τέτοιο ώστε για κάθε j με $j \geqslant i$ και κάθε υποπρόταση B της A, $i \in [\![B]\!]$ ανν $i+1 \in [\![B]\!]$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι
αν $i \in [\![B]\!]$, τότε $[\![B]\!] \supseteq \{i, i+1, \dots\} \supseteq \{n, n+1, \dots\} \supseteq \mathbb{N} - \{0, \dots, n\}$
και αν $i \notin [\![B]\!]$, τότε $\mathbb{N} - B \supseteq \{i, i+1, \dots\} \supseteq \mathbb{N} - \{0, \dots, n\}$ και άρα $B \subseteq \{0, \dots, n\}$. ⊣

Έτσι και για την ίδια την A είτε $[\![A]\!] \subseteq \{0, \dots, n\}$ είτε $[\![A]\!] \supseteq \mathbb{N} - \{0, \dots, n\}$.

Θεώρημα 5.2.4. Ειδική περίπτωση του θεωρήματος σταθερού σημείου. *Για κάθε πρόταση A που περιέχει μόνο την προτασιακή μεταβλητή p και είναι τροπικοποιημένη στην p η πρόταση*

$$H \overset{\text{ορ}}{=} \begin{cases} \bigvee\{\neg(\Box^{i+1}\bot \to \Box^{i}\bot) \mid i \in [\![A]\!]\}, & \text{αν } [\![A]\!] \subseteq \{0, \dots, n\} \\ \bigwedge\{\Box^{i+1}\bot \to \Box^{i}\bot \mid i \notin [\![A]\!]\}, & \text{αν } [\![A]\!] \supseteq \mathbb{N} - \{0, \dots, n\} \end{cases}$$

είναι σταθερό σημείο της A.

Απόδειξη. Από την πρόταση 5.1.6 αρκεί να δείξουμέ ότι $\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow A) \to (p \leftrightarrow H)$.

Έστω $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ ένα πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές μοντέλο τέτοιο ώστε $\mathfrak{M} \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A)$. Τότε αν $w \in W$, $\mathfrak{M}, w \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A)$. Έστω ακόμα $\mathfrak{N} = (X, S, U)$ το παραγόμενο υπομοντέλο του $\mathfrak{M}$ από το w που άρα είναι και αυτό πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές. Από την αρχή του παραγόμενου υπομοντέλου (πρόταση 3.1.8) $\mathfrak{N}, w \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A)$. Επειδή, από τον ορισμό του παραγόμενου υπομοντέλου, $X = \{w\} \cup \{x \mid wRx\}$, έχουμε ότι για κάθε $x \in X$ $\mathfrak{N}, x \vDash p \leftrightarrow A$ και άρα $\mathfrak{N} \vDash p \leftrightarrow A$.

Από τον ορισμό της H, $[\![H]\!] = [\![A]\!]$ και, αφού $[\![A]\!] = [\![p]\!]$, έχουμε ότι $[\![H]\!] = [\![p]\!]$, δηλαδή $[\![p \leftrightarrow H]\!] = N$. Έτσι $\rho(w) \in [\![p \leftrightarrow H]\!]$ και από την πρόταση 5.2.2, $\mathfrak{N}, w \vDash p \leftrightarrow H$.

Χρησιμοποιώντας ξανά την αρχή του παραγόμενου υπομοντέλου, $\mathfrak{M}, w \vDash p \leftrightarrow H$ και τελικά $\mathfrak{M}, w \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A) \leftrightarrow p \leftrightarrow H$. Τελικά, από το θεώρημα της πληρότητας, $\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow A) \to (p \leftrightarrow H)$. ⊣

Το θεώρημα μας δίνει τον τρόπο να βρίσκουμε το σταθερό σημείο H της A, υπολογίζοντας το $[\![A]\!]$. Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας τη διπλή αναδρομή του ορισμού του A-ίχνους με τη βοήθεια ενός πίνακα που μοιάζει με πίνακα αληθοτιμών. Κάθε στοιχείο του πίνακα δείχνει αν στο ίχνος της υποπρότασης που ορίζει τη στήλη του ανήκει ο φυσικός αριθμός που ορίζει τη γραμμή του (που μπορούμε να φανταζόμαστε ότι είναι οι τάξεις των διάφορων κόσμων). Σε αυτή την περίπτωση το στοιχείο είναι η $\top$, αλλιώς είναι ο $\bot$. Οι υποπροτάσεις εμφανίζονται με τη σειρά που υποδεικνύει η στάνταρ απαρίθμηση. Σε κάθε γραμμή μια πρόταση $\Box D$ παίρνει την τιμή $\top$ ανν η D παίρνει τη $\top$ σε όλες τις προηγούμενες γραμμές και σε κάποια γραμμή η p παίρνει την $\top$ ανν η A παίρνει την $\top$. Ακόμα εξαιτίας της πρότασης 5.2.3 η τιμή της A επαναλαμβάνεται μετά τη n-οστή γραμμή. Ας δούμε δύο παραδείγματα που ξεκαθαρίζουν το τοπίο:

Παράδειγμα 5.2.1. α) Αν A είναι η πρόταση $\Box(\neg p \to \Box\bot) \to \Box(p \to \Box\bot)$, θα υπολογίσουμε το ίχνος $[\![A]\!]$ και το σταθερό σημείο H της A.

	$\Box(\neg p \to \Box\bot)$	$\Box(p \to \Box\bot)$	A	p	$\bot$	$\neg p$	$\Box\bot$	$\neg p \to \Box\bot$	$p \to \Box\bot$
0	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
1	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
2	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
3	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
4	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Παρατηρούμε ότι οι γραμμές 3 και 4 είναι πανομοιότυπες και, εξαιτίας του τρόπου υπολογισμού τους (ή αλλιώς επειδή $n = 4$), και οι υπόλοιπες γραμμές θα είναι. Έτσι η A παίρνει την τιμή $\bot$ στη δεύτερη γραμμή και μόνο και άρα $[\![A]\!] = \mathbb{N} - \{2\}$ και $H = \Box^3\bot \to \Box^2\bot$.

β) Το ίδιο θα κάνουμε αν A είναι η πρόταση $\neg\Box\Box p$.

	$\Box p$	$\Box\Box p$	$A = \neg\Box\Box p$	p
0	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
1	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
2	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
3	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Εδώ $n = 2$, $[\![A]\!] = \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $H = (\Box\bot \to \bot) \wedge (\Box\Box\bot \to \Box\bot)$. Η πρόταση $\neg\Box\Box\bot$ έχει και αυτή το ίδιο ίχνος με την A και είναι ισοδύναμη με την H.

Πρόταση 5.2.5.
α) Το σταθερό σημείο της $A_1 = \neg\Box p$ *είναι το* $\neg\Box\bot$.
β) Το σταθερό σημείο της $A_2 = \Box p$ *είναι το* $\top$.
γ) Το σταθερό σημείο της $A_3 = \Box\neg p$ *είναι το* $\Box\bot$.
δ) Το σταθερό σημείο της $A_4 = \neg\Box\neg p$ *είναι το* $\bot$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του πίνακα:

α)	$\Box p$	$A_1 = \neg\Box p$	p
0	$\top$	$\bot$	$\bot$
1	$\bot$	$\top$	$\top$
2	$\bot$	$\top$	$\top$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

γ)	$A_3 = \Box\neg p$	p	$\neg p$
0	$\top$	$\top$	$\bot$
1	$\bot$	$\bot$	$\top$
2	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

β)	$A_2 = \Box p$	p
0	$\top$	$\top$
1	$\top$	$\top$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

δ)	$\Box\neg p$	$A_4 = \neg\Box\neg p$	p	$\neg p$
0	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
1	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Έτσι:
α) $[\![A_1]\!] = \mathbb{N} - \{0\}$ και $H_1 = \Box\bot \rightarrow \bot$ που είναι ισοδύναμο με το $\neg\Box\bot$.
β) $[\![A_2]\!] = \mathbb{N}$ και $H_2 = \bigwedge \varnothing = \top$.
γ) $[\![A_3]\!] = \{0\}$ και $H_3 = \neg(\Box\bot \rightarrow \bot)$ που είναι ισοδύναμο με το $\Box\bot$.
δ) $[\![A_4]\!] = \varnothing$ και $H_4 = \bigvee \varnothing = \bot$. $\dashv$

Πρόταση 5.2.6. *Αν* $\mathrm{GL} \vdash \boxdot A \rightarrow \boxdot B$ *και* $\mathrm{PA} \vdash A^*$, *τότε* $\mathrm{PA} \vdash B^*$.

Απόδειξη.

1. $\mathrm{PA} \vdash A^*$ (υπόθεση)
2. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner A \urcorner)^*$ (συνθήκη αποδειξιμότητας (i))
3. $\mathrm{PA} \vdash A^* \wedge \mathrm{Bew}(\ulcorner A \urcorner)^*$ (1, 2, προτ. λογισμός)
4. $\mathrm{PA} \vdash (\boxdot A)^*$ (ορισμός της μετάφρασης)
5. $\mathrm{GL} \vdash \boxdot A \rightarrow \boxdot B$ (υπόθεση)
6. $\mathrm{PA} \vdash (\boxdot A \rightarrow \boxdot B)^*$ (θεώρημα 2.3.4 της αριθμητικής εγκυρότητας)
7. $\mathrm{PA} \vdash (\boxdot A)^* \rightarrow (\boxdot B)^*$ (ορισμός της μετάφρασης)
8. $\mathrm{PA} \vdash (\boxdot B)^*$ (4 ,7, προτ. λογισμός)
9. $\mathrm{PA} \vdash B^* \wedge \mathrm{Bew}(\ulcorner B \urcorner)^*$ (ορισμός της μετάφρασης)
10. $\mathrm{PA} \vdash B^*$ (9, προτ. λογισμός)

$\dashv$

Στο επόμενο πόρισμα η περίπτωση (α) δίνει για την πρόταση που χρησιμοποίησε ο Gödel στην απόδειξη του πρώτου θεωρήματος μη πληρότητας ότι είναι ισοδύναμη με την συνέπεια της PA και η περίπτωση (2) είναι η απάντηση του Löb στην ερώτηση του Henkin. Γενικά πολλές ενδιαφέρουσες ερωτήσεις σχετικά με αυτοαναφορικές προτάσεις που εμπλέκουν την αποδειξιμότητα μπορούν να απαντηθούν με τη βοήθεια του θεωρήματος σταθερού σημείου.

Πόρισμα 5.2.7. *Αν S είναι μια πρόταση της* PA*:*
α) $\mathrm{PA} \vdash S \leftrightarrow \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$ *ανν* $\mathrm{PA} \vdash S \leftrightarrow \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)$ *ανν* $\mathrm{PA} \vdash S \leftrightarrow \mathrm{Con}$.
β) $\mathrm{PA} \vdash S \leftrightarrow \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$ *ανν* $\mathrm{PA} \vdash S \leftrightarrow \top$ *ανν* $\mathrm{PA} \vdash S$.
γ) $\mathrm{PA} \vdash S \leftrightarrow \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S \urcorner)$ *ανν* $\mathrm{PA} \vdash S \leftrightarrow \mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)$ *ανν* $\mathrm{PA} \vdash S \leftrightarrow \neg\mathrm{Con}$.
δ) $\mathrm{PA} \vdash S \leftrightarrow \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S \urcorner)$ *ανν* $\mathrm{PA} \vdash S \leftrightarrow \bot$ *ανν* $\mathrm{PA} \vdash \neg S$.

δηλαδή:

α) η S είναι αποδείξιμα ισοδύναμη με το ότι η S δεν είναι αποδείξιμη ανν η S είναι αποδείξιμα ισοδύναμη με το ότι η PA *είναι συνεπής.*

β) η S είναι αποδείξιμα ισοδύναμη με το ότι η S είναι αποδείξιμη ανν η S είναι αποδείξιμη.

γ) η S είναι αποδείξιμα ισοδύναμη με το ότι η S είναι ανατρέψιμη ανν η S είναι αποδείξιμα ισοδύναμη με το ότι η PA *δεν είναι συνεπής.*

δ) η S είναι αποδείξιμα ισοδύναμη με το ότι η S είναι συνεπής ανν η S είναι ανατρέψιμη.

Απόδειξη. Η πρόταση 5.2.5 μας δίνει ότι:
α) $\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow \neg\Box p) \quad \leftrightarrow \boxdot(p \leftrightarrow \neg\Box\bot)$
β) $\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow \Box p) \quad \leftrightarrow \boxdot(p \leftrightarrow \top)$
γ) $\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow \Box\neg p) \quad \leftrightarrow \boxdot(p \leftrightarrow \Box\bot)$
δ) $\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow \neg\Box\neg p) \leftrightarrow \boxdot(p \leftrightarrow \bot)$

Αν $*$ μια πραγματοποίηση τέτοια ώστε $p^* = S$ η απόδειξη είναι άμεση από την πρόταση 5.2.6. Έτσι για παράδειγμα αν $\mathrm{PA} \vdash S \leftrightarrow \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$, τότε $\mathrm{PA} \vdash S \leftrightarrow \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner \bot \urcorner)$, δηλαδή $\mathrm{PA} \vdash S \leftrightarrow \mathrm{Con}$. ⊣

Εξαιτίας του θεωρήματος του Solovay 4.4.4 γενικά οι τροπικές προτάσεις δεν έχουν κανονικές μορφές, δεν είναι δηλαδή ισοδύναμες με αληθοσυναρτησιακούς συνδυασμούς προτάσεων όπως ας πούμε. οι $\Box^i\bot$ και $\Box^j\neg p$. Αυτό μαζί με το γεγονός ότι ενώ $\mathrm{GL} \vdash \bot \rightarrow \Box\bot$, $\mathrm{GL} \nvdash p \rightarrow \Box p$, μας εμποδίζουν να γενικεύσουμε την απόδειξη αυτής της παραγράφου για τη γενική περίπτωση.

5.3 Η πρώτη απόδειξη του θεωρήματος σταθερού σημείου

Θα δώσουμε δύο αποδείξεις για τη γενική περίπτώση του θεωρήματος σταθερού σημείου. Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε την πρώτη από αυτές, την απόδειξη των Sambin και Reidhaar-Olson. Αυτή εξηγεί το φαινόμενο ότι το σταθερό σημείο μιας πρότασης (ή ένα ισοδύναμό του) έχει παρόμοια μορφή με την πρόταση αυτή.

Ορισμός 5.3.1. Μια πρόταση F λέγεται **k-αποσυνθέσιμη (k-decomposable)** αν υπάρχουν μια (ακόμα και κενή) ακολουθία $q_1, \ldots, q_k$ διακεκριμένων προτασιακών μεταβλητών, μια πρόταση $B(q_1, \ldots, q_k)$ που δεν περιέχει την p, αλλά που περιέχει όλες τις $q_1, \ldots, q_k$, και μια ακολουθία προτάσεων $D_1(p), \ldots, D_k(p)$ που περιέχουν την p, έτσι ώστε

$$F = B(\Box D_1(p), \ldots, \Box D_k(p)).$$

Η πρόταση A είναι k-αποσυνθέσιμη για κάποιο k, αφού είναι τροπικοποιημένη στην p.

Θεώρημα 5.3.1. Το θεώρημα σταθερού σημείου. *Κάθε πρόταση A, που είναι τροπικοποιημένη στην p, έχει σταθερό σημείο H έτσι ώστε αν (με τις προϋποθέσεις του προηγούμενου ορισμού) $A = B(\Box D_1(p), \ldots, \Box D_k(p))$, τότε υπάρχουν $H_1, \ldots, H_k$ που περιέχουν προτασιακές μεταβλητές που περιέχονται στην A, αλλά όχι την p, τέτοιες ώστε $H = B(\Box D_1(H_1), \ldots, \Box D_k(H_k))$.*

Απόδειξη.

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο k.

Για $k = 0$: Αν η A είναι 0-αποσυνθέσιμη, τότε υπάρχει πρόταση B που δεν περιέχει την p τέτοια ώστε $A = B$, δηλαδή η A δεν περιέχει την p και είναι το σταθερό σημείο του εαυτού της.

Θεωρούμε ότι κάθε k-αποσυνθέσιμη πρόταση, που είναι τροπικοποιημένη στην p, έχει σταθερό σημείο.

Θα αποδείξουμε ότι αν η A είναι $k+1$-αποσυνθέσιμη και τροπικοποιημένη στην p έχει σταθερό σημείο. Για κατάλληλα $q_1, \ldots, q_{k+1}$ και $D_1(p), \ldots, D_{k+1}(p)$, $A = B(\Box D_1(p), \ldots, \Box D_{k+1}(p))$.

Για κάθε i με $1 \leqslant i \leqslant k+1$, θέτουμε

$$A_i = B(\Box D_1(p), \ldots, \Box D_{i-1}(p), \top, \Box D_{i+1}(p), \ldots, \Box D_{k+1}(p)).$$

Κάθε μία από τις A_i είναι k-αποσυνθέσιμη και τροπικοποιημένη στην p και άρα από την επαγωγική υπόθεση έχει σταθερό σημείο H_i. Θα δείξουμε ότι το

$$H = B(\Box D_1(H_1), \ldots, \Box D_{k+1}(H_{k+1}))$$

είναι σταθερό σημείο της A.

Έστω $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ ένα πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές μοντέλο, $w, x, y \in W$ και $1 \leqslant i \leqslant k+1$.

Λήμμα 5.3.2. *Αν $y \vDash \boxdot(A \leftrightarrow B)$, τότε $y \vDash \boxdot(F(A) \leftrightarrow F(B))$ και $y \vDash \Box F(A) \leftrightarrow \Box F(B)$.*

Απόδειξη. Από το πόρισμα 1.3.20 του δεύτερου θεωρήματος αντικατάστασης και την κανονικότητα. ⊣

Λήμμα 5.3.3. *Αν $y \vDash \boxdot(A \leftrightarrow B)$ και $y \vDash \boxdot(B \leftrightarrow C)$, τότε $y \vDash \boxdot(A \leftrightarrow C)$.*

Απόδειξη. Για κάθε z τέτοιο ώστε yRz, $z \vDash A \leftrightarrow B$ και $z \vDash B \leftrightarrow C$, άρα $z \vDash A \leftrightarrow C$, δηλαδή $y \vDash \boxdot(A \leftrightarrow C)$. ⊣

Λήμμα 5.3.4. *Έστω $y \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A)$ και $y \vDash \Box D_i(p)$. Τότε $y \vDash D_i(p) \leftrightarrow D_i(H_i)$ και $y \vDash \Box D_i(p) \leftrightarrow \Box D_i(H_i)$.*

Απόδειξη. Επειδή $y \vDash \Box D_i(p)$, για κάθε z τέτοιο ώστε yRz ή $y = z$,
$z \vDash \Box D_i(p)$, άρα $z \vDash \Box D_i(p) \leftrightarrow \top$ και $y \vDash \boxdot(\Box D_i(p) \leftrightarrow \top)$.
Από το λήμμα 5.3.2, $y \vDash \boxdot(A \leftrightarrow A_i)$.
Επειδή $y \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A)$, από το λήμμα 5.3.3, $y \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A_i)$.
Το H_i όμως είναι σταθερό σημείο της A_i, έτσι $y \vDash \boxdot(p \leftrightarrow H_i)$.
Από το λήμμα 5.3.2, $y \vDash D_i(p) \leftrightarrow D_i(H_i)$ και $y \vDash \Box D_i(p) \leftrightarrow \Box D_i(H_i)$. ⊣

Λήμμα 5.3.5. $w \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A) \rightarrow \boxdot(\Box D_i(p) \rightarrow \Box D_i(H_i))$.

Απόδειξη. Έστω ότι $w \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A)$, y τέτοιο ώστε wRy ή $w = y$ και
$y \vDash \Box D_i(p)$. Τότε και $y \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A)$ και από το λήμμα 5.3.4,
$y \vDash \Box D_i(p) \leftrightarrow \Box D_i(H_i)$ και άρα $y \vDash \Box D_i(H_i)$. ⊣

Λήμμα 5.3.6. $w \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A) \rightarrow \boxdot(\Box D_i(H_i) \rightarrow D_i(p))$.

Απόδειξη. Έστω ότι $w \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A)$, x με wRx ή $w = x$ και $x \vDash \neg\Box D_i(p)$.
Τότε υπάρχει y ελάχιστης τάξης τέτοιο ώστε xRy και $y \vDash \neg D_i(p)$.
Για κάθε z τέτοιο ώστε yRz το z είναι μικρότερης τάξης από το y, έτσι $z \vDash D_i(p)$ και άρα $y \vDash \Box D_i(p)$.
Ακόμα επειδή $w \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A)$ και wRy, $y \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A)$.
Τότε από το λήμμα 5.3.4, $y \vDash D_i(p) \leftrightarrow D_i(H_i)$.
Έτσι $y \vDash \neg D_i(H_i)$ και άρα $x \vDash \neg\Box D_i(H_i)$. ⊣

Λήμμα 5.3.7. $w \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A) \to \boxdot(\Box D_i(p) \leftrightarrow \Box D_i(H_i))$.

Απόδειξη. Από τα δύο προηγούμενα λήμματα. ⊣

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη παρατηρούμε ότι αν $w \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A)$, τότε από το λήμμα 5.3.2 έχουμε ότι
$w \vDash B(\Box D_1(H_1), \ldots, \Box D_{i-1}(H_{i-1}), \Box D_i(p), \Box D_{i+1}(p), \ldots, \Box D_{k+1}(p)) \leftrightarrow$
$B(\Box D_1(H_1), \ldots, \Box D_{i-1}(H_{i-1}), \Box D_i(H_i), \Box D_{i+1}(p), \ldots, \Box D_{k+1}(p))$. Με επαγωγή λοιπόν στο i, έχουμε ότι
$w \vDash B(\Box D_1(p), \ldots, \Box D_{k+1}(p)) \leftrightarrow w \vDash B(\Box D_1(H_1), \ldots, \Box D_{k+1}(H_{i+1}))$,
δηλαδή $w \vDash A \leftrightarrow H$ και επειδή $w \vDash p \leftrightarrow A$, έχουμε ότι $w \vDash p \leftrightarrow H$.
Έτσι σε κάθε πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές μοντέλο $\mathfrak{M}$, ισχύει ότι $\mathfrak{M} \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A) \to (p \leftrightarrow H)$ και από το θεώρημα της πληρότητας
$\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow A) \to (p \leftrightarrow H)$. Άρα από την πρόταση 5.1.6 το H είναι σταθερό σημείο της A.

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. Πολλές φορές μετά την αντικατάσταση των p από τα H_i γίνονται κάποιες εσωτερικές απλοποιήσεις. Έτσι δικαιολογείται γιατί το σταθερό σημείο μιας πρότασης έχει πολλές φορές μεγάλες ομοιότητες στη μορφή με την αρχική πρόταση.

Ορισμός 5.3.2. Με τον συμβολισμό $A \equiv B$ θα εννοούμε ότι $\mathrm{GL} \vdash A \leftrightarrow B$.

Παράδειγμα 5.3.1. α) Αν $A = \Box p \to \Box\neg p$ τότε
$B(q_1, q_2) = q_1 \to q_2$, $D_1(p) = p$ και $D_2(p) = \neg p$.
Έτσι $A_1 = B(\top, \Box D_2(p)) = \top \to \Box D_2(p) = \top \to \Box\neg p \equiv \Box\neg p$ και
$A_2 = B(\Box D_1(p), \top) = \Box D_1(p) \to \top = \Box p \to \top \equiv \top = H_2$.

Για να βρούμε το H_1: Αν $A' = \Box\neg p$, τότε $B' = q_1$ και $D_1'(p) = \neg p$.
Έτσι $A_1' = B'(\top) = \top = H_1'$ και
$H' = B'(\Box D_1'(H_1')) = \Box D_1'(H_1') = \Box\neg H_1' = \Box\neg\top \equiv \Box\bot$.
Άρα η A_1 έχει σταθερό σημείο το $H_1 = \Box\bot$.

Τελικά $H = B(\Box D_1(H_1), \Box D_2(H_2)) = \Box D_1(H_1) \to \Box D_2(H_2) =$
$\Box H_1 \to \Box\neg H_2 \equiv \Box\Box\bot \to \Box\bot$.

Σε αυτή τη διαδικασία έγιναν εσωτερικές απλοποιήσεις. Αν αυτές δεν είχαν γίνει θα είχαμε καταλήξει στο σταθερό σημείο
$\Box(\top \to \Box\neg(\top \to \top)) \to \Box\neg(\Box(\top \to \top) \to \top)$ που είναι ισοδύναμο με το $\Box\Box\bot \to \Box\bot$.
Αυτό δεν είναι ισοδύναμο με καμία πρόταση με μικρότερο τροπικό βαθμό. Συμπεραίνουμε ότι ο τροπικός βαθμός όλων των σταθερών σημείων της A μπορεί να είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό της A.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το σταθερό σημείο μιας πρότασης με μια μοναδική προτασιακή μεταβλητή p, βλέπουμε ότι συμφέρει η μέθοδος του πίνακα.

β) Αν $A = \Box(p \to q) \to \Box\neg p$ τότε
$B(q_1, q_2) = q_1 \to q_2$, $D_1(p) = p \to q$ και $D_2(p) = \neg p$.
Έτσι $A_1 = B(\top, \Box D_2(p)) = \top \to \Box D_2(p) = \top \to \Box\neg p \equiv \Box\neg p$ και
$A_2 = B(\Box D_1(p), \top) = \Box D_1(p) \to \top = \Box(p \to q) \to \top \equiv \top = H_2$.
Στο προηγούμενο παράδειγμα υπολογίσαμε ότι το σταθερό σημείο της $\Box\neg p$ είναι το $H_1 = \Box\bot$.

Τελικά $H = B(\Box D_1(H_1), \Box D_2(H_2)) = \Box D_1(H_1) \to \Box D_2(H_2) =$
$\Box(H_1 \to q) \to \Box(\neg H_2) = \Box(\Box\bot \to q) \to \Box(\neg\top) \equiv \Box(\Box\bot \to q) \to \Box\bot$.

γ) Η επιλογή των B και $D_i(p)$ δεν είναι απαραίτητα μονοσήμαντη, όπως δείχνει αυτό το παράδειγμα:

Αν $A = \Box(\Box(p \wedge q) \wedge \Box(p \wedge r))$
και επιλέξουμε $B = q_1$ και $D_1(p) = \Box(p \wedge q) \wedge \Box(p \wedge r)$, έχουμε:
$A_1 = B(\top) = \top = H_1$ και
$H = B(\Box D_1(H_1)) = \Box D_1(H_1) = \Box(\Box(H_1 \wedge q) \wedge \Box(H_1 \wedge r)) =$
$\Box(\Box(\top \wedge q) \wedge \Box(\top \wedge r)) \equiv \Box(\Box q \wedge \Box r)$.

Αν όμως επιλέξουμε $B = \Box(q_1 \wedge q_2)$, $D_1(p) = p \wedge q$ και $D_2(p) = p \wedge r$, έχουμε:
$A_1 = B(\top, \Box D_2(p)) = \Box(\top \wedge \Box D_2(p)) = \Box(\top \wedge \Box(p \wedge r)) \equiv \Box\Box(p \wedge r)$ και
$A_2 = B(\Box D_1(p), \top) = \Box(\Box D_1(p) \wedge \top) = \Box(\Box(p \wedge q) \wedge \top) \equiv \Box\Box(p \wedge q)$

Για να βρούμε το H_1: Αν $A' = \Box\Box(p \wedge r)$, τότε $B' = q_1$ και $D_1'(p) = \Box(p \wedge r)$.
Έτσι $A_1' = B'(\top) = \top = H_1'$ και
$H' = B'(\Box D_1'(H_1')) = \Box D_1'(H_1') = \Box\Box(H_1' \wedge r) = \Box\Box(\top \wedge r) \equiv \Box\Box r$.
Ομοίως $H_2 = \Box\Box q$.

Τελικά $H = B(\Box D_1(H_1), \Box D_2(H_2)) = \Box(\Box D_1(H_1) \wedge \Box D_2(H_2)) =$
$\Box(\Box(H_1 \wedge q \wedge \Box(H_2 \wedge r)) = \Box(\Box(\Box\Box r \wedge q \wedge \Box(\Box\Box q \wedge r))$.

Παρατηρούμε ότι η πρώτη επιλογή μας δίνει σταθερό σημείο με τροπικό βαθμό 2 ενώ η δεύτερη με τροπικό βαθμό 4.

5.4 Η δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος σταθερού σημείου

Είδαμε ότι ένα σταθερό σημείο, που προκύπτει από την απόδειξη της προηγούμενης παραγράφου, μπορεί να απλοποιηθεί έτσι ώστε να μικρύνει ο τροπικός του βαθμός, όμως όχι πάντα να γίνει ίσος με τον τροπικό βαθμό της A. Η απόδειξη των Boolos και Gleit που θα δούμε σε αυτή την παράγραφο, κατασκευάζει ένα σταθερό σημείο για κάθε πρόταση A, του οποίου ο τροπικός βαθμός δεν ξεπερνάει το n. Θυμίζουμε ότι n είναι ο αριθμός υποπροτάσεων της A της μορφής $\Box D$, δηλαδή ο αριθμός εμφανίσεων του $\Box$ στην A.

Θεώρημα 5.4.1. Το θεώρημα σταθερού σημείου. *Κάθε πρόταση A, που είναι τροπικοποιημένη στην p, έχει σταθερό σημείο H έτσι ώστε αν n είναι ο αριθμός υποπροτάσεων της A της μορφής $\Box D$, τότε για τον τροπικό βαθμό της H ισχύει $d(H) \leqslant n$.*

Απόδειξη.
Έστω s το πλήθος των προτασιακών μεταβλητών εκτός από την p που εμφανίζονται στην A. Τότε αυτές είναι οι $p_1, \ldots, p_s$. Με $\pm B$ συμβολίζουμε μια πρόταση που είναι η B ή η $\neg B$.

Ορισμός 5.4.1. Ορίζουμε την έννοια του **m-χαρακτήρα (m-character)**, για $m \geqslant 0$. Οι 0-χαρακτήρες είναι οι 2^s το πλήθος προτάσεις $\pm q_1 \wedge \cdots \wedge \pm q_s$. Αν $s = 0$ τότε η $\top$ είναι ο μόνος 0-χαρακτήρας.
Έστω ότι οι m-χαρακτήρες είναι οι t το πλήθος προτάσεις $V_1, \ldots, V_t$. Τότε οι $m+1$-χαρακτήρες είναι οι 2^{s+t} το πλήθος προτάσεις

$$\pm q_1 \wedge \cdots \wedge \pm q_s \wedge \pm\Diamond V_1 \wedge \cdots \wedge \pm\Diamond V_t$$

Παράδειγμα 5.4.1. Αν η A περιέχει μόνο τις προτασιακές μεταβλητές p και q, τότε οι 0-χαρακτήρες είναι οι $2 = 2^1$ το πλήθος προτάσεις $\pm q$
οι 1-χαρακτήρες είναι οι $8 = 2^{1+2}$ το πλήθος προτάσεις $\pm q \wedge \pm\Diamond q \pm \Diamond\neg q$
οι 2-χαρακτήρες είναι οι $512 = 2^{1+8}$ το πλήθος προτάσεις

$$\begin{aligned}\pm q\wedge &\pm \Diamond(q \wedge \Diamond q \wedge \Diamond\neg q) \wedge \pm\Diamond(q \wedge \Diamond q \wedge \neg\Diamond\neg q)\wedge\\ &\pm \Diamond(q \wedge \neg\Diamond q \wedge \Diamond\neg q) \wedge \pm\Diamond(q \wedge \neg\Diamond q \wedge \neg\Diamond\neg q)\wedge\\ &\pm \Diamond(\neg q \wedge \Diamond q \wedge \Diamond\neg q) \wedge \pm\Diamond(\neg q \wedge \Diamond q \wedge \neg\Diamond\neg q)\wedge\\ &\pm \Diamond(\neg q \wedge \neg\Diamond q \wedge \Diamond\neg q) \wedge \pm\Diamond(\neg q \wedge \neg\Diamond q \wedge \neg\Diamond\neg q).\end{aligned}$$

και οι 3-χαρακτήρες είναι 2^{1+512} το πλήθος.

Παρατηρούμε ότι η διάζευξη όλων των m-χαρακτήρων είναι ταυτολογία, ενώ η σύζευξη κάθε δύο m-χαρακτήρων είναι αληθοσυναρτησιακά ισοδύναμη με τον $\perp$. Έτσι για κάθε μοντέλο $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ και κάθε $w \in W$, υπάρχει ακριβώς ένας m-χαρακτήρας $U(m, \mathfrak{M}, w)$ (ή $U(m, w)$ ή ακόμα U, αν δεν υπάρχει κίνδυνος παρανόησης) τέτοιος ώστε $\mathfrak{M}, w \vDash U$.

Με επαγωγή στο m αποδεικνύεται ότι ο βαθμός κάθε m-χαρακτήρα είναι m.

Λήμμα 5.4.2. *Έστω ότι τα μοντέλα $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ και $\mathfrak{N} = (X, S, Q)$ είναι πεπερασμένα, μεταβατικά και αναυτοπαθή, $\mathfrak{M}, w_0 \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A)$, $\mathfrak{N}, x_0 \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A)$ και $U(n, w_0, \mathfrak{M}) = U(n, x_0, \mathfrak{N})$. Τότε $\mathfrak{M}, w_0 \vDash p$ ανν $\mathfrak{N}, x_0 \vDash p$.*

Απόδειξη. Έστω $w, w', w_0 \in W$ και $x, x', x_0 \in X$. Θεωρούμε ότι $W \cap X = \varnothing$ κι έτσι θα παραλείπουμε τα σύμβολα $\mathfrak{M}$ και $\mathfrak{N}$ χωρίς αμφισημίες.

Έστω προς άτοπο ότι $w_0 \nvDash p$ ανν $x_0 \vDash p$.

Ορίζουμε το $P(i, Z, w, x, D)$ έτσι που είναι αληθές ανν ισχύουν και οι οχτώ επόμενες συνθήκες:
(1) Το Z είναι ένα σύνολο υποπροτάσεων της A της μορφής $\Box B$.
(2) Το Z έχει i το πλήθος στοιχεία.
(3) $w_0 R w$ ή $w_0 = w$.
(4) $x_0 S x$ ή $x_0 = x$.
(5) Για κάθε πρόταση $\Box B \in Z$, $w \vDash \Box B$ και $x \vDash \Box B$.
(6) $U(n - i, w, \mathfrak{M}) = U(n - i, x, \mathfrak{N})$.

(7) Η $\Box D$ είναι υποπρόταση της A.
(8) $w \nvDash \Box D$ ανν $x \vDash \Box D$ (έτσι λόγω της (5), $\Box D \notin Z$).

Θα αποδείξουμε ότι αν $i < n$ και υπάρχουν Z, w, x, D τέτοια ώστε $P(i, Z, w, x, D)$, τότε υπάρχουν Z', w', x', D' τέτοια ώστε $P(i+1, Z', w', x', D')$.

Θα αναφερόμαστε στις αντίστοιχες συνθήκες που θα δείξουν ότι $P(i+1, Z', w', x', D')$, ως (1'), (2') κλπ.

Υποθέτουμε ότι $i < n$ και ότι υπάρχουν Z, w, x, D τέτοια ώστε $P(i, Z, w, x, D)$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας από την (8) θα υποθέσουμε ότι $w \nvDash \Box D$ και $x \vDash \Box D$. Υπάρχει λοιπόν w' κόσμος ελάχιστης τάξης τέτοιος ώστε wRw' και $w' \nvDash D$. Τότε w_0Rw' (3') και η D είναι αληθής στους κόσμους προσβάσιμους από το w', και άρα $w' \vDash \Box D$.

Έστω $V = U(n-(i+1), w')$ (είναι καλά ορισμένο, αφού $i < n$). Τότε $w' \vDash V$ και, αφού wRw', $w \vDash \Diamond V$. Έτσι η $\Diamond V$ είναι μέλος της σύζευξης της $U(n-i, w) = U(n-i, x)$. Άρα $x \vDash \Diamond V$ και έτσι υπάρχει x' τέτοιο ώστε xSx' και $x' \vDash V$ και έχουμε x_0Sx' (4'). Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $U(n-(i+1), x') = V = U(n-(i+1), w')$ (6').

Επειδή $x \vDash \Box D$, και xSx', έχουμε ότι $x' \vDash \Box D$ και $x' \vDash D$. Έστω $Z' = Z \cup \{\Box D\}$ (1'). τότε το Z' έχει $i+1$ το πλήθος στοιχεία (2'). Αφού wRw' και xSx', για κάθε πρόταση $\Box B \in Z'$ ισχύει ότι $w' \vDash \Box B$ και $x' \vDash \Box B$ (5').

Μένει τώρα να βρούμε μια κατάλληλη πρόταση D'.

Είδαμε ότι η D είναι υποπρόταση της A, $w' \nvDash D$ και $x' \vDash D$. Αυτή η διαφορά των κόσμων πρέπει να προκύπτει από μια διαφορά τους σε σχέση με το p, κάποιο q_k ή κάποιο $\Box D'$, αφού η D είναι αληθοσυναρτησιακός συνδυασμός των p, $q_1, \ldots, q_k$ και υποπροτάσεων $\Box D$ της A. Έτσι ισχύει κάποιο από τα παρακάτω:

(α) $w' \nvDash p$ ανν $x' \vDash p$
(β) $w' \nvDash q_k$ ανν $x' \vDash q_k$, για κάποιο k, με $1 \leqslant k \leqslant s$
(γ) $w' \nvDash \Box D'$ ανν $x' \vDash \Box D'$, για κάποια υποπρόταση $\Box D$ της A.

Αν ισχύει η (α), αφού $w_0 \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A)$, $x_0 \vDash \boxdot(p \leftrightarrow A)$, w_0Rw' και x_0Sx', έχουμε ότι $w' \vDash p \leftrightarrow A$ και $x' \vDash p \leftrightarrow A$. Η A είναι αληθοσυναρτησιακός συνδυασμός των q_k και υποπροτάσεων $\Box D$ της A. Αναγόμαστε έτσι στις άλλες δύο περιπτώσεις.
Η (β) δεν μπορεί να ισχύει, αφού $U(n-(i+1), w') = U(n-(i+1), x')$.
Έτσι ισχύει η (γ) και έχουμε τις (7') και (8').

Έτσι δείξαμε ότι αν $i < n$ και υπάρχουν Z, w, x, D τέτοια ώστε $P(i, Z, w, x, D)$, τότε υπάρχουν Z', w', x', D' τέτοια ώστε $P(i+1, Z', w', x', D')$.

Επειδή $w_0 \vDash p \leftrightarrow A$ και $x_0 \vDash p \leftrightarrow A$ και $U(n, w_0) = U(n, x_0)$, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία έχουμε ότι για κάποια υποπρόταση $\Box D$ της A, $w_0 \nvDash \Box D$ ανν $x_0 \vDash \Box D$ κι έτσι $P(0, \varnothing, w_0, x_0, D)$.

Με επαγωγή στο i αποδείξαμε ότι υπάρχουν Z', w', x', D' τέτοια ώστε $P(n, Z', w', x', D')$. Έτσι το Z' είναι ένα σύνολο που περιέχει n το πλήθος υποπροτάσεις της A της μορφής $\Box B$, αλλά όχι την υποπρόταση $\Box D'$ της A. Αυτό είναι άτοπο, αφού η A έχει n το πλήθος υποπροτάσεις και άρα θα έπρεπε να ανήκουν όλες στο Z'. $\dashv$

Θεωρούμε το

$$H = \bigvee\{U| \text{ η } U \text{ είναι ένας } n\text{-χαρακτήρας και } \mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow A) \wedge U \rightarrow p\}.$$

Επειδή ο βαθμός κάθε m-χαρακτήρα είναι m, ο βαθμός του H είναι επίσης m.

Έστω ένα πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές μοντέλο $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, $w \in W$.

Θα δείξουμε ότι $w \models \boxdot(p \leftrightarrow A) \rightarrow (p \leftrightarrow H)$.
Υποθέτουμε λοιπόν ότι $w \models \boxdot(p \leftrightarrow A)$.

Έστω $w \models H$ και $U = U(n, w)$. Επειδή ο U είναι ο μοναδικός n-χαρακτήρας τέτοιος ώστε $w \models U$, ο U είναι μέλος της διάζευξης του H και άρα $\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow A) \wedge U \rightarrow p$. Έτσι $w \models U \rightarrow p$ και αφού $w \models U$, έχουμε ότι $w \models p$. Άρα $w \models \boxdot(p \leftrightarrow A) \rightarrow (H \rightarrow p)$.

Αντίστροφα έστω ότι $w \models p$. Έστω προς άτοπο ότι ο U δεν είναι μέλος της διάζευξης του H. Τότε $\mathrm{GL} \nvdash \boxdot(p \leftrightarrow A) \wedge U \rightarrow p$ και άρα υπάρχει πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές μοντέλο $\mathfrak{N} = (X, S, Q)$ και $x \in X$ έτσι ώστε $x \models \boxdot(p \leftrightarrow A)$, $x \models U$ και $x \not\models p$. Όμως ο μοναδικός n-χαρακτήρας που αληθεύει στο x είναι ο $U(n, x)$ και έτσι $U(n, w) = U = U(n, x)$. Τότε, επειδή $w \models \boxdot(p \leftrightarrow A)$ και $x \models \boxdot(p \leftrightarrow A)$, από το λήμμα 5.4.2, $w \models p$ ανν $x \models p$, που είναι άτοπο. Έτσι ο U είναι μέλος της διάζευξης του H και επειδή $w \models U$ έχουμε ότι $w \models H$. Άρα $w \models \boxdot(p \leftrightarrow A) \rightarrow (p \rightarrow H)$.

Έτσι σε κάθε πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές μοντέλο $\mathfrak{M}$, ισχύει ότι $\mathfrak{M} \models \boxdot(p \leftrightarrow A) \rightarrow (p \leftrightarrow H)$ και από το θεώρημα της πληρότητας $\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow A) \rightarrow (p \leftrightarrow H)$. Άρα από την πρόταση 5.1.6 το H είναι σταθερό σημείο της A.

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. Βρήκαμε λοιπόν τρόπο να περιορίσουμε το βαθμό του σταθερού σημείου ώστε να είναι το πολύ n. Το τίμημα αυτής της κατασκευής όμως είναι ότι το παραγόμενο H είναι μεγάλο σε μήκος.

5.5 Υπάρχουν και άλλες προτάσεις που έχουν σταθερό σημείο

Η συνθήκη η A να είναι τροπικοποιημένη στην p δεν μπορεί να παραληφθεί τελείως: Δεν έχουν όλες οι προτάσεις σταθερό σημείο. Για παράδειγμα αν η πρόταση p είχε σταθερό σημείο H αυτό θα ήταν αμετάβλητη πρόταση και $\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow p) \leftrightarrow \boxdot(p \leftrightarrow H)$ και άρα $\mathrm{GL} \vdash p \leftrightarrow H$ που είναι άτοπο αφού αν δύο μοντέλα έχουν από έναν κόσμο και η p αληθεύει μόνο στον έναν, τότε στον έναν από τους δύο δεν αληθεύει η $p \leftrightarrow H$. Ακόμα αν η πρόταση $\neg p$ είχε σταθερό σημείο τότε $\mathrm{GL} \vdash H \leftrightarrow \neg H$ που είναι άτοπο.

Θα δούμε όμως ότι υπάρχει πρόταση που ενώ δεν είναι τροπικοποιημένη στην p, έχει σταθερό σημείο.

Πρόταση 5.5.1. *Αν η πρόταση B είναι τροπικοποιημένη στην p και $\mathrm{GL} \vdash p \rightarrow B$, τότε $\mathrm{GL} \vdash B$.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι $\mathrm{GL} \nvdash B$. τότε υπάρχει πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές μοντέλο $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ και $\mathfrak{M}, w \in W$ τέτοιο ώστε $\mathfrak{M}, w \nvDash B$. Έστω V' τέτοιο ώστε να είναι ίδια με την V εκτός από το ότι $wV'p$ και $\mathfrak{M}' = (W, R, V')$. Τότε για κάθε x με wRx $\mathfrak{M}, x \vDash D$ ανν $\mathfrak{M}', x \vDash D$, άρα $\mathfrak{M}, w \vDash \boxdot D$ ανν $\mathfrak{M}', w \vDash \boxdot D$. Όμως η B είναι αληθοσυναρτησιακός συνδυασμός προτάσεων της μορφής $\Box D$ και προτασιακών μεταβλητών διάφορων της p. Έτσι $\mathfrak{M}', w \nvDash B$. Όμως $\mathfrak{M}', w \vDash p$. Έτσι $\mathfrak{M}', w \nvDash p \to B$ και άρα από το θεώρημα της πληρότητας $\mathrm{GL} \nvdash p \to B$. ⊣

Πόρισμα 5.5.2. *Η παραπάνω πρόταση δίνει ότι η p δεν είναι ισοδύναμη με καμιά πρόταση τροπικοποιημένη στην p.*

Απόδειξη. Αν ίσχυε ότι $\mathrm{GL} \vdash p \leftrightarrow B$, τότε από την παραπάνω πρόταση $\mathrm{GL} \vdash B$ και άρα $\mathrm{GL} \vdash p$. Τότε με αντικατάσταση $\mathrm{GL} \vdash \bot$, που είναι άτοπο. ⊣

Πρόταση 5.5.3. *Δεν υπάρχει πρόταση B τροπικοποιημένη στην p τέτοια ώστε $\mathrm{GL} \vdash B \leftrightarrow (\Box p \vee p)$.*

Απόδειξη. Αν υπήρχε τέτοια B, τότε $\mathrm{GL} \vdash p \to B$ και έτσι, από την πρόταση 5.5.1, $\mathrm{GL} \vdash B$, άρα $\mathrm{GL} \vdash \Box p \vee p$. Όμως αυτό είναι άτοπο γιατί αν $W = \{0, 1\}$, $R = \{(0, 1)\}$, $V = \varnothing$, το $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ είναι κατάλληλο για το GL και $0 \vDash \neg p \wedge \neg \boxdot p$. ⊣

Πρόταση 5.5.4. $\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow \Box p \vee p) \leftrightarrow \boxdot(p \leftrightarrow \top)$.

Απόδειξη. Για την ορθή φορά:

$$\begin{aligned}\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow \Box p \vee p) &\to \boxdot(\Box p \to p), \to \Box(\Box p \to p) \wedge (\Box p \to p), \to \\ &\Box p \wedge (\Box p \to p), \to \Box p \wedge p, \to \boxdot p, \to \boxdot(p \to \top).\end{aligned}$$

Για την αντίστροφη:

$$\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow \top) \to \boxdot p, \to \boxdot(\Box p \vee p \to p), \to \boxdot(\Box p \vee p \leftrightarrow p).$$

⊣

Από την παραπάνω πρόταση συμπεραίνουμε ότι ενώ το να είναι μια πρόταση τροπικοποιημένη στην p είναι ικανή προϋπόθεση για να έχει σταθερό σημείο, δεν είναι και αναγκαία. Η $\Box p \vee p$ έχει σταθερό σημείο χωρίς καν να είναι ισοδύναμη με μια πρόταση τροπικοποιημένη στην p. Επειδή, όπως είδαμε, δεν έχουν όλες οι προτάσεις σταθερό σημείο θα θέλαμε να χαρακτηρίσουμε τις προτάσεις που έχουν. Το αν υπάρχει κάποιος (μη τετριμένος) τέτοιος χαρακτηρισμός είναι ανοιχτό ερώτημα.

6. Το θεώρημα της αριθμητικής πληρότητας

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε τα αντίστροφα των θεωρημάτων της αριθμητικής εγκυρότητας 2.3.4 και 2.3.10, δηλαδή τα θεωρήματα της αριθμητικής πληρότητας του Robert Solovay.

6.1 Το θεώρημα της αριθμητικής πληρότητας για το GL

Ορισμός 6.1.1. Μια πρόταση A λέγεται **πάντα αποδείξιμη** ανν για κάθε πραγματοποίηση $*$, $\mathrm{PA} \vdash A^*$.

Θεώρημα 6.1.1. Αριθμητικής πληρότητας για το GL. *Η πρόταση A είναι πάντα αποδείξιμη ανν* $\mathrm{GL} \vdash A$.

Αποδειξη.

Η αντίστροφη φορά είναι το θεώρημα της αριθμητικής εγκυρότητας για το GL, 2.3.4. Για την ορθή φορά έστω προς άτοπο ότι $\mathrm{GL} \nvdash A$. Τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές μοντέλο $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ και $w \in W$, τέτοιο ώστε $w \nvDash A$. Αρκεί να κατασκευάσουμε μια πραγματοποίηση $*$ από τα $\mathfrak{M}$ και w, τέτοια ώστε $\mathrm{PA} \nvdash A^*$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, θεωρούμε ότι ο w βλέπει όλους τους άλλους κόσμους του W. (Αν όχι, έστω $\mathfrak{N}$ το παραγόμενο υπομοντέλο του $\mathfrak{M}$ από το w και από την αρχή του παραγόμενου υπομοντέλου 3.1.8 $\mathfrak{N} \nvDash A$.)

Τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $w = 1$, $W = \{1, \ldots, n\}$ και $1Ri$ ανν $1 < i \leqslant n$. Έτσι $\mathfrak{M}, 1 \nvDash A$.

Ιδεα της αποδειξης. Θα ορίσουμε τις προτάσεις του Solovay $S_0, S_1, \ldots, S_n$ και την πραγματοποίηση $*$ έτσι ώστε για κάθε προτασιακή μεταβλητή p,
$p^* = \bigvee_{iVp} S_i$.
Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $i \in W$ και κάθε B υποπρόταση της A,
αν $\mathfrak{M}, i \vDash B$ τότε $\mathrm{PA} \vDash S_i \to B^*$ και αν $\mathfrak{M}, i \nvDash B$ τότε $\mathrm{PA} \vDash S_i \to \neg B^*$.
Τότε, αφού η A είναι υποπρόταση της A και $\mathfrak{M}, i \nvDash A$, $\mathrm{PA} \vdash S_1 \to \neg A^*$. Θα αποδείξουμε ακόμα ότι $\mathrm{PA} \vdash S_0 \to \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner S_1 \urcorner)$ και ότι η S_0 είναι αληθής.

Από την

PA $\vdash S_1 \rightarrow \neg A^*$ θα συμπεράνουμε την

PA $\vdash \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_1 \urcorner) \rightarrow \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner)$ και επειδή

PA $\vdash S_0 \rightarrow \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner S_1 \urcorner)$,

PA $\vdash S_0 \rightarrow \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner)$.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα θεωρήματα της PA είναι αληθείς προτάσεις, η πρόταση $S_0 \rightarrow \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner)$ είναι αληθής. Όμως η S_0 είναι αληθής, άρα το ίδιο και η $\neg \mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner)$. Έτσι PA $\nvdash A^*$.

Επεκτείνουμε το αρχικό μας μοντέλο συνδέοντας στην αρχή του τον κόσμο 0, για να υπάρχει αντιστοιχία με τους κόσμους του μοντέλου και τις προτάσεις του Solovay. Ορίζουμε έτσι το μοντέλο $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ με $W' = W \cup \{0\}$, $R' = R \cup \{(0,i)|\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$,για $1 \leqslant i \leqslant n$, $iV'p$ ανν iVp και $0V'p$ ανν $1Vp$, δηλαδή ο 0 βλέπει όλους τους υπόλοιπους κόσμους και συμπεριφέρεται στις προτασιακές μεταβλητές όπως ο 1. Έτσι το $\mathfrak{M}'$ είναι πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές.

Θα ορίσουμε μια συνάρτηση $h : \mathbb{N} \rightarrow W'$ τέτοια ώστε αν $h(m) = i$ τότε $h(m+1) = i$ ή υπάρχει j με $iR'j$ τέτοιο ώστε $h(m+1) = j$. Επαγωγικά αν $m < k$, $h(m) = i$ και $h(k) = j$, τότε επειδή το $\mathfrak{M}'$ είναι μεταβατικό, $i = j$ ή $iR'j$. Επειδή το $\mathfrak{M}$ είναι πεπερασμένο και δεν υπάρχουν σε αυτό R-κύκλοι, υπάρχουν $j \in W'$ και $m \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε για κάθε $m' \geqslant m$, $h(m') = j$, δηλαδή η h είναι τελικά j ή ισοδύναμα, αφού η h έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$, η h έχει όριο το j.

Υποθέτοντας γνωστή την h (που θα ορίσουμε αργότερα) και αν $H(a,b) = \{a,b|\ h(a) = b\}$, δίνουμε τον ορισμό των προτάσεων του Solovay:

Ορισμός 6.1.2. Αν $0 \leqslant j \leqslant n$ και $H(a,b) = \{a,b|\ h(a) = b\}$, η πρόταση S_j του Solovay είναι η πρόταση

$$\exists c \forall a (a \geqslant c \rightarrow \exists b (b = \boldsymbol{j} \wedge H(a,b))).$$

Η S_j δηλώνει ότι η h έχει όριο το j.

Η h που θα ορίσουμε θα έχει την παρακάτω ιδιότητα, την οποία περιγράφουμε αναδρομικά:

- $h(0) = 0$
- αν $h(m) = i$, τότε
  - $h(m+1) = j$, αν υπάρχει j με $iR'j$ τέτοιο ώστε ο m να είναι αριθμός Gödel μιας απόδειξης της πρότασης $\neg S_j$ ή
  - $h(m+1) = i$, αλλιώς.

Αυτή η ιδιότητα δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ορισμός για την h γιατί η h εμφανίζεται στον ορισμό των προτάσεων του Solovay, και οι προτάσεις του Solovay εμφανίζονται στην ιδιότητα της h. Θα είχαμε δηλαδή έναν κυκλικό ορισμό. Για να αποφύγουμε αυτή την κατάσταση θα εφαρμόσουμε το γενικευμένο λήμμα διαγωνιοποίησης για να ορίσουμε την h.

Θα συμβολίζουμε με F_m τον τύπο με αριθμό Gödel m

Θεωρούμε τον Σ_1 ψευδοόρο $\mathrm{notlim}(x_1, x_2)$ που εκφράζει τη συνάρτηση που αναθέτει σε κάθε ζεύγος (m, j) τον αριθμό Gödel της πρότασης

$$\neg\exists c \forall a (a \geqslant c \to \exists b(b = \boldsymbol{j} \wedge F_m)).$$

Έτσι αν ένας τύπος $F(a, b)$ με αριθμό Gödel m ορίζει μια συνάρτηση f, τότε ο $notlim(m, \boldsymbol{j})$ εκφράζει τον αριθμό Gödel της πρότασης που δηλώνει ότι το j δεν είναι όριο της συνάρτησης f.

Έστω ο τύπος $B(y, a, b)$

$$\begin{aligned}
&\exists s \Big\{ \mathrm{FinSeq}(s) \wedge \mathrm{lh(s)} = a + \mathbf{1} \wedge s_0 = \mathbf{0} \wedge s_a = b \wedge \\
&\forall x < a \bigwedge_{i:0 \leqslant i \leqslant n} \Big\{ s_x = \boldsymbol{i} \to \\
&\Big[\bigwedge_{j:iR'j} \big(\mathrm{Pf}(x, \mathrm{notlim}(y, \boldsymbol{j})) \to s_{x+1} = \boldsymbol{j} \big) \wedge \\
&\Big(\big(\bigwedge_{j:iR'j} \neg \mathrm{Pf}(x, \mathrm{notlim}(y, \boldsymbol{j})) \big) \to s_{x+1} = s_x \Big) \Big] \Big\} \Big\}.
\end{aligned}$$

Αν το η τιμή του y είναι αριθμός Gödel κάποιου τύπου F που ορίζει μια συνάρτηση f, τότε ο $B(y, a, b)$ εκφράζει ότι υπάρχει πεπερασμένη ακολουθία μήκους $a + 1$ τέτοια ώστε:
το πρώτο της στοιχείο είναι το 0, το τελευταίο είναι το b και
για κάθε $x < a$, αν $s_x = i$, τότε:
$s_{x+1} = j$, αν $iR'j$ και x είναι ο αριθμός Gödel μιας απόδειξης της πρότασης που εκφράζει ότι το j δεν είναι όριο της f και
$s_{x+1} = s_x$, αλλιώς.

Από το γενικευμένο λήμμα διαγωνιοποίησης 2.2.9, υπάρχει ένας τύπος $H(a, b)$ τέτοιος ώστε

$$\mathrm{PA} \vdash H(a, b) \leftrightarrow B(\ulcorner H(a, b) \urcorner, a, b).$$

Θέτουμε m τον αριθμό Gödel της $H(a, b)$. Έτσι ορίσαμε αυστηρά τον όρο $H(a, b)$ και άρα ο ορισμός 6.1.2 των S_j, είναι πλήρης.

Με $\boldsymbol{s_n}$ θα συμβολίζουμε τον αριθμό Gödel του n-οστού όρου της ακολουθίας με αριθμό Gödel s.

Πρόταση 6.1.2. $\mathrm{PA} \vdash H(a, b) \leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
&\exists s \Big\{ \mathrm{FinSeq}(s) \wedge \mathrm{lh(s)} = a + \mathbf{1} \wedge s_0 = \mathbf{0} \wedge s_a = b \wedge \\
&\forall x < a \textstyle\bigwedge_{i:0 \leqslant i \leqslant n} \Big\{ s_x = \boldsymbol{i} \to \\
&\Big[\textstyle\bigwedge_{j:iR'j} \big(\mathrm{Pf}(x, \ulcorner \neg S_j \urcorner) \to s_{x+1} = \boldsymbol{j} \big) \wedge \\
&\Big(\big(\textstyle\bigwedge_{j:iR'j} \neg \mathrm{Pf}(x, \ulcorner \neg S_j \urcorner) \big) \to s_{x+1} = s_x \Big) \Big] \Big\} \Big\}.
\end{aligned}$$

Απόδειξη. Ισχύει από τον ορισμό του τύπου $B(y, a, b)$ και επειδή
$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{notlim}(\ulcorner H(a,b) \urcorner, \boldsymbol{j}) = \mathrm{notlim}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{j}) =$
$= \ulcorner \neg \exists c \forall a (a \geqslant c \to \exists b (b = \boldsymbol{j} \wedge H(a,b))) \urcorner = \ulcorner \neg S_j \urcorner.$ ⊣

Επειδή στην ισοδυναμία της πρότασης 6.1.2 οι όροι FinSeq και Pf είναι Δ_1 και επειδή ο Σ_1 όρος lh(s) είναι και Δ_1 όρος (από την παρατήρηση 2.1.1), ο $H(a, b)$ είναι Σ_1 όρος. Για τον όρο $H(a, b)$ ισχύει ότι (με επαγωγή στην a) $\exists ! b H(a, b)$ και ορίζει τη συνάρτηση h. Ακόμα για κάθε $j \leqslant n$ η πρόταση S_j εκφράζει ότι το όριο της h είναι το j. Επίσης ισχύει η ιδιότητα που θέλαμε για την h.

Πρόταση 6.1.3. *Αν $0 \leqslant i < j \leqslant n$, τότε* $\mathrm{PA} \vdash \neg(S_i \wedge S_j)$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό των S_j και επειδή $\mathrm{PA} \vdash \exists ! b H(a, b)$. ⊣

Πρόταση 6.1.4. $\mathrm{PA} \vdash H(a, \boldsymbol{i}) \to (S_i \vee \bigvee_{j:iR'j} S_j)$

Απόδειξη. Με επαγωγή στην αντίστροφη της R'. Υποθέτουμε ότι για κάθε j με $iR'j$ ισχύει ότι
$\mathrm{PA} \vdash H(a, \boldsymbol{j}) \to (S_j \vee \bigvee_{k:jR'k} S_k)$ και άρα
$\mathrm{PA} \vdash \forall a (H(a, \boldsymbol{j}) \to (S_j \vee \bigvee_{k:jR'k} S_k))$.
Από την 6.1.2 έχουμε ότι
$\mathrm{PA} \vdash H(a, \boldsymbol{i}) \to \forall c (c \geqslant a \to (H(c, \boldsymbol{i}) \vee \bigvee_{j:iR'j} H(c, \boldsymbol{j})))$.
Από τις δύο αυτές σχέσεις συμπεραίνουμε ότι
$\mathrm{PA} \vdash H(a, \boldsymbol{i}) \to \forall c (c \geqslant a \to (H(c, \boldsymbol{i}) \vee \bigvee_{j:iR'j} (S_i \vee \bigvee_{k:jR'k} S_j)))$.
Όμως η c δεν εμφανίζεται στο $\bigvee_{j:iR'j} (S_i \vee \bigvee_{k:jR'k} S_j)$, έτσι
$\mathrm{PA} \vdash H(a, \boldsymbol{i}) \to \forall c (c \geqslant a \to H(c, \boldsymbol{i}) \vee \bigvee_{j:iR'j} (S_i \vee \bigvee_{k:jR'k} S_j))$ και άρα
$\mathrm{PA} \vdash H(a, \boldsymbol{i}) \to (S_i \vee \bigvee_{j:iR'j} (S_i \vee \bigvee_{k:jR'k} S_j))$.
Επειδή αν $iR'j$ και $jR'k$ τότε $iR'k$ ισχύει το ζητούμενο. ⊣

Πρόταση 6.1.5. $\mathrm{PA} \vdash S_0 \vee S_1 \vee \cdots \vee S_n$.

Απόδειξη. Από την 6.1.4 έχουμε ότι
$\mathrm{PA} \vdash H(a, \boldsymbol{0}) \to (S_0 \vee S_1 \vee \cdots \vee S_n)$. Όμως από την 6.1.2
$\mathrm{PA} \vdash H(0, \boldsymbol{0})$ και έτσι
$\mathrm{PA} \vdash (S_0 \vee S_1 \vee \cdots \vee S_n)$ ⊣

Από τις 6.1.3 και 6.1.5 συμπεραίνουμε ότι η PA αποδεικνύει ότι η h έχει μοναδικό όριο $\leqslant n$

Πρόταση 6.1.6. *Αν $iR'j$, τότε* $\mathrm{PA} \vdash S_i \to \neg \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_j \urcorner)$.

Απόδειξη. Έστω ότι το όριο της h είναι το i και m ο μικρότερος αριθμός τέτοιος ώστε $h(m) = i$ και για κάθε $r > m$, $h(r) = i$. Κάθε θεώρημα της PA έχει άπειρο πλήθος αποδείξεων και άρα έχει απόδειξη με οσοδήποτε μεγάλο αριθμό Gödel. Για παράδειγμα αν προσθέσουμε ένα αξίωμα στην αρχή ή επαναλάβουμε την τελευταία πρόταση της απόδειξης έχουμε μια απόδειξη με μεγαλύτερο αριθμό

Gödel. Έστω προς άτοπο ότι $\mathrm{PA} \vdash \neg S_j$, με $j \neq i$. Τότε υπάρχει k που είναι ο μικρότερος αριθμός Gödel απόδειξης της $\neg S_j$ τέτοιος ώστε $k > m$. Τότε όμως $h(k+1) = j \neq i$ και καταλήξαμε σε άτοπο. Το παραπάνω επιχείρημα μπορεί να τυποποιηθεί στην PA και να κατασκευαστεί έτσι μια τυπική απόδειξη της $S_i \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_j \urcorner)$. ⊣

Πρόταση 6.1.7. *Αν $i \geqslant 1$, τότε $\mathrm{PA} \vdash S_i \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_i \urcorner)$.*

Απόδειξη. Έστω $i \geqslant 1$. Με επαγωγή στο m αποδεικνύουμε ότι αν $h(m) = i$, τότε $\mathrm{PA} \vdash \neg S_i$

- Έστω ότι $h(1) = i$
  Επειδή $h(0) = 0$ και $i \neq 0$, ο 0 είναι αριθμός Gödel μιας απόδειξης της $\neg S_i$. (Αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει άρα ούτε ισχύει ότι $h(1) = i$, αλλά η βάση της επαγωγής είναι σωστή).
- Για το επαγωγικό βήμα έστω ότι αν $h(m) = i$, τότε $\mathrm{PA} \vdash \neg S_i$.
  Αν $h(m) = i$ από την επαγωγική υπόθεση $\mathrm{PA} \vdash \neg S_i$.
  Αν $h(m) \neq i$, τότε $h(m+1) = i$ μόνο αν ο m είναι αριθμός Gödel μιας απόδειξης της $\neg S_i$ (αλλιώς $h(m+1) = h(m) \neq i$). Έτσι πάλι $\mathrm{PA} \vdash \neg S_i$.

Τυποποιώντας στην PA την παραπάνω απόδειξη έχουμε ότι:
$\mathrm{PA} \vdash H(a, \boldsymbol{i}) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_i \urcorner)$. Όμως
$\mathrm{PA} \vdash S_i \to \exists a H(a, \boldsymbol{i})$ και άρα
$\mathrm{PA} \vdash S_i \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_i \urcorner)$. ⊣

Πρόταση 6.1.8. *Αν $i \geqslant 1$, τότε $\mathrm{PA} \vdash S_i \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \bigvee_{j:iR'j} S_j \urcorner)$.*

Απόδειξη.

1. $\mathrm{PA} \vdash S_i \to \exists a H(a, \boldsymbol{i})$ (από τον ορισμό της S_i)
2. $\mathrm{PA} \vdash \exists a H(a, \boldsymbol{i}) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \exists a H(a, \boldsymbol{i}) \urcorner)$ (πρόταση 2.2.7, η $\exists a H(a, \boldsymbol{i})$ είναι Σ_1)
3. $\mathrm{PA} \vdash \exists a H(a, \boldsymbol{i}) \to (S_i \vee \bigvee_{j:iR'j} S_j)$ (πρόταση 6.1.4, η a δεν εμφανίζεται στο $S_i \vee \bigvee_{j:iR'j} S_j$)
4. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \exists a H(a, \boldsymbol{i}) \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner S_i \vee \bigvee_{j:iR'j} S_j \urcorner)$ (3, συνθήκες αποδειξιμότητας (i), (ii))
5. $\mathrm{PA} \vdash S_i \to \mathrm{Bew}(\ulcorner S_i \vee \bigvee_{j:iR'j} S_j \urcorner)$ (1, 2, 4, προτ. λογισμός)
6. $\mathrm{PA} \vdash S_i \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_i \urcorner)$ (πρόταση 6.1.7, $i \geqslant 1$)
7. $\mathrm{PA} \vdash S_i \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \bigvee_{j:iR'j} S_j \urcorner)$ (5, 6, προτ. λογισμός)

⊣

Ορισμός 6.1.3. Ορίζουμε την πραγματοποίηση $*$ έτσι ώστε για κάθε προτασιακή μεταβλητή p,

$$p^* = \bigvee_{i:iV'p} S_i.$$

Πρόταση 6.1.9. *Για κάθε i με $1 \leqslant i \leqslant n$ και κάθε υποπρόταση B της A,*

$$\text{αν } \mathfrak{M}, i \vDash B, \text{ τότε } \mathrm{PA} \vdash S_i \to B^* \text{ και}$$
$$\text{αν } \mathfrak{M}, i \nvDash B, \text{ τότε } \mathrm{PA} \vdash S_i \to \neg B^*.$$

Αποδειξη. Με επαγωγή στην πολυπλοκότητα της B παρατηρώντας ότι επειδή $i \neq 0$, iRj ανν $iR'j$ και iVp ανν $iV'p$:

- Έστω ότι $B = \bot$.
  Τότε $\mathfrak{M}, i \nvDash \bot$ και $\mathrm{PA} \vdash S_i \to \top$, άρα $\mathrm{PA} \vdash S_i \to \neg\bot^*$.
- Έστω ότι $B = p$, όπου p προτασιακή μεταβλητή.
  Αν $\mathfrak{M}, i \vDash p$, iVp άρα $iV'p$ κι έτσι
  $\mathrm{PA} \vdash S_i \to \bigvee_{i:iV'p} S_i$, δηλαδή $\mathrm{PA} \vdash S_i \to p^*$.
  Αν $\mathfrak{M}, i \nvDash p$, τότε δεν ισχύει ότι iVp, άρα δεν ισχύει ότι $iV'p$.
  Από την πρόταση 6.1.3, $\mathrm{PA} \vdash S_i \to \neg \bigvee_{i:iV'p} S_i$ και άρα $\mathrm{PA} \vdash S_i \to \neg p^*$.
- Έστω ότι $B = C \to D$.
  Αν $\mathfrak{M}, i \vDash C \to D$, τότε $\mathfrak{M}, i \nvDash C$ ή $\mathfrak{M}, i \vDash D$. Από την επαγωγική υπόθεση, $\mathrm{PA} \vdash S_i \to \neg C^*$ ή $\mathrm{PA} \vdash S_i \to D^*$, άρα $\mathrm{PA} \vdash S_i \to (C \to D)^*$.
  Αν $\mathfrak{M}, i \nvDash C \to D$, τότε $\mathfrak{M}, i \vDash C$ και $\mathfrak{M}, i \nvDash D$. Από την επαγωγική υπόθεση, $\mathrm{PA} \vdash S_i \to C^*$ και $\mathrm{PA} \vdash S_i \to \neg D^*$, άρα $\mathrm{PA} \nvdash S_i \to (C \to D)^*$.
- Έστω ότι $B = \Box C$.
  Αν $\mathfrak{M}, i \vDash \Box C$, τότε για κάθε j με iRj ισχύει ότι $\mathfrak{M}, j \vDash C$. Από την επαγωγική υπόθεση για κάθε j με iRj,

  $\mathrm{PA} \vdash S_j \to C^*$ άρα, επειδή iRj ανν $iR'j$,

  $\mathrm{PA} \vdash \bigvee_{j:iR'j} S_j \to C^*$. Από τις συνθήκες αποδειξιμότητας (i) και (ii),

  $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \bigvee_{j:iR'j} S_j \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner C^* \urcorner)$, δηλαδή

  $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \bigvee_{j:iR'j} S_j \urcorner) \to (\Box C)^*$. Όμως από την πρόταση 6.1.8,

  $\mathrm{PA} \vdash S_i \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \bigvee_{j:iR'j} S_j \urcorner)$. Έτσι

  $\mathrm{PA} \vdash S_i \to (\Box C)^*$.

  Αν $\mathfrak{M}, i \nvDash \Box C$, τότε υπάρχει j με iRj, τέτοιο ώστε $\mathfrak{M}, j \nvDash C$ και από την επαγωγική υπόθεση

  $\mathrm{PA} \vdash S_j \to \neg C^*$, άρα

  $\mathrm{PA} \vdash C^* \to \neg S_j$. Από τις συνθήκες αποδειξιμότητας (i) και (ii),

  $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner C^* \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_j \urcorner)$, δηλαδή

  $\mathrm{PA} \vdash (\Box C)^* \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_j \urcorner)$, έτσι

  $\mathrm{PA} \vdash \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_j \urcorner) \to \neg(\Box C)^*$. Όμως iRj και άρα $iR'j$. Έτσι από την πρόταση 6.1.6,

  $\mathrm{PA} \vdash S_i \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_j \urcorner)$. Έτσι

  $\mathrm{PA} \vdash S_i \to \neg(\Box C)^*$. ⊣

Πρόταση 6.1.10. $\mathrm{PA} \vdash S_0 \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner)$.

Αποδειξη. Από την πρόταση 6.1.9 έχουμε ότι

$\mathrm{PA} \vdash S_1 \to \neg A^*$ άρα

$\mathrm{PA} \vdash A^* \to \neg S_1$ και από τις συνθήκες αποδειξιμότητας (i) και (ii),

$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_1 \urcorner)$. Άρα

$\mathrm{PA} \vdash \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_1 \urcorner) \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner)$ και επειδή από την πρόταση 6.1.6 έχουμε

$\mathrm{PA} \vdash S_0 \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner S_1 \urcorner)$,
$\mathrm{PA} \vdash S_0 \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner)$. ⊣

Στο εξής θα χρησιμοποιούμε ότι τα θεωρήματα της PA είναι αληθείς προτάσεις. Έτσι αυτό το τελευταίο μέρος της απόδειξης δεν μπορεί να τυποποιηθεί στην PA.

Πρόταση 6.1.11. *Αν $i \geqslant 1$, η πρόταση S_i είναι ψευδής.*

Απόδειξη. Από την πρόταση 6.1.7 έχουμε ότι $\mathrm{PA} \vdash S_i \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_i \urcorner)$, άρα η $S_i \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_i \urcorner)$ αληθής. Έτσι αν η S_i είναι αληθής, τότε $\mathrm{PA} \vdash \neg S_i$ και άρα η S_i είναι ψευδής. ⊣

Πρόταση 6.1.12. *Η πρόταση S_0 είναι αληθής.*

Απόδειξη. Από την πρόταση 6.1.5 έχουμε ότι $\mathrm{PA} \vdash S_0 \vee S_1 \vee \cdots \vee S_n$, άρα τουλάχιστον μία από τις $S_0, S_1, \ldots, S_n$ είναι αληθής και επειδή από την πρόταση 6.1.11 οι $S_1, \ldots, S_n$ είναι ψευδής, η S_0 είναι αληθής. ⊣

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη του θεωρήματος παρατηρώντας ότι από την πρόταση 6.1.10 έχουμε ότι $\mathrm{PA} \vdash S_0 \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner)$, άρα η πρόταση $S_0 \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner)$ είναι αληθής και αφού, από την πρόταση 6.1.12 η S_0 είναι αληθής, η $\mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner)$ είναι ψευδής, άρα $\mathrm{PA} \nvdash A^*$.

Παρατήρηση 6.1.1. Βλέπουμε ότι η συνάρτηση h παίρνει μόνο την τιμή 0: Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει i με $i \neq 0$, τέτοιο ώστε για κάποιο m, $h(m) = i$. Τότε για κάθε $m' > m$, $h(m') = i$ ή υπάρχει j με $iR'j$ τέτοιο ώστε $h(m') = j$. Αφού δεν ισχύει ότι $jR'0$, για κάθε $m' > m$, $h(m') \neq 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού το 0 είναι το όριο της h από την πρόταση 6.1.12.

Η απόδειξη του θεωρήματος δεν μπορεί να τυποποιηθεί στη PA, ισχύει όμως ότι:

Πρόταση 6.1.13. $\mathrm{PA} \vdash \bigwedge_{i:1 \leqslant i \leqslant n}(\mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_i \urcorner) \to \neg S_i) \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner)$.

Απόδειξη.
1. $\mathrm{PA} \vdash \bigwedge_{i:1 \leqslant i \leqslant n}(S_i \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_i \urcorner))$ (πρόταση 6.1.7)
2. $\mathrm{PA} \vdash \bigwedge_{i:1 \leqslant i \leqslant n}(S_i \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_i \urcorner)) \to \bigwedge_{i:1 \leqslant i \leqslant n}(\neg S_i)$ (1, προτ. λογισμός)
3. $\mathrm{PA} \vdash \bigwedge_{i:1 \leqslant i \leqslant n}(\neg S_i) \to S_0$ (πρόταση 6.1.5)
4. $\mathrm{PA} \vdash \bigwedge_{i:1 \leqslant i \leqslant n}(S_i \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_i \urcorner)) \to S_0$ (2, 3, προτ. λογισμός)
5. $\mathrm{PA} \vdash S_0 \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner)$ (6.1.10)
6. $\mathrm{PA} \vdash \bigwedge_{i:1 \leqslant i \leqslant n}(S_i \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_i \urcorner)) \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner)$ (4, 5, προτ. λογισμός)
7. $\mathrm{PA} \vdash \bigwedge_{i:1 \leqslant i \leqslant n}(\mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_i \urcorner) \to \neg S_i) \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner)$ (6, προτ. λογισμός)

⊣

$\mathrm{PA} \vdash \bigwedge_{i:1 \leqslant i \leqslant n}(\mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_i \urcorner) \to \neg S_i) \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner)$, αλλά η PA δεν αποδεικνύει προτάσεις της μορφής $\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \to S$ και έτσι η πρόταση 6.1.13, είναι ό,τι πιο κοντινό στο θεώρημα αριθμητικής πληρότητας μπορεί να αποδείξει η PA, αφού εξάλλου από την πρόταση 2.2.17, $\mathrm{PA} \nvdash \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner)$.

Το θεώρημα της αριθμητικής πληρότητας έχει ενδιαφέρον, όχι μόνο επειδή δείχνει ότι τα θεωρήματα του GL αντιπροσωπεύουν τα θεωρήματα της PA, αλλά γιατί δίνει και πληροφορίες για το τι δεν μπορεί η PA να αποδείξει όπως δείχνει το παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 6.1.1. Το μοντέλο του σχήματος δείχνει ότι

$$\mathrm{GL} \nvdash \Box(\Box p \vee \Box\neg p) \to (\Box p \vee \Box\neg p) :$$

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 2 \models p & & 3 \models \neg p \end{tikzcd}$$

Έτσι, από το θεώρημα αριθμητικής πληρότητας υπάρχει κάποια πραγματοποίηση $*$, τέτοια ώστε $p^* = S$ και

$$\mathrm{PA} \nvdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \vee \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S \urcorner)\urcorner) \to (\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \vee \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S \urcorner).$$

δηλαδή υπάρχει πρόταση S τέτοια ώστε η πρόταση

$$\mathrm{Bew}(\ulcorner \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \vee \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S \urcorner)\urcorner) \wedge \neg(\mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \vee \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S \urcorner),$$

που δηλώνει ότι η αποκρισιμότητα της S δεν ισχύει αλλά αποδεικνύεται, είναι συνεπής με την PA.

6.2 Το θεώρημα της αριθμητικής πληρότητας για το GLS

Ορισμός 6.2.1. Μια πρόταση A λέγεται **πάντα αληθής** ανν για κάθε πραγματοποίηση $*$, η A^* είναι αληθής.

Θεώρημα 6.2.1. Αριθμητικής πληρότητας για το GLS. *Η πρόταση A είναι πάντα αληθής ανν* $\mathrm{GLS} \vdash A$.

Απόδειξη.

Η αντίστροφη φορά είναι το θεώρημα της αριθμητικής εγκυρότητας για το GLS, 2.3.10. Για την ορθή φορά:

Ορισμός 6.2.2. Για κάθε τροπική πρόταση A ορίζουμε

$$A^s = \bigwedge\{(\Box C \to C) |\ \text{η } \Box C \text{ είναι υποπρόταση της } A\} \to A.$$

Επειδή για κάθε πρόταση C, $\mathrm{GLS} \vdash (\Box C \to C)$, ισχύει η

Πρόταση 6.2.2. *Αν* $\mathrm{GL} \vdash A^s$, *τότε* $\mathrm{GLS} \vdash A$ $\dashv$

Αρκεί να δείξουμε ότι αν η πρόταση A είναι πάντα αληθής τότε $\mathrm{GL} \vdash A^s$, γιατί τότε από την πρόταση 6.2.2, $\mathrm{GLS} \vdash A$.

Έστω προς άτοπο ότι $\mathrm{GL} \nvdash A^s$. Τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές μοντέλο $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ και $w \in W$, τέτοιο ώστε $w \not\models A^s$.

Τότε μπορούμε να υποθέσουμε, όπως στην προηγούμενη παράγραφο, ότι $w = 1$, $W = \{1, \ldots, n\}$ και $1Ri$ ανν $1 < i \leqslant n$ και $\mathfrak{M}, 1 \nvDash A^s$. Ορίζουμε κατά αναλογία με την απόδειξη της αριθμητικής εγκυρότητας για το GL τα μοντέλα $\mathfrak{M}$ και $\mathfrak{M}'$ και τις προτάσεις $S_0, S_1 \ldots S_n$. Αρκεί να κατασκευάσουμε μια πραγματοποίηση $*$ από τα $\mathfrak{M}$ και w, τέτοια ώστε η A^* να είναι ψευδής. Ισχύουν επίσης οι αντίστοιχες προτάσεις. Η αντίστοιχη της πρότασης 6.1.9 ισχύει για τις υποπροτάσεις της A^s, άρα και της A που είναι υποπρόταση της A^s:

Πρόταση 6.2.3. *Για κάθε i με $1 \leqslant i \leqslant n$ και κάθε υποπρόταση B της A^s,*

$$\text{αν } \mathfrak{M}, i \vDash B, \text{ τότε } \mathrm{PA} \vdash S_i \to B^* \text{ και}$$
$$\text{αν } \mathfrak{M}, i \nvDash B, \text{ τότε } \mathrm{PA} \vdash S_i \to \neg B^*. \quad \dashv$$

Παρατηρούμε ότι αφού $\mathfrak{M}, 1 \nvDash A^s$, για κάθε υποπρόταση της A της μορφής $\Box C$ ισχύει ότι $\mathfrak{M}, 1 \vDash \Box C \to C$ και $\mathfrak{M}, 1 \nvDash A$.

Πρόταση 6.2.4. *Για κάθε υποπρόταση B της A,*

$$\text{αν } \mathfrak{M}, 1 \vDash B, \text{ τότε } \mathrm{PA} \vdash S_0 \to B^* \text{ και}$$
$$\text{αν } \mathfrak{M}, 1 \nvDash B, \text{ τότε } \mathrm{PA} \vdash S_0 \to \neg B^*.$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στην πολυπλοκότητα της B παρατηρώντας ότι $1Rj$ ανν $1R'j$ και $1Vp$ ανν $1V'p$:

- Έστω ότι $B = \bot$ Τότε $\mathfrak{M}, 1 \nvDash \bot$ και $\mathrm{PA} \vdash S_0 \to \top$ άρα $\mathrm{PA} \vdash S_0 \to \neg\bot^*$.
- Έστω ότι $B = p$, όπου p προτασιακή μεταβλητή.
  Αν $\mathfrak{M}, 1 \vDash p$, $1Vp$ άρα $0V'p$ κι έτσι
  $\mathrm{PA} \vdash S_0 \to \bigvee_{i:iV'p} S_i$, δηλαδή $\mathrm{PA} \vdash S_0 \to p^*$.
  Αν $\mathfrak{M}, 1 \nvDash p$, τότε δεν ισχύει ότι $1Vp$, άρα δεν ισχύει ότι $0V'p$. Από την πρόταση 6.1.3 $\mathrm{PA} \vdash S_0 \to \bigvee_{i:iV'p} S_i$ και άρα $\mathrm{PA} \vdash S_0 \to \neg p^*$.
- Έστω ότι $B = C \to D$.
  Αν $\mathfrak{M}, 1 \vDash C \to D$, τότε $\mathfrak{M}, 1 \nvDash C$ ή $\mathfrak{M}, 1 \vDash D$. Από την επαγωγική υπόθεση, $\mathrm{PA} \vdash S_0 \to \neg C^*$ ή $\mathrm{PA} \vdash S_0 \to D^*$ άρα $\mathrm{PA} \vdash S_0 \to (C \to D)^*$.
  Αν $\mathfrak{M}, 1 \nvDash C \to D$, τότε $\mathfrak{M}, 1 \vDash C$ και $\mathfrak{M}, 1 \nvDash D$. Από την επαγωγική υπόθεση, $\mathrm{PA} \vdash S_0 \to C^*$ και $\mathrm{PA} \vdash S_0 \to \neg D^*$, άρα $\mathrm{PA} \nvdash S_0 \to (C \to D)^*$.
- Έστω ότι $B = \Box C$.
  Αν $\mathfrak{M}, 1 \vDash \Box C$, τότε για κάθε i με $1 < i \leqslant n$ ισχύει ότι $\mathfrak{M}, i \vDash C$. Από την πρόταση 6.2.3,
  $\mathrm{PA} \vdash S_i \to C^*$. Επειδή $\mathfrak{M}, 1 \vDash \Box C$ και $\mathfrak{M}, 1 \vDash \Box C \to C$, έχουμε ότι $\mathfrak{M}, 1 \vDash C$ και άρα από την πρόταση 6.2.3,
  $\mathrm{PA} \vdash S_1 \to C^*$. Από την επαγωγική υπόθεση
  $\mathrm{PA} \vdash S_0 \to C^*$. Έτσι
  $\mathrm{PA} \vdash (S_0 \vee S_1 \vee \cdots \vee S_n) \to C^*$. Όμως από την πρόταση 6.1.5
  $\mathrm{PA} \vdash (S_0 \vee S_1 \vee \cdots \vee S_n)$ και άρα
  $\mathrm{PA} \vdash C^*$. Από τη σχέση αποδειξιμότητας (1)
  $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner C^* \urcorner)$, δηλαδή

PA $\vdash (\Box C)^*$ και άρα
PA $\vdash S_0 \to (\Box C)^*$.
Αν $\mathfrak{M}, i \nvDash \Box C$, τότε υπάρχει i $1 < i \leqslant n$, τέτοιο ώστε $\mathfrak{M}, j \nvDash C$. Από την πρόταση 6.2.3,
PA $\vdash S_i \to \neg C^*$, άρα
PA $\vdash C^* \to \neg S_i$. Από τις συνθήκες αποδειξιμότητας (i) και (ii),
PA $\vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner C^* \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_i \urcorner)$, δηλαδή
PA $\vdash (\Box C)^* \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_i \urcorner)$, έτσι
PA $\vdash \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_i \urcorner) \to \neg(\Box C)^*$. Όμως $0R'i$, άρα από την πρόταση 6.1.6,
PA $\vdash S_0 \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S_i \urcorner)$. Έτσι
PA $\vdash S_0 \to \neg(\Box C)^*$. ⊣

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη του θεωρήματος παρατηρώντας ότι επειδή $\mathfrak{M}, 1 \nvDash A$, από την πρόταση 6.2.4 έχουμε ότι PA $\vdash S_0 \to \neg A^*$, άρα η πρόταση $S_0 \to \neg A^*$ είναι αληθής και αφού, από την πρόταση 6.1.12 η S_0 είναι αληθής, η A^* είναι ψευδής.

6.3 Το θεώρημα της ομοιόμορφης αριθμητικής πληρότητας για το GL

Είδαμε ότι από το θεώρημα της αριθμητικής πληρότητας για το GL, για κάθε πρόταση A, αν για κάθε πραγματοποίηση $*$, PA $\vdash A^*$, τότε GL $\vdash A$. Οι Artemov, Avron, Boolos, Montagna και Visser απέδειξαν ότι υπάρχει *μία* πραγματοποίηση που κάνει την ίδια δουλειά για το θεώρημα της ομοιόμορφης αριθμητικής πληρότητας για το GL.

Η πρώτη προσέγγιση δε δουλεύει όπως δείχνει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 6.3.1. *Δεν υπάρχει πραγματοποίηση $*$ τέτοια ώστε για κάθε πρόταση A και κάθε πραγματοποίηση $\#$,* PA $\vdash A^* \to A^{\#}$.

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει τέτοια πραγματοποίηση $*$. Θεωρούμε τις $\#_1$ και $\#_2$ τέτοιες ώστε $p^{\#_1} = \bot$ και $p^{\#_2} = \top$. Τότε
PA $\vdash p^* \to p^{\#_1}$ και PA $\vdash (\neg p)^* \to (\neg p)^{\#_2}$, δηλαδή
PA $\vdash p^* \to \bot$ και PA $\vdash (\neg p^*) \to \bot$, και επειδή
PA $\vdash p^* \vee \neg p^*$, έχουμε ότι
PA $\vdash \bot$, που είναι άτοπο. ⊣

Όμως θα δούμε ότι υπάρχει πραγματοποίηση $*$ τέτοια ώστε για κάθε πρόταση A και κάθε πραγματοποίηση $\#$, αν PA $\vdash A^*$, τότε PA $\vdash A^{\#}$. (Το επιχείρημα της παραπάνω απόδειξης δε δουλεύει γιατί δεν ισχύει ότι PA $\vdash p^*$ ή PA $\vdash \neg p^*$.)

Δεν μπορεί να αποδειχθεί παρόμοιο αποτέλεσμα ομοιόμορφης αριθμητικής πληρότητας για το GLS, όπως δείχνει η παρακάτω

Πρόταση 6.3.2. *Δεν υπάρχει μοναδική πραγματοποίηση $*$ τέτοια ώστε για κάθε πρόταση A και κάθε πραγματοποίηση $\#$, αν η A^* είναι αληθής τότε και η $A^{\#}$ είναι αληθής.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει τέτοια πραγματοποίηση $*$. Θεωρούμε τις $\#_1$ και $\#_2$ τέτοιες ώστε $p^{\#_1} = \bot$ και $p^{\#_2} = \top$. Έχουμε ότι η p^* είναι αληθής ή η $\neg p^*$ δηλαδή η $\neg p^*$ είναι αληθής.
Αν η p^* είναι αληθής, τότε και η $p^{\#_1}$ δηλαδή η $\bot$ είναι αληθής και
αν η $\neg p^*$ είναι αληθής, τότε και η $p^{\#_1}$ δηλαδή η $\bot$ είναι αληθής,
που είναι άτοπο. $\dashv$

Θεώρημα 6.3.3. Το θεώρημα της ομοιόμορφης αριθμητικής πληρότητας για το GL. *Υπάρχει μία πραγματοποίηση $*$ τέτοια ώστε για κάθε πρόταση A, αν $\mathrm{PA} \vdash A^*$, τότε $\mathrm{GL} \vdash A$.*

Απόδειξη.

Ιδέα της απόδειξης. Για κάθε πρόταση A, τέτοια ώστε $\mathrm{GL} \nvdash A$, επιλέγουμε ένα πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές μοντέλο, παρόμοιο με αυτό της απόδειξης της αριθμητικής πληρότητας, και τα ενώνουμε όλα στη βάση τους, προσθέτοντας έναν κόσμο που βλέπει όλους τους άλλους. Στη βάση αυτού του άπειρου αλλά μεταβατικού, αναυτοπαθούς και αντίστροφα καλά ορισμένου μοντέλου δεν ισχύει καμία από τις προτάσεις που δεν αποδεικνύονται στο GL. Προχωρούμε στην κατασκευή της συνάρτησης h όπως στην απόδειξη της αριθμητικής πληρότητας, με μια διαφορά: Η h τώρα παίρνει άπειρες τιμές και έτσι πρέπει να ορίσουμε ένα κατηγόρημα $S(\boldsymbol{i})$ που θα παίζει το ρόλο των S_i.

Συγκεκριμένα, επειδή οι προτάσεις που δεν αποδεικνύονται στο GL είναι αριθμήσιμες, θεωρούμε την απαρίθμησή τους $A_1, A_2, \dots$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές μοντέλο $\mathfrak{M}_k = (W_k, R_k, V_k)$ και $w_k \in W_k$, τέτοιο ώστε $\mathfrak{M}_k, w_k \nvDash A_k$. Τότε μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι, αναδρομικά, $W_1 = \{1, \dots, n_1\}$, και για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $W_{k+1} = \{n_k + 1, \dots, n_k + n_{k+1}\}$, όπου n_k είναι το πλήθος των στοιχείων του W_k, και ότι αν η προτασιακή μεταβλητή p_n δεν περιέχεται στην A_k και $i \in W$, τότε δεν ισχύει ότι iV_kp_n.

Μπορούμε ακόμα να θεωρήσουμε, από την απόδειξη του θεωρήματος 3.2.4, ότι αν l_k είναι το πλήθος των υποπροτάσεων της A_k, $n_k \leqslant 2^l$. Ακόμα οι προτασιακές μεταβλητές που αληθεύουν σε κάποιο στοιχείο του μοντέλου $\mathfrak{M}_k$ είναι το πολύ όσες περιέχονται στην A_k. Έτσι υπάρχουν μόνο πεπερασμένες επιλογές για το μοντέλο $\mathfrak{M}_k$. Άρα υπάρχει ένας Σ_1 ψευδοόρος, $Q(x, y)$ που εκφράζει τη συνάρτηση f που αναθέτει σε κάθε $k \in \mathbb{N}$ τον κωδικό Gödel της πεντάδας $(W_k, R_k, V_k, w_k, A_k)$.

Ορισμός 6.3.1. Ορίζουμε το $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$, όπου $W' = \{0\} \cup \bigcup W_k$, $R' = \bigcup R_k \cup \{(0, k) | \ i \in \bigcup W_k\}$ και $V' = \bigcup V_k$.

Από τον ορισμό συμπεραίνουμε ότι η R' είναι μεταβατική, αναυτοπαθής και αντίστροφα καλά ορισμένη και, αφού $i \geqslant 1$, $i \in \bigcup W_k$, $W = \mathbb{N}$.

Από τον $Q(x, y)$ κατασκευάζουμε το Δ_1 τύπο $R(x, y)$ έτσι ώστε να έχει τις ιδιότητες:

(i) $\mathrm{PA} \vdash R(0, y) \leftrightarrow y \neq 0$
(ii) $\mathrm{PA} \vdash R(\boldsymbol{i}, y) \leftrightarrow \bigvee_{j:iR'j} y = \boldsymbol{j}$, αν $i \geqslant 1$

(iii) $\mathrm{PA} \vdash \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,y))$

(iv) $\mathrm{PA} \vdash \forall x(\forall y(R(x,y) \to F(y)) \to F(x)) \to \forall x F(x)$, για κάθε τύπο $F(x)$

Η σχέσεις (i) και (ii) τυποποιούν τον ορισμό της R', ενώ οι (iii) και (iv) τυποποιούν ότι η R' είναι μεταβατική και αντίστροφα καλά ορισμένη (η σχέση (iv)) εκφράζει την επαγωγή στην αντίστροφη της R', δηλαδή την επαγωγή στην τάξη των κόσμων.

Με τη βοήθεια του $Q(x,y)$ μπορούμε να ορίσουμε επίσης τον Δ_1 τύπο $V(x,y)$, που εκφράζει τη σχέση $\{(i,n) | \; iV'p_n\}$.

Έστω ο Σ_1 ψευδοόρος $\mathrm{ex}(x_1,x_2)$ που εκφράζει τη συνάρτηση που αναθέτει σε κάθε ζεύγος (m,r) το j, αν r είναι αριθμός Gödel μιας απόδειξης της πρότασης $\neg\exists c \forall a(a \geqslant c \to \exists b(b = \boldsymbol{j} \wedge F_m))$, και το 0, αλλιώς.

Τότε αφού ο $\mathrm{notlim}(x_1,x_2)$ εκφράζει τη συνάρτηση που αναθέτει σε κάθε ζεύγος (m,j) τον αριθμό Gödel της πρότασης $\neg\exists c \forall a(a \geqslant c \to \exists b(b = \boldsymbol{j} \wedge F_m))$, έχουμε ότι

(v) $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{ex}(x_1,x_2) \neq 0 \to \mathrm{Pf}(x_2, \mathrm{notlim}(x_1, \mathrm{ex}(x_1,x_2)))$

Από το γενικευμένο λήμμα διαγωνιοποίησης 2.2.9, όπως στην απόδειξη της αριθμητικής πληρότητας, υπάρχει ένας τύπος $G(a,b)$ με αριθμό Gödel g τέτοιος ώστε

$$\mathrm{PA} \vdash G(a,b) \leftrightarrow B(\ulcorner H(a,b) \urcorner, a, b).$$

Πρόταση 6.3.4. $\mathrm{PA} \vdash G(a,b) \leftrightarrow$

$$\exists s \Big\{ \mathrm{FinSeq}(s) \wedge \mathrm{lh(s)} = a + \mathbf{1} \wedge s_0 = \mathbf{0} \wedge s_a = b \wedge$$
$$\forall x < a \Big\{ \Big[R(s_x, \mathrm{ex}(\boldsymbol{g}, x)) \to s_{x+1} = \mathrm{ex}(\boldsymbol{g}, x) \Big] \wedge$$
$$\Big[\neg R(s_x, \mathrm{ex}(\boldsymbol{g}, x)) \to s_{x+1} = s_x \Big] \Big\} \Big\}.$$

Απόδειξη. Από το γενικευμένο λήμμα διαγωνιοποίησης 2.2.9, όπως στην απόδειξη της αριθμητικής πληρότητας. ⊣

Αυτή είναι η αντίστοιχη πρόταση της 6.1.2. Έχουμε καταφέρει δηλαδή να εντάξουμε στην PA την R' και έτσι να μιλάμε για άπειρα μοντέλα. Όπως και πριν η $G(a,b)$ είναι Σ_1, αφού η $R(x,y)$ είναι Δ_1 και η $\mathrm{ex}(x_1.x_2)$ είναι Σ_1 και έτσι εκφράζει μια συνάρτηση h.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε το κατηγόρημα $S(x)$ που γενικεύει τις προτάσεις του Solovay, δηλαδή η $S(\boldsymbol{j})$ εκφράζει ότι η h έχει όριο το j:

$$S(x) = \exists c \forall a (a \geqslant c \to \exists b (b = x \wedge G(a,b))).$$

Η h, όπως πριν, έχει την ιδιότητα:

- $h(0) = 0$
- αν $h(m) = i$, τότε

– $h(m+1) = j$, αν υπάρχει j με $iR'j$ τέτοιο ώστε ο m να είναι αριθμός Gödel μιας απόδειξης της πρότασης $\neg S(\boldsymbol{j})$ ή
– $h(m+1) = i$, αλλιώς.

Οι παρακάτω προτάσεις 6.3.5 ως 6.3.10 είναι οι αντίστοιχες των 6.1.3 ως 6.1.8.

Πρόταση 6.3.5. $\mathrm{PA} \vdash S(x) \wedge S(y) \to x = y$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό του $S(x)$ επειδή $\exists! b G(a,b)$. ⊣

Πρόταση 6.3.6. $\mathrm{PA} \vdash G(a,x) \to S(x) \vee \exists y(R(x,y) \wedge S(y))$.

Απόδειξη. Έστω ότι $F(x)$ είναι ο τύπος $G(a,x) \to S(x) \vee \exists y(R(x,y) \wedge S(y))$.
Θέλουμε να δείξουμε ότι $\mathrm{PA} \vdash F(x)$.
Από τη σχέση (iv) αρκεί να δείξουμε ότι
$\mathrm{PA} \vdash \forall y(R(x,y) \to F(y)) \to F(x)$, δηλαδή αρκεί
$\mathrm{PA} \vdash \forall y(R(x,y) \to F(y)) \wedge G(a,x) \to S(x) \vee \exists(R(x,y) \wedge S(y))$.
Με επαγωγή στο d από την πρόταση 6.3.4 και τη σχέση (iii)
$\mathrm{PA} \vdash G(a,x) \to \forall d(d \geqslant a \to G(d,x) \vee \exists y(R(x,y) \wedge G(d,y))$. (1)
Από τον ορισμό της $F(x)$
$\mathrm{PA} \vdash \forall y(R(x,y) \to F(y)) \to \forall y(R(x,y) \wedge G(a,y) \to S(y) \vee \exists z(R(y,z) \wedge S(z)))$.
επειδή το a εμφανίζεται μόνο στον $G(a,y)$
$\mathrm{PA} \vdash \forall y(R(x,y) \to F(y)) \to \forall a(R(x,y) \wedge G(a,y) \to S(y) \vee \exists z(R(y,z) \wedge S(z)))$.
Από την τελευταία σχέση και τη σχέση (1),
$\mathrm{PA} \vdash G(a,x) \wedge \forall y(R(x,y) \to F(y)) \to$
$\forall d(d \geqslant a \to G(d,x) \vee \exists y(R(x,y) \wedge (S(y) \vee \exists z(R(y,z) \wedge S(z)))$,
άρα από τον ορισμό της $S(x)$
$\mathrm{PA} \vdash G(a,x) \wedge \forall y(R(x,y) \to F(y)) \to$
$S(x) \vee \exists y(R(x,y) \wedge (S(y) \vee \exists z(R(y,z) \wedge S(z)))$ και από τη μεταβατικότητα
$\mathrm{PA} \vdash G(a,x) \wedge \forall y(R(x,y) \to F(y)) \to S(x) \vee \exists y(R(x,y) \wedge S(y))$, που θέλαμε να δείξουμε. ⊣

Πρόταση 6.3.7. $\mathrm{PA} \vdash \exists x S(x)$.

Απόδειξη. Από την πρόταση 6.3.6 έχουμε ότι
$\mathrm{PA} \vdash G(a,0) \to S(0) \vee \exists y(R(0,y) \wedge S(y))$. Όμως από την πρόταση 6.3.4,
$\mathrm{PA} \vdash G(0,0)$ και έτσι
$\mathrm{PA} \vdash \exists x S(x)$ ⊣

Πρόταση 6.3.8. *Αν* $iR'j$*, τότε* $\mathrm{PA} \vdash S(\boldsymbol{i}) \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S(\boldsymbol{j}) \urcorner)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι όμοια με αυτήν της πρότασης 6.1.6. ⊣

Πρόταση 6.3.9. *Αν* $i \geqslant 1$*, τότε* $\mathrm{PA} \vdash S(\boldsymbol{i}) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S(\boldsymbol{i}) \urcorner)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι όμοια με αυτήν της πρότασης 6.1.7. Για την τυποποίηση πρέπει εδώ να προσέξουμε ότι: αν $G(a,\boldsymbol{i})$ με $a > 0$, υπάρχουν s, c, τέτοια ώστε $\mathrm{lh}(s) = a+1$, $c < a$, $S_c \neq s_{c+1} = s_a = \boldsymbol{i} = \mathrm{ex}(\boldsymbol{g}, c)$ και $R(s_c, \mathrm{ex}(\boldsymbol{g}, c))$. Άρα αφού το 0 δεν είναι προσβάσιμο από κανέναν κόσμο, $\mathrm{ex}(\boldsymbol{g}, c) \neq \mathbf{0}$. Έτσι από τη σχέση (v), $\mathrm{Pf}(c, \mathrm{notlim}(\boldsymbol{g}, \mathrm{ex}(\boldsymbol{g}, c)))$, δηλαδή $\mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S(\boldsymbol{i}) \urcorner)$. ⊣

Πρόταση 6.3.10. *Αν* $i \geqslant 1$, *τότε* $\mathrm{PA} \vdash S(\boldsymbol{i}) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \bigvee_{j:iR'j} S(\boldsymbol{j})\urcorner)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη μοιάζει με αυτήν της πρότασης 6.1.8, διαφοροποιούνται όμως τα βήματα 3 ως 6.

1. $\mathrm{PA} \vdash S(i) \to \exists a G(a, \boldsymbol{i})$ (από τον ορισμό της $S(\boldsymbol{i})$)
2. $\mathrm{PA} \vdash \exists a G(a, \boldsymbol{i}) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \exists a G(a, \boldsymbol{i})\urcorner)$ (πρόταση 2.2.7, η $\exists a G(a, \boldsymbol{i})$ είναι Σ_1)
3. $\mathrm{PA} \vdash \exists a G(a, \boldsymbol{i}) \to (S(\boldsymbol{i}) \vee \exists y(R(\boldsymbol{i}, y) \wedge S(y)))$ (πρόταση 6.3.6, η a δεν εμφανίζεται στο $S(\boldsymbol{i}) \vee \bigvee_{j:iR'j} S(\boldsymbol{j})$)
4. $\mathrm{PA} \vdash R(\boldsymbol{i}, y) \leftrightarrow \bigvee_{j:iR'j} y = \boldsymbol{j}$ (σχέση(ii))
5. $\mathrm{PA} \vdash \exists a G(a, \boldsymbol{i}) \to (S(\boldsymbol{i}) \vee \exists y((\bigvee_{j:iR'j} y = \boldsymbol{j}) \wedge S(y))$ (3, 4, προτ.λογισμός)
6. $\mathrm{PA} \vdash \exists a G(a, \boldsymbol{i}) \to (S(\boldsymbol{i}) \vee \bigvee_{j:iR'j} S(\boldsymbol{j}))$ (5, προτ.λογισμός)
7. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \exists a G(a, \boldsymbol{i})\urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner S(\boldsymbol{i}) \vee \bigvee_{j:iR'j} S(\boldsymbol{j})\urcorner)$(6, συνθήκες αποδειξιμότητας (i), (ii))
8. $\mathrm{PA} \vdash S(\boldsymbol{i}) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner S(\boldsymbol{i}) \vee \bigvee_{j:iR'j} S(\boldsymbol{j})\urcorner)$ (1, 2, 7, προτ. λογισμός)
9. $\mathrm{PA} \vdash S(\boldsymbol{i}) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \neg S(\boldsymbol{i})\urcorner)$ (πρόταση 6.3.9, $i \geqslant 1$)
10. $\mathrm{PA} \vdash S(\boldsymbol{i}) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \bigvee_{j:iR'j} S(\boldsymbol{j})\urcorner)$ (8, 9, προτ. λογισμός)

⊣

Ορισμός 6.3.2. Ορίζουμε την πραγματοποίηση $*$ έτσι ώστε για κάθε προτασιακή μεταβλητή p,

$$p_n^* = \exists x(S(x) \wedge V(x, \boldsymbol{n})).$$

Πρόταση 6.3.11. *Για κάθε* $k \in \mathbb{N}$, *κάθε* $i \in W_k$ *και κάθε υποπρόταση* B *της* A_k,

$$\text{αν } \mathfrak{M}_k, i \vDash B, \text{ τότε } \mathrm{PA} \vdash S(\boldsymbol{i}) \to B^* \text{ και}$$
$$\text{αν } \mathfrak{M}_k, i \nvDash B, \text{ τότε } \mathrm{PA} \vdash S(\boldsymbol{i}) \to \neg B^*.$$

Απόδειξη. Όμοια με την απόδειξη της πρότασης 6.1.9 παρατηρώντας όμως ότι επειδή $i \in W_k$, iR_kj ανν $iR'j$, αν iR_kj, τότε $j \in W_k$. Παρατηρούμε ακόμα ότι αν iV_kp_n, τότε $iV'p_n$ και άρα $\mathrm{PA} \vdash V(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n})$, ενώ αν δεν ισχύει ότι iV_kp_n, τότε δεν ισχύει ότι $iV'p_n$ και άρα $\mathrm{PA} \vdash \neg V(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n})$. ⊣

Πρόταση 6.3.12. $\mathrm{PA} \vdash S(\boldsymbol{0}) \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner)$.

Απόδειξη. Όμοια με την απόδειξη της πρότασης 6.1.10, χρησιμοποιώντας τις προτάσεις 6.3.11, 6.3.8 και ότι $0R'i$. ⊣

Πρόταση 6.3.13. *Αν* $i \geqslant 1$, *η πρόταση* S_i *είναι ψευδής.*

Απόδειξη. Όμοια με την απόδειξη της πρότασης 6.1.11, χρησιμοποιώντας την πρόταση 6.3.9. ⊣

Πρόταση 6.3.14. *Η πρόταση* S_0 *είναι αληθής.*

Αποδειξη. Όμοια με την απόδειξη της πρότασης 6.1.12, χρησιμοποιώντας τις προτάσεις 6.3.7 και 6.3.13. $\dashv$

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη του θεωρήματος υποθέτοντας ότι GL $\nvdash A$. Τότε για κάποιο k, $A = A_k$ και άρα $\mathfrak{M}, w_k \nvDash A_k$. Αν $w_k = i$, από την πρόταση 6.1.10 έχουμε ότι PA $\vdash S_0 \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner)$, άρα η πρόταση $S_0 \to \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner)$ είναι αληθής και αφού, από την πρόταση 6.1.12 η S_0 είναι αληθής, η $\mathrm{Bew}(\ulcorner A^* \urcorner)$ είναι ψευδής, άρα PA $\nvdash A^*$.

6.4 Η λογική αποδειξιμότητας των Σ_1 προτάσεων

Είδαμε στην πρόταση 2.2.7 ότι για κάθε Σ_1 πρόταση S, PA $\vdash S \to \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$. Έτσι αν για καποια πραγματοποίηση $*$, $p^* = S$, PA $\vdash (p \to \Box p)^*$, μια ιδιότητα που δεν έχουν όλες οι προτάσεις. Σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε για το σύνολο των Σ_1 προτάσεων αντίστοιχα θεωρήματα, που απέδειξε ο Albert Visser, με αυτά της εγκυρότητας και πληρότητας των GL και GLS.

Ορισμός 6.4.1. Μια πραγματοποίηση $*$ λέγεται Σ_1 πραγματοποίηση, ανν για κάθε προτασιακή μεταβλητή p, η πρόταση p^* είναι μια Σ_1 πρόταση.

Στη συνέχεια ορίζουμε δύο νέα συστήματα με σκοπό να δώσουμε χαρακτηρισμούς για τις τροπικές προτάσεις για τις οποίες για κάθε Σ_1 πραγματοποίηση $*$, PA $\vdash A^*$, και τις τροπικές προτάσεις για τις οποίες για κάθε Σ_1 πραγματοποίηση $*$, η A^* είναι αληθής.

Ορισμός 6.4.2. GLV λέγεται το σύστημα τροπικής λογικής που έχει ως αξιώματα όλα τα αξιώματα του GL και όλες τις προτάσεις $p \to \Box p$, όπου p είναι προτασιακή μεταβλητή και αποδεικτικούς κανόνες τον modus ponens και την γενίκευση.

Πρόταση 6.4.1. *Το* GLV *δεν είναι κλειστό ως προς τον κανόνα της αντικατάστασης.*

Αποδειξη. Η $p \to \Box p$ είναι αξίωμα και άρα θεώρημα του GLV, όμως η $\neg p \to \Box\neg p$, που προκύπτει με αντικατάσταση της p από την $\neg p$, δεν είναι θεώρημα του GLV, όπως δείχνει το μοντέλο του σχήματος:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 1 \vDash \neg q \wedge \neg\Box\neg q \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
2 \vDash p & & 3 \vDash \neg p
\end{tikzcd}$$

$\dashv$

Πόρισμα 6.4.2. *Το* GLV *δεν είναι κανονικό σύστημα τροπικής λογικής.* $\dashv$

Ορισμός 6.4.3. GLSV λέγεται το σύστημα τροπικής λογικής που έχει ως αξιώματα όλα τα θεωρήματα του GLV και όλες τις προτάσεις τις μορφής $\Box A \to A$ και μοναδικό αποδεικτικό κανόνα τον modus ponens.

Ορισμός 6.4.4. Ένα μοντέλο (και όχι πλαίσιο όπως ορίζαμε ως τώρα) $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ θα λέγεται **κατάλληλο** για το GLV ανν είναι πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές και για τη V ισχύει η συνθήκη: για κάθε $w, x \in W$ και κάθε προτασιακή μεταβλητή p,

$$\text{αν } wRx \text{ και } wVp, \text{ τότε } xVp.$$

Θεώρημα 6.4.3. (Albert Visser) *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*
(i) GLV $\vdash A$.
(ii) Η A είναι έγκυρη σε όλα τα κατάλληλα μοντέλα.
(iii) Για κάθε Σ_1 πραγματοποίηση $*$, PA $\vdash A^*$.

Απόδειξη. (i)⇒(iii) Με επαγωγή στο ύψος της απόδειξης της A.

- Αν η πρόταση A είναι αξίωμα του GL. Από το θεώρημα της αριθμητικής πληρότητας, για κάθε πραγματοποίηση $*$, άρα και για κάθε Σ_1 πραγματοποίηση $*$, PA $\vdash A^*$.
- Αν η πρόταση A είναι της μορφής $p \to \Box p$ για κάποια προτασιακή μεταβλητή p. Έστω μια Σ_1 πραγματοποίηση $*$. Τότε υπάρχει μια Σ_1 πρόταση S τέτοια ώστε $p^* = S$. Έτσι PA $\vdash S \to \mathrm{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$, δηλαδή PA $\vdash (p \to \Box p)^*$, άρα PA $\vdash A^*$
- Αν η A προκύπτει από την $B \to A$ και την B με τον κανόνα modus ponens. Έστω μια Σ_1 πραγματοποίηση $*$. Από την επαγωγική υπόθεση PA $\vdash (B \to A)^*$, δηλαδή PA $\vdash B^* \to A^*$, και PA $\vdash B^*$, άρα PA $\vdash A^*$.
- Αν η A προκύπτει από την B με τον κανόνα της γενίκευσης, δηλαδή $A = \Box B$. Έστω μια Σ_1 πραγματοποίηση $*$. Από την επαγωγική υπόθεση PA $\vdash B^*$ και από τη συνθήκη αποδειξιμότητας (i) PA $\vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner B \urcorner)^*$, δηλαδή PA $\vdash (\Box B)^*$, άρα PA $\vdash A^*$

(ii)⇒(i) Έστω ότι η A είναι έγκυρη σε όλα τα κατάλληλα μοντέλα και έστω προς άτοπο ότι GLV $\nvdash A$. Ορίζουμε τα σύνολα προτάσεων:
$\mathscr{A} = \{B |$ B είναι υποπρόταση της $A\}$, $\mathscr{B} = \mathscr{A} \cup \{\Box p |\ p \in \mathscr{A}\}$ και
$\mathscr{C} = \mathscr{B} \cup \{\neg B |\ B \in \mathscr{B}\}$.
Έστω W το σύνολο των μεγιστικών GLV-συνεπών υποσυνόλων του $\mathscr{C}$.
Όπως και στην απόδειξη της πληρότητας για το GL, ορίζουμε
για κάθε $w \in W$ και κάθε προτασιακή μεταβλητή p, wVp ανν η p εμφανίζεται στην A και $p \in w$
και wRx ανν για κάθε $\Box B \in w$, ισχύει ότι $B \in x$, ότι $\Box B \in x$ και ότι υπάρχει $\Box E \in x$ τέτοιο ώστε $\neg \Box E \in w$.
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε τη σχέση (1) και το λήμμα 3.2.3 της παραγράφου 3.2.1. Γενικά η απόδειξη είναι ίδια με αυτήν της πληρότητας για το GL, με τη διαφορά ότι πρέπει να δείξουμε ότι το $\mathfrak{M}$ είναι κατάλληλο για το GLV. Το $\mathfrak{M}$ είναι πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές. Έστω $w, x \in W$, wRx και wVp. Για να δείξουμε τη συνθήκη για το V θα δείξουμε ότι xVp. Επειδή wVp, $w \vDash p$, άρα $p \in \mathscr{A}$ και έτσι $p \in w$ και $\Box p \in \mathscr{B}$. Όμως το w είναι ένα μεγιστικό GLV-συνεπές

σύνολο, κι έτσι, αφού $w \vDash p$ και GLV $\vdash p \to \Box p$, ισχύει ότι $\Box p \in w$. Όμως ισχύει ότι wRx, $p \in x$ και $x \vDash p$, άρα xVp.

(iii)⇒(ii) Η απόδειξη είναι ίδια με αυτήν της αριθμητικής πληρότητας για το GL, πρέπει όμως επιπλέον να δείξουμε ότι η πρόταση $p^* = \bigvee_{iV'p} S_i$ είναι Σ_1.
Έστω $S = \bigvee_{iV'p}(\exists a H(a, \boldsymbol{i}))$. Η S είναι Σ_1 επειδή η $H(a, \boldsymbol{i})$ είναι Σ_1. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι PA $\vdash S \leftrightarrow p^*$.

Ισχύει ότι PA $\vdash S_i \to H(a, \boldsymbol{i})$ άρα PA $\vdash p^* \to S$ και μένει να δείξουμε ότι PA $\vdash S \to p^*$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Αν $1Vp$. Τότε $0V'p$ και από τη συνθήκη για τη V για κάθε i με $1 \leqslant i \leqslant n$, iVp. Έτσι για κάθε i με $0 \leqslant i \leqslant n$, $iV'p$ και άρα $p^* = S_0 \vee S_1 \vee \cdots \vee S_n$. Όμως από την πρόταση 6.1.5, PA $\vdash S_0 \vee S_1 \vee \cdots \vee S_n$, δηλαδή PA $\vdash p^*$ και άρα PA $\vdash S \to p^*$.

Αν δεν ισχύει ότι $1Vp$. Τότε δεν ισχύει η $0V'p$ ούτε η $1V'p$. Έτσι
$S = \bigvee_{i>1:iV'p} \exists a H(a, \boldsymbol{i})$ και $p^* = \bigvee_{i>1:iV'p} S_i$.
Αν iVp και $1 < i \leqslant n$, τότε από την πρόταση 6.1.4,

PA $\vdash H(a, \boldsymbol{i}) \to (S_i \vee \bigvee_{j>1:iR'j} S_j)$, άρα

PA $\vdash \exists a H(a, \boldsymbol{i}) \to (S_i \vee \bigvee_{j>1:iR'j} S_j)$. Όμως αν $iR'j$ τότε iRj και $1 < j$ και από την συνθήκη για την V, jVp. Έτσι

PA $\vdash \exists a H(a, \boldsymbol{i}) \to (S_i \vee \bigvee_{j>1:jVp} S_j)$ και άρα

PA $\vdash \bigvee_{i>1:iVp} \exists a H(a, \boldsymbol{i}) \to \bigvee_{i>1:iVp}(S_i \vee \bigvee_{j>1:jVp} S_j)$, δηλαδή

PA $\vdash \bigvee_{i>1:iVp} \exists a H(a, \boldsymbol{i}) \to \bigvee_{i>1:iVp}(S_i \vee \bigvee_{j>1:jVp} S_j)$

PA $\vdash S \to \bigvee_{i>1:iVp} S_i$ και τελικά

PA $\vdash S \to p^*$. ⊣

Επειδή για κάθε πρόταση C, GLS $\vdash (\Box C \to C)$, ισχύει η αντίστοιχή της πρότασης 6.2.2.

Πρόταση 6.4.4. *Αν* GLV $\vdash A^s$, *τότε* GLSV $\vdash A$ ⊣

Θεώρημα 6.4.5. GLSV $\vdash A$ *ανν για κάθε* Σ_1 *πραγματοποίηση* $*$, *η* A^* *είναι αληθής.*

Απόδειξη. Με επαγωγή στο ύψος της απόδειξης της A, δείχνουμε αρχικά ότι αν GLSV $\vdash A$, τότε για κάθε Σ_1 πραγματοποίηση $*$, η A^* είναι αληθής.

- Αν η πρόταση A είναι θεώρημα του GLV. Τότε από το θεώρημα 6.4.3, για κάθε Σ_1 πραγματοποίηση $*$, PA $\vdash A^*$, άρα η A^* είναι αληθής.
- Αν η πρόταση A είναι της μορφής $\Box B \to B$. Έστω μια Σ_1 πραγματοποίηση $*$. Τότε από τη συνθήκη αποδειξιμότητας (v), PA $\vdash B^* \to \mathrm{Bew}(\ulcorner B \urcorner)^*$, δηλαδή PA $\vdash (\Box B \to B)^*$ και άρα η πρόταση $(\Box B \to B)^*$ είναι αληθής.
- Αν η A προκύπτει από την $B \to A$ και την B με τον κανόνα modus ponens. Έστω μια Σ_1 πραγματοποίηση $*$. Από την επαγωγική υπόθεση η πρόταση $(B \to A)^*$, δηλαδή η $B^* \to A^*$ είναι αληθής, όπως και η πρόταση B^*. Έτσι η A^* είναι επίσης αληθής.

Για την αντίστροφη φορά υποθέτουμε ότι GLSV $\nvdash A$. Από την πρόταση 6.4.4, GLV $\nvdash A^s$. Τότε για κάποιο μοντέλο $\mathfrak{M}$, κατάλληλο για το GLV, και κάποια πραγματοποίηση $*$ που κατασκευάζουμε από το $\mathfrak{M}$ όπως στην απόδειξη της αριθμητικής πληρότητας του GLS, η A^* είναι ψευδής. Το ότι η $*$ είναι Σ_1 αποδεικνύεται όπως στο θεώρημα 6.4.3. $\dashv$

7. Η μέθοδος tableaux

Η μέθοδος των tableaux (ή των δέντρων ικανοποιησιμότητας) μπορεί να γενικευτεί για να αποφασίζει αν μια πρόταση A είναι ή όχι θεώρημα του GL. Έχουμε ήδη δει ότι το GL είναι αποκρίσιμο στο θεώρημα 3.2.4, αλλά η μέθοδος απαιτούσε να διατρέξουμε 2^{2^k} μοντέλα, όπου k το πλήθος των υποπροτάσεων της A, που είναι πολύ χρονοβόρο. Εκτός από το να αποφασίζει αν μια πρόταση αποδεικνύεται ή όχι στο GL, η μέθοδος των tableaux μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε ένα κατάλληλο για το GL μοντέλο $\mathfrak{M}$, τέτοιο ώστε $\mathfrak{M} \nvDash A$. Έτσι επιτυγχάνεται ακόμα μια απόδειξη του θεωρήματος της πληρότητας για το GL.

7.1 Περιγραφή της μεθόδου tableaux

Όπως στον κατηγορηματικό λογισμό, για να ελέγξουμε αν $\mathrm{GL} \vdash A$ κατασκευάζουμε ένα tableau με ρίζα το $\neg A$. Στην επόμενη παράγραφο θα δείξουμε ότι αν αυτό κλείσει, τότε $\mathrm{GL} \vdash A$, αν όχι τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές μοντέλο $\mathfrak{M}$, τέτοιο ώστε $\mathfrak{M} \nvDash A$. Η μέθοδος γενικεύτηκε για κάποια συστήματα της τροπικής λογικής από τον Kripke.

Ορισμός 7.1.1. **Tableau** με ρίζα $\mathscr{A}$ λέγεται ένα δυαδικό δέντρο τέτοιο ώστε κάθε κόμβος είναι τροπική πρόταση ή παράθυρο που περιέχει ένα tableau και η ρίζα του είναι το σύνολο προτάσεων $\mathscr{A}$ (Αν $\mathscr{A} = \{A\}$, θα λέμε ότι η ρίζα είναι το A). **Κλάδο** λέμε ένα μεγιστικό μονοπάτι του με αρχή τη ρίζα. Κάθε κόμβος περιέχει ένα σύνολο προτάσεων ή ένα **παράθυρο**. Ο **βαθμός** ενός tableau είναι ο ελάχιστος αριθμός που είναι μεγαλύτερος από όλους τους βαθμούς των tableaux στα παράθυρα του δέντρου. Με ταυτόχρονη αναδρομή ορίζουμε ότι:

- Ένα tableau βαθμού n λέγεται **κλειστό** ανν κάθε κλάδος του είναι κλειστός, αλλιώς λέγεται **ανοιχτός** και
- ένας κλάδος ενός tableau βαθμού n λέγεται **κλειστός** ανν σε αυτόν εμφανίζεται ο $\perp$ ή μια πρόταση και η αντίθετή της ή ένα παράθυρο με κλειστό tableau, αλλιώς λέγεται **ανοιχτός**.

Ο ορισμός δεν είναι κυκλικός γιατί αν ένας κλάδος είναι κλειστός, είναι πεπερασμένος και σε αυτόν εμφανίζονται πεπερασμένα το πλήθος φωλιασμένα παράθυρα που κάθε ένα περιέχει ένα πεπερασμένο tableau. Έτσι η επαγωγή αρχίζει από το tableau του παράθυρου στο οποίο δεν εμφανίζεται άλλο παράθυρο.

Παρατηρούμε ότι μια εμφάνιση της A στο δέντρο ενός παράθυρου δε σημαίνει ότι εμφανίζεται στον κλάδο του παράθυρου.

Κάθε κόμβος προκύπτει με εφαρμογή ενός από τους παρακάτω κανόνες σε κάποια πρόταση, που δεν έχει τσεκαριστεί, του κλάδου στον οποίο ανήκει ο κόμβος αυτός. Όταν χρησιμοποιούμε σε μια πρόταση κάποιον από τους κανόνες σε έναν κλάδο, τότε την τσεκάρουμε με ✓και δεν την ξαναχρησιμοποιούμε σε αυτόν τον κλάδο. Προσοχή χρειάζεται το γεγονός ότι το τσεκάρισμα εξαρτάται από τον κλάδο. Η πρόταση που τσεκαρίστηκε σε έναν κλάδο είναι πιθανώς μη τσεκαρισμένη για τους υπόλοιπους.

Προτασιακοί κανόνες:

$$\begin{array}{cccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\checkmark\neg\neg A & \checkmark A \wedge B & \checkmark A \vee B & \checkmark A \rightarrow B & \checkmark A \leftrightarrow B & \checkmark \Diamond A \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
| & | & \swarrow\ \searrow & \swarrow\ \searrow & \swarrow\ \searrow & | \\
\mathrm{A} & \mathrm{A} & \mathrm{A} \quad \mathrm{B} & \neg A \quad \mathrm{B} & \mathrm{A} \quad \neg A & \neg\Box\neg A \\
 & \mathrm{B} & & & \mathrm{B} \quad \neg B &
\end{array}$$

Οι κανόνες που εφαρμόζονται σε μια πρόταση που αρχίζει με ¬ λέγονται αρνητικοί, αλλιώς λέγονται θετικοί.

$$\begin{array}{ccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\checkmark\neg(A \wedge B) & \checkmark\neg(A \vee B) & \checkmark\neg(A \rightarrow B) & \checkmark\neg(A \leftrightarrow B) & \checkmark\neg\Diamond A \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\swarrow\ \searrow & | & | & \swarrow\ \searrow & | \\
\neg A \quad \neg B & \neg A & \mathrm{A} & \mathrm{A} \quad \neg A & \Box\neg A \\
 & \neg B & \neg B & \neg B \quad \mathrm{B} &
\end{array}$$

Τροπικός κανόνας:

$$\begin{array}{c}
\vdots \\
\checkmark\neg\Box C \\
\vdots \\
| \\
\boxed{\begin{array}{c} \neg C \\ \Box C \\ D_1 \\ \Box D_1 \\ \vdots \\ D_n \\ \Box D_n \end{array}}
\end{array}$$

Οι προτάσεις $D_1 \ldots D_n$ που εμφανίζονται στο παράθυρο του τροπικού κανόνα είναι όλες οι προτάσεις τέτοιες ώστε οι $\Box D_1 \ldots \Box D_n$ εμφανίζονται στον κλάδο του παραθύρου.

Η διαδικασία απαιτεί να εξαντλήσουμε όλες τις δυνατότητες εφαρμογής κάποιου προτασιακού κανόνα πριν εφαρμόσουμε τον τροπικό και να εξαντλήσουμε όλες τις δυνατότητες εφαρμογής του τροπικού κανόνα πριν εφαρμόσουμε κάποιον προτασιακό. Έτσι περνάμε διαδοχικά από προτασιακούς και τροπικούς κύκλους. Κατά τα άλλα οι κανόνες μπορούν να εφαρμόζονται πρώτα στην πρόταση που βρίσκεται πιο ψηλά στο δέντρο, αλλά και με οποιαδήποτε άλλη σειρά.

Πρόταση 7.1.1. $\mathrm{GL} \vdash \neg\Box C \leftrightarrow \Diamond(\Box C \wedge \neg C)$.

Απόδειξη. $\mathrm{GL} \vdash \Box(\Box C \to C) \leftrightarrow \Box C$ από την πρόταση 1.3.14. Έτσι
$\mathrm{GL} \vdash \neg\Box C \leftrightarrow \neg\Box(\Box C \to C), \leftrightarrow \Diamond\neg(\Box C \to C), \leftrightarrow \Diamond(\Box C \wedge \neg C)$. ⊣

Έτσι όταν χρησιμοποιούμε τον κανόνα του Löb στην πρόταση $\neg\Box C$, ανοίγουμε ένα παράθυρο σε έναν κόσμο προσβάσιμο από τον κόσμο που ισχύει η $\neg\Box C$ και είναι ελάχιστης τάξης ώστε να ισχύει η $\neg C$. Η παραπάνω πρόταση δικαιολογεί και το ότι τσεκάρουμε την $\neg\Box C$ μετά την εφαρμογή του κανόνα. Αν στον κλάδο της $\neg\Box C$ εμφανίζονται οι προτάσεις $\Box D_1, \ldots D_n$, θέλουμε στο παράθυρο που αντιπροσωπεύει έναν προσβάσιμο κόσμο να ισχύουν οι D και $\Box D$, όπως δηλώνει ο κανόνας. Αυτό τυπικά δικαιολογείται από την επόμενη πρόταση:

Πρόταση 7.1.2.
$\mathrm{GL} \vdash \neg\Box C \wedge \Box D_1 \wedge \cdots \wedge \Box D_n \to \Diamond(\neg C \wedge \Box C \wedge D_1 \wedge \Box D_1 \wedge \cdots \wedge D_n \wedge \Box D_n)$.

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι:
$\mathrm{GL} \vdash \neg\Box C \wedge \Box D \to \Diamond(\Box C \wedge \neg C) \wedge \Box D$. Επειδή για κάθε i με $i \leqslant i \leqslant n$,
$\mathrm{GL} \vdash \Box D_i \to \Box\Box D_i$,
$\mathrm{GL} \vdash \neg\Box C \wedge \Box D_1 \wedge \cdots \wedge \Box D_n \to \Diamond(\Box C \wedge \neg C) \wedge \Box D_1 \wedge \Box\Box D_1 \wedge \cdots \wedge \Box D_n \wedge \Box\Box D_n$,
και από την πρόταση 1.3.12,
$\mathrm{GL} \vdash \neg\Box C \wedge \Box D \to \Diamond(\Box C \wedge \neg C \wedge D_1 \wedge \Box D_1 \cdots \wedge D_n \wedge \Box D_n)$. ⊣

Στη συνέχεια θα δούμε κάποια παραδείγματα της μεθόδου tableaux. Όταν ένας κόμβος έχει μόνο έναν απόγονο, θα παραλείπουμε για συντομία την ακμή που τους ενώνει.

Παράδειγμα 7.1.1.

$\mathrm{GL} \vdash \Box(\Box p \to p) \to \Box p$?
✓$\neg(\Box(\Box p \to p) \to \Box p)$
$\Box(\Box p \to p)$
✓$\neg\Box p$

$\neg p$
$\Box p$
✓$\Box p \to p$
$\Box(\Box p \to p)$

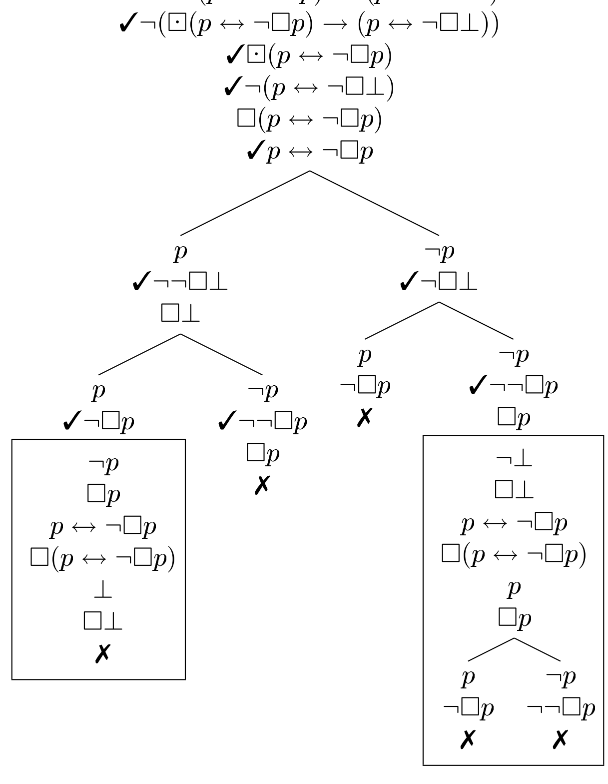
$\neg\Box p$	p
✗	✗

Για να επαληθεύσουμε το αξίωμα του Löb, δηλαδή ότι $\mathrm{GL} \vdash \Box(\Box p \to p) \to \Box p$, με τη μέθοδο tableaux κατασκευάζουμε ένα tableau με ρίζα την πρόταση

$\neg(\Box(\Box p \to p) \to \Box p)$ και εφαρμόζουμε τους προτασιακούς κανόνες μέχρι να μην είναι δυνατή η περαιτέρω εφαρμογή τους. Κατόπιν εφαρμόζουμε τον τροπικό κανόνα στην πρόταση $\neg\Box p$ και στο παράθυρο που προέκυψε εφαρμόζουμε πάλι προτασιακούς κανόνες. Στο παράθυρο δημιουργούνται δύο κλάδοι. Ο ένας κλείνει αφού εμφανίζονται σε αυτόν οι προτάσεις $\Box p$ και $\neg\Box p$ και ο άλλος εξαιτίας των προτάσεων του, p και $\neg p$. Έτσι κλείνει ο (μοναδικός) κλάδος του αρχικού δέντρου, αφού περιέχει ένα παράθυρο με κλειστό tableau. Δηλαδή το δέντρο είναι κλειστό και άρα δεν υπάρχει μοντέλο $\mathfrak{M}$ τέτοιο ώστε $\mathfrak{M} \nvDash \Box(\Box p \to p) \to \Box p$ και άρα $\mathrm{GL} \vdash \Box(\Box p \to p) \to \Box p$.

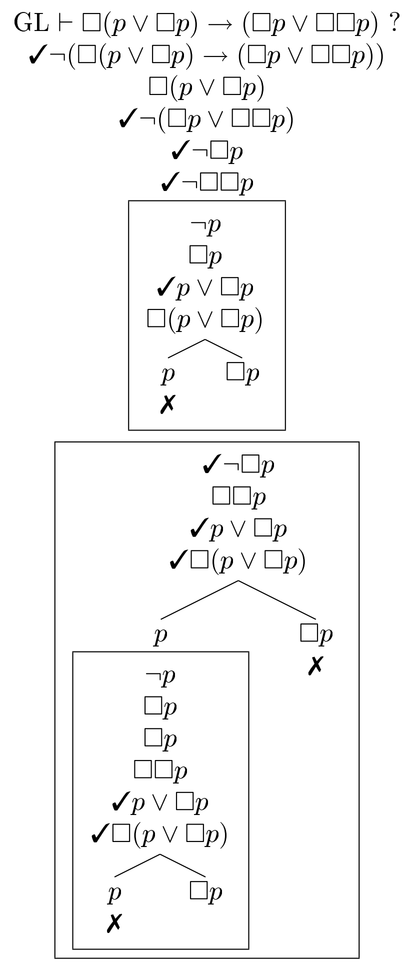
Ας δούμε ένα πιο περίπλοκο παράδειγμα:

Παράδειγμα 7.1.2. $\quad \mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow \neg\Box p) \to (p \leftrightarrow \neg\Box\bot)$?



Θέλουμε να δούμε αν ισχύει η $\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow \neg\Box p) \to (p \leftrightarrow \neg\Box\bot)$ που δίνει σταθερό σημείο για την πρόταση $\neg\Box p$ το $\neg\Box\bot$. Προσέχουμε ότι η εφαρμογή της $p \leftrightarrow \neg\Box p$ έγινε και στους δύο κύριους κλάδους, και τώρα είναι τσεκαρισμένη και στους δύο. Από τους τέσσερις κλάδους που προέκυψαν τελικά, οι δύο μεσαίοι έκλεισαν επειδή υπήρχαν, σε κάθε έναν από αυτούς, εμφανίσεις των p και $\neg p$. Ο αριστερότερος κλάδος έκλεισε επειδή εμφανίστηκε ο $\bot$ στο tableau του παράθυρού του και ο δεξιότερος επειδή το tableau του παράθυρού του έχει δύο κλειστούς κλάδους: ο αριστερός έκλεισε εξαιτίας των $\neg\Box p$ και $\Box p$ και ο δεξιός εξαιτίας των p και $\neg p$. Έτσι $\mathrm{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow \neg\Box p) \to (p \leftrightarrow \neg\Box\bot)$.

Παράδειγμα 7.1.3.



Εδώ δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε κανέναν άλλο κανόνα και η διαδικασία έχει σταματήσει. Έχουμε ανοίξει ένα παράθυρο μέσα σε ένα άλλο. Κάθε παράθυρο αντιπροσωπεύει έναν δυνατό κόσμο και άρα βρήκαμε ένα κατάλληλο μοντέλο $\mathfrak{M}$ τέτοιο ώστε $\mathfrak{M} \models \neg(\Box(p \vee \Box p) \to (\Box p \vee \Box\Box p))$ και έτσι $\mathrm{GL} \nvdash \Box(p \vee \Box p) \to (\Box p \vee \Box\Box p)$:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \models \Box(p \vee \Box p) \wedge \neg(\Box p \vee \Box\Box p) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \\
1 \models \Box p & & 2 \models p \arrow[d] \\
& & 3 \models \Box p
\end{tikzcd}$$

Παράδειγμα 7.1.4.

$$\begin{array}{c}
\mathrm{GL} \vdash \Box(p \wedge q) \wedge \Box\neg p? \\
\checkmark\neg(\Box(p \wedge q) \wedge \Box\neg p) \\
\begin{array}{cc}
\neg\Box(p \wedge q) & \neg\Box\neg p \\
\boxed{\begin{array}{c} \neg(p \wedge q) \\ \Box(p \wedge q) \\ \begin{array}{cc} \neg p & \neg q \end{array} \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} \checkmark\neg\neg p \\ \Box\neg p \\ p \end{array}}
\end{array}
\end{array}$$

Σε αυτό το παράδειγμα το tableau χωρίστηκε σε τρεις ανοιχτούς κλάδους. Μπορούμε να πάρουμε δύο μοντέλα που δεν ικανοποιούν την $\Box p \wedge \Box\neg p$, ανάλογα με τον κλάδο που δείχνει σε ποια περίπτωση βρισκόμαστε. Αρχίζοντας από τον αριστερότερο κλάδο, έχουμε:

$$0 \longrightarrow 1 \models \neg p$$

$$0 \longrightarrow 1 \models \neg q$$

$$0 \longrightarrow 1 \models p$$

7.2 Η μέθοδος tableaux είναι έγκυρη και πλήρης

Σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε ότι ανεξάρτητα της πρότασης A που υποβάλουμε στη διαδικασία της μεθόδου tableaux (με ρίζα το $\neg A$), η διαδικασία σταματάει και ότι αν σταματήσει σε κλειστό δέντρο, $\mathrm{GL} \vdash A$ και αν σταματήσει σε ανοιχτό δέντρο, $\mathrm{GL} \nvdash A$ και θα βρούμε ένα πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές μοντέλο που να μην ικανοποιεί την A.

Αν η A ικανοποιείται σε όλα τα πεπερασμένα, μεταβατικά και αναυτοπαθή μοντέλα, όταν εφαρμόσουμε τη διαδικασία καταλήγουμε σε ένα κλειστό tableau. Έτσι όταν θα έχουμε αποδείξει την ορθότητα της μεθόδου, $\mathrm{GL} \vdash A$ και θα έχουμε ξαναποδείξει το θεώρημα της πληρότητας για το GL και, ταυτόχρονα, την αποκρισιμότητα του GL.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι εφαρμόζουμε τη μέθοδο στην πρόταση A. Κατασκευάζουμε δηλαδή tableau με ρίζα το $\neg A$.

Πρόταση 7.2.1. *Έστω n ο αριθμός των υποπροτάσεων της A της μορφής $\Box B$, όχι απαραίτητα διαφορετικών. Τότε η διαδικασία σταματάει μετά από το πολύ n τροπικούς κύκλους και άρα $n+1$ προτασιακούς τύπους.*

Αποδειξη. Έστω ότι c είναι ένας ανοιχτός κλάδος σε ένα tableau ενός παραθύρου σε έναν ανοιχτό κλάδο b. Τότε, εξαιτίας του τροπικού κανόνα, κάθε πρόταση του b της μορφής $\Box D$ είναι και στον c και επιπλέον, υπάρχει μια πρόταση του b της μορφής $\neg\Box D$, τέτοια ώστε η $\Box D$ είναι στον c. Έτσι ο c περιέχει μία παραπάνω πρόταση της μορφής $\Box D$ από τον b. Όμως οι υποπροτάσεις της A μορφής $\Box D$ είναι n το πλήθος και έτσι, αν $k > n$, δεν μπορεί να υπάρξει ακολουθία $b_0, \ldots, b_k$ ανοιχτών κλάδων τέτοιος ώστε για κάθε i με $1 \leqslant i \leqslant k$, ο b_i να βρίσκεται σε παράθυρο του άλλου. Έτσι η μεγαλύτερη τέτοια ακολουθία που μπορεί να υπάρξει έχει, εκτός από τον κλάδο στον οποίο ανήκει η ρίζα, n κλάδους. Αυτοί προέκυψαν από n εφαρμογές του τροπικού κανόνα. $\dashv$

Ορισμός 7.2.1. Με ταυτόχρονη αναδρομή ορίζουμε ότι:

- Η **χαρακτηριστική πρόταση ενός tableau** T είναι η
  $(T) = \bigvee\{(b) |$ ο b είναι ένας κλάδος του $T\}$ και
- η **χαρακτηριστική πρόταση ενός κλάδου** b είναι η
  $(b) = \{E |$ η E είναι μια πρόταση στον $b\} \wedge$
  $\bigwedge\{\Box(T) |$ το T είναι ένα tableau μέσα σε ένα παράθυρο του $b\}$

Πρόταση 7.2.2. *Αν εφαρμόζοντας έναν κανόνα σε μια εμφάνιση της πρότασης E του κλάδου b του tableau T, καταλήγουμε στο tableau U, τότε* $\mathrm{GL} \vdash (T) \leftrightarrow (U)$.

Αποδειξη.

- Αν εφαρμόσαμε τον τροπικό κανόνα, τότε η E είναι της μορφής $\neg\Box C$. Έστω ότι οι προτάσεις του b της μορφής $\Box B$ είναι οι $\Box D_1, \ldots, \Box D_n$. Αν c είναι ο κλάδος που προκύπτει από τον b μετά την εφαρμογή του κανόνα, τότε αυτός έχει όλες της προτάσεις του b και έχει επιπλέον ένα παράθυρο με ένα tableau που περιέχει τις προτάσεις $\neg C$, $\Box C$, D_1, $\Box D_1$,...,$\Box D_n$. Έτσι $(c) = (b) \wedge \Diamond(\neg C \wedge \Box C \wedge D_1 \wedge \Box D_1 \wedge \cdots \wedge \Box D_n)$ και άρα $\mathrm{GL} \vdash (c) \to (b)$. Όμως $\mathrm{GL} \vdash (b) \to \neg\Box C \wedge \Box D_1 \wedge \cdots \wedge \Box D_n$, αφού τα μέλη αυτής της διάζευξης ανήκουν στο (b) και αφού από την πρόταση 7.1.2
  $\mathrm{GL} \vdash \neg\Box C \wedge \Box D_1 \wedge \cdots \wedge \Box D_n \to \Diamond(\neg C \wedge \Box C \wedge D_1 \wedge \Box D_1 \wedge \cdots \wedge D_n \wedge \Box D_n)$,
  $\mathrm{GL} \vdash (b) \to \Diamond(\neg C \wedge \Box C \wedge D_1 \wedge \Box D_1 \wedge \cdots \wedge D_n \wedge \Box D_n)$.
  Έτσι τελικά $\mathrm{GL} \vdash (b) \leftrightarrow (c)$ και άρα $\mathrm{GL} \vdash (T) \leftrightarrow (U)$.
- Αν εφαρμόσαμε τον θετικό κανόνα για την $\to$, τότε η E είναι της μορφής $F \to G$. Μετά την εφαρμογή του κανόνα ο (b) χωρίστηκε στους κλάδους (c) και (d) του tableau U ώστε να ισχύουν οι
  $(c) = (d) \wedge \neg F$ και $(d) = (b) \wedge G$.
  Έχουμε ότι $\mathrm{GL} \vdash (c) \to (b)$. Ακόμα επειδή

$\mathrm{GL} \vdash (b) \to (F \to G)$,
$\mathrm{GL} \vdash (b) \to (\neg F \vee \neg G)$ και άρα
$\mathrm{GL} \vdash (b) \to (c) \vee (d)$. Έτσι τελικά
$\mathrm{GL} \vdash (b) \leftrightarrow (c) \vee (d)$ και άρα
$\mathrm{GL} \vdash (T) \leftrightarrow (U)$.

Ανάλογες είναι και οι περιπτώσεις που αντιστοιχούν στους άλλους κανόνες. ⊣

Πρόταση 7.2.3. *Αν εφαρμόζοντας έναν κανόνα οπουδήποτε στο tableau T, καταλήγουμε στο tableau U, τότε* $\mathrm{GL} \vdash (T) \leftrightarrow (U)$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο βαθμό των tableau.

- Αν το T έχει βαθμό 0, τότε δεν έχει παράθυρα και άρα ο κανόνας εφαρμόζεται σε μια πρόταση κάποιου κλάδου του. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι $\mathrm{GL} \vdash (T) \leftrightarrow (U)$.
- Έστω ότι για κάθε tableau με βαθμό k ισχύει η πρόταση. Αν T είναι ένα tableau σε ένα παράθυρο του κλάδου d του tableau X με βαθμό $k+1$ και η εφαρμογή του κανόνα είχε ως αποτέλεσμα το tableau U στον κλάδο e του tableau Y, τότε το T έχει βαθμό k και από την προηγούμενη πρόταση,
  $\mathrm{GL} \vdash (T) \leftrightarrow (U)$. Τότε από την πρόταση 1.3.8,
  $\mathrm{GL} \vdash \Diamond(T) \leftrightarrow \Diamond(U)$ άρα
  $\mathrm{GL} \vdash (d) \leftrightarrow (e)$ και τελικά
  $\mathrm{GL} \vdash (X) \leftrightarrow (Y)$. ⊣

Πρόταση 7.2.4. *Αν το T είναι ένα κλειστό tabeau, τότε* $\mathrm{GL} \vdash \neg(T)$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο βαθμό των tableau.

- Αν το T έχει βαθμό 0, τότε δεν έχει παράθυρα. Επειδή το T είναι κλειστό, κάθε βραχίονάς του είναι κλειστός και αφού δεν έχει παράθυρα, σε αυτόν εμφανίζεται ο $\bot$ ή μια πρόταση και η αντίθετή της. Έτσι για κάθε βραχίονα b του T, $\mathrm{GL} \vdash \neg(b)$ και άρα $\mathrm{GL} \vdash \neg(T)$.
- Έστω ότι για κάθε tableau με βαθμό k ισχύει η πρόταση. Αν X είναι ένα κλειστό tableau με βαθμό $k+1$, τότε κάθε βραχίονάς του b είναι κλειστός. Αν στον b εμφανίζεται ο $\bot$ ή μια πρόταση και η αντίθετή της, $\mathrm{GL} \vdash \neg(b)$. Αν στον b εμφανίζεται ένα παράθυρο με ένα κλειστό tableau T, το T έχει βαθμό k και $\mathrm{GL} \vdash \neg(T)$. Έτσι $\mathrm{GL} \vdash \Box\neg(T)$, δηλαδή $\mathrm{GL} \vdash \neg\Diamond(T)$ και άρα $\mathrm{GL} \vdash \neg(b)$.
  Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, για κάθε κλάδο b του X, $\mathrm{GL} \vdash \neg(b)$ και άρα $\mathrm{GL} \vdash \neg(X)$. ⊣

Πρόταση 7.2.5. *Αν η διαδικασία σταματάει σε ένα κλειστό tableau (T), τότε* $\mathrm{GL} \vdash A$.

Απόδειξη. Το αρχικό tableau V έχει μόνο την πρόταση $\neg A$ στη ρίζα του, άρα $(V) = \neg A$ και από την πρόταση 7.2.3, με επαγωγή στο πλήθος των κανόνων που χρησιμοποιήθηκαν, $\mathrm{GL} \vdash \neg A \leftrightarrow (T)$. Όμως από την προηγούμενη πρόταση $\mathrm{GL} \vdash \neg(T)$, κι έτσι $\mathrm{GL} \vdash A$. ⊣

Αν η διαδικασία σταματήσει σε ένα ανοιχτό tableau T, θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα μοντέλο που δεν ικανοποιεί την A και άρα GL $\nvdash A$. Στο παράδειγμα 7.1.4 είδαμε ότι μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα τέτοια μοντέλα. Για να ορίσουμε ακριβώς ένα μοντέλο θα επιλέγουμε σε κάθε tableau τον αριστερότερο ανοιχτό κλάδο.

Ορισμός 7.2.2. Από ένα ανοιχτό tableau T ορίζουμε το μοντέλο $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, ως εξής:

Θεωρούμε μια σχέση S στους κλάδους τέτοια ώστε xSy ανν ο x είναι ανοιχτός και ο y είναι ο αριστερότερος ανοιχτός κλάδος ενός tableau σε ένα παράθυρο του x.

Αν w ο αριστερότερος κλάδος του T, $W = \{x | \ \exists i \geqslant 0(wS^i x)$. Το W είναι πεπερασμένο αφού ο βαθμός του tableau είναι πεπερασμένος.

Η R είναι η μεταβατική (αλλά όχι αυτοπαθής) κλειστότητα της S, δηλαδή xRy ανν $\{(x, y) | \ x, y \in W \wedge \exists i \geqslant 1(xS^i y)\}$. Δηλαδή οι κόσμοι του $\mathfrak{M}$ είναι ο αριστερότερος κλάδος του T και αν ένας κλάδος x με παράθυρο που περιέχει ανοιχτό tableau ανήκει στο W, τότε και ο αριστερότερος κλάδος αυτού του tableau y ανήκει στο W και επιπλέον xRy. Η R είναι μεταβατική και αναυτοπαθής.

Η V είναι μια αποτίμηση τέτοια ώστε xVp ανν η προτασιακή μεταβλητή p ανήκει στον κλάδο x.

Το $\mathfrak{M}$ είναι πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές *δέντρο* το οποίο δεν περιέχει αλυσίδα μήκους $k > n$, $w_0 R \dots w_k$, όπου n είναι ο αριθμός των υποπροτάσεων της A της μορφής $\Box B$.

Πρόταση 7.2.6. *Για κάθε πρόταση E και κάθε $x \in W$,*
αν η E ανήκει στον x, τότε $x \vDash E$ και αν η $\neg E$ ανήκει στον x, τότε $x \nvDash E$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στη πολυπλοκότητα της πρότασης E.

- Αν $E = \bot$ Τότε αφού ο X είναι ανοιχτός, ο $\bot$ δεν ανήκει στην x και $x \nvDash \bot$.
- Αν $E = p$, όπου p προτασιακή μεταβλητή.
  Τότε αν η p ανήκει στον x, τότε xVp και άρα $x \vDash p$.

  Αν η $\neg p$ ανήκει στον x, τότε αφού ο x είναι ανοιχτός, η p δεν ανήκει σε αυτόν, άρα δεν ισχύει ότι xVp και άρα $x \nvDash p$.
- Αν $E = F \to G$. Τότε αν η $F \to G$ ανήκει στο x, τότε έχει εφαρμοστεί ο θετικός κανόνας της $\to$ στις εμφανίσεις της στο x και άρα ή η $\neg F$ ανήκει στο x ή η G ανήκει στο x. Από την επαγωγική υπόθεση, $x \nvDash \neg F$ ή $x \vDash G$ και άρα $x \vDash F \to G$.

  Αν η $\neg(F \to G)$ ανήκει στο x, τότε έχει εφαρμοστεί ο αρνητικός κανόνας της $\to$ στις εμφανίσεις της στο x και άρα η F και η $\neg G$ ανήκουν στον x. Από την επαγωγική υπόθεση, $x \vDash F$ και $x \nvDash G$ και άρα $x \nvDash F \to G$.
- Αν $E = \Box B$. Τότε αν η $\neg \Box B$ ανήκει στο x, τότε έχει εφαρμοστεί ο τροπικός κανόνας και άρα υπάρχει ένα παράθυρο στο x που έχει ένα tableau U, στου οποίου τη ρίζα ανήκει η $\neg B$. Έστω y ο αριστερότερος κλάδος του U. Τότε xRy και η $\neg B$ ανήκει στον y αφού είναι στη ρίζα του U. Από την επαγωγική υπόθεση, $y \nvDash B$ και αφού xRy, $x \nvDash \Box B$.

Αν η $\Box B$ ανήκει στο x, τότε παρατηρούμε ότι αν uSv τότε στον u ανήκει ένα παράθυρο που έχει ένα δέντρο με ανοιχτό κλάδο v. Άρα εφαρμόστηκε σε κάποια πρόταση ο τροπικός κανόνας και έτσι στη ρίζα του v ανήκει η B και η $\Box B$. Έτσι από τον ορισμό της R, αν xRy, η B ανήκει στον y. Από την επαγωγική υπόθεση, για κάθε y με xRy, $y \models B$, άρα $x \models \Box B$. $\dashv$

Πρόταση 7.2.7. *Αν η διαδικασία σταματάει σε ένα ανοιχτό tableau* (T), *τότε* $\mathrm{GL} \nvdash A$.

Αποδειξη. Η $\neg A$ ανήκει στον κλάδο w, αφού είναι στη ρίζα του T. Από την πρόταση 7.2.6, $w \nvDash E$. και άρα $\mathfrak{M} \nvDash A$ και το $\mathfrak{M}$ είναι πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές. Άρα $\mathrm{GL} \nvdash A$. $\dashv$

Δείξαμε λοιπόν ότι η μέθοδος των tableaux πάντα τερματίζει και ότι αν τερματίσει με κλεστό tableaux, τότε $\mathrm{GL} \vdash A$ και αν τερματίσει με ανοιχτό tableau, τότε $\mathrm{GL} \vdash \neg A$ και κατασκευάσαμε από την A ένα μοντέλο που είναι πεπερασμένο, μεταβατικό και αναυτοπαθές δέντρο. Έτσι δείξαμε πέρα από τον αρχικό μας στόχο, ότι το GL είναι έγκυρο και πλήρες ως προς τα πεπερασμένα μεταβατικά και αναυτοπαθή δέντρα, που έχουν αλυσίδες μήκους το πολύ n.

Βιβλιογραφία

[1] "The Logic of Provability" George Boolos, Cambridge University Press (1993).

[2] "Modal logic" Patrick Blackburn, Maarten Rijke, Yde Venema, Cambridge University Press (2001)

[3] "On Deciding the Truth of certain Statements Involving the Notion of Consistency" George Boolos, J. Symb. Log. 41(4): 779-781 (1976)

[4] "A Program to Compute Gödel-Löb Fixpoints" Melvin Fitting (1995), URL "citeseer.ist.psu.edu/fitting95program.html"

[5] "First-Order Logic" Raymond M. Smullyan, Dover Publications (1995)

Ευρετήριο