Πότε είναι εφικτός ο συμψηφισμός απόψεων;

Γιάννης Λιβιεράτος

24 Ιουνίου 2016

Περιεχόμενα

Εισαγωγή 3
Συμβολισμοί 6

1 Προβλήματα Ικανοποίησης Περιορισμών 8
1.1 Θεωρία Κλώνων 9
1.2 Η σύνδεση του Galois 16
1.3 Το θεώρημα διχοτόμησης του Schaefer 22

2 Πολυειδή Προβλήματα Ικανοποίησης Περιορισμών 26
2.1 Πολυειδείς κλώνοι και σύγκλωνοι 28
2.2 Η σύνδεση του Galois στην πολυειδή περίπτωση 34
2.3 Προβλήματα Ικανοποιησιμότητας για Πολυειδείς Περιορισμούς 36
2.4 Συντηρητικά Π.Π.Ι.Π 50

3 Θεωρία Κοινωνικής Επιλογής 53
3.1 Βασικοί ορισμοί και προτάσεις 54
3.2 Πεδία δυνατότητας και Π.Π.Ι.Π. 57
3.3 Ισχυρά πεδία δυνατότητας και Π.Π.Ι.Π. 60

Επίλογος 62

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κυρίους Δημήτριο Θηλυκό, Σταύρο Κολλιόπουλο και Λευτέρη Κυρούση για τη συμβολή τους στην ανάπτυξη αυτής της διπλωματικής εργασίας, αλλά και για τις ποικίλες ευκαιρίες και παροτρύνσεις που μου έδωσαν τα τελευταία χρόνια ώστε να ασχοληθώ με τη μαθηματική επιστήμη. Ιδιαίτερα με τιμά η δυνατότητα ερευνητικής συνεργασίας που μου προσέφερε ο κ. Λ. Κυρούσης, στο πλαίσιο της οποίας προέκυψε και η παρούσα διπλωματική. Ευχαριστώ ακόμη τον φίλο Σπύρο Μανιάτη για τη βοήθειά του στην τελική διαμόρφωση της εργασίας. Για τη μέχρι εδώ διαδρομή οφείλω πολλά στην οικογένειά μου – και μάλιστα στη μητέρα μου Φανή Ζιώζια, που, αν ζούσε σήμερα, θα την είχε ίσως χαρεί περισσότερο απ’ όλους. Αλλά και σε όλους τους φίλους, τις φίλες και τους άλλους δασκάλους που βρέθηκαν κοντά μου αυτά τα χρόνια, με κατανόηση για τα διαστήματα απουσίας ή απομόνωσης που επέβαλλαν οι πανεπιστημιακές υποχρεώσεις. Βέβαιο είναι ότι πολλά πράγματα δεν θα είχαν (το ίδιο) νόημα χωρίς την παρουσία της Μαρίας Πετροπαναγιωτάκη όχι μόνο στα κοινά φοιτητικά μας βήματα, αλλά και στη ζωή που μοιραζόμαστε όλα αυτά τα χρόνια.

Εισαγωγή

Η ερώτηση «πότε είναι εφικτός ο συμψηφισμός απόψεων» αποκτά νόημα όταν απαιτούμε ο συμψηφισμός αυτός να μην είναι τετριμμένος ή «δικτατορικός», όπως είναι ο όρος στην θεωρία της κοινωνικής επιλογής. Ας σκεφτούμε έναν πληθυσμό που έχει να επιλέξει (να ψηφίσει) ποια επιλογή προτιμάει σε μία σειρά από διαφορετικά θέματα. Το ζήτημα είναι με ποιον τρόπο θα συλλέξουμε αυτές τις ψήφους και πώς θα αποφασίσουμε τι θα γίνει τελικά (ποιο θα είναι το κοινωνικό αποτέλεσμα) σε κάθε ζήτημα -πώς θα επιτευχθεί δηλαδή ο συμψηφισμός των απόψεων.

Είναι λογικό να τεθούν κάποιες προϋποθέσεις για τον τρόπο με τον οποίο θα γίνει αυτό. Για παράδειγμα, θα θέλαμε αν όλα τα άτομα ψηφίσουν μία συγκεκριμένη επιλογή σε κάποιο θέμα, αυτό να είναι και το κοινωνικό αποτέλεσμα. Θα μπορούσαμε να απαιτήσουμε κάτι πιο αυστηρό: αν η καθαρή πλειοψηφία ψηφίσει μία συγκεκριμένη επιλογή, αυτή να αποτελέσει το κοινωνικό αποτέλεσμα. Ή και κάτι λιγότερο αυστηρό: μία επιλογή που δεν γίνεται από κανέναν, να μην είναι δυνατόν να προκύψει ως το κοινωνικό αποτέλεσμα.

Θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς ποιο είναι το πρόβλημα με την δικτατορία - το να αποφασίζει κάποιος/α από την κοινωνία όπως αυτός/ή θεωρεί καλύτερο. Από μαθηματική σκοπιά, κανένα. Αν παρόλα αυτά, για λόγους πολιτικούς ή/και αισθητικούς ή από απλή περιέργεια, αποφασίσουμε ότι δεν μας κάνει το παραπάνω μοντέλο, αρχίζουν τα προβλήματα.

Ο John Kenneth Arrow, στην εργασία του «Social choice and individual values», το 1951 (βλ. [1], [2]) έδειξε ότι:

- αν κάθε ψηφοφόρος βάζει κατά σειρά προτίμησής του όλες τις επιλογές για κάποιο θέμα (unrestricted domain),

- αν απαιτούμε η σειρά κατάταξης δύο επιλογών στο κοινωνικό αποτέλεσμα να επηρεάζεται μόνο από αλλαγές στη σειρά προτίμησης αυτών των δύο επιλογών (independence of irrelevant alternatives) και

- αν απαιτούμε, εφόσον ολόκληρος ο πληθυσμός προτιμάει μία επιλογή από μία άλλη, στην κοινωνική κατάταξη η επιλογή αυτή να εμφανίζεται ως προτιμώμενη από την κοινωνία
(weak Pareto efficiency),

τότε γίνεται αδύνατον να μην προκύψει δικτάτορας, δηλαδή ένα άτομο μέσα από τον πληθυσμό του οποίου οι επιλογές πάντα πραγματοποιούνται.

Έχουν προταθεί διάφοροι τρόποι για να ξεπεραστεί αυτό το πρόβλημα - διάφορα μοντέλα δηλαδή, βάσει των οποίων να διεξάγεται η ψηφοφορία. Συνήθως αυτά επιλέγουν να «χαλαρώσουν» κάποια από τις συνθήκες που απαιτούσε να ισχύουν ο Arrow. Από αυτό έχει προκύψει μια ολόκληρη περιοχή μεταξύ θεωρίας κοινωνικής επιλογής και μαθηματικών, όπου τα διάφορα μοντέλα ελέγχονται ως προς το ποιες συνθήκες χαλαρώνουν και πόσο, αλλά και ως προς την δυσκολία να υπολογιστεί το κοινωνικό αποτέλεσμα - την πολυπλοκότητά τους δηλαδή με μαθηματικούς όρους. Δύο από τα πιο γνωστά μοντέλα είναι ο «νικητής του Condorcet» (Condorcet winner) και ο «νικητής του Dodgson» (Dodgson winner), τα οποία φυσικά έχουν μελετηθεί και τροποποιηθεί περαιτέρω (βλ. [8], [10], [11]).

Το πλαίσιο στο οποίο κινείται η εργασία είναι το εξής: Έχουμε έναν πληθυσμό που ψηφίζει μία από τις δυνατές επιλογές σε καθένα από τα θέματα που πρέπει να αποφασισθούν. Υπάρχουν πιθανώς κάποιοι περιορισμοί ως προς τους δυνατούς συνδυασμούς ψήφων στο κάθε θέμα, δηλαδή ένα σύνολο επιτρεπόμενων διανυσμάτων, όπου κάθε συντεταγμένη του διανύσματος αντιστοιχεί σε κάποιο θέμα προς απόφαση. Η ερώτηση που προκύπτει είναι πότε το σύνολο των επιτρεπόμενων συνδυασμών ψήφων κάνει δυνατό έναν μη-δικτατορικό συμψηφισμό απόψεων, ο οποίος όμως έχει τις ιδιότητες:

- να βγάζει κοινωνικό αποτέλεσμα που να είναι αποδεκτός συνδυασμός ψήφων και
- το κοινωνικό αποτέλεσμα για κάθε ζήτημα να έχει επιλεγεί από τουλάχιστον έναν ψηφοφόρο.

Έχουν δοθεί διάφορες απαντήσεις σε αυτό το ερώτημα. Για παράδειγμα, οι E. Dokow και R. Holzman, εξετάζουν την σχέση που έχει η ύπαρξη μη-δικτατορικού συμψηφιστή με την έννοια της *ολικής φραγής* (total blockedness) και με κάποιες ιδιότητες μιας *ατζέντας αληθείας* (truth-functional agenda) (βλ. [15], [16], [14]) ενώ οι L. Kirousis και P. Kolaitis, χαρακτηρίζουν την ύπαρξη μη-δικτατορικού συμφηφιστή με την ύπαρξη τριμελούς μη-δικτατορικού συμψηφιστή, αλλά και ως κλειστότητα του συνόλου των εφικτών συνδυασμών ψήφων κάτω από κάποιες συγκεκριμένες συναρτήσεις (βλ. [21]).

Αυτό το τελευταίο αποτέλεσμα που αναφέραμε αποτελεί και την βασική ιδέα πίσω από αυτήν την εργασία. Ας σκεφτούμε το σύνολο αποδεκτών συνδυασμών ψήφων ως μία σχέση με στοιχεία από το σύνολο των δυνατών ψήφων και τόσα μέλη, όσα και τα θέματα προς ψήφιση. Αν περιοριστούμε σε ένα δυαδικό πλαίσιο, για ευκολία το $\{0,1\}$, τότε μπορεί να δει κανείς ότι το παραπάνω αποτέλεσμα μας δείχνει μία σχέση ανάμεσα στην ύπαρξη μη-δικτατορικού συμψηφιστή και την δυνατότητα αποδοτικής επίλυσης ενός προβλήματος ικανοποιησιμότητας που ορίζεται από το σύνολο των αποδεκτών συνδυασμών ψήφων, μέσω του θεωρήματος διχοτόμησης του Schaefer (βλ. [28]).

Ας σκεφτούμε λίγο περισσότερο το πλαίσιο στο οποίο κινείται η εργασία. Αφού ούτως ή άλλως ψάχνουμε οποιονδήποτε μη-δικτατορικό τρόπο (τηρουμένων κάποιων υποθέσεων) να συμψηφίσουμε τις ψήφους του πληθυσμού, όσο παράλογος κι αν θα μπορούσε να αποδειχθεί στην πράξη αυτός ο τρόπος, δεν υπάρχει κάποιος λόγος να υποθέσουμε ότι πρέπει να συμψηφιστούν με τον ίδιο τρόπο όλα τα θέματα. Ακόμη περισσότερο, δεν υπάρχει λόγος να υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι ίδιες επιλογές για κάθε θέμα. Αυτό μας οδηγεί φυσιολογικά στην ανάπτυξη μιας θεωρίας για πολυειδείς σχέσεις, συναρτήσεις και προβλήματα ικανοποιησιμότητας (βλ. [3]).

Στόχος μας λοιπόν σε αυτήν την εργασία είναι να βρούμε ποια ακριβώς είναι η σχέση των δύο προβλημάτων που περιγράψαμε, της ύπαρξης δηλαδή μη-δικτατορικού συμψηφιστή και της δυνατότητας αποδοτικής επίλυσης ενός προβλήματος ικανοποιησιμότητας. Η εργασία θα οργανωθεί σε τρία κεφάλαια. Στο πρώτο, θα αναπτύξουμε μια θεωρία κλώνων που θα μας χρησιμεύσει για να αναλύσουμε τα κλασικά προβλήματα ικανοποιησιμότητας. Στο δεύτερο, θα επεκτείνουμε την θεωρία σε πολυειδείς κλώνους και προβλήματα ικανοποιησιμότητας. Στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο, θα μιλήσουμε για θεωρία κοινωνικής επιλογής, θα γενικεύσουμε μερικά από τα αποτελέσματα των L. Kirousis και P. Kolaitis ([21]) και θα αποδείξουμε τα βασικά αποτελέσματα της εργασίας.

Κλείνοντας την εισαγωγή, ας κάνουμε ένα τελευταίο γενικό σχόλιο σε σχέση με το μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε στην θεωρία κοινωνικής επιλογής. Έχοντας πάντα κατά νου ότι, οι αφαιρέσεις που είναι αναγκαίο να γίνουν ώστε να μαθηματικοποιηθεί μια θεωρία, την φέρνουν σε αρκετή (έως και χαώδη) απόσταση από τον πραγματικό κόσμο, ειδικά όταν μιλάμε για κοινωνιολογικού τύπου θεωρίες, συνεχίζουμε να βρίσκουμε ενδιαφέρον το εξής: η ύπαρξη ή μη ενός δικτάτορα στο μοντέλο που χρησιμοποιούμε προκύπτει ως εσωτερική αναγκαιότητα του μοντέλου, με βάση τις ίδιες τις επιλογές που έχει ο πληθυσμός, και όχι ως εξωτερική υποχρέωση, από κάποιο κέντρο εξουσίας, ούτε ως αποτέλεσμα «κακής χρήσης/λειτουργίας» κάποιας διαδικασίας. Καθώς η θεωρία είναι μαθηματική, μπορούμε εδώ καλώς ή κακώς, να μην ασχοληθούμε με ενδεχόμενες ηθικο-πολιτικές πλευρές/προεκτάσεις αυτού του ζητήματος.

Συμβολισμοί

Ορίζουμε $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Έστω ένας $n \times m$ πίνακας M, $n, m \in \mathbb{N}$, με στοιχεία από κάποιο σύνολο F. Τα διανύσματα $x^i = (x^i_1, ..., x^i_m)$ και $x_j = (x^1_j, ..., x^n_j)$ θα συμβολίζουν την i-οστή γραμμή και την j-οστή στήλη του πίνακα M αντίστοιχα. Το στοιχείο του πίνακα M που βρίσκεται στην i-οστή γραμμή και στην j-οστή στήλη θα συμβολίζεται με x^i_j. Ο *ανάστροφος* $m \times n$ πίνακας του M, δηλαδή ο πίνακας με στήλες τις γραμμές του M και γραμμές τις στήλες του M, θα συμβολίζεται M^T.

Έστω μία συνάρτηση $f : F^m \mapsto F$. Με $f(M)$ θα συμβολίζουμε τον πίνακα στήλη που προκύπτει εφαρμόζοντας την f στις γραμμές του M, δηλαδή το διάνυσμα-στήλη $(f(x^1_1, ..., x^1_m), ..., f(x^n_1, ..., x^n_m))^T$.

Για ένα υποσύνολο R του F, θα γράφουμε $M \subset R$ αν κάθε γραμμή του M είναι στοιχείο του R. Επίσης, χρησιμοποιώντας τον παραπάνω συμβολισμό πινάκων, αν $x^i = (x^i_1, ..., x^i_m)$, $i \in \{1, ..., n\}$, μια τυχαία συλλογή διανυσμάτων, τότε, εκτός αν αναφερθεί ρητώς κάτι διαφορετικό, $x_j = (x^1_j, ..., x^n_j)$, $\forall j \in \{1, ..., m\}$.

Θα μας φανεί επίσης χρήσιμος στη συνέχεια ο συνολοθεωρητικός ορισμός μιας συνάρτησης f ως το σύνολο $\{(x, f(x)) \mid x \in Dom(f)\}$, όπου $Dom(f)$ είναι το πεδίο ορισμού της f.

Έστω $m \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \{1, ..., m\}$ και $R \subseteq F^m$. Θέτουμε $J = \{1, ..., m\} \setminus I$, $I = \{i_1, ..., i_s\}$, $J = \{j_1, ..., j_t\}$ και ορίζουμε τα εξής σύνολα:

- $R_I = pr^m_I R = \exists x_{j_1} ... \exists x_{j_t} R = \{(x_{i_1}, ..., x_{i_s}) \mid (x_1, ..., x_m) \in R\}$,
- $R_{-I} = pr^m_{-I} R = pr^m_J = R_J$,
- $R_i = R_{\{i\}}$, για κάθε $i \in \{1, ..., m\}$,
- $R_{-i} = R_{-\{i\}}$, για κάθε $i \in \{1, ..., m\}$,

Για ένα σύνολο σχέσεων S, ορίζουμε $S_I = \{R_I \mid R \in S\}$ (και αντίστοιχα με πριν τα S_{-I} και S_i).

Τέλος, θα σταθεροποιήσουμε κάποιους συμβολισμούς συναρτήσεων $f : F^m \mapsto F$, όπου το F θα είναι οποιοδήποτε δυαδικό σύνολο (δηλαδή ισόμορφο με το $\{0, 1\}$). Θα συμβολίσουμε τα στοιχεία του F με $0, 1$, για να ξέρουμε ποιο αντιστοιχεί σε κάθε στοιχείο του $\{0, 1\}$.

- Οι σταθερές συναρτήσεις $c^m_x : F^m \mapsto F$, για κάθε $x \in F$, $m \in \mathbb{N}$, με $c^m_x(\bar{y}) = x$, για κάθε $\bar{y} \in F^m$.
- Η συνάρτηση $\wedge : F^2 \mapsto F$, με

$$\wedge(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = y = 1, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- Η συνάρτηση $\vee : F^2 \mapsto F$, με

$$\wedge(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x = y = 0, \\ 1 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- Η συνάρτηση $maj : F^3 \mapsto F$, με

$$maj(x, y, z) = \begin{cases} x & \text{αν } x = y \text{ ή } x = z, \\ y & \text{αν } y = z. \end{cases}$$

- Η συνάρτηση $\oplus : F^3 \mapsto F$, με

$$\oplus(x, y, z) = \begin{cases} x & \text{αν } y = z, \\ y & \text{αν } x = z \neq y, \\ z & \text{αν } x = y \neq z. \end{cases}$$

Κεφάλαιο 1

Προβλήματα Ικανοποίησης Περιορισμών

Θα χρησιμοποιήσουμε την θεωρία κλώνων και την *αντιστοίχιση του Galois* (βλ. [27], [25]), για να αποδείξουμε το θεώρημα διχοτόμησης του Schaefer για προβλήματα ικανοποιησιμότητας (βλ. [28]). Για να το κάνουμε αυτό, θα χρειαστούμε δύο κλασικά αποτελέσματα: το θεώρημα του Geiger (βλ. [18]) και τον *σύνδεσμο του Post* (βλ. [26], [29]). Θα ακολουθήσουμε την πορεία των E. Boehler, N. Creignou, S. Reith και H. Vollmer στα [12], [13].

Το πεδίο που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι το $\{0,1\}$ και θα λέμε ότι δουλεύουμε στο πλαίσιο του Boole. Το $\{0,1\}$ χρησιμοποιείται για ευκολία. Οποιοδήποτε δυαδικό σύνολο μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη θέση του.

Σχέση (του Boole), θα λέμε κάθε υποσύνολο του $\{0,1\}^m$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Αναφέρουμε εδώ ότι αυτές οι σχέσεις, από το κεφ. 2 και πέρα, θα λέγονται *μονοειδείς*. Ένας n-μελής τελεστής (του Boole) είναι μια συνάρτηση $f : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$, $n \in \mathbb{N}$.

1.1 Θεωρία Κλώνων

Σε αυτήν την παράγραφο, θα μελετήσουμε σύνολα τελεστών και σύνολα σχέσεων με κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες.

Ορισμός 1. *Έστω B ένα σύνολο από τελεστές Boole. Το B είναι* ***κλώνος*** *(clone), αν ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *$pr_i^n \in B$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, όπου $pr_i^n : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$ η n-μελής προβολή στην i-οστή συντεταγμένη, δηλαδή:*
$$pr_i^n(a_1, ..., a_n) = a_i,$$
για κάθε διάνυσμα $(a_1, ..., a_n) \in \{0,1\}^n$.

2. *Έστω $f, f_1, ..., f_n \in B$ τελεστές Boole, όπου f n-μελής και $f_1, ..., f_n$ k-μελείς. Τότε, ο τελεστής $f(f_1, ..., f_n) : \{0,1\}^k \mapsto \{0,1\}$, που ορίζεται ως εξής:*
$$f(f_1, ..., f_n)(a_1, ..., a_k) := f(f_1(a_1, ..., a_k), ..., f_n(a_1, ..., a_k)),$$
για κάθε $(a_1, ..., a_k) \in \{0,1\}^k$, ανήκει στο σύνολο B.

Ορισμός 2. *Έστω S ένα σύνολο σχέσεων. Το S είναι* ***σύγκλωνος*** *(co-clone) αν ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *$Eq \in S$, όπου $Eq = \{(0,0), (1,1)\}$ η δυαδική σχέση ισοδυναμίας.*

2. *Το σύνολο S είναι κλειστό κάτω από εσωτερικές προβολές: Αν $R \in S$ m-μελής, τότε η k-μελής σχέση R', που ορίζεται ως εξής:*
$$R'(a_1, ..., a_k) \text{ ανν } R(pr_{i_1}^k(a_1, ..., a_k), ..., pr_{i_m}^k(a_1, ..., a_k)),$$
για κάθε $(a_1, ..., a_k) \in \{0,1\}^k$, ανήκει στο S, για κάθε $m, k \in \mathbb{N}$, $i_1, ..., i_m \in \{1, ..., k\}$.

3. *Το σύνολο S είναι κλειστό κάτω από υπαρξιακές προβολές: Αν $R \in S$ m-μελής, τότε η $(m-1)$-μελής σχέση R_{-m}, ανήκει στο S.*

4. *Το σύνολο S είναι κλειστό κάτω από τομές σχέσεων με ίδιο πλήθος μελών (arity): Αν $R, R' \in S$ m-μελείς σχέσεις, τότε η m-μελής σχέση $R \cap R'$ ανήκει στο S.*

Οι ορισμοί 1 και 2 υπάρχουν στην βιβλιογραφία με διάφορους ισοδύναμους τρόπους. Θα αποδείξουμε δύο ιδιότητες που συχνά εμφανίζονται στον ορισμό 2, καθώς θα μας φανούν χρήσιμες στη συνέχεια.

Πρόταση 1. *Έστω S ένας σύγκλωνος. Τότε η σχέση $\{0,1\}$ ανήκει στο S.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό 2, ξέρουμε ότι η σχέση Eq ανήκει στο S και ότι αυτό είναι κλειστό στις εσωτερικές προβολές. Το συμπέρασμα έπεται από την ακόλουθη ισοδυναμία:

$$\{0,1\}(x) \text{ ανν } Eq(pr_1^2(x,y), pr_1^2(x,y)).$$

$\square$

Πρόταση 2. *Έστω S ένας σύγκλωνος και R_1, R_2 μία n-μελής και μία m-μελής σχέση στο S αντίστοιχα. Τότε, το* ***καρτεσιανό γινόμενο*** *των R_1, R_2, δηλαδή η $(n+m)$-μελής σχέση $R = R_1 \times R_2$ που ορίζεται ως εξής:*

$$R(a_1, ..., a_{n+m}) \text{ ανν } R_1(a_1, ..., a_n) \wedge R_2(a_{n+1}, ..., a_{n+m}),$$

για κάθε $(a_1, ..., a_{n+m}) \in \{0,1\}^{n+m}$, ανήκει στο S.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $R_1 \times R_2 = R_1' \cap R_2'$, όπου οι $(n+m)$-μελείς σχέσεις R_1', R_2' ορίζονται ως εξής:

$$R_1'(a_1, ..., a_{n+m}) \text{ ανν } R_1(pr_1^{n+m}(a_1, ..., a_{n+m}), ..., pr_n^{n+m}(a_1, ..., a_{n+m})),$$

$$R_2'(a_1, ..., a_{n+m}) \text{ ανν } R_2(pr_{n+1}^{n+m}(a_1, ..., a_{n+m}), ..., pr_{n+m}^{n+m}(a_1, ..., a_{n+m})).$$

Από τον ορισμό 2, είναι προφανές ότι $R_1', R_2' \in S$, άρα και η $R_1' \cap R_2'$. $\square$

Με ένα απλό επαγωγικό επιχείρημα, είναι εύκολο να δειχθεί ότι το καρτεσιανό γινόμενο οποιασδήποτε πεπερασμένης οικογένειας συνόλων του S είναι στο S. Είναι τώρα απλό να δειχθεί ότι, για οποιαδήποτε $m \in \mathbb{N}$ και $i, j \in \{1, ..., m\}$, οι σχέσεις $\{0,1\}^m$ και

$$E_{i,j}^m = \{(a_1, ..., a_m) \mid a_i = a_j\}$$

ανήκουν σε οποιονδήποτε σύγκλωνο.

Ας περάσουμε τώρα σε μία από τις κεντρικότερες έννοιες της εργασίας, αυτή του *πολυμορφισμού* (polymorphism).

Ορισμός 3. *Έστω $R \subseteq \{0,1\}^m$ και $f : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$. Λέμε ότι η συνάρτηση f είναι πολυμορφισμός της σχέσης R (ή ότι η f διατηρεί την R) και γράφουμε $f \rhd R$, αν για κάθε $a^1 = (a_1^1, ..., a_m^1), ..., a^n = (a_1^n, ..., a_m^n) \in R$, έχουμε:*

$$f(a^1, ..., a^n) := (f(a_1^1, ..., a_1^n), ..., f(a_m^1, ..., a_m^n)) \in R.$$

Επίσης, θα λέμε ότι η f είναι πολυμορφισμός ενός συνόλου σχέσεων S, αν $f \rhd R$, για κάθε $R \in S$.

Έστω τώρα ένα σύνολο τελεστών Boole B και ένα σύνολο σχέσεων S. Ορίζουμε τα εξής:

- $Pol(S) = \{f : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\} \mid n \in \mathbb{N} \ \&\ f \rhd R,\ \forall R \in S\}$,
- $Inv(B) = \{R \subseteq \{0,1\}^m \mid m \in \mathbb{N} \ \&\ f \rhd R,\ \forall f \in B\}$.

Δείχνουμε τώρα ότι αυτά τα δύο σύνολα που ορίσαμε έχουν τις "καλές" ιδιότητες του κλώνου και του σύγκλωνου αντιστοίχως.

Πρόταση 3. *Για κάθε σύνολο σχέσεων S, το $Pol(S)$ είναι κλώνος.*

Απόδειξη. Έστω μία m-μελής $R \in S$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, ..., n\}$ και
$a^1, ..., a^n \in R$. Τότε,

$$(pr_i^n(a_1^1, ..., a_1^n), ..., pr_i^n(a_m^1, ..., a_m^n)) = (a_1^i, ..., a_m^i) = a^i \in R.$$

Άρα, όλες οι προβολές ανήκουν στο $Pol(S)$.
Έστω τώρα μία n-μελής συνάρτηση $f \in Pol(S)$ και k-μελείς συναρτήσεις $f_1, ..., f_n \in Pol(S)$. Τότε, για $a^1, ..., a^k \in R$, ισχύει ότι $f_i(a^1, ..., a^k) \in R$, για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, οπότε:

$$f(f_1, ..., f_n)(a^1, ..., a^k) = f(f_1(a^1, ..., a^k), ..., f_n(a^1, ..., a^k)) \in R.$$

$\square$

Πρόταση 4. *Για κάθε σύνολο συναρτήσεων B, το $Inv(B)$ είναι σύγκλωνος.*

Απόδειξη. Έστω μία n-μελής συνάρτηση $f \in B$.

- Έστω $a^1, ..., a^n \in Eq$. Τότε, από τον ορισμό της Eq, έχουμε ότι $a^i = (a_1^i, a_2^i)$ και $a_1^i = a_2^i$, για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$. Άρα, $f(a_1) = f(a_2)$, οπότε $(f(a_1), f(a_2)) \in Eq$. f τυχαία, άρα $Eq \in Inv(B)$.
- Έστω μία m-μελής σχέση $R \in Inv(B)$, $i_1, ..., i_m \in \{1, .., k\}$ και η k-μελής σχέση R' που ορίζεται ως εξής:

  $$R'(a_1, ..., a_k) \text{ ανν } R(pr_{i_1}^k(a_1, ..., a_k), ..., pr_{i_m}^k(a_1, ..., a_k)).$$

  Έστω $a^1, ..., a^n \in R'$. Τότε $(a_{i_1}^1, ..., a_{i_m}^1), ..., (a_{i_1}^n, ..., a_{i_m}^n) \in R$. Αφού $f \rhd R$, $(f(a_{i_1}^1, ..., a_{i_1}^n), ..., f(a_{i_m}^1, ..., a_{i_m}^n)) \in R$. Άρα,
  $(f(a_1), ..., f(a_k)) \in R'$ και, αφού f τυχαία, $R' \in Inv(B)$.
- Έστω μία m-μελής $R \in Inv(B)$ και
  $(a_1^1, ..., a_{m-1}^1), ..., (a_1^n, ..., a_{m-1}^n) \in R_m$. Τότε, υπάρχουν $a_m^1, ..., a_m^n$ τ.ω. $(a_1^1, ..., a_m^1), ..., (a_1^n, ..., a_m^n) \in R$. Αφού $f \rhd R$, $(f(a_1), ..., f(a_m)) \in R$, άρα και $(f(a_1), ..., f(a_{m-1})) \in R_m$. Αφού f τυχαία, $R_m \in Inv(B)$.

- Έστω δύο m-μελείς σχέσεις $R_1, R_2 \in Inv(B)$ και $a^1, ..., a^n \in R_1 \cap R_2$. Τότε, προφανώς, $(f(a_1), ..., f(a_m)) \in R_1 \cap R_2$ και, αφού f τυχαία, $R_1 \cap R_2 \in Inv(B)$.

$\square$

Με απλή εφαρμογή των ορισμών 1 και 2, προκύπτει ότι αν δύο σύνολα X, Y είναι κλώνοι (σύγκλωνοι), τότε η τομή τους $X \cap Y$ είναι κλώνος (σύγκλωνος). Έχει νόημα λοιπόν να ορίσουμε τα εξής:

- Για ένα σύνολο τελεστών Boole, B, θα συμβολίζουμε με $[B]$ τον μικρότερο κλώνο που περιέχει το B, ή αλλιώς τον κλώνο που παράγεται από το B. Παρατηρούμε εδώ ότι $[B] = \bigcap\{F \text{ κλώνος } \mid B \subseteq F\}$.
- Για ένα σύνολο σχέσεων Boole, S, θα συμβολίζουμε με $\langle S\rangle$ τον μικρότερο σύγκλωνο που περιέχει το S, ή αλλιώς τον σύγκλωνο που παράγεται από το S. Παρατηρούμε εδώ ότι $\langle S\rangle = \bigcap\{G \text{ σύγκλωνος } \mid S \subseteq G\}$.

Θα τελειώσουμε αυτήν την παράγραφο με την απόδειξη του θεωρήματος του Geiger (βλ. [18]). Για την απόδειξη του θεωρήματος, θα μας φανούν πολύ χρήσιμες οι διαλέξεις του Jin-Yi Cai (βλ. [6], [5]). Θα χρειαστούμε επίσης την έννοια του *μερικού πολυμορφισμού*. Υπενθυμίζουμε ότι ένας n-μελής μερικός τελεστής Boole, είναι μια συνάρτηση f με $Dom(f) \subseteq \{0,1\}^n$ (και $Im(f) \subseteq \{0,1\}$).

Ορισμός 4. *Έστω $R \subseteq \{0,1\}^m$ και f ένας n-μελής μερικός τελεστής Boole. Λέμε ότι η συνάρτηση f είναι μερικός πολυμορφισμός της σχέσης R αν για κάθε $a^1 = (a^1_1, ..., a^1_m), ..., a^n = (a^n_1, ..., a^n_m) \in R$, έχουμε:*

$$a_1, ..., a_m \in Dom(f) \Rightarrow (f(a_1), ..., f(a_m)) \in R.$$

Αντίστοιχα με τους απλούς πολυμορφισμούς, μία μερική συνάρτηση είναι μερικός πολυμορφισμός ενός συνόλου σχέσεων S, αν είναι μερικός πολυμορφισμός κάθε σχέσης $R \in S$.

Θεώρημα 1. *Έστω B ένα σύνολο τελεστών Boole και S ένα σύνολο σχέσεων Boole. Ισχύουν τα εξής:*

- $Pol(Inv(B)) = [B]$,
- $Inv(Pol(S)) = \langle S\rangle$.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι $Inv(B) = Inv([B])$ και ότι $Pol(S) = Pol(\langle S\rangle)$. Άρα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα B και S είναι κλώνοι και σύγκλωνοι αντίστοιχα. Τώρα, καθώς $B = [B]$, $S = \langle S\rangle$ και αυτοί είναι οι μικρότεροι κλώνοι και σύγκλωνοι που περιέχουν το B και το S αντίστοιχα, έχουμε ότι $B \subseteq Pol(Inv(B))$ και $S \subseteq Inv(Pol(S))$. Θα αποδείξουμε ξεχωριστά τους αντίστροφους εγκλεισμούς με αντιθετοαναστροφή.

- Έστω μία n-μελής συνάρτηση $f \notin B$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $R \in Inv(B)$ τέτοια ώστε να μην διατηρείται από την f.

  Έστω T ένας $2^n \times n$ πίνακας, του οποίου κάθε γραμμή είναι κι ένα διαφορετικό διάνυσμα από το $\{0,1\}^n$ σε κάποια αυθαίρετη σειρά. Αναγκαστικά, ο πίνακας θα περιέχει από μία φορά κάθε ένα από τα 2^n διανύσματα του $\{0,1\}^n$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ανάλογο συμβολισμό για πίνακες: t^i για τις γραμμές του και t_j για τις στήλες του.

  Έστω $B^{(n)}$ το σύνολο όλων των n-μελών συναρτήσεων του B. Για κάθε $g \in B^{(n)}$, υπολογίζουμε το διάνυσμα στήλη $g(T)$. Κατασκευάζουμε τον $2^n \times m$ πίνακα M ως τον πίνακα T μαζί με όλα τα διανύσματα στήλες $g(T)$. Προφανώς, $m = |B^{(n)}|$.

  Έστω $R = \{g(T)^T \mid g \in B^{(n)}\}$. Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία της R είναι οι στήλες του πίνακα M και αποδεικνύουμε ότι $R \in Inv(B)$.

  Προφανώς, για κάθε $j \in \{1,...,n\}$, $t_j \in R$, αφού $t_j = pr_j^n(T)$, και $pr_j^n \in B^{(n)}$, αφού B κλώνος. Θέτουμε $k = 2^n$.

  Έστω μία r-μελής συνάρτηση $h \in B$ και
  $x^1 = (x_1^1,...,x_k^1),...,x^r = (x_1^r,...,x_k^r) \in R$. Από τον ορισμό της R, τα $x^1,...,x^r$ είναι στήλες του πίνακα M, άρα υπάρχουν συναρτήσεις $g_1,...,g_r \in B^{(n)}$ με $x^i = (g_i(t^1),...,g_i(t^k))$, για κάθε $i \in \{1,...,r\}$. Άρα, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}&(h(x_1^1,...,x_1^r),...,h(x_k^1,...,x_k^r)) = \\ &\qquad = (h(g_1(t^1),...,g_r(t^1)),...,h(g_1(t^k),...,g_r(t^k))) := x^*.\end{aligned}$$

  Αφού B κλώνος και $h, g_1,...,g_r \in B$, $h(g_1,...,g_r) \in B$. Άρα το x^* είναι στήλη του M, οπότε ανήκει στην σχέση R. Αφού h τυχαία, $R \in Inv(B)$.

  Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η f δεν διατηρεί την R. Έστω, προς άτοπο, ότι την διατηρεί. Αφού $T^T \subset R$, πρέπει
  $(f(t^1),...,f(t^k)) = f(T) \in R$. Άρα, υπάρχει $g \in B^{(n)}$ τέτοια ώστε $g(T) = f(T)$. Αφού $\{t^1,...,t^k\} = \{0,1\}^n$, $f = g$, άρα $f \in B$. Άτοπο.

- Έστω μία m-μελής σχέση $R \notin S$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $f \in Pol(S)$ η οποία να μην διατηρεί την R. Θα χρειαστούμε το εξής λήμμα:

  Λήμμα 1. *Αν S σύγκλωνος, τότε κάθε μερικός πολυμορφισμός f του S μπορεί να επεκταθεί σε πολυμορφισμό του S.*

  Απόδειξη. Έστω n-μελής μερικός πολυμορφισμός f του S. Αν $Dom(f) = \{0,1\}$, τότε δεν έχουμε κάτι να δείξουμε. Αν $Dom(f) = \emptyset$, τότε κάθε $g \in Pol(S)$ τον επεκτείνει, και $Pol(S) \neq \emptyset$ αφού είναι κλώνος κι άρα περιέχει όλες τις προβολές. Άρα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\emptyset \neq Dom(f) \subsetneq \{0,1\}^n$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μερικός πολυμορφισμός f' που επεκτείνει τον f κατά μία ακόμη n-άδα από το $\{0,1\}^n$. Αφού το $\{0,1\}^n$ είναι πεπερασμένο, μπορούμε επαγωγικά να συμπεράνουμε ότι ο f μπορεί να επεκταθεί σε πολυμορφισμό του S.

Έστω $Dom(f) = \{r_1, ..., r_k\}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ και $r \notin \{r_1, ..., r_k\}$ ένα στοιχείο του $\{0,1\}^n$. Έστω επίσης $f_0 = f \cup \{(r,0)\}$ και
$f_1 = f \cup \{(r,1)\}$. Θα αποδείξουμε ότι τουλάχιστον μία από τις συναρτήσεις f_0, f_1 είναι μερικός πολυμορφισμός του S. Προφανώς και οι δύο επεκτείνουν την f.

Έστω, προς άτοπο, ότι καμία από τις δύο δεν είναι μερικός πολυμορφισμός του S. Τότε, υπάρχει μία m_0-μελής $R_0 \in S$ και μία m_1-μελής $R_1 \in S$ με την f_0 να μην διατηρεί την R_0 και την f_1 να μην διατηρεί την f_1. Δηλαδή, υπάρχουν $n \times m_i$ πίνακες $M_i \subset R_i$, στις στήλες των οποίων ορίζονται οι f_i τ.ω. $f_i(M_i^T)^T \notin R_i$, $\forall i \in \{0,1\}$. Είναι προφανές λοιπόν ότι οι στήλες των M_i είναι κάποια διανύσματα από τα $\{r_1, ..., r_k, r\}$. Μερικές απλές παρατηρήσεις για τους πίνακες αυτούς:

- Το διάνυσμα r είναι στήλη του M_i, για κάθε $i \in \{0,1\}$.
  Έστω, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι δεν είναι για τον M_1. Τότε $f_1(M_1^T)^T = f(M_1^T)^T$, άρα f δεν είναι μερικός πολυμορφισμός του S. Άτοπο.
- Τουλάχιστον ένας από τους M_0 και M_1 έχει τουλάχιστον δύο στήλες.
  Έστω ότι και οι δύο έχουν μία στήλη. Τότε $M_0 = M_1 = r^T$ και οι R_0, R_1 είναι μονομελείς σχέσεις. Έστω ότι το πρώτο στοιχείο του r είναι $i \in \{0,1\}$. Τότε, $f_i(r) = i \in R_i$, αφού $M_i \subset R_i$. Άτοπο.
- Μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν στήλες που να ταυτίζονται στον M_i, για κάθε $i \in \{0,1\}$.
  Έστω ότι η j-οστή και η j'-οστή στήλη του M_i ταυτίζονται, $j, j' \in \{1, ..., m_i\}$, $j \lneq j'$. Από τον ορισμό 2 του σύγκλωνου, η σχέση R_i', που ορίζεται ως εξής:

$$R_i'(x_1, ..., x_j, ..., x_{j'-1}, x_{j'+1}, ...x_{m_i}) \text{ ανν } \exists x_{j'} R_i(x_1, ..., x_j, ..., x_{j'}, ..., x_{m_i}) \wedge Eq(j, j')$$

  ανήκει στο S. Έστω ο πίνακας $N_i \subset R_i'$ που είναι ο M_i χωρίς την στήλη j'. Προφανώς, αν $f_i(N_i^T)^T \in R_i'$, τότε $f_i(M_i^T)^T \notin R_i$. Άτοπο. Άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την R_i' αντί της R_i.

Κατασκευάζουμε τώρα τον $n \times (m_1 + m_2)$ πίνακα N, με τις πρώτες m_1 στήλες του να είναι οι στήλες του M_1 και οι υπόλοιπες του M_2. Έστω επίσης ότι η i-οστή και η j-οστή στήλη του N είναι η r, $i \in \{1, ..., m_1\}$, $j \in \{m_1 + 1, ..., m_2\}$. Έστω τώρα $R' = R_1 \times R_2$. Προφανώς, $R' \in S$ και $N \subset R'$.

Έστω τώρα ο πίνακας N_*, που είναι ο N χωρίς την i-οστή και την j-οστή του στήλη. Έχουμε $N_* \subset R^* \in S$, όπου η R^* ορίζεται ως εξής:

$$R^*(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_{m_1+m_2} \text{ ανν } \exists x_i \exists x_j R'(x_1, ..., x_{m_1+m_2}) \wedge Eq(x_i, x_j)$$

Τώρα, αφού ο μερικός πολυμορφισμός f του S ορίζεται στις στήλες του N_*, $f(N_*^T)^T \in R^*$. Τώρα, από τον ορισμό της R_*, υπάρχει $i \in \{0, 1\}$ τ.ώ. $f_i(N^T)^T \in R'$. Άρα, $f_i(M_i^T)^T \in R_i$. Άτοπο. □

Για την απόδειξη του θεωρήματος, ξεκινάμε ορίζοντας

$$P = \bigcap_{Q \in S, Q \supseteq R} Q.$$

Αφού το S είναι σύγκλωνος, $P \in S$ και, αφού $R \notin S$, υπάρχει $t \in P \setminus R$.

Έστω $N \subset R$ ο $k \times m$ πίνακας που περιέχει όλα τα διανύσματα της R (άρα $|R| = k$). Θα δείξουμε ότι υπάρχει k-μελής μερική συνάρτηση f τ.ώ. $f(N^T) = t^T$.

Αν κάθε στήλη του N είναι διαφορετικό διάνυσμα στο $\{0, 1\}^k$, προφανώς υπάρχει τέτοια f. Έστω τώρα ότι υπάρχουν $i, j \in \{1, ..., m\}$ τ.ώ. οι στήλες i και j του N να ταυτίζονται. Τότε, $R \subseteq E^m_{i,j} \in S$, αφού S σύγκλωνος. Άρα, $E^m_{i,j} \in \{Q \in S \mid Q \supseteq R\}$, οπότε $P \subseteq E^m_{i,j}$. Άρα και πάλι η ζητούμενη f υπάρχει. Αρκεί πλέον να δειχθεί ότι αυτή η f είναι μερικός πολυμορφισμός του S, αφού η f προφανώς δεν διατηρεί την R και αφού, από το λήμμα 1, θα μπορεί να επεκταθεί σε πολυμορφισμό του S.

Έστω ότι υπάρχει n-μελής σχέση $R' \in S$ τ.ώ. η f να μην την διατηρεί. Άρα υπάρχει ένας $k \times n$ πίνακας $M \subset R'$ στις στήλες του οποίου ορίζεται η f και $f(M^T)^T$. Υποθέτουμε επίσης ότι η R' είναι ελαχιστική ως προς το πλήθος των μελών της (R has minimal arity). Τότε, οι στήλες του M είναι διαφορετικές ανά δύο:

Έστω ότι οι στήλες i, j ταυτίζονται. Τότε η σχέση:

$$R''(x_1, ..., x_i, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n) \text{ ανν } \exists x_j R'(x_1, ..., x_n) \wedge Eq(x_i, x_j).$$

Προφανώς $R'' \in S$, και, για τον πίνακα $M_* \subset R''$ που είναι ο M χωρίς την j-οστή στήλη, ισχύει $f(M_*^T)^T \notin R''$. Άρα η R' δεν είναι ελαχιστική ως προς τα μέλη της. Άτοπο.

Τώρα, αφού η f έχει ορισθεί μόνο πάνω σε στήλες του , ισχύει ότι οι στήλες του M είναι στήλες του N, χωρίς επανάληψη. Άρα $n \leq m$. Έστω, χ.β.τ.γ, ότι είναι οι πρώτες n.

Έχουμε ότι $R \subseteq R' \times \{0,1\}^{(m-n)} \in S$. Άρα, $P \subseteq R' \times \{0,1\}^{(m-n)}$, οπότε $t \in R' \times \{0,1\}^{(m-n)}$. Συνεπώς $(t_1, ..., t_n) \in R'$. Άτοπο, αφού $(t_1, ..., t_n) = f(M^T)^T \notin R'$.

□

1.2 Η σύνδεση του Galois

Σε αυτήν την παράγραφο, θα αναπτύξουμε το εργαλείο με το οποίο θα μπορέσουμε να περάσουμε από την θεωρία κλώνων στην πολυπλοκότητα των προβλημάτων ικανοποιησιμότητας. Θα συμβολίζουμε με $\mathbb{B}$ το σύνολο όλων των κλώνων και με $\mathbb{S}$ το σύνολο όλων των συγκλώνων.

Ορισμός 5. *Σύνδεσμος ή δικτυωτό (lattice), ονομάζεται μια τετράδα $(L, \leq, \wedge, \vee)$, όπου L είναι ένα σύνολο μερικώς διατεταγμένο από την $\leq$ και όπου, κάθε δύο στοιχεία $x, y \in L$, έχουν κατώτατο άνω φράγμα (join), που συμβολίζεται με $x \vee y$ και ανώτατο κάτω φράγμα (meet), που συμβολίζεται με $x \wedge y$.*

Θεώρημα 2. *Έστω $X, Y \in \mathbb{B}$ (ή $X, Y \in \mathbb{S}$ αντίστοιχα). Συμβολίζουμε με:*

- *$X \sqcup Y$ τον μικρότερο κλώνο (σύγκλωνο αντίστοιχα) που περιέχει τα X, Y,*
- *$X \sqcap Y$ τον μεγαλύτερο κλώνο (σύγκλωνο αντίστοιχα) που περιέχεται στα X, Y.*

Η τετράδα $(\mathbb{B}, \subseteq, \sqcup, \sqcap)$ ($(\mathbb{S}, \subseteq, \sqcup, \sqcap)$ αντίστοιχα) είναι σύνδεσμος.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα μόνο για το $\mathbb{B}$. Η απόδειξη για το $\mathbb{S}$ είναι η ίδια.

Έστω $X, Y \in \mathbb{B}$. $[X \cap Y] = X \cap Y \subseteq X \sqcap Y$. Η ισότητα ισχύει επειδή η τομή δύο κλώνων είναι κλώνος κι ο εγλεισμός από τον ορισμό του $X \sqcap Y$. Εξ ορισμού, $X \sqcap Y \subseteq X, Y$, άρα $X \sqcap Y \subseteq X \cap Y$, οπότε και $X \sqcap Y = X \cap Y$. Άρα κάθε δύο στοιχεία του $\mathbb{B}$ έχουν ως ανώτατο κάτω φράγμα την τομή τους.

Εξ ορισμού και πάλι, $X \sqcup Y \subseteq [X \cup Y]$. Τέλος, αφού $X \cup Y \subseteq X \sqcup Y$, και $[X \cup Y]$ ο μικρότερος κλώνος που περιέχει το $X \cup Y$, έχουμε την ισότητα $X \sqcup Y = [X \cup Y]$. Άρα κάθε δύο στοιχεία του $\mathbb{B}$ έχουν ως κατώτατο άνω φράγμα τον κλώνο που παράγεται από την ένωσή τους. □

Μπορούμε πλέον να ορίσουμε την βασική έννοια αυτής της ενότητας, την σύνδεση του Galois (βλ. [12],[13],[27]). Για να το κάνουμε αυτό, θα σκεφτούμε τα σύνολα $Pol(S), Inv(B)$ της προηγούμενης ενότητας ως συναρτήσεις μεταξύ των συνόλων $\mathbb{B}$ και $\mathbb{S}$.

Ορισμός 6. *Οι συναρτήσεις $Pol : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{B}$ και $Inv : \mathbb{B} \mapsto \mathbb{S}$ αποτελούν σύνδεση του Galois (Galois connection) μεταξύ των συνδέσμων $(\mathbb{B}, \subseteq, \sqcup, \sqcap)$ και $(\mathbb{S}, \subseteq, \sqcup, \sqcap)$. Δηλαδή, ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Για όλα τα $X, Y \in \mathbb{S}$, ισχύει ότι $X \subseteq Y \Rightarrow Pol(Y) \subseteq Pol(X)$.*
2. *Για όλα τα $Z, W \in \mathbb{B}$, ισχύει ότι $Z \subseteq W \Rightarrow Inv(W) \subseteq Inv(Z)$.*
3. *Για όλα τα $X \in \mathbb{S}$ και $Z \in \mathbb{B}$, ισχύει ότι $X \subseteq Inv(Pol(X))$ και $Z \subseteq Pol(Inv(Z))$.*

Απόδειξη. Για τις περιπτώσεις 1 και 2, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν μια συνάρτηση διατηρεί το Y, θα διατηρεί και το X και αν μια σχέση διατηρείται από το W, θα διατηρείται κι από το Z. Για την περίπτωση 3, ξέρουμε ότι ισχύει η ισότητα λόγω του θεωρήματος του Geiger. □

Η απόδειξη της επόμενης πρότασης είναι απλή, με χρήση ορισμών ή και θεωρήματος Geiger. Ως εκ τούτου, παραλείπεται.

Πρόταση 5. *Οι συναρτήσεις $Inv(Pol) : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{S}$ και $Pol(Inv) : \mathbb{B} \mapsto \mathbb{B}$ είναι τελεστές κλειστότητας. Δηλαδή, ισχύουν τα παρακάτω, για κάθε $X, Y \in \mathbb{S}$ και για κάθε $Z, W \in \mathbb{B}$:*

1. *$X \subseteq Inv(Pol(X))$ και $Z \subseteq Pol(Inv(Z))$,*
2. *$X \subseteq Y \Rightarrow Inv(Pol(X)) \subseteq Inv(Pol(Y))$ και*
   $Z \subseteq W \Rightarrow Pol(Inv(Z)) \subseteq Pol(Inv(W))$,
3. *$Inv(Pol(X)) = Inv(Pol(Inv(Pol(X))))$ και*
   $Pol(Inv(Z)) = Pol(Inv(Pol(Inv(Z))))$.

Το παρακάτω θεώρημα είναι πολύ σημαντικό, καθώς μας δίνει μια πολύ ισχυρή σχέση μεταξύ των δύο συνδέσμων.

Θεώρημα 3. *Οι σύνδεσμοι $(\mathbb{B}, \subseteq, \sqcup, \sqcap)$ και $(\mathbb{S}, \subseteq, \sqcup, \sqcap)$ είναι αντι-ισομορφικοί. Οι συναρτήσεις $Pol : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{B}$ και $Inv : \mathbb{B} \mapsto \mathbb{S}$ είναι αντι-σομορφισμοί συνδέσμων, δηλαδή:*

1. *είναι $1-1$, επί και*
2. *για κάθε $X, Y \in \mathbb{S}$ και για κάθε $Z, W \in \mathbb{B}$, ισχύει ότι:*
   - *$X \subseteq Y \Rightarrow Pol(Y) \subseteq Pol(X)$ και*
   - *$Z \subseteq W \Rightarrow Inv(W) \subseteq Inv(Z)$.*

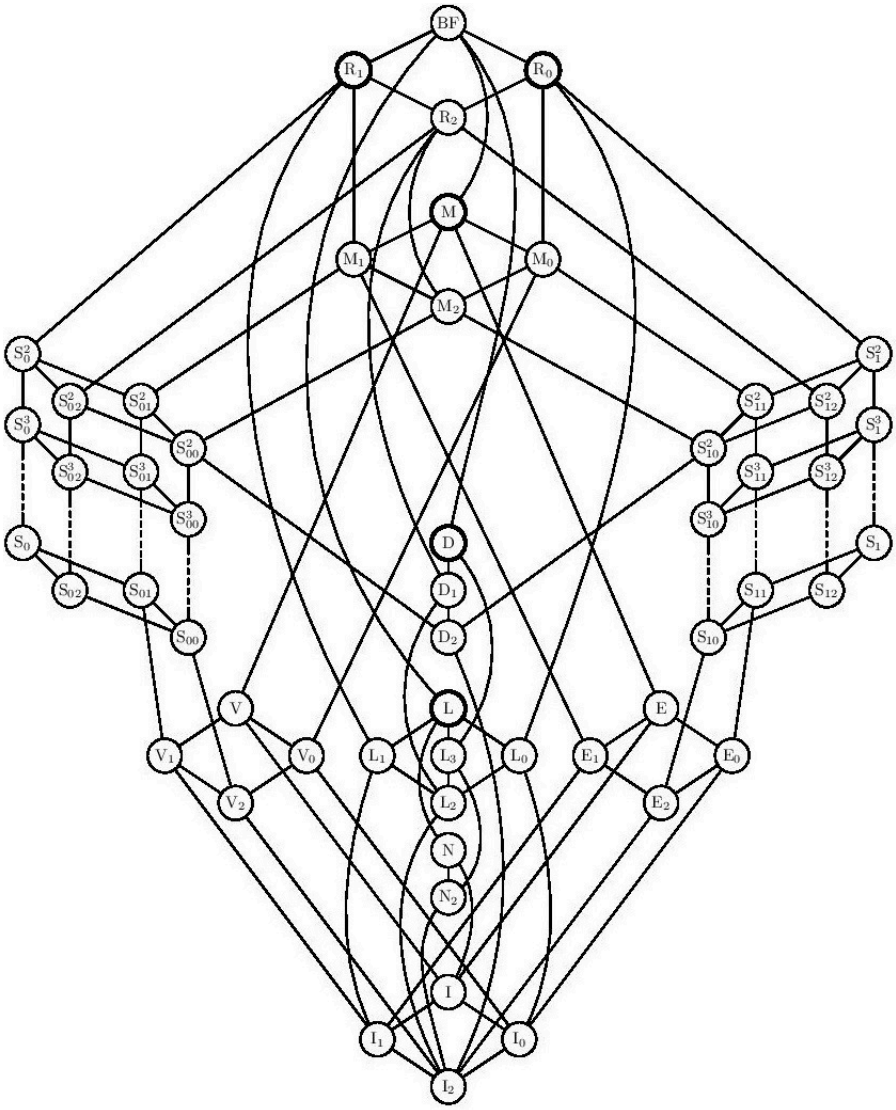
Απόδειξη. Η δεύτερη συνθήκη έχει αποδειχθεί. Για την πρώτη, έστω $Pol(X) = Pol(Y)$. Τότε $Inv(Pol(X)) = Inv(Pol(Y))$ και, λόγω του Θ.Geiger, $X = Y$. Άρα Pol $1-1$.

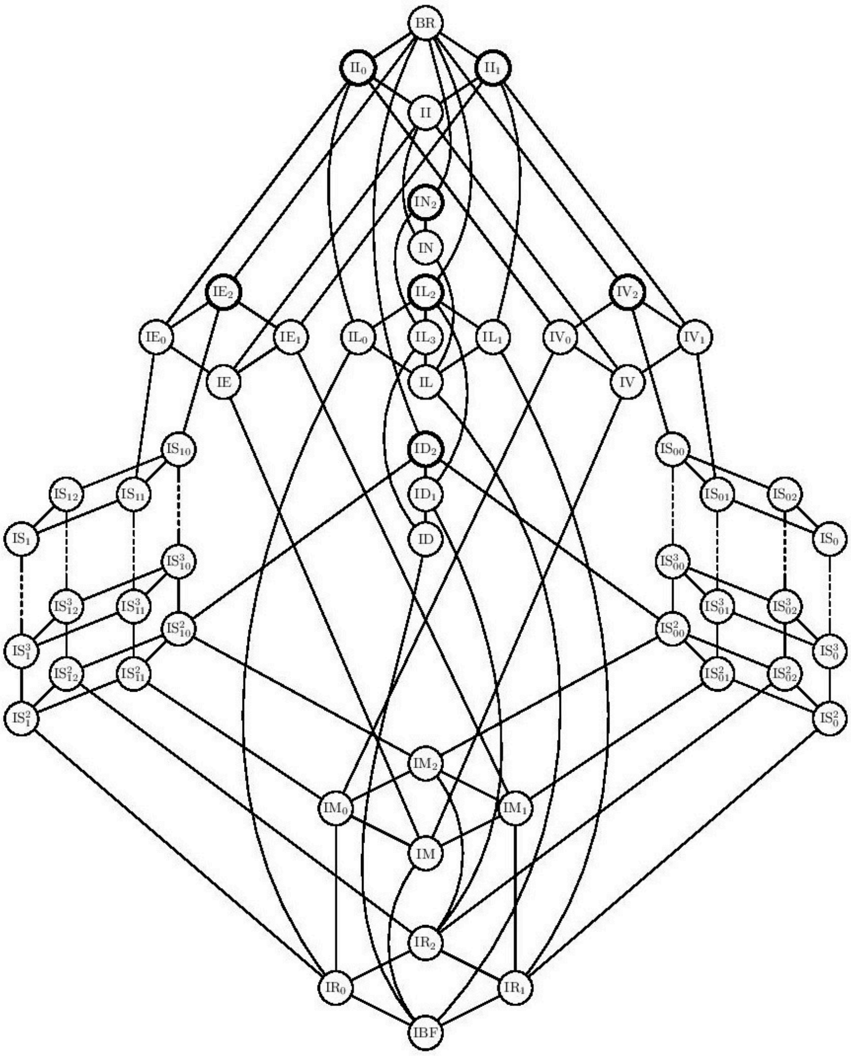
Έστω τώρα $Z \in \mathbb{B}$. Από το Θ.Geiger και πάλι, $Z = Pol(Inv(Z))$, άρα Pol επί. Αντίστοιχα και για την Inv. □

Τελειώνοντας αυτήν την παράγραφο, αναφέρουμε εδώ ότι η πλήρης περιγραφή των δύο συνδέσμων είναι δουλειά του E. L. Post (βλ. [26]). Κάποιες άλλες εργασίες που ασχολούνται με τον σύνδεσμο του Post είναι του R. Poeschel (βλ. [25]) και του I. E. Zverovich (βλ. [29]).
Στις επόμενες σελίδες, παραθέτουμε τους δύο συνδέσμους, με τον κάπως απλοποιημένο συμβολισμό που ακολουθούν οι E. Boehler, N. Creignou, S. Reich και H. Vollmer (βλ. [12], [13]) και ένα πίνακα με την εξήγηση αυτών των συμβολισμών. Οι συμβολισμοί που θα μας χρειαστούν στην απόδειξη του θεωρήματος του Schaefer θα αναλυθούν και στην απόδειξη του θεωρήματος.

Τέλος, ας αναφέρουμε απλώς ότι ο σύνδεσμος του Post αποτελεί ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα από μόνος του κι όχι απλώς επειδή προσφέρει μια εναλλακτική οδό για την απόδειξη του θεωρήματος του Schaefer. Ο λόγος που δεν αποδεικνύουμε εδώ την δομή του, είναι ότι αυτό θα αποτελούσε μια εργασία από μόνη της. Προσπαθήσαμε όμως να αναπτύξουμε όλη την γενική θεωρία που χρειάζεται κανείς για να μπορέσει να ασχοληθεί με το θέμα.

Class	Definition	Base(s)
BF	all Boolean functions	$\{and, not\}$
R_0	$\{f \in BF \mid f$ is 0-reproducing$\}$	$\{and, xor\}$
R_1	$\{f \in BF \mid f$ is 1-reproducing$\}$	$\{or, x \oplus y \oplus 1\}$
R_2	$R_1 \cap R_0$	$\{or, x \wedge (y \oplus z \oplus 1)\}$
M	$\{f \in BF \mid f$ is monotonic$\}$	$\{and, or, c_0, c_1\}$
M_1	$M \cap R_1$	$\{and, or, c_1\}$
M_0	$M \cap R_0$	$\{and, or, c_0\}$
M_2	$M \cap R_2$	$\{and, or\}$
S_0^n	$\{f \in BF \mid f$ is 0-separating of degree $n\}$	$\{imp, \mathrm{dual}(h_n)\}$
S_0	$\{f \in BF \mid f$ is 0-separating$\}$	$\{imp\}$
S_1^n	$\{f \in BF \mid f$ is 1-separating of degree $n\}$	$\{x \wedge \overline{y}, h_n\}$
S_1	$\{f \in BF \mid f$ is 1-separating$\}$	$\{x \wedge \overline{y}\}$
S_{02}^n	$S_0^n \cap R_2$	$\{x \vee (y \wedge \overline{z}), \mathrm{dual}(h_n)\}$
S_{02}	$S_0 \cap R_2$	$\{x \vee (y \wedge \overline{z})\}$
S_{01}^n	$S_0^n \cap M$	$\{\mathrm{dual}(h_n), c_1\}$
S_{01}	$S_0 \cap M$	$\{x \vee (y \wedge z), c_1\}$
S_{00}^n	$S_0^n \cap R_2 \cap M$	$\{x \vee (y \wedge z), \mathrm{dual}(h_n)\}$
S_{00}	$S_0 \cap R_2 \cap M$	$\{x \vee (y \wedge z)\}$
S_{12}^n	$S_1^n \cap R_2$	$\{x \wedge (y \vee \overline{z}), h_n\}$
S_{12}	$S_1 \cap R_2$	$\{x \wedge (y \vee \overline{z})\}$
S_{11}^n	$S_1^n \cap M$	$\{h_n, c_0\}$
S_{11}	$S_1 \cap M$	$\{x \wedge (y \vee z), c_0\}$
S_{10}^n	$S_1^n \cap R_2 \cap M$	$\{x \wedge (y \vee z), h_n\}$
S_{10}	$S_1 \cap R_2 \cap M$	$\{x \wedge (y \vee z)\}$
D	$\{f \mid f$ is self-dual$\}$	$\{x\overline{y} \vee x\overline{z} \vee \overline{yz}\}$
D_1	$D \cap R_2$	$\{xy \vee x\overline{z} \vee y\overline{z}\}$
D_2	$D \cap M$	$\{xy \vee yz \vee xz\}$
L	$\{f \mid f$ is linear$\}$	$\{xor, c_1\}$
L_0	$L \cap R_0$	$\{xor\}$
L_1	$L \cap R_1$	$\{eq\}$
L_2	$L \cap R_2$	$\{x \oplus y \oplus z\}$
L_3	$L \cap D$	$\{x \oplus y \oplus z \oplus c_1\}$
V	$\{f \mid f$ is an n-ary *or*-function or a constant function$\}$	$\{or, c_0, c_1\}$
V_0	$[\{or\}] \cup [\{c_0\}]$	$\{or, c_0\}$
V_1	$[\{or\}] \cup [\{c_1\}]$	$\{or, c_1\}$
V_2	$[\{or\}]$	$\{or\}$
E	$\{f \mid f$ is an n-ary *and*-function or a constant function$\}$	$\{and, c_0, c_1\}$
E_0	$[\{and\}] \cup [\{c_0\}]$	$\{and, c_0\}$
E_1	$[\{and\}] \cup [\{c_1\}]$	$\{and, c_1\}$
E_2	$[\{and\}]$	$\{and\}$
N	$[\{not\}] \cup [\{c_0\}] \cup [\{c_1\}]$	$\{not, c_1\}, \{not, c_0\}$
N_2	$[\{not\}]$	$\{not\}$
I	$[\{id\}] \cup [\{c_1\}] \cup [\{c_0\}]$	$\{id, c_0, c_1\}$
I_0	$[\{id\}] \cup [\{c_0\}]$	$\{id, c_0\}$
I_1	$[\{id\}] \cup [\{c_1\}]$	$\{id, c_1\}$
I_2	$[\{id\}]$	$\{id\}$


BF
R_1
R_0
R_2
M
M_1
M_0
M_2
S_0^2
S_{02}^2
S_{01}^2
S_{00}^2
S_0^3
S_{02}^3
S_{01}^3
S_{00}^3
S_0
S_{02}
S_{01}
S_{00}
S_1^2
S_{11}^2
S_{12}^2
S_{10}^2
S_1^3
S_{11}^3
S_{12}^3
S_{10}^3
S_1
S_{11}
S_{12}
S_{10}
D
D_1
D_2
L
L_1
L_3
L_0
L_2
V
V_1
V_0
V_2
E
E_1
E_0
E_2
N
N_2
I
I_1
I_0
I_2


BR
II_0
II_1
II
IN_2
IN
IE_2
IL_2
IV_2
IE_0
IE_1
IL_0
IL_3
IL_1
IV_0
IV_1
IE
IL
IV
IS_{10}
ID_2
IS_{00}
IS_{12}
IS_{11}
ID_1
IS_{01}
IS_{02}
IS_1
ID
IS_0
IS_{10}^3
IS_{00}^3
IS_{12}^3
IS_{11}^3
IS_{01}^3
IS_{02}^3
IS_1^3
IS_{10}^2
IS_{00}^2
IS_0^3
IS_{12}^2
IS_{11}^2
IS_{01}^2
IS_{02}^2
IS_1^2
IS_0^2
IM_2
IM_0
IM_1
IM
IR_2
IR_0
IR_1
IBF

1.3 Το θεώρημα διχοτόμησης του Schaefer

Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας τι είναι ένα πρόβλημα ικανοποιησιμότητας ή Πρόβλημα Ικανοποίησης Περιορισμών (Constraint Satisfaction Problem). Τα προβλήματα αυτά είναι παραλλαγές του κλασικού προβλήματος ικανοποιησιμότητας (SAT) αλλά με περιορισμούς στις φόρμουλες που μπορούμε να κατασκευάσουμε.

Ορισμός 7. *Έστω S ένα σύνολο σχέσεων (που τις ονομάζουμε περιορισμούς) και V ένα σύνολο μεταβλητών. Μία S-φόρμουλα ϕ σε Κανονική Συζευκτική Μορφή (Κ.Σ.Μ(S) φόρμουλα ή S-φόρμουλα), είναι μία σύζευξη από περιορισμούς από το S, εφαρμοσμένους πάνω σε μεταβλητές από το V:*

$$\phi(x_1, ..., x_n) = \bigwedge_{i=1}^{m} R^i(x_1^i, ..., x_{m_i}^i),$$

όπου $R^i \in S$, για κάθε $i \in \{1, ..., m\}$ και $x_j^i \in \{x_1, ..., x_n\} \subseteq V$, για κάθε i, j.

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει σε αυτήν την παράγραφο, ορίζεται ως εξής:

Πρόβλημα: ΚΣΜ(S) (ή SAT(S)).
Είσοδος: S-φόρμουλα ϕ.
Ερώτηση: Είναι η ϕ ικανοποιήσιμη;

Θα χρησιμοποιήσουμε την αγγλική ορολογία $SAT(S)$ που είναι καθιερωμένη στην θεωρία πολυπλοκότητας. Θα χρειαστούμε κάποιες προτάσεις, που συνδέουν την θεωρία κλώνων με την πολυπλοκότητα του SAT, πρωτού φτάσουμε στο θεώρημα του Schaefer.

Πρόταση 6. *Για κάθε σύνολο S από σχέσεις Boole, το πρόβλημα $SAT(S)$ είναι πολυωνυμικά ισοδύναμο με το $SAT(\langle S \rangle)$.*

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι μία S-φόρμουλα είναι, με τετριμμένο τρόπο, μία $\langle S \rangle$-φόρμουλα. Αυτό καθιστά προφανή την σχέση $SAT(S) \leq_P SAT(\langle S \rangle)$. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω μία $\langle S \rangle$-φόρμουλα πάνω στις μεταβλητές $u_1, ..., u_n$. Κατασκευάζουμε μία S-φόρμουλα ϕ' ως εξής:

- Η ϕ' θα περιέχει όλους τους περιορισμούς $R(u_{i_1}, ..., u_{i_r})$ για τους οποίους ισχύει ότι $R \in S$.
- Αν η ϕ περιέχει κάποιον περιορισμό $Eq(u_1, u_2)$ (και $Eq \notin S$), τον διαγράφουμε και ταυτίζουμε τις μεταβλητές u_1, u_2 στην υπόλοιπη φόρμουλα.

- Αν η ϕ περιέχει κάποιον περιορισμό $\exists x_j R(u_{i_1}, ..., u_{j-1}, x_j, u_{j+1}, ..., u_{i_r})$, με $R_{-j} \notin S$ και $R \in S$, τον αντικαθιστούμε με τον περιορισμό $R(u_{i_1}, ..., u_{j-1}, u^*, u_{j+1}, ..., u_{i_r})$, όπου $u^* \neq \{u_1, ..., u_n\}$.

- Αν η ϕ περιέχει κάποιον περιορισμό $R(u_{i_1}, ..., u_{i_r})$, με $R \notin S$ και $R' \in S$, όπου:

  $$R(x_1, ..., x_r) \text{ ανν } R'(pr^r_{k_1}(x_1, ..., x_r), ..., pr^r_{k_s}(x_1, ..., x_r)),$$

  τότε τον αντικαθιστούμε με τον περιορισμό $R'(u_{k_1}, ..., u_{k_s})$.

- Αν η ϕ περιέχει κάποιον περιορισμό $R(u_1, ..., u_R)$ ώστε $R \notin S$, αλλά $R = R_1 \cap R_2$, όπου $R_1, R_2 \in S$, τον αντικαθιστούμε με τον περιορισμό $R_1(u_1, ..., u_r) \wedge R_2(u_1, ..., u_r)$.

Η αναγωγή έχει περιγραφεί πλήρως και είναι πολυωνυμική. □

Πρόταση 7. *Έστω S_1,S_2 πεπερασμένα και μη-κενά σύνολα σχέσεων Boole. Αν $\langle S_1 \rangle \subseteq \langle S_2 \rangle$, τότε $SAT(S_1) \leq_P SAT(S_2)$.*

Απόδειξη. Έστω ϕ μια S_1-φόρμουλα. Τότε, από την υπόθεση, η ϕ είναι $\langle S_2 \rangle$-φόρμουλα. Άρα $SAT(S_1) \leq_P SAT(\langle S_2 \rangle) =_P SAT(S_2)$, από την Πρόταση 6. □

Το βασικό θεώρημα που θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη του Θ.Schaefer, είναι το εξής:

Θεώρημα 4. *Έστω S_1,S_2 πεπερασμένα και μη-κενά σύνολα σχέσεων Boole. Αν $Pol(S_2) \subseteq Pol(S_1)$, τότε $SAT(S_1) \leq_P SAT(S_2)$.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό 6, αφού $Pol(S_2) \subseteq Pol(S_1)$, ξέρουμε ότι $Inv(Pol(S_1)) \subseteq Inv(Pol(S_2))$. Από το θεώρημα 1, $\langle S_1 \rangle \subseteq \langle S_2 \rangle$ και άρα, από πρόταση 7, $SAT(S_1) \leq SAT(S_2)$. □

Ως τελευταίο βήμα πριν το θεώρημα του Schaefer, θα ορίσουμε κάποια συγκεκριμένα είδη σχέσεων Boole που θα μας χρειαστούν. Καθώς η βιβλιογραφία γι αυτό το θέμα είναι τεράστια, θα αναφέρουμε ενδεικτικά της εργασίες των N.Creignou et al. (βλ. [13]) και των L. Kirousis και P. Kolaitis (βλ. [20]).

Ορισμός 8. *Έστω μία σχέση Boole R. Θα λέμε ότι η R είναι:*

- *0-έγκυρη, αν $(0, ..., 0) \in R$.*

- *1-έγκυρη, αν $(1, ..., 1) \in R$.*

- *Horn, αν μπορεί να αναπαρασταθεί από μία φόρμουλα σε Κ.Σ.Μ, η οποία να έχει το πολύ μία θετική (unnegated) μεταβλητή σε κάθε όρο (clause).*

- *dual-Horn, αν μπορεί να αναπαρασταθεί από μία φόρμουλα σε Κ.Σ.Μ, η οποία να έχει το πολύ μία αρνητική (negated) μεταβλητή σε κάθε όρο (clause).*

- *bijunctive, αν μπορεί να αναπαρασταθεί από μία φόρμουλα σε Κ.Σ.Μ, η οποία να έχει το πολύ δύο μεταβλητές σε κάθε όρο (clause).*

- *αφφινική, αν μπορεί να αναπαρασταθεί από σύζευξη γραμμικών όρων (affine clauses).*

- *Schaefer, αν είναι Horn, dual-Horn, bijunctive ή αφφινική.*

Ένα σύνολο σχέσεων S θα είναι 0-έγκυρο, αν κάθε σχέση που περιέχει είναι 0-έγκυρη. Αντίστοιχα για 1-έγκυρο, Horn, dual-Horn, bijunctive, αφφινικό. Ένα σύνολο σχέσεων S θα λέγεται $Schaefer$ αν είναι Horn, dual-Horn, bijunctive ή αφφινικό.

Το Θεώρημα διχοτόμησης του Schaefer (βλ. [28]), έχει ως εξής:

Θεώρημα 5. *Έστω S ένα σύνολο σχέσεων Boole. Αν το S είναι 0-έγκυρο, 1-έγκυρο ή Schaefer, τότε το $SAT(S)$ είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο. Σε κάθε άλλη περίπτωση, είναι NP-πλήρες.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Αν το S είναι 0-έγκυρο, 1-έγκυρο ή Schaefer, υπάρχουν γνωστοί αλγόριθμοι που το επιλύουν σε πολυωνυμικό χρόνο.
($\Leftarrow$) Οι μεγιστικοί σύγκλωνοι του συνδέσμου του Post, με τον συμβολισμό που ακολουθείται στα [12], [13], είναι οι ακόλουθοι:

- $II_0 = Inv([\{c_0\}])$,

- $II_1 = Inv([\{c_1\}])$,

- $IE_2 = Inv([\{\wedge\}])$,

- $IV_2 = Inv([\{\vee\}])$,

- $ID_2 = Inv([\{maj\}])$,

- $IL_2 = Inv([\{\oplus\}])$,

- $IN_2 = Inv([\{\neg\}])$ και

- $BR = \{R \subseteq \{0,1\}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Από την υπόθεση, $S \nsubseteq II_0, II_1, IE_2, IV_2, ID_2, IL_2$. Άρα, πάλι από τον σύνδεσμο του Post, ξέρουμε ότι $S \supseteq IN_2$.

Έστω ότι $S \supsetneq IN_2$. Αφού IN_2 μεγιστικός σύγκλωνος, $\langle S\rangle = BR$, οπότε $SAT(S) =_P SAT(\langle S\rangle) = SAT(BR)$, άρα το $SAT(S)$ θα είναι NP-πλήρες.

Έστω ότι $S = \langle S \rangle = IN_2 = Inv([\{\neg\}])$. Έστω

$$R_{NAE} = \{0,1\}^3 \setminus \{(0,0,0),(1,1,1)\}.$$

Παρατηρούμε ότι $\neg \in Pol(\{R_{NAE}\})$, άρα
$[\{\neg\}] \subseteq Pol(\{R_{NAE}\})$, οπότε

$$\langle \{R_{NAE}\} \rangle = Inv(Pol(\{R_{NAE}\}) \subseteq Inv([\{\neg\}]) = IN_2.$$

Άρα, $N_2 = Pol(IN_2) \subseteq Pol(\{R_{NAE}\})$, οπότε, από το θεώρημα 4, $SAT(\{R_{NAE}\}) \leq_P SAT(IN_2) = SAT(S)$. Αφού το $SAT(\{R_{NAE}\})$ είναι NP-πλήρες, το ίδιο ισχύει και για το $SAT(S)$. $\square$

Κεφάλαιο 2

Πολυειδή Προβλήματα Ικανοποίησης Περιορισμών

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα γενικεύσουμε το μεγαλύτερο μέρος της θεωρίας που αναπτύξαμε στο κεφάλαιο 1 σε πολυειδείς (multi-sorted) σχέσεις και συναρτήσεις. Η θεωρία αυτή έχει αναπτυχθεί αναλυτικά σε εργασίες των A. Bulatov και P. Jeavons (βλ. [3],[4]). Εμείς θα την επαναλάβουμε, ακολουθώντας όμως τον τρόπο που δουλέψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Τελικός μας στόχος για το κεφάλαιο αυτό, είναι να αποδείξουμε μία εκδοχή του θεωρήματος Schaefer για πολυειδή προβλήματα. Καθώς δεν έχουμε στην διάθεσή μας τον σύνδεσμο του Post στην πολυειδή περίπτωση, θα ακολουθήσουμε το σχεδιάγραμμα της απόδειξης που κάνουν οι A. Bulatov και P. Jeavons (βλ. [3]).

Έστω τα σύνολα $\{0_j, 1_j\}$, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$, όπου $m \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι τα $\{0_j, 1_j\}$ είναι ξένα μεταξύ τους.
Ένα σύνολο

$$R \subseteq \prod_{j=1}^{m} \{0_j, 1_j\}^{i_j}$$

θα λέγεται *πολυειδής*, α_R-μελής σχέση, με m είδη, ίχνος $\sigma_R = (i_1, ..., i_m)$ και j-οστό μέλος διάστασης i_j, όπου $a_R = \sum_{j=1}^{m} i_j$ και $i_j \in \mathbb{N}$, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$.

Θα υποθέσουμε εδώ τα εξής:

- Το m είναι αρκετά μεγάλος φυσικός αριθμός για να καλύψει το πλήθος ειδών οποιασδήποτε σχέσης προκύψει στην συνέχεια.

- Όλες οι σχέσεις έχουν m είδη. Μία σχέση με λιγότερα από m είδη είναι εύκολο να μετατραπεί σε μία με m είδη ως εξής: Έστω η σχέση R που έχει $m-1$ είδη, έστω j_0 το είδος που «λείπει», I το σύνολο των συντεταγμένων των πρώτων $j_0 - 1$ ειδών και J το σύνολο των τελευταίων $m - (j_0 + 1)$. Στην θέση της R θα χρησιμοποιήσουμε την $R_I \times \{0_{j_0}, 1_{j_0}\} \times R_J$. Παρατηρούμε εδώ ότι οι δύο σχέσεις είναι "ισοδύναμες" κατά την έννοια ότι το είδος j_0 δεν επηρεάζει την σχέση σε καμία από τις δύο περιπτώσεις.

Τονίζουμε επίσης ότι, όπως προκύπτει και από τον ορισμό, σε μία πολυειδή σχέση, το j-οστό μέλος θα παίρνει τιμές στο $\{0_j, 1_j\}$, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$. Δεν επιτρέπονται δηλαδή οι αντιμεταθέσεις των ειδών.

Αντίστοιχα, μια πολυειδής, n-μελής συνάρτηση, $n \in \mathbb{N}$, με m είδη, είναι μια m-άδα $\bar{f} = (f_1, ..., f_m)$, όπου $f_j : \{0_j, 1_j\}^n \mapsto \{0_j, 1_j\}$, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$. Ο λόγος που επιλέγουμε να μην επιτρέπουμε στις f_j να έχουν διαφορετικό πλήθος μελών μεταξύ τους, θα φανεί όταν ορίσουμε την έννοια του *πολυειδούς πολυμορφισμού*.

Τέλος, σημειώνουμε ότι οι σχέσεις και οι συναρτήσεις του κεφαλαίου 1, οι οποίες είναι η ειδική περίπτωση των πολυειδών με ένα είδος, θα λέγονται *μονοειδείς*. Όπως και πριν, θα υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούμε έχουν m είδη, συχνά χωρίς να το αναφέρουμε.

2.1 Πολυειδείς κλώνοι και σύγκλωνοι

Θα ξεκινήσουμε και πάλι με τους ορισμούς των πολυειδών κλώνων και συγκλώνων.

Ορισμός 9. *Έστω B ένα σύνολο από πολυειδείς συναρτήσεις με m είδη. Το B είναι* ***πολυειδής κλώνος*** *(multi-sorted clone), αν ισχύουν τα παρακάτω:*

1. $\underbrace{(pr_i^n, ..., pr_i^n)}_{m} \in B$, *για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, όπου η κάθε προβολή είναι ορισμένη στο πεδίο $\{0_j, 1_j\}$ του είδους στο οποίο εμφανίζεται.*

2. *Έστω $\bar{f} = (f_1, ..., f_m), \bar{f}^1 = (f_1^1, ..., f_m^1), ..., \bar{f}^n = (f_1^n, ..., f_m^n) \in B$, όπου $\bar{f}$ n-μελής και $\bar{f}^1, ..., \bar{f}^n$ k-μελείς. Τότε, η πολυειδής συνάρτηση $\bar{f}(\bar{f}_1, ..., \bar{f}_n) := \bar{g} = (g_1, ..., g_m)$, η οποία ορίζεται, $\forall j \in \{1, ..., m\}$, ως εξής:*

$$g_j = f_j(f_j^1, ..., f_j^n) : \{0_j, 1_j\}^k \mapsto \{0, 1\},$$

$$g_j(a_1, ..., a_k) := f_j(f_j^1(a_1, ..., a_k), ..., f_j^n(a_1, ..., a_k)),$$

   για κάθε $(a_1, ..., a_k) \in \{0_j, 1_j\}^k$, ανήκει στο σύνολο B.

Προτού περάσουμε στον ορισμό του πολυειδούς σύγκλωνου, θα αποδείξουμε μία απλή πρόταση που συνδέει τους πολυειδείς κλώνους με τους μονοειδείς.

Πρόταση 8. *Έστω B ένας πολυειδής κλώνος. Τότε, το σύνολο B_j είναι (μονοειδής) κλώνος, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι για κάποιο $j \in \{1, ..., m\}$, το B_j δεν είναι κλώνος. Τότε, υπάρχει μία k-μελής $f \notin B_j$, μία n-μελής $g_j \in B_j$ και k-μελείς $g_j^1, ..., g_j^n \in B_j$ τέτοιες ώστε $f = (g_j(g_j^1, ..., g_j^n))$. Αφού $g_j, g_j^1, ..., g_j^n \in B_j$, υπάρχουν $\bar{g}, \bar{g}^1, ...\bar{g}^n \in B$, τ.ώ. η j-οστή τους συντεταγμένη να είναι οι $g_j, g_j^1, ..., g_j^n$ αντίστοιχα. Τότε η συνάρτηση $\bar{h} = (h_1, ..., h_m)$ με $h_i = g_i(g_i^1, ..., g_i^n)$, $\forall i \neq j$ και $h_j = f$, ανήκει στο B, άρα $f = h_j \in B_j$. Άτοπο. □

Εισάγουμε τους παρακάτω συμβολισμούς:

- $Eq^j = \{(0_j, 0_j), (1_j, 1_j)\}$, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$,
- $Eq_{s,t}^{j,n} = \{(a_1, ..., a_n) \in \{0_j, 1_j\}^n \mid a_s = a_t\}$.

Ορισμός 10. *Έστω S ένα σύνολο πολυειδών σχέσεων. Το S είναι πολυειδής* ***σύγκλωνος*** *(multi-sorted co-clone) αν ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *$\prod_{j=1}^{k-1}\{0_j, 1_j\} \times Eq^k \times \prod_{j=k+1}^{m}\{0_j, 1_j\} \in S$, $\forall j \in \{1, ..., m\}$.*

2. *Το σύνολο S είναι κλειστό κάτω από εσωτερικές προβολές ειδών: Έστω $j \in \{1, ..., m\}$, $R \in S$ και R' πολυειδείς σχέσεις, όπου το άθροισμα των διαστάσεων των πρώτων $j-1$ ειδών τους είναι $s \in \mathbb{N}^*$ και η διάσταση του j-οστού είδους τους είναι $r \in \mathbb{N}^*$ και $k \in \mathbb{N}^*$ αντίστοιχα και όπου η R' ορίζεται ως εξής:*

$$R'(a_1, ..., a_s, a_s + 1, ..., a_{s+k}, ..., a_{\alpha_{R'}}) \text{ ανν}$$
$$R(a_1, ..., a_s, pr^k_{i_1}(a_{s+1}, ..., a_{a+k}), ..., pr^k_{i_r}(a_{s+1}, ..., a_{s+k}), ..., a_{\alpha_R}),$$

   για κάθε $(a_1, ..., a_{\alpha_{R'}}) \in \prod_{j+1}^{m}\{0_j, 1_j\}^{s_j}$, $i_1, ..., i_r \in \{s+1, ..., s+k\}$. Τότε $R' \in S$.

3. *Το σύνολο S είναι κλειστό κάτω από υπαρξιακές προβολές: Αν $R \in S$, τότε η $(\alpha_R - 1)$-μελής σχέση $R_{-\alpha_R}$ ανήκει στο S.*

4. *Το σύνολο S είναι κλειστό κάτω από τομές σχέσεων με ίδιο πλήθος μελών (arity): Αν $R, R' \in S$ με $\alpha_R = \alpha'_R$, τότε η σχέση $R \cap R'$ ανήκει στο S.*

Πρόταση 9. *Έστω S ένας πολυειδής σύγκλωνος και $R_1, R_2 \in S$ των οποίων το j-οστό είδος έχει διάσταση i^1_j και i^2_j αντίστοιχα, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$. Τότε, το* ***καρτεσιανό γινόμενο κατά είδη*** *των R_1, R_2, δηλαδή η σχέση $R = R_1 \otimes R_2$ που ορίζεται ως εξής:*

$$R(a_1, ..., a_{i^1_1}, a_{i^1_1+1}, ..., a_{i^1_1+i^2_1}, a_{i^1_1+i^2_1+1}, ..., a_{i^1_1+i^2_1+i^1_2}, ..., a_{\alpha_{R_1}+\alpha_{R_2}}) \text{ ανν}$$
$$R_1(a_1, ..., a_{i^1_1}, a_{i^1_1+i^2_1+1}, ..., a_{\alpha_{R_1}}) \wedge R_2(a_{i^1_1+1}, ..., a_{i^1_1+i^2_1}, a_{i^1_1+i^2_1+i^1_2+1}, ..., a_{\alpha_{R_2}}),$$

για κάθε $(a_1, ..., a_{\alpha_{R_1}+\alpha_{R_2}}) \in \prod_{j=1}^{m}\{0_j, 1_j\}^{i^1_j+i^2_j}$, ανήκει στο S.

Η απόδειξη είναι αντίστοιχη με αυτήν της μονοειδούς περίπτωσης, οπότε παραλείπεται. Με λίγη περισσότερη προσοχή σε σχέση με τη μονοειδή περίπτωση, είναι εύκολο να δειχθεί επίσης ότι ένας πολυειδής σύγκλωνος περιέχει τις σχέσεις $\prod_{j=1}^{m}\{0_j, 1_j\}$, $\prod_{j=1}^{m} Eq^j$ και
$\prod_{j=1}^{k-1}\{0_j, 1_j\} \times Eq^{k,n}_{s,t} \times \prod_{j=k+1}^{m}\{0_j, 1_j\}$, $\forall j \in \{1, ..., m\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Ορίζουμε, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$, I_j να είναι το σύνολο των δεικτών του j-οστού είδους μιας πολυειδούς σχέσης (δηλαδή το j-οστό είδος της έχει διάσταση $|I_j|$). Όπως κάναμε πριν με τους πολυειδείς κλώνους, αποδεικνύουμε μια απλή πρόταση που συνδέει τους πολυειδείς σύγκλωνους με τους μονοειδείς σύγκλωνους.

Πρόταση 10. *Έστω S ένας πολυειδής σύγκλωνος. Τότε, το σύνολο S_{I_j} είναι (μονοειδής) σύκλωνος, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$.*

Απόδειξη. Έστω $k \in \{1, ..., m\}$. Θα αποδείξουμε μία προς μία τις συνθήκες του ορισμού του σύγκλωνου, για το τυχαίο S_{I_k}.

- Από τον ορισμό 10, $\prod_{j=1}^{k-1}\{0_j, 1_j\} \times Eq^k \times \prod_{j=k+1}^{m}\{0_j, 1_j\} \in S$, και προφανώς η προβολή αυτής της σχέσης στο σύνολο δεικτών I_k, είναι η σχέση Eq^k. Άρα $Eq^k \in S_{I_k}$.

- Έστω $R \in S_{I_k}$. Τότε υπάρχει $R' \in S$ τέτοια ώστε $R = R'_{I_k}$. Έστω R'' που ορίζεται ως εξής:

$$R''(a_1, ..., a_s, a_s + 1, ..., a_{s+t}, ..., a_{\alpha_{R''}}) \text{ ανν}$$
$$R'(a_1, ..., a_s, pr^k_{i_1}(a_{s+1}, ..., a_{a+t}), ..., pr^k_{i_r}(a_{s+1}, ..., a_{s+t}), ..., a_{\alpha'_R}),$$

  όπου s είναι το άθροισμα των διαστάσεων των πρώτων $k-1$ ειδών των R', R'', t η διάσταση του k-οστού είδους της R'' και r της R'. Ισχύει ότι $R'' \in S$, από τον ορισμό του σύγκλωνου, άρα, για την σχέση $R^* = R''_{I_k}$, ισχύει ότι $R^* \in S_{I_k}$ και ότι:

$$R^*(a_1, ..., a_t) \text{ ανν } R(pr^k_{i_1}(a_1, ..., a_t), ..., pr^k_{i_r}(a_1, ..., a_t)).$$

- Έστω $R \in S_{I_k}$. Τότε υπάρχει $R' \in S$ τέτοια ώστε $R = R'_{I_k}$. Αφού S σύγκλωνος, $R'' = R'_{-\alpha_{R'}} \in S$, άρα $R''_{I_k} = R_{-\alpha_R} \in S$.

- Έστω δύο n-μελείς σχέσεις στο S_{i_k}. Το συμπέρασμα έπεται εύκολα από τον ορισμό του σύγκλωνου κι από το γεγονός ότι η τομή των προβολών (στις ίδιες συντεταγμένες) δύο σχέσεων ισούται με την προβολή της τομής τους.

□

Είναι επίσης εύκολο να ελεγχθεί ότι τα καρτεσιανά γινόμενα μονοειδών κλώνων και συγκλώνων, είναι πολυειδείς κλώνοι και σύγκλωνοι αντίστοιχα.

Θα προχωρήσουμε τώρα στον ορισμό του πολυειδούς πολυμορφισμού, με τον αναμενόμενο τρόπο. Εδώ γίνεται εμφανής και η επιλογή μας να μην επιτρέπουμε m-άδες συναρτήσεων με διαφορετικό πλήθος μελών η καθεμία, καθώς θα ήταν αδύνατο να μιλήσουμε για διατήρηση σχέσεων, τουλάχιστον με τον τρόπο που το κάναμε στην μονοειδή περίπτωση.

Ορισμός 11. *Έστω R μια k-μελής πολυειδής σχέση με m είδη και j-οστό είδος διάστασης i_j. Έστω επίσης $\bar{f} = (f_1, ..., f_m)$ m-άδα συναρτήσεων, με $f_j : \{0_j, 1_j\}^n \mapsto \{0_j, 1_j\}$, $\forall j \in \{1, ..., m\}$. Λέμε ότι η συνάρτηση $\bar{f}$ είναι πολυειδής πολυμορφισμός της σχέσης R (ή ότι η $\bar{f}$ διατηρεί την R) και γράφουμε $\bar{f} \rhd R$, αν για κάθε $a^1 = (a_1^1, ..., a_k^1), ..., a^n = (a_1^n, ..., a_k^n) \in R$, έχουμε:*

$$\bar{f}(a^1, ..., a^n) :=$$
$$(f_1(a_1), ..., f_1(a_{i_1}), f_2(a_{i_1+1}), ..., f_2(a_{i_1+i_2}), ..., f_m(a_k)) \in R.$$

Επίσης, θα λέμε ότι η $\bar{f}$ είναι πολυειδής πολυμορφισμός ενός συνόλου σχέσεων S, αν $\bar{f} \rhd R$, για κάθε $R \in S$.

Παρατηρούμε ότι η απαίτηση να διατηρούμε το κάθε είδος με μία συνάρτηση δεν είναι περιοριστική. Αυτό που πετυχαίνουμε με αυτόν τον τρόπο είναι το να περνούμε ακριβώς στην μονοειδή περίπτωση, όποτε επιλέγουμε να κοιτάξουμε ένα συγκεκριμένο είδος. Και αυτό ακριβώς το πέρασμα θα μας φανεί χρήσιμο παρακάτω. Άλλωστε, αν κάποιος θέλει να εξετάσει τι γίνεται αν σε κάθε συντεταγμένη χρησιμοποιηθεί διαφορετική συνάρτηση, δεν έχει παρά να ορίσει την διάσταση όλων των ειδών ίση με 1.

Έστω τώρα ένα σύνολο πολυειδών συναρτήσεων B και ένα σύνολο πολυειδών σχέσεων S. Ορίζουμε τα εξής:

- $MPol(S) = \{\bar{f} \mid \bar{f} \rhd R, \ \forall R \in S\}$,
- $MInv(B) = \{R \subseteq \prod_{j=1}^{m} \{0_j, 1_j\}^{i_j} \mid \bar{f} \rhd R, \ \forall \bar{f} \in B\}$.

Αντίστοιχα με την μονοειδή περίπτωση, έχουμε τις δύο παρακάτω προτάσεις.

Πρόταση 11. *Για κάθε σύνολο πολυειδών σχέσεων S, το $MPol(S)$ είναι κλώνος.*

Απόδειξη. Έστω μία t-μελής πολυειδής σχέση $R \in S$, με m είδη και $a^1, ..., a^n \in R$. Τότε,

$$(pr_i^n(a_1), ..., pr_i^n(a_t)) = (a_1^i, ..., a_t^i) = a^i \in R.$$

Άρα, $\underbrace{(pr_i^n, ..., pr_i^n)}_{m-\text{φορές}} \in MPol(S)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$.

Έστω τώρα μία n-μελής συνάρτηση $\bar{f} = (f_1, ..., f_m) \in MPol(S)$ και k-μελείς συναρτήσεις $\bar{f}^1, ..., \bar{f}^n \in MPol(S)$, όπου $f^i = (f_1^i, ..., f_m^i)$, για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$. Τότε, για $a^1, ..., a^k \in R$, ισχύει ότι $\bar{f}^i(a^1, ..., a^k) \in R$, για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, οπότε:

$$\bar{f}(\bar{f}^1, ..., \bar{f}^n)(a^1, ..., a^k) \in R.$$

□

Πρόταση 12. *Για κάθε σύνολο πολυειδών συναρτήσεων B, το $MInv(B)$ είναι σύγκλωνος.*

Η απόδειξη παραλείπεται, καθώς είναι αντίστοιχη με αυτήν της μονοειδούς περίπτωσης.

Με απλή εφαρμογή των ορισμών 9 και 10, προκύπτει ότι αν δύο σύνολα X, Y είναι πολυειδείς κλώνοι (σύγκλωνοι), τότε η τομή τους $X \cap Y$ είναι πολυειδής κλώνος (σύγκλωνος). Έχει νόημα λοιπόν να ορίσουμε τα εξής:

- Για ένα σύνολο πολυειδών συναρτήσεων B, θα συμβολίζουμε με $[B]$ τον μικρότερο πολυειδή κλώνο που περιέχει το B, ή αλλιώς τον πολυειδή κλώνο που παράγεται από το B. Παρατηρούμε εδώ ότι $[B] = \bigcap\{F \text{ πολυειδής κλώνος } \mid B \subseteq F\}$.
- Για ένα σύνολο πολυειδών σχέσεων S, θα συμβολίζουμε με $\langle S \rangle$ τον μικρότερο σύγκλωνο που περιέχει το S, ή αλλιώς τον σύγκλωνο που παράγεται από το S. Παρατηρούμε εδώ ότι $\langle S \rangle = \bigcap\{G \text{ πολυειδής σύγκλωνος } \mid S \subseteq G\}$.

Θα αποδείξουμε τώρα το αντίστοιχο θεώρημα 1 για την πολυειδή περίπτωση, το θεώρημα Geiger δηλαδή για πολυειδείς σχέσεις και συναρτήσεις. Για την απόδειξή του, θα «μιμηθούμε» σε μεγάλο βαθμό την απόδειξη στην μονοειδή περίπτωση, με τις αναγκαίες διορθώσεις.

Θεώρημα 6. *Έστω B ένα σύνολο πολυειδών συναρτήσεων και S ένα σύνολο πολυειδών σχέσεων. Ισχύουν τα εξής:*

- $Pol(Inv(B)) = [B]$,
- $Inv(Pol(S)) = \langle S \rangle$.

Απόδειξη. Με την ίδια επιχειρηματολογία που χρησιμοποιήσαμε και στην αρχή της απόδειξης του θεωρήματος 1, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε πολυειδή κλώνο B και για κάθε πολυειδή σύγκλωνο S, $MPol(MInv(B)) \subseteq B$ και $MInv(MPol(S)) \subseteq S$.

- Έστω μία n-μελής συνάρτηση $\bar{f} = (f_1, ..., f_m) \notin B$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $R \in Inv(B)$ τέτοια ώστε να μην διατηρείται από την $\bar{f}$.

  Έστω T ο $(m \cdot 2^n) \times n$ πίνακας, του οποίου οι γραμμές από $((j-1) \cdot 2^n) + 1$ έως $j \cdot 2^n$ θα περιέχουν όλα τα διανύσματα του $\{0_j, 1_j\}^n$, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$.

  Έστω $B^{(n)}$ το σύνολο όλων των n-μελών συναρτήσεων του B. Για κάθε $\bar{g} = (g_1, ..., g_m) \in B^{(n)}$, υπολογίζουμε το διάνυσμα στήλη $\bar{g}(T)$, όπου η g_j εφαρμόζεται στις γραμμές του T που αντιστοιχούν στα διανύσματα του $\{0_j, 1_j\}^n$. Κατασκευάζουμε τον $2^n \times a$ πίνακα M ως τον πίνακα με στήλες όλα τα διανύσματα $\bar{g}(T)$.

Έστω $R = \{\bar{g}(T)^T \mid g \in B^{(n)}\}$. Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία της R είναι οι στήλες του πίνακα M και αποδεικνύουμε ότι $R \in MInv(B)$.

Προφανώς, κάθε στήλη d του T είναι στην R, αφού είναι οι εικόνες των συναρτήσεων $\underbrace{(pr^n_d, ..., pr^n_d)}_{m-\text{φορές}} \in B^{(n)}$. Θέτουμε $k = (m \cdot 2^n)$.

Έστω μία r-μελής συνάρτηση $\bar{h} \in B$ και
$x^1 = (x^1_1, ..., x^1_k), ..., x^r = (x^r_1, ..., x^r_k) \in R$. Από τον ορισμό της R, τα $x^1, ..., x^r$ είναι στήλες του πίνακα M, άρα υπάρχουν συναρτήσεις $\bar{g}^1, ..., \bar{g}^r \in B^{(n)}$ με $x^i = (\bar{g}^i(t^1, ..., t^k))$, για κάθε $i \in \{1, ..., r\}$, όπου t^i είναι η i-οστή γραμμή του πίνακα T. Άρα, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}(h_1(x^1_1, ..., x^r_1), ..., h_m(x^1_k, ..., x^r_k)) = \\ = (h_1(g^1(t^1), ..., g^r(t^1)), ..., h_m(g^1(t^k), ..., g^r(t^k))) := x^*.\end{aligned}$$

Αφού B κλώνος και $\bar{h}, \bar{g}^1, ..., \bar{g}^r \in B$, $\bar{h}(\bar{g}^1, ..., \bar{g}^r) \in B$. Άρα το x^* είναι στήλη του M, οπότε ανήκει στην σχέση R. Αφού $\bar{h}$ τυχαία, $R \in Inv(B)$.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η $\bar{f}$ δεν διατηρεί την R. Έστω, προς άτοπο, ότι την διατηρεί. Αφού $T^T \subset R$, πρέπει $\bar{f}(T) \in R$. Άρα, υπάρχει $\bar{g} \in B^{(n)}$ τέτοια ώστε $\bar{g}(T) = \bar{f}(T)$. Οι γραμμές του T ορίζουν πλήρως μία πολυειδή συνάρτηση, οπότε $f = g$, άρα $f \in B$. Άτοπο.

- Έστω n-μελής $\bar{f} = (f_1, ..., f_m)$ που είναι μερικός πολυειδής πολυμορφισμός ενός σύγκλωνου S (δηλαδή υπάρχει j ώστε $Dom(f_j) \subsetneq \{0_j, 1_j\}^n$). Το λήμμα 1 συνεχίζει να ισχύει, καθώς μπορούμε να επεκτείνουμε βήμα βήμα κάθε f_j ξεχωριστά.

  Έστω μία a-μελής σχέση $R \notin S$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\bar{f} \in MPol(S)$ η οποία να μην διατηρεί την R. Ορίζουμε

  $$P = \bigcap_{Q \in S, Q \supseteq R} Q.$$

  Αφού το S είναι σύγκλωνος, $P \in S$ και, αφού $R \notin S$, υπάρχει $t \in P \setminus R$.

  Έστω $N \subset R$ ο $k \times a$ πίνακας που περιέχει όλα τα διανύσματα της R (άρα $|R| = k$). Υπάρχει k-μελής μερική συνάρτηση $\bar{f}$ τ.ώ. $\bar{f}(N^T) = t^T$ (με τα ίδια επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε και στο θεώρημα 1, απλώς πλέον ξεχωριστά για κάθε είδος).

Αρκεί πλέον να δειχθεί ότι αυτή η $\bar{f}$ είναι μερικός πολυμορφισμός του S, αφού η $\bar{f}$ προφανώς δεν διατηρεί την R και αφού, από το λήμμα 1, θα μπορεί να επεκταθεί σε πολυμορφισμό του S. Αυτό και πάλι μπορεί να γίνει με τον ίδιο τρόπο όπως στο θεώρημα 1.

□

Για να ολοκληρώσουμε την παράγραφο, θα αποδείξουμε ένα πόρισμα του θεωρήματος 6. Παρατηρούμε εδώ ότι, αν το ίχνος μιας πολυειδούς σχέσης R είναι $(0, ..., 0, i_j, 0, ..., 0)$, τότε μπορούμε να την σκεφτούμε ως μονοειδή σχέση. Κατ' επέκταση, όλες οι σχέσεις της μορφής R_{I_j}, για κάποιο $j \in \{1, ..., m\}$, είναι μονοειδείς.

Πόρισμα 1. *Έστω S πολυειδής σύγκλωνος και $B = MPol(S)$. Τότε, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$, $S_{I_j} = Inv(B_j)$, όπου σκεφτόμαστε το S_{I_j} ως σύνολο μονοειδών σχέσεων.*

Απόδειξη. Έστω $j \in \{1, ..., m\}$. Αποδεικνύουμε ότι $S_{I_j} = Inv(B_j)$.
Έστω $R' \in S_{I_j}$. Τότε, υπάρχει $R \in S$ τ.ώ. $R' = R_{I_J}$. Από το θεώρημα 6, $S = MInv(B)$, άρα για κάθε $\bar{f} = (f_1, ..., f_m) \in B$ ισχύει ότι $\bar{f} \rhd S$, άρα $f_j \rhd S_{I_j}$, οπότε και $f_j \rhd R'$. Άρα $R' \in Inv(B_j)$, οπότε $S_{I_j} \subseteq Inv(B_j)$.
Έστω $R^* \in Inv(B_j)$. Τότε, για κάθε $f \in B_j$, $f \rhd R^*$. $f \in B_j$, άρα υπάρχει $\bar{f} \in B$ τ.ώ. $f_j = f$. Προφανώς

$$\bar{f} \rhd R = \prod_{i=1}^{j-1} \{0_i, 1_i\} \times R^* \times \prod_{i=j+1}^{m} \{0_i, 1_i\},$$

και $R \in S$. Αφού $R^* = R_{I_j}$, έχουμε ότι $R^* \in S_{I_j}$, άρα $Inv(B_j) \subseteq S_{I_j}$. □

2.2 Η σύνδεση του Galois στην πολυειδή περίπτωση

Παρ'ότι δεν θα φτάσουμε να μιλήσουμε για έναν αντίστοιχο πολυειδή σύνδεσμο του Post, θεωρούμε χρήσιμο να αναπτύξουμε όσο περισσότερο μπορούμε την δομή του συνόλου των πολυειδών κλώνων, αυτή του συνόλου των πολυειδών συγκλώνων και την μεταξύ τους σχέση. Θα συμβολίζουμε με $\mathbb{B}$ το σύνολο όλων των κλώνων και με $\mathbb{S}$ το σύνολο όλων των συγκλώνων. Με τον τρόπο που αναπτύξαμε την θεωρία στην προηγούμενη παράγραφο, οι προτάσεις και τα θεωρήματα θα αποδεικνύονται με τον ίδιο τρόπο που αποδείχθηκαν στην ενότητα 1.2, οπότε και δεν θα επαναλάβουμε τις αποδείξεις.

Θεώρημα 7. *Έστω $X, Y \in \mathbb{B}$ (ή $X, Y \in \mathbb{S}$ αντίστοιχα). Συμβολίζουμε με:*

- *$X \sqcup Y$ τον μικρότερο πολυειδή κλώνο (σύγκλωνο αντίστοιχα) που περιέχει τα X, Y,*
- *$X \sqcap Y$ τον μεγαλύτερο πολυειδή κλώνο (σύγκλωνο αντίστοιχα) που περιέχεται στα X, Y.*

Η τετράδα $(\mathbb{B}, \subseteq, \sqcup, \sqcap)$ ($(\mathbb{S}, \subseteq, \sqcup, \sqcap)$ αντίστοιχα) είναι σύνδεσμος.

Μπορούμε τώρα να μιλησουμε για την σύνδεση του Galois στην πολυειδή περίπτωση. Όπως και στο κεφάλαιο 1 θα σκεφτούμε τα σύνολα $MPol(S), MInv(B)$ της προηγούμενης ενότητας ως συναρτήσεις μεταξύ των συνόλων $\mathbb{B}$ και $\mathbb{S}$.

Θεώρημα 8. *Οι συναρτήσεις $MPol : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{B}$ και $MInv : \mathbb{B} \mapsto \mathbb{S}$ αποτελούν σύνδεση του Galois (Galois connection) μεταξύ των συνδέσμων $(\mathbb{B}, \subseteq, \sqcup, \sqcap)$ και $(\mathbb{S}, \subseteq, \sqcup, \sqcap)$. Δηλαδή, ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Για όλα τα $X, Y \in \mathbb{S}$, ισχύει ότι $X \subseteq Y \Rightarrow Pol(Y) \subseteq Pol(X)$.*
2. *Για όλα τα $Z, W \in \mathbb{B}$, ισχύει ότι $Z \subseteq W \Rightarrow Inv(W) \subseteq Inv(Z)$.*
3. *Για όλα τα $X \in \mathbb{S}$ και $Z \in \mathbb{B}$, ισχύει ότι $X \subseteq Inv(Pol(X))$ και $Z \subseteq Pol(Inv(Z))$.*

Συνεχίζοντας όπως και πρίν, δείχνουμε την ιδιότητα κλειστότητας των τελεστών $MPol$ και $MInv$.

Πρόταση 13. *Οι συναρτήσεις $MInv(MPol) : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{S}$ και $MPol(MInv) : \mathbb{B} \mapsto \mathbb{B}$ είναι τελεστές κλειστότητας. Δηλαδή, ισχύουν τα παρακάτω, για κάθε $X, Y \in \mathbb{S}$ και για κάθε $Z, W \in \mathbb{B}$:*

1. *$X \subseteq MInv(MPol(X))$ και $Z \subseteq MPol(MInv(Z))$,*
2. *$X \subseteq Y \Rightarrow MInv(MPol(X)) \subseteq MInv(MPol(Y))$ και $Z \subseteq W \Rightarrow MPol(MInv(Z)) \subseteq MPol(MInv(W))$,*
3. *$MInv(MPol(X)) = MInv(MPol(MInv(MPol(X))))$ και $MPol(MInv(Z)) = MPol(MInv(MPol(MInv(Z))))$.*

Θα τελειώσουμε την παρούσα ενότητα με την σχέση αντι-ισομορφικότητας μεταξύ των δύο συνδέσμων.

Θεώρημα 9. *Οι σύνδεσμοι* $(\mathbb{B}, \subseteq, \sqcup, \sqcap)$ *και* $(\mathbb{S}, \subseteq, \sqcup, \sqcap)$ *είναι αντι-ισομορφικοί. Οι συναρτήσεις* $Pol : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{B}$ *και* $Inv : \mathbb{B} \mapsto \mathbb{S}$ *είναι αντι-σομορφισμοί συνδέσμων, δηλαδή:*

1. *είναι* $1-1$*, επί και*

2. *για κάθε* $X, Y \in \mathbb{S}$ *και για κάθε* $Z, W \in \mathbb{B}$*, ισχύει ότι:*

   - $X \subseteq Y \Rightarrow Pol(Y) \subseteq Pol(X)$ *και*
   - $Z \subseteq W \Rightarrow Inv(W) \subseteq Inv(Z)$.

2.3 Προβλήματα Ικανοποιησιμότητας για Πολυειδείς Περιορισμούς

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε ένα αντίστοιχο θεώρημα διχοτόμησης με το θεώρημα 5, αλλά για Πολυειδή Προβλήματα Ικανοποίησης Περιορισμών (Multi-sorted Constraint Satisfaction Problems). Στην πραγματικότητα, αυτό που θα χρειαστούμε είναι το θεώρηματα διχοτόμησης για *συντηρητικά* (conservative) Π.Π.Ι.Π, το οποίο όμως θα προκύψει εύκολα ως πόρισμα του γενικού θεωρήματος. Καθώς δεν έχουμε στην διάθεσή μας τον σύνδεσμο του Post, η δουλειά που θα κάνουμε σε αυτήν την παράγραφο θα διαφέρει από την αντίστοιχη της μονοειδούς περίπτωσης.

Θα ξεκινήσουμε, ορίζοντας προσεκτικά, τι σημαίνει *πολυειδής φόρμουλα* και ποιο είναι το πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε.

Ορισμός 12. *Έστω* S *ένα σύνολο πολυειδών σχέσεων (που τις ονομάζουμε περιορισμούς) και* V *ένα σύνολο μεταβλητών. Μία πολυειδής* S*-φόρμουλα* ϕ *σε Κανονική Συζευκτική Μορφή (Π.Κ.Σ.Μ(S) φόρμουλα ή* S*-φορμουλα), είναι μία σύζευξη από περιορισμούς από το* S*, εφαρμοσμένους πάνω σε μεταβλητές από το* V*:*

$$\phi(x_1, ..., x_n) = \bigwedge_{i=1}^{k} R^i(x_1^i, ..., x_{n_i}^i),$$

όπου $R^i \in S$ *και* $n_i = \alpha_{R_i}$*, για κάθε* $i \in \{1, ..., k\}$*,* $k \in \mathbb{N}$ *και* $x_j^i \in \{x_1, ..., x_n\} \subseteq V$*, για κάθε* i, j.

Παρατηρούμε ότι αν μία μεταβλητή εμφανίζεται σε περισσότερα από ένα είδη (είτε στον ίδιο, είτε σε διαφορετικούς περιορισμούς), η φόρμουλα δεν είναι δυνατόν να ικανοποιείται. Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιούμε διακεκριμένα σύνολα μεταβλητών για να το εμποδίσουμε αυτό. Επειδή όμως ο συμβολισμός θα γινόταν πολύ περίπλοκος, θα προτιμήσουμε να το υποθέτουμε εξ αρχής: όταν έχουμε δηλαδή μία S-φόρμουλα $\phi(x_1, ..., x_n)$, θα υποθέτουμε αυτομάτως ότι κάθε μεταβλητή εμφανίζεται σε ακριβώς ένα είδος.

Το πρόβλημα λοιπόν που θα μας απασχολήσει σε αυτήν την παράγραφο, ορίζεται ως εξής:

Πρόβλημα: Π.Κ.Σ.Μ(S) (ή SAT(S)).
Είσοδος: S-φόρμουλα ϕ.
Ερώτηση: Είναι η ϕ ικανοποιήσιμη;

Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι την αγγλική ορολογία $SAT(S)$. Ο λόγος που δεν αλλάζουμε τον συμβολισμό για να διαχωρίζεται από αυτόν της μονοειδούς περίπτωσης, είναι ότι ούτως ή άλλως, το ποιο ακριβώς είναι το πρόβλημα $SAT(S)$, εξαρτάται πάντα από το S. Άρα, ο διαχωρισμός της πολυειδούς με την μονοειδή περίπτωση γίνεται αυτομάτως, λόγω του S. Άλλωστε, δεν υπάρχει λόγος έντονου διαχωρισμού, από την στιγμή που η μονοειδής περίπτωση είναι υποπερίπτωση της πολυειδούς (για m=1).

Θα αναφέρουμε εδώ ότι το μεγαλύτερο μέρος της δουλειάς που έγινε στην παράγραφο 1.3, για να καταλήξουμε στο θεώρημα του Schaefer, ισχύει και εδώ με την ίδια ευκολία που ισχύουν και οι προτάσεις και τα θεωρήματα της προηγούμενης παραγράφου. Αυτή η δουλειά όμως έγινε με μόνο σκοπό να χρησιμοποιηθεί ο σύνδεσμος του Post, και δεν έχει νόημα να επαναληφθεί από την στιγμή που δεν έχουμε αυτό το εργαλείο στα χέρια μας.

Το μόνο αποτέλεσμα που θα επαναλάβουμε είναι το ακόλουθο.

Πρόταση 14. *Για κάθε σύνολο S από πολυειδείς σχέσεις, το πρόβλημα $SAT(S)$ είναι πολυωνυμικά ισοδύναμο με το $SAT(\langle S\rangle)$.*

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι μία S-φόρμουλα είναι, με τετριμμένο τρόπο, μία $\langle S\rangle$-φόρμουλα. Αυτό καθιστά προφανή την σχέση $SAT(S) \leq_P SAT(\langle S\rangle)$. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω μία $\langle S\rangle$-φόρμουλα πάνω στις μεταβλητές $u_1, ..., u_n$. Κατασκευάζουμε μία S-φόρμουλα ϕ' ως εξής:

- Η ϕ' θα περιέχει όλους τους περιορισμούς $R(u_{i_1}, ..., u_{i_r})$ για τους οποίους ισχύει ότι $R \in S$.

- Αν η ϕ περιέχει κάποιον περιορισμό

  $$\prod_{j=1}^{k-1}\{0_j, 1_j\}(v_j) \times Eq^k(u_1, u_2) \times \prod_{j=k+1}^{m}\{0_j, 1_j\}(v_j) \notin S,$$

  τον διαγράφουμε και ταυτίζουμε τις μεταβλητές u_1, u_2 στην υπόλοιπη φόρμουλα.

- Αν η ϕ περιέχει κάποιον περιορισμό $\exists x_j R(u_{i_1}, ..., u_{j-1}, x_j, u_{j+1}, ..., u_{i_r})$, με $R_{-j} \notin S$ και $R \in S$, τον αντικαθιστούμε με τον περιορισμό $R(u_{i_1}, ..., u_{j-1}, u^*, u_{j+1}, ..., u_{i_r})$, όπου $u^* \neq \{u_1, ..., u_n\}$.

- Αν η ϕ περιέχει κάποιον περιορισμό $R(v_1, ..., v_s, u_{i_1}, ..., u_{i_r}, v_{s+1}, ..., v_t)$, με $R \notin S$ πολυειδής σχέση με άθροισμα διαστάσεων των πρώτων $j-1$ ειδών να είναι ίσο με s, j-οστό είδος διάστασης r και άθροισμα διαστάσεων $m-j$ τελευταίων ειδών ίσο με $t-s$ και $R' \in S$, όπου:

  $$R(y_1, ..., y_s, x_1, ..., x_r, y_{s+1}, ..., y_t) \text{ ανν } \\ R'(y_1, ..., y_s, pr^r_{k_1}(x_1, ..., x_r), ..., pr^r_{k_l}(x_1, ..., x_r), y_{s+1}, ..., y_t),$$

  τότε τον αντικαθιστούμε με τον περιορισμό $R'(v_1, ..., v_s, u_{k_1}, ..., u_{k_l}, v_{s+1}, ..., v_t)$.

- Αν η ϕ περιέχει κάποιον περιορισμό $R(u_1, ..., u_r)$ ώστε $R \notin S$, αλλά $R = R_1 \cap R_2$, όπου $R_1, R_2 \in S$, τον αντικαθιστούμε με τον περιορισμό $R_1(u_1, ..., u_r) \wedge R_2(u_1, ..., u_r)$.

Η αναγωγή έχει περιγραφεί πλήρως και είναι πολυωνυμική. □

Θα ξεκινήσουμε λοιπόν τώρα μια διαφορετική πορεία, ώστε να καταφέρουμε να αποδείξουμε το θεώρημα του Schaefer για Π.Π.Ι.Π, περίπου με τον τρόπο που υποδεικνύουν οι A. Bulatov και P. Jeavons στο [3].

Αρχικά, κάποιος θα μπορούσε να αναρωτηθεί αν υπάρχει ζήτημα - αν δηλαδή το πρόβλημα $SAT(S)$ διαφέρει στην πολυπλοκότητά του αν το S είναι σύνολο μονοειδών σχέσεων ή πολυειδών. Ένα πρώτο στοιχείο που υποδεικνύει την θετική απάντηση σε αυτό το ερώτημα, είναι η απαγόρευση του να εμφανίζονται μεταβλητές σε περισσότερα του ενός είδους. Ένα δεύτερο επιχείρημα προέρχεται από την πρόταση 14 και τους ορισμούς των μονοειδών και πολυειδών συγκλώνων. Είναι σαφές ότι το πλήθος των περιορισμών που μπορούν να παραχθούν από ένα σύνολο μονοειδών σχέσεων, είναι διαφορετικό από ένα σύνολο πολυειδών. Τέλος, από το ίδιο το θεώρημα 5, που σχετίζει την δυνατότητα αποδοτικής επίλυσης ενός Π.Ι.Π. με το αν κάποιες συναρτήσεις διατηρούν το σύνολο των επιτρεπόμενων περιορισμών, είναι προφανές ότι η δυνατότητα χρήσης m-άδων διαφορετικών συναρτήσεων αλλάζει το πλαίσιο κατά μη-τετριμμένο τρόπο.

Ας δούμε τώρα κάποια παραδείγματα που φωτίζουν το ζήτημα λίγο περισσότερο.

Παράδειγμα 1. *Έστω οι σχέσεις, με δύο είδη,* $R_1 = \{0_1, 1_1\} \times \{0_2, 1_2\} = \{(0_1, 0_2), (0_1, 1_2), (1_1, 0_2), (1_1, 1_2)\}$, *με ίχνος* $(1, 1)$ *και* $R_2 = R^1_{NAE} \times \{(0_2, 0_2)\} = (\{0_1, 1_1\}^3 \setminus \{(0_1, 0_1, 0_1), (1_1, 1_1, 1_1)\}) \times \{(0_2, 0_2)\}$, *με ίχνος* $(3, 2)$.
Τότε $SAT(\{R_1\}) \in P$ *και* $SAT(\{R_2\})$ NP*-πλήρες.*

Απόδειξη. Και οι δύο ισχυρισμοί είναι προφανείς. Μία οποιαδήποτε $\{R_1\}$-φόρμουλα είναι ικανοποιήσιμη από οποιαδήποτε αληθοτιμή, ενώ ισχύει προφανώς ότι $SAT(\{R_{NAE}\}) \leq_P SAT(\{R_2\})$. □

Διαπιστώσαμε λοιπόν καταρχήν ότι τίθεται ζήτημα για το αν έναν Π.Π.Ι.Π. μπορεί να λυθεί αποδοτικά ή όχι. Προχωρούμε τώρα σε κάτι πιο ενδιαφέρον.

Παράδειγμα 2. *Το $SAT(\{R^*\})$ είναι NP-πλήρες, όπου*

$$R^* = R^{1,2,3}_{ONE-IN-THREE} = \{(1_1, 0_2, 0_3), (0_1, 1_2, 0_3), (0_1, 0_2, 1_3)\}.$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε με κάποιες παρατηρήσεις για το μονοειδές $R = R_{ONE-IN-THREE} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Έστω η σχέση R' που ορίζεται ως εξής:

$$R'(a_1, a_2, a_3) \text{ ανν } R(pr^3_{i_1}(a_1, a_2, a_3), pr^3_{i_2}(a_1, a_2, a_3), pr^3_{i_3}(a_1, a_2, a_3)),$$

όπου $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \in \{1, 2, 3\}$. Έχουμε προφανώς $R' = R$. Αυτό δείχνει κάτι που πιθανώς κάποιος να είχε παρατηρήσει εξ αρχής: η θέση στην οποία εμφανίζεται μία μεταβλητή στον περιορισμό R δεν έχει σημασία.

Λόγω της πρότασης 6, ξέρουμε ότι $SAT(\{R\}) =_P SAT(\langle\{R\}\rangle)$. Παρ'όλα αυτά, εμείς θα δώσουμε μια συγκεκριμένη αναγωγή από το $SAT(\{R\})$ στο $SAT(\langle\{R\}\rangle)$, την οποία στην συνέχεια θα επεκτείνουμε σε αναγωγή στο $SAT(\{R^*\})$:

Έστω $S = \{R\}$ και $\phi(u_1, ..., u_n)$ μία S-φόρμουλα. Για ευκολία, υποθέτουμε ότι $n = 3k$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}^*$. Επιλέγουμε τις θέσεις (συντεταγμένες) που θέλουμε να εμφανίζονται οι μεταβλητές στους περιορισμούς αυθαίρετα: οι μεταβλητές $u_1, ..., u_{n/3}$ στην πρώτη θέση, οι $u_{n/3+1}, ..., u_{2n/3}$ στην δεύτερη και οι υπόλοιπες στην τρίτη. Εξετάζουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Έστω περιορισμός $R(u_i, u_j, u_l)$, με $i \in \{n/3 + 1, ..., 2n/3\}$, $j \in \{2n/3 + 1, ..., 3n\}$ και $l \in \{1, ..., n/3\}$. Επιχειρηματολογήσαμε ήδη ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε αυτόν τον περιορισμό με τον $R(u_l, u_i, u_j)$. Αντίστοιχα για οποιονδήποτε άλλο συνδυασμό στις θέσεις των μεταβλητών που δεν είναι αυτός που προεπιλέξαμε αυθαιρέτως.

- Έστω περιορισμός $R(u_i, u_i, u_j)$. Τον αντικαθιστούμε με τον $R'(u_i, u_j)$, όπου

  $$R'(a_1, a_2) \text{ ανν } R(pr^3_1(a_1, a_2, a_3), pr^3_1(a_1, a_2, a_3), pr^3_2(a_1, a_2, a_3))$$

  και αλλάζουμε μετά και την σειρά των μεταβλητών αν αυτό είναι ανάγκη. Αντίστοιχα για οποιονδήποτε συνδυασμό θέσεων μπαίνει η ίδια μεταβλητή.

- Έστω περιορισμός $R(u_i, u_i, u_i)$. Αντικαθιστούμε αυτόν τον περιορισμό με τον $R_{empty} = \emptyset$ καθώς η φόρμουλα είναι μη ικανοποιήσιμη.

- Αφού γίνουν εξαντλητικά οι παραπάνω μετατροπές, έστω ότι υπάρχει περιορισμός $R(u, v)$, $u, v \in \{u_1, ..., u_n\}$. Για κάθε τέτοιον περιορισμό εισάγω μια καινούρια μεταβλητή u_R και τον αντικαθιστώ με τον περιορισμό $R'(u, v, u_R)$ ανν $R(u, v)$, όπου η καινούρια μεταβλητή μπαίνει στην θέση του περιορισμού που έχει μείνει ελεύθερη. Στο παραπάνω παράδειγμα, έχουμε την u να είναι από τις μεταβλητές που θέλαμε να είναι στην πρώτη θέση και η v από αυτές που θέλαμε στην δεύτερη θέση.

Οι παραπάνω μετατροπές μας δίνουν μια ισοδύναμη $\langle S\rangle$-φόρμουλα. Τώρα πλέον, το μόνο που μένει να κάνουμε είναι οι μετατροπές $0 \to 0_j$ και $1 \to 1_j$ για όλα τα 0 και τα 1 που εμφανίζονται στην j-οστή θέση κάποιου περιορισμού και για κάθε $j \in \{1, 2, 3\}$.

Έχουμε δείξει πλέον ότι:

$$SAT(\{R\}) =_P SAT(\{\langle R\rangle\}) \leq_P SAT(\{\langle R^*\rangle\}) =_P SAT(\{R^*\})$$

και αφού το $SAT(\{R\})$ είναι NP-πλήρες, το ίδιο ισχύει και για το $SAT(\{R^*\})$. □

Το παραπάνω παράδειγμα δείχνει ότι δεν αρκεί να ελέγξουμε ένα Π.Π.Ι.Π. «κατά είδη». Παρατηρήστε ότι αν R^* όπως στο παράδειγμα, τότε $R_j^* = \{0_j, 1_j\}$, $\forall j \in \{1, 2, 3\}$, οπότε τα μονοειδή προβλήματα $SAT(\{R^*\}_{I_j}) = SAT(\{R_j^*\})$ είναι πολυωνυμικά επιλύσιμα, παρ' όλο που αποδείξαμε ότι το $SAT(\{R^*\})$ είναι NP-πλήρες.

Ολοκληρώνουμε αυτή τη συζήτηση, δείχνοντας ότι το αντίστροφο της ιδέας που απορρίψαμε με το παραπάνω παράδειγμα, όντως ισχύει.

Πρόταση 15. *Έστω S ένα σύνολο από πολυειδείς σχέσεις. Αν υπάρχει $j \in \{1, ..., m\}$ τ.ώ. το $SAT(S_{I_j})$ να είναι NP-πλήρες, τότε το $SAT(S)$ είναι NP-πλήρες.*

Απόδειξη. Έστω $R' \in SAT(S_{I_j})$. Από τον ορισμό του S_{I_j}, υπάρχει $R \in S$ τ.ώ. $R_{I_j} = R'$.

Έστω μία S_{I_j}-φόρμουλα $\phi(u_1, ..., u_n)$. Για κάθε περιορισμό $R'(u_{i_1}, ..., u_{i_{n_i}})$ της ϕ, εισάγουμε $v_1^R, ..., v_{t_R}^R$ καινούριες μεταβλητές, τόσες όσες το άθροισμα των διαστάσεων των υπολοίπων ειδών της R, που αντιστοιχεί στην R', με τον τρόπο που περιγράψαμε πριν. Αντικαθιστούμε λοιπόν, κάθε $R'(u_{i_1}, ..., u_{i_{n_i}})$ με την αντίστοιχη $R(v_1^R, ..., v_s^R, u_{i_1}, ..., u_{i_{n_i}}, v_{s+1}^R, ..., v_{t_R}^R)$ και κατασκευάζουμε, πολυωνυμικά, μια ισοδύναμη S-φόρμουλα.

Δείξαμε ότι $SAT(S_{I_j}) \leq_P SAT(S)$, άρα το $SAT(S)$ είναι NP-πλήρες. □

Μπορούμε πλέον να εισαγάγουμε τις τελευταίες έννοιες που θα χρειαστούμε για να αποδείξουμε το ζητούμενο θεώρημα. Η δουλειά που θα κάνουμε, βρίσκεται σε εργασίες των P. Jeavons, D. Cohen et al. (βλ. [24],[23]) και της R. Dechter (βλ.[9]).

Θα ξεκινήσουμε με την έννοια της *υποφόρμουλας* και θα περάσουμε στην έννοια της *συνέπειας*. Ότι πούμε από εδώ και πέρα, ισχύει απευθείας και για την μονοειδή περίπτωση, θέτοντας $m = 1$.

Ορισμός 13. *Έστω S ένα σύνολο πολυειδών σχέσεων και V ένα σύνολο μεταβλητών. Έστω τώρα μια S-φόρμουλα*

$$\phi(u_1, ..., u_n) = \bigwedge_{i=1}^{k} R^i(u_1^i, ..., u_{n_i}^i).$$

Ορίζουμε, για κάθε $u \in V$, J_u^R να είναι το σύνολο των συντεταγμένων της $R \in \{R_1, ..., R_k\}$, στις οποίες εμφανίζεται η μεταβλητή u. Για οποιοδήποτε $V' \subseteq V$, θα λέμε ότι η $\phi(u_1, ..., u_n) \restriction_{V'}$ είναι η υποφόρμουλα της $\phi(u_1, ..., u_n)$ που παράγεται από το V', αν

$$\phi(u_1, ..., u_n)_{\restriction_{V'}} = \bigwedge_{i=1}^{k} pr_{J_{\{u_1^i, ..., u_{n_i}^i\}}} R^i(u_1^i, ..., u_{n_i}^i),$$

όπου $J_{\{u_1^i, ..., u_{n_i}^i\}} = \bigcup_{u \in V' \cap \{u_1^i, ..., u_{n_i}^i\}} J_u^{R^i}$, για κάθε $i \in \{1, ..., k\}$.

Για να διευκολύνουμε την κατανόηση του παραπάνω ορισμού, αυτό που θέλουμε είναι κάθε περιορισμός της υποφόρμουλας να προκύπτει από προβολή ενός περιορισμού της φόρμουλας στις συντεταγμένες που βρίσκονται μεταβλητές που χρησιμοποιούμε και στην υποφόρμουλα.

Παρατηρείστε επίσης ότι κάθε φόρμουλα είναι υποφόρμουλα του εαυτού της, αρκεί το V' να περιέχει όλες τις μεταβλητές που χρησιμοποιεί η φόρμουλα.

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα.

Παράδειγμα 3. *Έστω $S = \{R^1, R^2\}$, με τον R^1 να έχει ίχνος $(3, 4)$ και τον R^2 να έχει ίχνος $(5, 1)$. Έστω επίσης $V = \{u_1, ..., u_{15}\}$ και η S-φόρμουλα*

$$\phi(u_1, ..., u_7) = R^1(u_1, u_2, u_2, u_3, u_4, u_3, u_5) \wedge R^2(u_1, u_2, u_6, u_7, u_2, u_5).$$

Τώρα, για $V' = \{u_1, ..., u_{10}\}$, η $\phi_{\restriction_{V'}} = \phi$ είναι υποφόρμουλα του εαυτού της. Για $V' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, η υποφόρμουλα που παράγεται από το V' είναι η:

$$\phi(u_1, ..., u_7)_{\restriction_{V'}} = pr_{\{1,2,3,4,5,6\}} R^1(u_1, u_2, u_2, u_3, u_4, u_3) \wedge pr_{\{1,2,5\}} R^2(u_1, u_2, u_2).$$

Υπενθυμίζουμε ότι, για παράδειγμα, ο περιορισμός

$$pr_{\{1,2,5\}}R^2(u_1, u_2, u_2)$$

μπορεί να γραφεί και με υπαρξιακούς ποσοδείκτες ως εξής:

$$\exists x_3 \exists x_4 \exists x_6 R^2(u_1, u_2, x_3, x_4, u_2, x_6).$$

Προχωρούμε τώρα στον ορισμό της συνέπειας για μια φόρμουλα. Αυτή η έννοια είναι κεντρική στην απόδειξη του θεωρήματος Schaefer για πολυειδείς φόρμουλες.

Ορισμός 14. *Μία S-φόρμουλα $\phi(u_1, ..., u_n)$ θα λέγεται s-συνεπής (s-consistent), $2 \leq s \leq n$, αν για κάθε $V' \subseteq \{u_1, ..., u_n\}$ με $s-1$ στοιχεία και για κάθε $u \in V$, κάθε λύση του $\phi(u_1, ..., u_n)_{\restriction_{V'}}$ μπορεί να επεκταθεί σε λύση του $\phi(u_1, ..., u_n)_{\restriction_{V' \cup \{u\}}}$.*
Μία S-φόρμουλα $\phi(u_1, ..., u_n)$ θα λέγεται ισχυρά s-συνεπής (strongly s-consistent), αν είναι t-συνεπής για κάθε $2 \leq t \leq s$.
Τέλος, μία S-φόρμουλα $\phi(u_1, ..., u_n)$ θα λέγεται καθολικά (globally) συνεπής, αν είναι s-συνεπής για κάθε $2 \leq s \leq n$.

Αρχικά ας παρατηρήσουμε ότι αν η μεταβλητή u δεν ανήκει στο σύνολο $\{u_1, ..., u_n\} \setminus V'$, ο παραπάνω ορισμός είναι τετριμμένος.

Ας περάσουμε τώρα σε μερικά παραδείγματα, ώστε να καταλάβουμε τον παραπάνω ορισμό σε βάθος.

Παράδειγμα 4. *Έστω $S = \{R^1, R^2\}$, όπου:*

$$R^1 = \{(0_1, 1_1, 1_1, 0_2, 1_2, 1_3), (1_1, 0_1, 1_1, 0_2, 1_2, 0_3), (1_1, 1_1, 1_1, 0_2, 1_2, 0_3)\},$$

$$R^2 = \{(0_1, 1_1, 0_2, 0_3, 0_3), (1_1, 1_1, 0_2, 0_3, 0_3), (1_1, 0_1, 0_2, 1_3, 1_3)\}.$$

Έστω επίσης μία S-φόρμουλα

$$\phi(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = R^1(u_1, u_2, u_1, u_3, u_4, u_5) \wedge R^2(u_2, u_1, u_3, u_5, u_5).$$

Η φόρμουλα $\phi(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ δεν είναι 5-συνεπής.

Απόδειξη. Έστω $V' = \{u_2, u_3, u_4, u_5\}$. Η υποφόρμουλα που παράγεται από το V' είναι η

$$\phi_{\restriction_{V'}}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) =$$
$$\exists x_1 \exists x_3 R^1(x_1, u_2, x_3, u_3, u_4, u_5) \wedge \exists x_2 R^2(u_2, x_2, u_3, u_5, u_5).$$

Για $(u_2, u_3, u_4, u_5) = (1_1, 0_2, 1_2, 1_3)$, έχουμε λύση για την

$$\phi_{\restriction_{V'}}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$$

η οποία δεν μπορεί να επεκταθεί σε λύση για την

$$\phi_{\restriction_{V' \cup \{u_1\}}}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5).$$

□

Τονίζουμε ότι η παραπάνω φόρμουλα είναι ικανοποιήσιμη, για παράδειγμα από την απονομή $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = (1_1, 0_1, 0_2, 1_2, 0_3)$. Η συνέπεια μιας φόρμουλας δεν έχει άμεση σχέση με την ικανοποιησιμότητά της.

Το παρακάτω εκ πρώτης όψεως, είναι παράδειγμα 5-συνεπούς φόρμουλας. Έχει αξία όμως, λόγω της συζήτησης που έπεται.

Παράδειγμα 5. *Έστω $S = \{R^1, R^2, R^3\}$, όπου:*

$$R^1 = \{(0_1, 1_1, 1_1, 0_2, 1_2, 1_3), (1_1, 0_1, 1_1, 0_2, 1_2, 0_3), (1_1, 1_1, 1_1, 0_2, 1_2, 0_3)\},$$
$$R^2 = \{(0_1, 1_1, 0_2, 0_3, 0_3), (1_1, 1_1, 0_2, 0_3, 0_3), (1_1, 0_1, 0_2, 1_3, 1_3)\},$$
$$R^3 = \{(0_1, 0_2, 1_2, 0_3), (1_1, 0_2, 1_2, 0_3).$$

Έστω επίσης μία S-φόρμουλα

$$\phi(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = R^1(u_1, u_2, u_1, u_3, u_4, u_5) \wedge R^2(u_2, u_1, u_3, u_5, u_5) \wedge R^3(u_2, u_3, u_4, u_5).$$

Η φόρμουλα $\phi(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ είναι 5-συνεπής.

Η απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού είναι απλή. Παρατηρούμε ότι τα δύο παραδείγματα έχουν τους ίδιους περιορισμούς, πέραν του R^3. Αν βρούμε τις δυνατές λύσεις για τους πρώτους δύο περιορισμούς, παρατηρούμε ότι το μόνο που κάνει ο τρίτος, είναι να μην επιτρέπει την μοναδική λύση, στην υποφόρμουλα που δεν περιέχει την μεταβλητή u_1, που δεν μπορεί να επεκταθεί. Αυτός είναι εν γένει και ο τρόπος που μπορούμε να μετατρέψουμε μια μη s-συνεπή φόρμουλα σε s-συνεπή. Λύνουμε όλα τα υποπροβλήματα με s μεταβλητές και προσθέτουμε περιορισμούς στις $s-1$ μεταβλητές που να επιτρέπουν μόνον αυτές τις λύσεις. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται «καθιέρωση s-συνέπειας».

Να σημειώσουμε εδώ ότι κάθε φόρμουλα μπορεί να γίνει (ισχυρά) s-συνεπής, για **σταθερό** s, σε πολυωνυμικό χρόνο με τον αλγόριθμο του M. C. Cooper (βλ. [7]). Άλλοι αλγόριθμοι για $s = 2, 3$ και για απλή (μη-ισχυρή) s-συνέπεια, υπάρχουν στις εργασίες των Mohr και Henderson (βλ. [22]), των Han και Lee (βλ. [19]) και του Freuder (βλ.[17]).

Η τελευταία έννοια που θα χρειαστούμε είναι αυτή της r-*αποσυντιθέμενης σχέσης*.

Ορισμός 15. *Έστω μία n-μελής πολυειδής σχέση $R \subseteq \prod_{j=1}^{m} \{0_j, 1_j\}^{i_j}$. Η R θα λέγεται r-αποσυντιθέμενη (r-decomposable), αν περιέχει όλες τις n-άδες $\bar{a} = (a_1, ..., a_n) \in \prod_{j=1}^{m} \{0_j, 1_j\}^{i_j}$ για τις οποίες ισχύει ότι:*

$$pr_I(\bar{a}) \in pr_I R,$$

για κάθε $I \subseteq \{1, ..., n\}$, με $|I| \leq r$.
Η R θα λέγεται r-αποσυντιθέμενη για το είδος j, αν το παραπάνω ισχύει για την σχέση R_{I_j}.

Ας δούμε μερικά απλά παραδείγματα σε σχέση με αυτήν την τελευταία έννοια.

Παράδειγμα 6. *Η διειδής σχέση*

$$R = \{(0_1, 1_1, 1_1, 0_2, 1_2), (1_1, 0_1, 1_1, 1_2, 0_2), (1_1, 1_1, 0_1, 1_2, 1_2)\},$$

δεν είναι 2*-αποσυντιθέμενη για το είδος* 1*, αλλά είναι για το είδος* 2*. Η διειδής σχέση*

$$R' = R \cup \{(1_1, 1_1, 1_1, 0_2, 0_2)\},$$

είναι 2*-αποσυντιθέμενη και για τα δύο είδη, αλλά δεν είναι* 2*-αποσυντιθέμενη.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε με την σειρά τους παραπάνω ισχυρισμούς.

- Έστω το διάνυσμα $\bar{a} = \{(1_1, 1_1, 1_1, 0_2, 0_2)\} \notin R$. Παρατηρούμε ότι $pr_{\{i\}}\bar{a} = 1_1 \in R_i = \{0_1, 1_1\}$ για κάθε $i \in \{1, 2, 3\}$. Επίσης, $pr_{i,j}\bar{a} = \{1_1, 1_1\} \in R_{i,j} = \{(0_1, 1_1), (1_1, 0_1), (1_1, 1_1)\}$, για κάθε $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Από τον ορισμό 15, η R δεν είναι 2-αποσυντιθέμενη για το πρώτο είδος (άρα προφανώς δεν είναι 2-αποσυντιθέμενη). Για το δεύτερο είδος είναι με τετριμμένο τρόπο, αφού η διάσταση του δεύτερου είδους είναι 2: κάθε διάνυσμα που δεν ανήκει στην $R_{4,5}$ αυτομάτως αποτυγχάνει στον έλεγχο του ορισμού 15, άρα δεν χρειαζόταν να ανήκει.

- Ο ισχυρισμός για το ότι η R' είναι 2-αποσυντιθέμενη για το είδος 2 αποδυκνείεται με το παραπάνω επιχείρημα, ή με την παρατήρηση ότι $R'_{4,5} = \{0_2, 1_2\}^2$. Το ότι είναι 2-αποσυντιθέμενη και για το πρώτο είδος, παρατηρούμε ότι η R'_{I_1} περιέχει όλα τα διανύσματα με τουλάχιστον δύο 1_1. Έστω $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, όπου, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, $a_1 = a_3 = 0_1$. Τότε, για κάθε $a_2 \in \{0_1, 1_1\}$, $pr_{1,3}\bar{a} = \{0_1, 0_1\} \notin R'_{1,3}$, άρα το $\bar{a}$ δεν χρειάζεται να ανήκει στην R'. Το ίδιο ισχύει σε όποιες δύο θέσεις κι αν βάλουμε τα 0_1.

- Για το ότι η R' δεν είναι 2-αποσυντιθέμενη, έστω $\bar{a} = (1_1, 1_1, 1_1, 0_2, 1_2) \notin R'$. Αφού $pr_{\{1,2,3\}}\bar{a} \in R'_{I_1}$ και $pr_{\{4,5\}}\bar{a} \in R'_2$ αρκεί να ελέγξω την συνθήκη του ορισμού 15 για $I \in \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$. Με τον εξαντλητικό αυτό έλεγχο, προκύπτει ότι $pr_{\{i,j\}}\bar{a} \in R_{i,j}$, για κάθε $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, οπότε και αποδείξαμε τον ισχυρισμό μας.

$\square$

Το παρακάτω θεώρημα, που αποτελεί το κεντρικό αποτέλεσμα του [23], θα μας χρειαστεί στην απόδειξη του θεωρήματος Schaefer για Π.Π.Ι.Π.

Θεώρημα 10. *Έστω S ένα σύνολο πολυειδών σχέσεων, με* $\overline{maj} = \underbrace{(maj, ..., maj)}_{m-\text{φορές}} \in MPol(S)$. *Τότε:*

1. *κάθε $R \in \langle S \rangle$ είναι 2-αποσυντιθέμενη και*

2. *για οποιαδήποτε S-φόρμουλα ϕ, η καθιέρωση (ισχυρής) 3-συνέπειας την κάνει καθολικά συνεπή.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε τους δύο ισχυρισμούς ξεχωριστά. Σε όλη την απόδειξη που ακολουθεί, παρ'ότι δεν αναφέρεται πουθενά, η υπόθεση ότι κάθε μεταβλητή εμφανίζεται σε το πολύ ένα είδος κάθε φόρμουλας ισχύει. Επίσης, η απόδειξη θα μπορούσε να γίνει «κατά είδος», δηλαδή να υποθέταμε ότι υπάρχει συνάρτηση $\bar{f} = (f_1, ..., f_m)$ με $f_j = maj$ και να συνεχίζαμε την απόδειξη για το σύνολο σχέσεων S_{I_j}. Το μόνο που θα καταφέρναμε έτσι θα ήταν να έχουμε να αντιμετωπίσουμε πιο περίπλοκους συμβολισμούς, χωρίς να κερδίσουμε κάτι σε ουσία.

1. Έστω μία n-μελής πολυειδής σχέση $R \in \langle S \rangle$. Για $n = 2$, η υπόθεση ισχύει τετριμμένα. Έστω ότι ισχύει για όλες τις $(n-1)$-μελείς σχέσεις, $n \geq 3$ και έστω $\bar{a} = (a_1, ..., a_n)$ τ.ώ. $pr_I\bar{a} \in R_I$, για κάθε $I \subseteq \{1, ..., n\}$, $|I| \leq 2$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\bar{a} \in R$.
   Έστω $\bar{a}_j = pr_j^n(a_1, a_2, ..., a_n)$, $j \in \{1, 2, 3\}$. Από την επαγωγική υπόθεση, $\bar{a}_j \in R_j$, για κάθε $j \in \{1, 2, 3\}$. Άρα, υπάρχουν $x^1, x^2, x^3 \in R$ τ.ώ. $x^1 = (x_1, a_2, ..., a_n), x^2 = (a_1, x_2, a_3, ..., a_n)$,
   $x^3 = (a_1, a_2, x_3, a_4, ..., a_n) \in R$. Από την υπόθεση, $\overline{maj} \rhd R$ άρα $\overline{maj}(x^1, x^2, x^3) = \bar{a} \in R$.

2. Έστω μία S-φόρμουλα $\phi(u_1, ..., u_n)$ που είναι ισχυρά 3-συνεπής. Έστω ότι δεν είναι καθολικά συνεπής. Τότε, υπάρχει $s \in \{1, ..., n\}$ τ.ώ. $\phi(u_1, ..., u_n)$ δεν είναι s-συνεπής, δηλαδή υπάρχει σύνολο μεταβλητών $V' = \{v_1, ..., v_{s-1}\} \subseteq \{u_1, ..., u_n\}$ και μεταβλητή
   $v \in \{u_1, ..., u_n\} \setminus \{v_1, ..., v_{s-1}\}$ τ.ώ. να υπάρχει λύση $\bar{l}$ για την υποφόρμουλα $\phi_{\restriction_{V'}}$ που δεν μπορεί να επεκταθεί σε λύση για την υποφόρμουλα $\phi_{\restriction_{V' \cup \{v\}}}$.
   Έστω ότι
   $$\phi_{\restriction_{V' \cup \{v\}}}(u_1, ..., u_n) = \bigwedge_{i=1}^{k} R^i(v_1^i, ..., v_{n_i}^i),$$
   όπου τα R^i είναι προβολές περιορισμών της $\phi(u_1, ..., u_n)$ και $v_j^i \in V' \cup \{v\}$, για κάθε $j \in \{1, ..., n_i\}$ και $i \in \{1, ..., k\}$.
   Κατασκευάζουμε νέα $\langle S \rangle$-φόρμουλα $\phi'(W)$, με
   $W = \bigcup_{i=1}^{k} W_i \cup \{v'\}$, όπου τα W_i είναι ανά δύο ξένα σύνολα s-1 μεταβλητών, για κάθε $i \in \{1, ..., k\}$. Έστω $f_i : V' \mapsto W_i$, 1-1, για

κάθε $i \in \{1, ..., k\}$. Επεκτείνουμε τις f_i θέτοντας $f_i(v) = v'$. Η $\langle S \rangle$-φόρμουλα $\phi'(W)$ θα είναι η εξής:

$$\phi'(W) = \bigwedge_{i=1}^{k} R^i(f_i(v_1^i), ..., f_i(v_{n_i}^i)).$$

Έστω η $(k \cdot (s-1))$-μελής σχέση R η οποία αποτελείται από τις προβολές των λύσεων της $\phi'(W)$ στις μεταβλητές που ανήκουν στο σύνολο $\bigcup_{i=1}^{k} f_i(V')$. Παρατηρούμε ότι $R \in \langle S \rangle$, καθώς μπορεί να κατασκευαστεί από μια ακολουθία Καρτεσιανών γινομένων κατά είδη, υπαρξιακών προβολών και τομών με σχέσεις ισοδυναμίας. Θα δείξουμε ότι η R δεν είναι 2-αποσυντιθέμενη για να καταλήξουμε σε άτοπο.
Έστω $l(V') = (l(v_1), ..., l(v_{s-1}))$, όπου $l(v_j)$ η τιμή της μεταβλητής $v_j \in V'$ στην λύση $\bar{l}$. Έστω t το διάνυσμα που αποτελείται από τα είδη του $l(V)$ k-φορές το καθένα (στη σωστή σειρά ώστε να αποτελεί όντως πολυειδές διάνυσμα όπως τα έχουμε ορίσει). Προφανώς, $t \notin R$, καθώς αν ανήκει, τότε, θα υπάρχει l' τ.ώ. το διάνυσμα (t, l') να ανήκει στη σχέση R' των λύσεων της $\phi'(W)$. Η R όμως είναι η προβολή της R' στις συντεταγμένες που δεν εμφανίζεται η μεταβλητή v', το οποίο σημαίνει ότι η $\bar{l}$ μπορεί να επεκταθεί σε λύση της υποφόρμουλας $\phi_{\restriction_{V' \cup \{v\}}}$. Άτοπο.
Αρκεί πλέον να δείξουμε ότι, για κάθε $I \subseteq \{1, ..., k(s-1)\}$, με $|I| \leq 2$, $pr_I t \in R_I$. Έστω I^*, $|I^*| \leq 2$ με $pr_{I^*} t \notin R_{I^*}$. Τότε, έχουμε μια λύση για μία ή δύο μεταβλητές που δεν μπορεί να επεκταθεί σε δεύτερη ή τρίτη, από την κατασκευή της R. Αυτό είναι άτοπο, αφού η $\phi(u_1, ..., u_n)$ είναι ισχυρά 3-συνεπής.

$\square$

Θα χρειαστεί να ορίσουμε άλλη μία πράξη μεταξύ περιορισμών. Μέχρι στιγμής, όλες οι πράξεις που έχουμε ορίσει (καρτεσιανό γινόμενο, τομή κ.τ.λ), έχουν ορισθεί σε σχέσεις που δεν έχουν εφαρμοστεί σε μεταβλητές. Θα μπορούσαμε να το κάνουμε και εδώ αυτό, ορίζοντας την πράξη κατά συντεταγμένες. Μας φαίνεται πιο λογικό να μην ακολουθήσουμε αυτόν τον τρόπο και για λόγους διαίσθησης, αλλά και για να μην περιπλέξουμε υπερβολικά τον συμβολισμό.

Ορισμός 16. *Έστω δύο πολυειδείς σχέσεις R_1, R_2, με ίχνη $(i_1, ..., i_m)$ και $(j_1, ..., j_m)$ αντίστοιχα, ένα σύνολο μεταβλητών V και οι περιορισμοί $R_1(u_1, ..., u_s)$ και $R_2(v_1, ..., v_t)$, όπου $u_i, v_j \in V$ (όχι αναγκαστικά διακεκριμένες) για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, $j \in \{1, ..., m\}$, $s, t \in \mathbb{N}^*$. Έστω επίσης $\{w_1, ..., w_n\} = \{u_1, ..., u_s, v_1, ..., v_t\}$, $n \in \mathbb{N}$. Η συνένωση (join) των $R_1(u_1, ..., u_s)$, $R_2(v_1, ..., v_t)$, ορίζεται ως εξής:*

$$R_1 \bowtie R_2(w_1, ..., w_n) = pr_{k_1, ..., k_l}(R_1 \otimes R_2) \bigcap_{j=k_1}^{k_l} Eq_{w_j}^n(w_1, ..., w_n),$$

όπου $Eq_{w_j}^n$ είναι όλες οι n-άδες με ίδιες τιμές στις συντεταγμένες που αντιστοιχούν ίδιες μεταβλητές με την w_j και $w_{k_1}, ..., w_{k_l}$ οι διακεκριμένες μεταβλητές από τις $w_1, ..., w_n$.

Παρατηρήστε ότι αν $R_1, R_2 \in S$, τότε $R_1 \bowtie R_2 \in \langle S \rangle$ και επίσης ότι ο υπολογισμός του $R_1 \bowtie R_2$ μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο.
Ας εξετάσουμε ένα απλό παράδειγμα.

Παράδειγμα 7. *Έστω $R_1(u_1, u_2, u_1, u_5, u_4)$, $R_2(u_3, u_1, u_4, u_6)$, όπου*

$$R_1 = \{(1_1, 0_1, 1_1, 1_2, 0_2), (0_1, 0_1, 1_1, 0_2, 0_2)\},$$

$$R_2 = \{(0_1, 1_1, 0_2, 1_2), (0_1, 0_1, 1_2, 0_2)\}.$$

Τότε: $R_1 \bowtie R_2(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) = \{(1_1, 0_1, 0_1, 0_2, 1_2, 1_2)\}$.

Είμαστε πλέον έτοιμοι να αποδείξουμε το βασικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου.

Θεώρημα 11. *Έστω ένα σύνολο πολυειδών σχέσεων S με m είδη. Αν, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$, υπάρχει $\bar{f}^j = (f_1^j, ..., f_m^j) \in MPol(S)$ τ.ώ.*

$$f_j^j \in \{c_{0_j}^n, c_{1_j}^n, \wedge, \vee, maj, \oplus\},$$

με τις $\bar{f}^j$ όπου $f_j^j = \oplus$ να είναι ταυτοδύναμες και $n \in \mathbb{N}$, τότε $SAT(S) \in P$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα αυτό σε βήματα.

- Ισχυρισμός 1: Έστω ένα σύνολο πολυειδών σχέσεων S. Αν, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$, υπάρχει $\bar{f}^j = (f_1^j, ..., f_m^j) \in MPol(S)$ τ.ώ. $f_j^j \in \{\wedge, \vee, maj\}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $SAT(S) \in P$.

  Απόδειξη. Θα συμβολίζουμε με $\sqcap$ οποιονδήποτε από τους τελεστές $\{\wedge, \vee\}$. Άρα, ορίζοντας $H = \{j \in \{1, ..., m\} \mid f_j^j = \sqcap\}$, εννοούμε το σύνολο των δεικτών των ειδών του S που είναι κλειστά είτε ως

προς $\wedge$ είτε ως προς $\vee$.
Έστω μια S-φόρμουλα

$$\phi(u_1, ..., u_n) = \bigwedge_{i=1}^{k} R^i(u_1^i, ..., u_{n_i}^i).$$

Καθιερώνουμε ισχυρή 3-συνέπεια ως εξής: για κάθε τρεις περιορισμούς , $R^r(u_1^r, ..., u_{n_r}^r)$, $R^s(u_1^s, ..., u_{n_s}^s)$ και $R^t(u_1^t, ..., u_{n_t}^t)$, $r, s, t \in \{1, ..., k\}$, παίρνουμε την συνένωσή τους, προβεβλημένη πάνω στις μεταβλητές του καθενός περιορισμού, δηλαδή τις σχέσεις:

$$(R^r \bowtie R^s \bowtie R^t)\restriction_{\{u_1^r,...,u_{n_r}^r\}},$$

$$(R^r \bowtie R^s \bowtie R^t)\restriction_{\{u_1^s,...,u_{n_s}^s\}},$$

$$(R^r \bowtie R^s \bowtie R^t)\restriction_{\{u_1^t,...,u_{n_t}^t\}}.$$

Συνεχίζουμε αυτήν την διαδικασία μέχρι να μην υπάρχουν αλλαγές στους περιορισμούς και παίρνουμε, σε πολυωνυμικό χρόνο, μια ισοδύναμη $\langle S\rangle$-φόρμουλα $\phi'(u_1, ..., u_n)$.
Έστω, $D(u)$ ο περιορισμός με τις δυνατές τιμές της u στην $\phi'(u_1, ..., u_n)$, για κάθε $u \in \{u_1, ..., u_n\}$. Αυτός ο περιορισμός μπορεί να προκύψει ως προβολή στις συντεταγμένες που εμφανίζεται η u, κάποιου περιορισμού της $\phi'(u_1, ..., u_n)$. Ξέρουμε ότι $\sqcap \in Pol(S_{I_j})$ για κάθε $j \in H$. Άρα $\sqcap \in Pol(\langle S_{I_j}\rangle)$, οπότε και $\sqcap \in Pol(D(u))$, για κάθε u που εμφανίζεται σε είδος με συντεταγμένη στο H.
Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

1. $D(u) = \emptyset$. Τότε προφανώς δεν υπάρχει λύση για την φόρμουλα.
2. Έστω ότι όλα τα $D(u)$ είναι μη κενά. Για τις μεταβλητές εκτός του H, από το θεώρημα 10, ξέρουμε ότι μπορούμε να επεκτείνουμε τις λύσεις για μία μεταβλητή σε καθολικές λύσεις. Έστω $t = (t_1, ..., t_n)$, με $t_i = \sqcap(D(u))$, για όλες τις u που εμφανίζονται σε είδος με συντεταγμένες στο H και κάποιες τιμές για τις υπόλοιπες συντεταγμένες που προκύπτουν από το προηγούμενο επιχείρημα. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $t \in R$, για όλους τους περιορισμούς R της $\phi'(u_1, ..., u_n)$: έστω δύο διανύσματα $t^1, t^2 \in R$ και δύο μεταβλητές v_1, v_2, με $t_i^1 = \sqcap(D(v_1))$ και $t_j^2 = \sqcap(D(v_2))$, όπου $i \neq j$ σε είδη των οποίων οι συντεταγμένες τους ανήκουν στο H και $v_1, v_2 \in \{u_1, ..., u_n\}$ που εμφανίζονται στις συντεταγμένες i, j της R αντίστοιχα. Προφανώς τα διανύσματα $t_{1,2}^1 = (t_1^1, ..., t_i^1, ..., t_j^2, ..., t_n^1)$ και $t_{1,2}^2 = (t_1^2, ..., t_i^1, ..., t_j^2, ..., t_n^2)$ ανήκουν στον R. Με την ίδια διαδικασία, επαγωγικά, καταλήγουμε στο $t \in R$.

Δείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει λύση, αν και μόνον αν όλα τα $D(u)$ είναι μη-κενά. Αυτό μπορεί να ελεγχθεί προφανώς πολυωνυμικά. $\square$

- Ισχυρισμός 2: Έστω ένα σύνολο πολυειδών σχέσεων S. Αν, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$, υπάρχει $\bar{f}^j = (f_1^j, ..., f_m^j) \in MPol(S)$ τ.ώ. $f_j^j \in \{\wedge, \vee, maj, \oplus\}$, με τις $\bar{f}^j$ όπου $f_j^j = \oplus$ να είναι ταυτοδύναμες, τότε $SAT(S) \in P$.

  Απόδειξη. Έστω μια S-φόρμουλα $\phi(u_1, ..., u_n)$ και $A = \{j \in \{1, ..., m\} \mid f_j^j = \oplus\}$. Μπορεί να δειχθεί ότι υπάρχει τελεστής $\bar{g} = (g_1, ..., g_m)$ τ.ώ. $g_j = \oplus$, για κάθε $j \in A$. Για κάθε λύση στην $\phi_{\restriction_{V'}}(u_1, ..., u_n)$, όπου V' το σύνολο των μεταβλητών που εμφανίζονται σε είδος με συντεταγμένη εκτός του A, υπολογίζουμε με απαλοιφή Gauss, μία βάση για το σύνολο λύσεων της υπόλοιπης φόρμουλας, το μέγεθος της οποίας φράσσεται από το πλήθος των μεταβλητών. Για να βρούμε τις λύσεις της $\phi_{\restriction_{V'}}(u_1, ..., u_n)$, χρειάζεται να κοιτάξουμε μόνο τα $\binom{n}{3}$ προβλήματα με τρεις μεταβλητές. Συνδυάζοντας τις βάσεις των λύσεων για την υπόλοιπη φόρμουλα, βρίσκουμε την βάση των λύσεων αυτού του μέρους. Αν είναι κενό, τότε η φόρμουλα δεν έχει λύση. Αλλιώς έχει. $\square$

- Ισχυρισμός 3: Έστω ένα σύνολο πολυειδών σχέσεων S. Αν, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$, υπάρχει $\bar{f}^j = (f_1^j, ..., f_m^j) \in MPol(S)$ τ.ώ. $f_j^j \in \{c_{0_j}^n, c_{1_j}^n, \wedge, \vee, maj, \oplus\}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $SAT(S) \in P$.

  Απόδειξη. Έστω $C = \{j \in \{1, ..., m\} \mid f_j^j \in \{c_{0_j}^n, c_{1_j}^n\},\ n \in \mathbb{N}\}$. Έστω $j \in C$. Για την $g := f^j$, με $f_j^j(\bar{x}) := c_j$ για κάθε $\bar{x} \in \{0_j, 1_j\}^n$, ($c_j \in \{0_j, 1_j\}$), υπάρχουν δύο επιλογές, για κάθε f_i^j, $i \in \{1, ..., m\} \setminus \{j\}$.

  - Αν η f_i^j είναι επί, τότε κάθε διάνυσμα σε σχέση του S_{I_i} μπορεί να συνδυαστεί με το $(c, c, ..., c)$ του S_{I_j}.
  - Αν η f_i^j δεν είναι επί, τότε $f_i^j(\bar{x}) = c_i \in \{0_i, 1_i\}$, για κάθε $\bar{x} \in \{0_i, 1_i\}^n$.

  Σε κάθε περίπτωση, είτε έχουμε απευθείας σταθερές λύσεις για κάθε είδος που μπορούν να συνδυαστούν σε λύση για μια φόρμουλα, είτε κάποια είδη πρέπει να λυθούν όπως περιγράψαμε στους προηγούμενους ισχυρισμούς, αλλά για τα οποία οποιαδήποτε λύση θα συνδυάζεται με τις σταθερές των υπολοίπων ειδών. $\square$

$\square$

Θεώρημα 12. *Έστω ένα σύνολο πολυειδών σχέσεων* S, *Αν υπάρχει* $j \in \{1, ..., m\}$, *τ.ώ. για κάθε* $\bar{f}^j = (f_1^j, ..., f_m^j) \in MPol(S)$*:* $f_j^j \notin \{c_{0_j}, c_{1_j}, \wedge, \vee, maj, \oplus\}$, *τότε το* $SAT(S)$ *είναι* NP*-πλήρες.*

Απόδειξη. Έχουμε δείξει ότι

$$Pol(S_{I_j}) = Pol(Inv(MPol(S)_j)) = MPol(S)_j.$$

Άρα $c_{0_j}, c_{1_j}, \wedge, \vee, maj, \oplus \notin Pol(S_{I_j})$. Από θεώρημα 5, το $SAT(S_{I_j})$ είναι NP-πλήρες. Αφού $SAT(S_{I_j}) \leq SAT(S)$, το $SAT(S)$ είναι NP-πλήρες. $\square$

2.4 Συντηρητικά Π.Π.Ι.Π

Θα τελειώσουμε αυτό το κεφάλαιο με την σύντομη παράγραφο για συντηρητικά Π.Π.Ι.Π. Ο λόγος που θα αναφερθούμε σε αυτά, είναι γιατί αποτελούν το φυσιολογικό πλαίσιο στο οποίο θα συνδεθεί όλη η θεωρία πολυπλοκότητας που αναπτύξαμε σε αυτό το κεφάλαιο, με την θεωρία κοινωνικής επιλογής, για την οποία θα μιλήσουμε στο επόμενο. Η αντίστοιχη θεωρία μπορεί φυσικά να αναπτυχθεί και για την μονοειδή περίπτωση, ή να αντληθεί από αυτά που θα αναλύσουμε σε αυτήν την παράγραφο, για $m = 1$.

Μία ΚΣΜ$_C(S)$-φόρμουλα, για κάποιο σύνολο πολυειδών σχέσεων S, ή αλλιώς μια *συντηρητική* (conservative) S-φόρμουλα, είναι μία S-φόρμουλα όπου κάποιες μεταβλητές της έχουν αντικατασταθεί με σταθερές (βλ. [20]).

Για τεχνικούς λόγους, θα απαιτούμε τουλάχιστον μία μεταβλητή να έχει αντικατασταθεί με σταθερά. Επίσης, η κάθε μεταβλητή που αντικαθίσταται από κάποια σταθερά, θα αντικαθίσταται από σταθερά του είδους στο οποίο βρίσκεται. Θυμηθείτε ότι έχουμε απαιτήσει σε μία S-φόρμουλα, κάθε μεταβλητή να εμφανίζεται σε το πολύ ένα είδος, οπότε η δεύτερη απαίτηση δεν δημιουργεί κάποιο πρόβλημα.

Παρατηρούμε ότι, αν η συντηρητική S-φόρμουλα $\phi(u_1, ..., u_n)$, προέρχεται από την S-φόρμουλα $\phi(u_1, ..., u_n, u)$, με αντικατάσταση της μεταβλητής u από την σταθερά (χ.β.τ.γ) 0_j, τότε είναι ισοδύναμη με την S-φόρμουλα

$$\phi'(u_1, ..., u_n, u) = \phi(u_1, ..., u_n, u) \wedge \{0_j\}(u).$$

Αυτό μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό, ο οποίος μπορεί να βρεθεί και στο [4].

Ορισμός 17. *Έστω S ένα σύνολο από πολυειδείς σχέσεις. Το S θα λέγεται συντηρητικό (conservative), αν για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$, οι σχέσεις $\{0_j\}$,$\{1_j\}$ και $\{0_j, 1_j\}$ ανήκουν στο S.*
Ορίζουμε επίσης, για οποιοδήποτε σύνολο S από πολυειδείς σχέσεις, S^c να είναι η συντηρητική κλειστότητα S, δηλαδή:

$$S^c = \bigcup_{j=1}^{m} \{\{0_j\}, \{1_j\}, \{0_j, 1_j\}\} \cup S.$$

Θα ασχοληθούμε τώρα με τον αντίστοιχο ορισμό για συναρτήσεις (βλ. [21]).

Ορισμός 18. *Έστω μια n-μελής πολυειδής συνάρτηση $\bar{f} = (f_1, ..., f_m)$. Η $\bar{f}$ θα λέγεται συντηρητική (conservative), αν για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$ και για κάθε $(a_1, ..., a_n) \in \{0_j, 1_j\}^n$, ισχύει ότι*

$$f_j(a_1, ..., a_n) \in \{a_1, ..., a_n\}.$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι η $\bar{f}$ είναι συντηρητική αν και μόνο αν είναι *ταυτοδύναμη*, δηλαδή για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$, $f_j(c_j, ..., c_j) = c_j$, $c_j \in \{0_j, 1_j\}$. Ο λόγος που δίνεται ο ορισμός της συντηρητικής συνάρτησης, είναι ότι για πεδία με περισσότερα των 2 στοιχείων, η ισοδυναμία ισχύει μόνο προς την μία κατεύθυνση, δηλαδή μια συντηρητική συνάρτηση είναι πάντα ταυτοδύναμη (αλλά όχι το αντίστροφο).

Είναι επίσης απλό να δειχθεί ότι για οποιοδήποτε σύνολο πολυειδών σχέσεων S, ισχύει ότι:

$$\bar{f} \in MPol(S^c) \text{ ανν } \bar{f} \text{ συντηρητική } \& \ \bar{f} \in MPol(S).$$

Ορίζουμε τώρα τι είναι ένα Σ.Π.Π.Ι.Π, με δύο τρόπους:

Πρόβλημα: Σ.Π.Κ.Σ.Μ(S) (ή $SAT_C(S)$).
Είσοδος: συντηρητική S-φόρμουλα ϕ.
Ερώτηση: Είναι η ϕ ικανοποιήσιμη;

και

Πρόβλημα: Σ.Π.Κ.Σ.Μ(S) (ή $SAT(S^c)$).
Είσοδος: S^c-φόρμουλα ϕ.
Ερώτηση: Είναι η ϕ ικανοποιήσιμη;

Θα προτιμήσουμε κυρίως τον δεύτερο τρόπο, καθώς πάλι όλη η πληροφορία περιέχεται στο σύνολο πάνω στο οποίο ορίζουμε το πρόβλημα ικανοποιησιμότητας.

Το αντίστοιχο θεώρημα διχοτόμησης είναι το εξής:

Θεώρημα 13. *Έστω ένα σύνολο πολυειδών σχέσεων S. Αν, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$, υπάρχει $\bar{f}^j = (f_1^j, ..., f_m^j) \in MPol(S^c)$ τ.ώ.*

$$f_j^j \in \{\wedge, \vee, maj, \oplus\},$$

τότε $SAT(S^c) \in P$. Αλλιώς, το $SAT(S^c)$ είναι NP-πλήρες.

Παρατηρήστε ότι οι σταθερές συναρτήσεις δεν είναι ποτέ συντηρητικές. Κατ'επέκταση, η απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι οι Ισχυρισμοί $1, 2$ και 4 του θεωρήματος 11, καθώς είναι εύκολο να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις $\wedge, \vee, maj, \oplus$ είναι συντηρητικές. Μια εναλλακτική απόδειξη, που δεν βασίζεται στο θεώρημα 11, υπάρχει στο [4].

Κεφάλαιο 3

Θεωρία Κοινωνικής Επιλογής

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τη θεωρία κοινωνικής επιλογής. Το πλαίσιο στο οποίο θα δουλέψουμε, παρ'ότι μοιάζει αρκετά με αυτά των E. Dokow και R. Holzman (βλ. [15],[16]) και των L. Kirousis και P. Kolaitis (βλ. [21]), έχει κάποιες βασικές διαφορές.

Ξεκινάμε με έναν πληθυσμό (κοινωνία) και υποθέτουμε ένα σύνολο θεμάτων, για τα οποία πρέπει ο πληθυσμός να πάρει μια απόφαση. Για κάθε θέμα, υπάρχουν δύο δυνατές επιλογές και υπάρχει κι ένα σύνολο από επιτρεπτούς συνδυασμούς ψήφων μεταξύ των θεμάτων. Οι ψήφοι που θα κάνουν τα μέλη της κοινωνίας, θα πρέπει να συμψηφιστούν με κάποιον τρόπο, ο οποίος μπορεί και να διαφέρει από θέμα σε θέμα. Η βασική διαφορά του πλαισίου μας με τα προαναφερθέντα, είναι ότι θα υποθέσουμε ότι το κάθε θέμα αποτελείται από ένα σύνολο υποθεμάτων, οι ψήφοι στα οποία πρέπει να συμψηφιστούν με τον ίδιο τρόπο. Επίσης, θα ασχοληθούμε με οικογένειες συνόλων αποδεκτών ψήφων, κάτι το οποίο μπορούμε να σκεφτούμε ως διαφορετικές ψηφοφορίες, με διαφορετικό πλήθος υποθεμάτων η καθεμία, οι οποίες επιτρέπουν και διαφορετικούς συνδυασμούς ψήφων. Αυτά αποτελούν σημαντικές γενικεύσεις, καθώς θα κάνουν άμεση τη σύνδεση με όλη την θεωρία για πολυειδή Π.Ι.Π. που αναπτύξαμε στο κεφάλαιο 2.

Στόχος μας είναι να συνδέσουμε την δυνατότητα να γίνει ο συμψηφισμός με μη-δικτατορικό τρόπο με την δυνατότητα επίλυσης κάποιου Π.Π.Ι.Π. Προτού φτάσουμε εκεί όμως, πρέπει να ορίσουμε προσεκτικά τις έννοιες που θα εξετάσουμε και να κάνουμε την σύνδεση με την θεωρία των Π.Π.Ι.Π. Στην πορεία, θα γενικεύσουμε και κάποια αποτελέσματα από το [21] που θα μας χρησιμεύσουν. Τέλος, να αναφέρουμε ότι ενώ από τις οπτικές που παραθέσαμε παραπάνω, το πλαίσιο στο οποίο δουλεύουμε αποτελεί γενίκευση των πλαισίων που έχουν εξετασθεί μέχρι τώρα, παραμένει δυαδικό (Boole). Οι E. Dokow και R. Holzman στο [16] και οι L. Kirousis και P. Kolaitis στο [21], έχουν ασχοληθεί και με μη-δυαδικά πλαίσια.

3.1 Βασικοί ορισμοί και προτάσεις

Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας προσεκτικά το πλαίσιο που θα κινηθούμε και θα επισημαίνουμε όπου χρειάζεται την σχέση του με το πλαίσιο του κεφαλαίου 2.

Έστω ένας πληθυσμός n ατόμων, $n \in \mathbb{N}$ και m θέματα προς απόφαση, όπου το κάθε θέμα j επιδέχεται ψήφους από το σύνολο $\{0_j, 1_j\}$. Ένα σύνολο *εφικτών συνδυασμών ψήφων* είναι μία πολυειδής σχέση

$$R \subseteq \prod_{j=1}^{m} \{0_j, 1_j\}^{i_j},$$

όπου $i_j \in \mathbb{N}^*$, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$. Σε αυτήν την περίπτωση, θα λέμε ότι η πολυειδής σχέση R έχει ένα είδος για κάθε θέμα προς απόφαση και ότι η διάσταση του θέματος j είναι το πλήθος των υποθεμάτων του. Θα χρησιμοποιήσουμε και μια συνθήκη *μη-εκφυλισμού* για ένα τέτοιο σύνολο: για κάθε $i \in \{1, ..., \alpha_R\}$, $|R_i| = 2$. Η συνθήκη αυτή έχει νόημα από τη σκοπιά της θεωρίας κοινωνικής επιλογής, καθώς δεν έχει νόημα να ψηφίζουμε για ένα ζήτημα στο οποίο υπάρχει μόνο μία δυνατή απάντηση.

Θα ορίσουμε τώρα τις κλάσεις των πολυειδών συναρτήσεων που μας ενδιαφέρουν.

Ορισμός 19. *Έστω μία πολυειδής σχέση R. Η κλάση συναρτήσεων $AGG(R)$ περιέχει όλες τις n-μελείς πολυειδείς συναρτήσεις $\bar{f} = (f_1, ..., f_m)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για τις οποίες ισχύουν:*

1. *$\bar{f} \in MPol(R)$ και*
2. *$\bar{f}$ συντηρητική.*

Οι συναρτήσεις αυτές θα ονομάζονται συμψηφιστές του R. Επίσης, για οποιοδήποτε σύνολο πολυειδών σχέσεων S, το $AGG(S)$ περιλαμβάνει όλες τις συναρτήσεις που είναι συμψηφιστές κάθε σχέσης $R \in S$. Θα συμβολίζουμε την ιδιότητα μιας συνάρτησης να είναι συμψηφιστής μιας σχέσης R (ή ενός συνόλου σχέσεων S), με $\bar{f} \rhd_c R$.

Έχουμε ήδη συζητήσει, στην παράγραφο 3.4, ότι:

- $\bar{f}$ συντηρητική αν και μόνον αν
$$\bar{f} \rhd \{\{0_j\}, \{1_j\}, \{0_j, 1_j\} \mid j \in \{1, ..., m\}\}.$$
- $\bar{f} \in AGG(S)$ αν και μόνον αν $\bar{f} \in MPol(S^c)$.

Από το δεύτερο, προκύπτει απευθείας και το ότι το σύνολο $AGG(S)$ είναι κλώνος, αφού το $MPol(S^c)$ είναι.

Θα ορίσουμε τώρα δύο κλάσεις συναρτήσεων που θα είναι σημαντικές για την συνέχεια.

Ορισμός 20. *Έστω μία πολυειδής σχέση R και $\bar{f}$ ένας n-μελής συμψηφιστής της. Θα λέμε ότι ο $\bar{f}$ είναι μονομορφικός (unimorphic), αν για κάθε $i, j \in \{1, ..., m\}$, για κάθε $1-1$ και επί συνάρτηση $g_{ij} : \{0_j, 1_j\} \mapsto \{0_j, 1_j\}$ και για κάθε n-άδα $(x_1, ..., x_n) \in \{0_i, 1_i\}^n$, ισχύει ότι:*

$$f_j(g_{ij}(x_1), ..., g_{i_j}(x_n)) = g_{ij}(f_i(x_1, ..., x_n)).$$

Ο ορισμός παραμένει ίδιος αν αντί για πολυειδή σχέση R, έχουμε σύνολο πολυειδών σχέσεων S.

Πιο διαισθητικά, αν κάνουμε την προφανή αντιστοίχηση $0_j \to 0$ και $1_j \to 1$, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$, ο παραπάνω ορισμός μας λέει δύο πράγματα:

- ότι οι συναρτήσεις f_i και f_j ταυτίζονται, για κάθε $i, j \in \{1, ..., m\}$ και
- ότι αν αντιστρέψουμε όλες τις τιμές στην είσοδο της συνάρτησης (δηλαδή τα 0 να γίνουν 1 και το αντίστροφο), τότε η τιμή της συνάρτησης αντιστρέφεται επίσης.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα για να καταλάβουμε καλύτερα τον παραπάνω ορισμό.

Παράδειγμα 8. *Έστω R μία πολυειδής σχέση, με $\bar{f} = \underbrace{(maj, ..., maj)}_{m-\text{φορές}}$, $\bar{g} = \underbrace{(\oplus, ..., \oplus)}_{m-\text{φορές}} \in AGG(R)$. Οι τελεστές $\bar{f}, \bar{g}$ είναι μονομορφικοί.*

Ο ισχυρισμός είναι προφανής από τον ορισμό των συναρτήσεων $maj, \oplus$.

Παράδειγμα 9. *Έστω R μία πολυειδής σχέση με δύο είδη, και έστω $(maj, \oplus) \in AGG(R)$. Ο τελεστής $(maj, \oplus)$ δεν είναι μονομορφικός.*

Απόδειξη. Έστω η $1-1$ και επί συνάρτηση $g : \{0_1, 1_1\} \mapsto \{0_2, 1_2\}$, με $g(0_1) = 0_2$ και $g(1_1) = 1_2$. Τότε

$$\oplus(g(0_1), g(1_1), g(0_1)) = 1_2 \neq 0_2 = g(0_1) = g(maj(0_1, 1_1, 0_1)).$$

□

Παράδειγμα 10. *Έστω R μία πολυειδής σχέση, με* $\bar{f} = \underbrace{(\wedge, ..., \wedge)}_{m-\text{φορές}}$,

$\bar{g} = \underbrace{(\vee, ..., \vee)}_{m-\text{φορές}} \in AGG(R)$. *Οι τελεστές $\bar{f}, \bar{g}$ δεν είναι μονομορφικοί.*

Απόδειξη. Θα εξετάσουμε μόνο το $\bar{f}$. Η απόδειξη για τον $\bar{g}$ είναι αντίστοιχη. Έστω η $1-1$ και επί συνάρτηση $g : \{0_j, 1_j\} \mapsto \{0_j, 1_j\}$, με $g(0_j) = 1_j$ και $g(1_j) = 0_j$. Τότε,

$$\bar{f}_j(g(0_j), g(1_j)) = \wedge(1_j, 0_j) = 0_j \neq 1_j = g(0_j) = g(\wedge(0_j, 1_j)).$$

$\square$

Η βασική κλάση συμψηφιστών που θα μας απασχολήσει είναι η ακόλουθη:

Ορισμός 21. *Έστω μία πολυειδής σχέση R και $\bar{f}$ ένας n-μελής συμψηφιστής της. Θα λέμε ότι ο $\bar{f}$ είναι δικτατορικός/τετριμμένος (dictatorial/trivial), αν υπάρχει $d \in \{1, ..., n\}$ ώστε για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$,*

$$f_j = pr^n_d.$$

Ο ορισμός παραμένει ίδιος αν αντί για πολυειδή σχέση R, έχουμε σύνολο πολυειδών σχέσεων S.

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι κάθε δικτατορικός τελεστής είναι μονομορφικός.

Ο ορισμός 21, μας δείνει και την βασική έννοια που θα μελετήσουμε στις επόμενες παραγράφους:

Ορισμός 22. *Ένα σύνολο R από εφικτούς συνδυασμούς ψήφων (μία πολυειδής σχέση), θα λέγεται πεδίο δυνατότητας (possibility domain), αν υπάρχει $\bar{f} \in AGG(R)$ μη-δικτατορικός.*
Ένα σύνολο S από πολυειδείς σχέσεις, θα λέγεται σύνολο δυνατότητας (possibility set), αν υπάρχει $\bar{f} \in AGG(S)$ μη-δικτατορικός.
Σε αντίθετη περίπτωση, τα R και S θα λέγονται πεδίο και σύνολο μη-δυνατότητας αντίστοιχα.

Θα αφήσουμε κάποια ουσιαστικά παραδείγματα τέτοιων συνόλων για αργότερα, καθώς χωρίς κάποια θεωρήματα θα ήταν εξαιρετικά δύσκολο, ή και αδύνατο, να δείξουμε ότι κάτι είναι σύνολο μη-δυνατότητας. Ένα τετριμμένο παράδειγμα πεδίου δυνατότητας είναι φυσικά το $R = \prod_{j=1}^{m}\{0_j, 1_j\}$.

Το πρόβλημα λοιπόν που θα εξετάσουμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι το εξής:
Πρόβλημα: $POSS(S)$.
Είσοδος: σύνολο S πολυειδών σχέσεων.
Ερώτηση: Είναι το S σύνολο δυνατότητας;

Κλείνοντας την παράγραφο, θα επανέλθουμε στους ορισμούς των μονομορφικών και δικτατορικών συναρτήσεων. Ίσως φάνηκε περίεργο στον αναγνώστη το ότι απαιτούσαμε από τις συναρτήσεις που εξαιτάζαμε να είναι συμψηφιστές κάποιου συνόλου, καθώς οι ορισμοί 20 και 21 φαίνονται ικανοί να σταθούν από μόνοι τους. Η μία απάντηση, είναι ότι στο κεφάλαιο αυτό θέλουμε να εξετάσουμε συμψηφιστές κι όχι γενικά πολυειδείς συναρτήσεις. Άλλωστε δεν υπάρχει κάποιο ιδιαίτερο νόημα να ονομάσει κανείς μια συνάρτηση "δικτατορική", όταν μπορεί να την πει απλά "προβολή". Μια δεύτερη απάντηση, είναι ότι μας ενδιαφέρει, ακόμη και τώρα που δεν υπάρχει κάποιο τεχνικά ουσιαστικό νόημα, η σύνδεση αυτών των εννοιών με σύνολα εφικτών συνδυασμών ψήφων, καθώς αν επεκταθούμε σε μη-δυαδικό πλαίσιο, αυτή θα έχει πολύ ουσιαστική σημασία.

3.2 Πεδία δυνατότητας και Π.Π.Ι.Π.

Σε αυτήν την παράγραφο, θα δούμε κάποια αποτελέσματα για πεδία/σύνολα δυνατότητας. Ο στόχος μας είναι να συσχετίσουμε τα προβλήματα $POSS(S)$ και $SAT(S^C)$, για σύνολα πολυειδών σχέσεων S. Ξεκινάμε γενικεύοντας στο πλαίσιό μας το ακόλουθο λήμμα (βλ. [21]):

Λήμμα 2. *Έστω S ένα σύνολο πολυειδών σχέσεων. Αν όλοι οι δυαδικοί συμψηφιστές του S είναι τετριμμένοι, τότε όλοι οι συμψηφιστές του S είναι μονομορφικοί.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο πλήθος των μελών n των συμψηφιστών.
Για $n = 2$, ισχύει εξ υποθέσεως, αφού κάθε τετριμμένος συμψηφιστής είναι μονομορφικός.
Έστω ότι ισχύει για όλους τους $(n-1)$-μελείς συμψηφιστές, $n \geq 3$ και έστω ο n-μελής συμψηφιστής $\bar{f} = (f_1, ..., f_m)$, που δεν είναι μονομορφικός. Τότε, υπάρχουν $i, j \in \{1, ..., m\}$, $g : \{0_i, 1_i\} \mapsto \{0_j, 1_j\}$ $1-1$ και επί και $x_i^1, ..., x_i^n \in \{0_i, 1_i\}$ τ.ω:

$$f_j(g(x_i^1), ..., g(x_i^n)) \neq g(f_i(x_i^1, ..., x_i^n)).$$

Από την αρχή της περιστεροφωλιάς, αφού $n \geq 3$ και $x_i^k \in \{0_i, 1_i\}$, $\forall k \in \{1, ..., n\}$, υπάρχουν $s \neq t \in \{1, ..., n\}$ τ.ώ. $x_i^s = x_i^t$.
Έστω τώρα $\bar{h} = (h_1, ..., h_m)$, με

$$h_j(a_j^1, ..., a_j^s, ..., a_j^{t-1}, a_j^{t+1}, ..., a_j^n) = f_j(a_j^1, ..., a_j^n),$$

για κάθε $a_j^1, ..., a_j^n \in \{0_j, 1_j\}$ και για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$.
Είναι σαφές ότι η $(n-1)$-μελής συνάρτηση $\bar{h}$ είναι συμψηφιστής του S.
Εξ ορισμού όμως,

$$h_j(g(x_i^1), ..., g(x_i^n)) \neq g(h_i(x_i^1, ..., x_i^n)).$$

Άτοπο λόγω επαγωγικής υπόθεσης. □

Θα γενικεύσουμε τώρα, με την βοήθεια του παραπάνω λήμματος, το θεώρημα 1 και το πόρισμα 1 από το [21].

Θεώρημα 14. *Έστω ένα σύνολο S πολυειδών σχέσεων. Το S είναι σύνολο δυνατότητας αν και μόνο αν* $\underbrace{(\oplus, ..., \oplus)}_{m-\text{φορές}} \in AGG(S)$ *ή* $\underbrace{(maj, ..., maj)}_{m-\text{φορές}} \in AGG(S)$ *ή υπάρχει δυαδικός μη-τετριμμένος συμψηφιστής για το S.*

Απόδειξη. $(\Leftarrow)$ Προφανές.
$(\Rightarrow)$ Έστω ότι $\oplus, maj \notin AGG(S)$ και ότι το S δεν έχει μη-τετριμμένο δυαδικό συμψηφιστή. Από το λήμμα 2, έχουμε ότι όλοι οι συμψηφιστές του S είναι μονομορφικοί. Εξετάζουμε, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$, τους μονοειδείς κλώνους $AGG(S)_j$.
Έστω ότι υπάρχει $j \in \{1, ..., m\}$ τ.ώ. $\wedge$, ή $\vee$ ή maj ή $\oplus \in AGG(S)_{I_j}$. Τότε, είτε το $AGG(S)$ περιέχει μη-τετριμμένο δυαδικό τελεστή, είτε $\underbrace{(\oplus, ..., \oplus)}_{m-\text{φορές}} \in AGG(S)$ ή $\underbrace{(maj, ..., maj)}_{m-\text{φορές}} \in AGG(S)$. Άτοπο. Άρα ο κλώνος $AGG(S)_{I_j}$, από τον σύνδεσμο του Post, περιέχει μόνο τις προβολές, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$. Άρα το S είναι σύνολο μη-δυνατότητας. Άτοπο. □

Πόρισμα 2. *Έστω S ένα σύνολο δυαδικών σχέσεων. Το S είναι σύνολο δυνατότητας αν και μόνον αν έχει τριαδικό, μη τετριμμένο συμψηφιστή.*

Απόδειξη. $(\Leftarrow)$ Προφανές.
$(\Rightarrow)$ Από το θεώρημα 14, είτε $\underbrace{(\oplus, ..., \oplus)}_{m-\text{φορές}} \in AGG(S)$ ή $\underbrace{(maj, ..., maj)}_{m-\text{φορές}} \in AGG(S)$ και άρα έχει τριαδικό, μη-τετριμμένο συμψηφιστή, ή έχει δυαδικό μη-τετριμμένο συμψηφιστή για το S, έστω τον $\bar{f} = (f_1, ..., f_m)$. Έστω τώρα $\bar{g} = (g_1, ..., g_m)$, με $g_j(x_1, x_2, x_3) = f_j(x_1, x_2)$, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$. Η $\bar{g}$ είναι προφανώς τριαδικός μη-τετριμμένος συμψηφιστής. □

Ας χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 14 για να δούμε ένα παράδειγμα πεδίου μη-δυνατότητας.

Παράδειγμα 11. *Έστω*

$$R = \{(1_1, 0_1, 0_1, 1_2, 0_2, 0_2), (0_1, 1_1, 0_1, 0_2, 1_2, 0_2), (0_1, 0_1, 1_1, 0_2, 0_2, 1_2)\}.$$

Η R δεν είναι πεδίο δυνατότητας.

Απόδειξη. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι δεν υπάρχει συμψηφιστής (f, g) της R, με $f \in \{\wedge, \vee, maj, \oplus\}$ ή $g \in \{\wedge, \vee, maj, \oplus\}$. Επίσης, $(pr_1^2, pr_2^2), (pr_2^2, pr_1^2) \notin AGG(R)$. Άρα η R δεν είναι πεδίο δυνατότητας. □

Περνάμε τώρα στην καθεαυτή σύνδεση των δύο προβλημάτων.

Θεώρημα 15. *Έστω S ένα σύνολο πολυειδών σχέσεων. Αν $SAT(S^C) \in P$, τότε το S είναι σύνολο δυνατότητας.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$, υπάρχει $\bar{f}^j = (f_1^j, ..., f_m^j)$ τ.ώ. $f_j \in \{\wedge, \vee, \oplus, maj\}$. Άρα, υπάρχει μη-τετριμμένος συμψηφιστής του S, και το S είναι σύνολο δυνατότητας. □

Θα θέλαμε τώρα να δείξουμε και το αντίστροφο. Παρατηρούμε, ως πρώτη διαίσθηση του γιατί αυτό δεν είναι πιθανό να ισχύει, ότι στην απόδειξη του θεωρήματος 15, χρειαζόμασταν κάτι αρκετά λιγότερο από αυτό που υποθέσαμε, για να πάρουμε το συμπέρασμα. Το επόμενο παράδειγμα, δείχνει ότι δεν γίνεται να χαρακτηρίσουμε την έννοια του συνόλου δυνατότητας, με αυτήν της αποδοτικής επιλυσιμότητας.

Παράδειγμα 12. *Υπάρχει σύνολο δυνατότητας S τ.ώ. $SAT(S^c)$ να είναι NP-πλήρες.*

Απόδειξη. Έστω

$$R = \{(1_1, 0_1, 0_1, 0_2), (0_1, 1_1, 0_1, 0_2), (0_1, 0_1, 1_1, 0_2)\} = R_{ONE-IN-THREE} \times \{\bar{0_2}\},$$

και $S = \{R\}$. Προφανώς το $SAT(S_{I_1})$ είναι NP-πλήρες, άρα το ίδο ισχύει και για το $SAT(S)$. Από την άλλη, $(pr_1^2, \wedge) \in AGG(S)$, οπότε το S είναι σύνολο δυνατότητας. □

3.3 Ισχυρά πεδία δυνατότητας και Π.Π.Ι.Π.

Φτάσαμε λοιπόν να καταρρίψουμε το αποτέλεσμα που είχαμε αρχικά στο νου μας να αποδείξουμε. Και η ερώτηση είναι τι κάνουμε τώρα; Θα μπορούσαμε να ψάξουμε ποιούς συμψηφιστές θα πρέπει να απορρίψουμε, ώστε να προκύψει η σύνδεση που θέλουμε. Να αποκτήσουμε δηλαδή ένα θεώρημα που, υποθέτοντας ένα σύνολο δυνατότητας S, το οποίο δεν έχει ως συμψηφιστές κάποιες παθολογικές περιπτώσεις συναρτήσεων, όπως για παράδειγμα μια συνάρτηση της μορφής $(\wedge, pr_1^2, pr_2^2, \vee, pr_1^2)$ (για $m = 5$), να συμπεραίναμε ότι $SAT(S^c) \in P$.

Πέρα από τον ίσως υπερβολικά τεχνικό χαρακτήρα ενός τέτοιου θεωρήματος, θα υπήρχε και ένα ερώτημα ουσίας από πλευράς θεωρίας κοινωνικής επιλογής. Ας δούμε μία προσέγγιση που, κατά την άποψή μας, ξεπερνάει αυτό το πρόβλημα.

Κάποιος αναγνώστης πιθανώς να αναρωτήθηκε, κατά τον ορισμό του δικτατορικού συμψηφιστή, για ποιόν λόγο δεν θεωρούμε δικτατορική μια συνάρτηση που, για παράδειγμα, να αποτελείται από προβολές σε διαφορετικές συντεταγμένες. Εμείς θα το πάμε ένα βήμα παραπέρα, τουλάχιστον όσον αφορά τον ορισμό του πεδίου δυνατότητας.

Ορισμός 23. *Ένα σύνολο R εφικτών συνδυασμών ψήφων θα λέγεται ισχυρό πεδίο δυνατότητας (strong possibiliy domain), αν για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και n-μελής $\bar{f}^j = (f_1^j, ..., f_m^j) \in AGG(R)$, τ.ώ. $\bar{f}_j^j \neq pr_d^n$, $\forall d \in \{1, ..., n\}$. Ένα σύνολο S πολυειδών σχέσεων θα λέγεται ισχυρό σύνολο δυνατότητας (strong possibiliy domain), αν για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και n-μελής $\bar{f}^j = (f_1^j, ..., f_m^j) \in AGG(S)$, τ.ώ. $\bar{f}_j^j \neq pr_d^n$, $\forall d \in \{1, ..., n\}$.*

Ο ορισμός αυτός διαισθητικά, απαιτεί σε κάθε θέμα από αυτά που είναι προς ψήφιση, να υπάρχει τρόπος να συμψηφιστούν οι ψήφοι με μη-δικτατρορικό τρόπο. Τονίζουμε εδώ ότι αυτό δεν σημαίνει ότι μπορούν ταυτόχρονα οι ψήφοι σε όλα τα θέματα να συμψηφιστούν με μη-δικτατορικό τρόπο, δηλαδή ότι υπάρχει συμψηφιστής που σε κάθε μέλος του να είναι μη-τετριμμένος.

Ας δούμε δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 13. *Έστω $R = \{(0_1, 0_1, 0_2, 0_2, 1_3), (0_1, 0_1, 1_2, 0_2, 1_3)\}$. Η R είναι ισχυρό πεδίο δυνατότητας.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι $(\wedge, \wedge, \wedge) \in AGG(R)$. □

Παράδειγμα 14. *Έστω $R = R^1_{NAE} \times \{(0_2, 0_2)\}$, όπου $R^1_{NAE} = \{0_1, 1_1\}^3 \setminus \{(0_1, 0_1, 0_1), (1_1, 1_1, 1_1)\}$. Η R είναι πεδίο δυνατότητας, αλλά δεν είναι ισχυρό πεδίο δυνατότητας.*

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρήστε ότι ο μη-τετριμμένος συμψηφιστής $(pr^2_1, pr^2_2) \in AGG(R)$. Άρα η R είναι πεδίο δυνατότητας. Τώρα, παρατηρήστε ότι αφού το $SAT(R_{NAE})$ είναι NP-πλήρες, δεν γίνεται να υπάρχει $(f, g) \in AGG(R)$ τ.ώ. $f \in \{\wedge, \vee, maj, \oplus\}$. Άρα το R δεν είναι ισχυρό πεδίο δυνατότητας. □

Είμαστε έτοιμοι τώρα να διατυπώσουμε το τελευταίο θέωρημα της εργασίας αυτής.

Θεώρημα 16. *Έστω S ένα σύνολο πολυειδών σχέσεων. Ισχύει ότι:*

το S είναι ισχυρό σύνολο δυνατότητας αν και μόνο εαν $SAT(S^c) \in P$.

Απόδειξη. ($\Leftarrow$) Από το θεώρημα 13, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$, υπάρχει $\bar{f}^j = (f_1, ..., f_m) \in AGG(S)$ τ.ώ. $f^j_j \in \{\wedge, \vee, maj, \oplus\}$. Εξ ορισμού, το S είναι ισχυρό σύνολο δυνατότητας.
($\Rightarrow$) Έστω ο κλώνος $AGG(S)_j$, για $j \in \{1, ..., m\}$. Από τον ορισμό του ισχυρού συνόλου δυνατότητας, ξέρουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και n-μελής $g \in AGG_j$ τ.ώ. $g \neq pr^n_d$, $\forall d \in \{1, ..., n\}$. Από τον σύνδεσμο του Post, $\{\wedge, \vee, maj, \oplus\} \cap AGG(S_j) \neq \emptyset$. Άρα υπάρχει, από το πόρισμα 1, $\bar{f}^j = (f^j_1, ..., f^j_m) \in AGG(S)$ με $f^j_j \in \{\wedge, \vee, maj, \oplus\}$, για κάθε $j \in \{1, ..., m\}$. Άρα, $SAT(S^c) \in P$. □

Επίλογος

Θα κλείσουμε αυτήν την εργασία με κάποιες σκέψεις και συμπεράσματα σε σχέση με την δουλειά που έγινε.

Πιστεύουμε ότι η συνεισφορά της εργασίας συνοψίζεται σε τέσσερα σημεία. Πρώτον, στο κεφάλαιο 2, αναλύσαμε προσεκτικά μια θεωρία για πολυειδείς κλώνους σε μια μορφή κάπως απλούστερη και ελπίζουμε πιο προσιτή, τόσο σε ερευνητές θωρητικής πληροφορικής, όσο και σε ερευνητές που ασχολούνται με τη θεωρία κοινωνικής επιλογής, από το βαρύ αλγεβρικό πλαίσιο των A. Bulatov και P. Jeavons (βλ. [3], [4]). Δεύτερον, καταγράψαμε μια όσο το δυνατόν πιο αυστηρή απόδειξη του θεωρήματος διχοτόμησης του Schaefer για πολυειδή προβλήματα ικανοποιησιμότητας, η οποία μέχρι τώρα υπήρχε σε δύσχρηστες μορφές (βλ. και πάλι [3], [4]). Τρίτον, στο κεφάλαιο 3, τόσο η γενίκευση σε είδη με διάσταση μεγαλύτερη του ενός, όσο και η εισαγωγή της έννοιας του ισχυρού πεδίου δυνατότητας, πιστεύουμε ότι είναι αρκετά φυσιολογικές έννοιες στο πλαίσιο που κινείται η έρευνά μας (βλ. [15],[16],[21]), οι οποίες αξίζει να μελετηθούν. Τέλος, μετά και τον χαρακτηρισμό των πεδίων δυνατότητας ως κλειστότητα κάτω από συναρτήσεις που παίζουν ρόλο και στην πολυπλοκότητα των προβλημάτων ικανοποιησιμότητας (βλ. και πάλι [15],[16],[21]), πιστεύουμε πως άξιζε τον κόπο η πλήρης διαλεύκανση αυτής της σχέσης.

Θα τελειώσουμε με μερικές σκέψεις για ενδεχόμενη συνέχεια. Αρχικά, έχει νόημα να γίνει η γενίκευση όλης της εργασίας σε μη-δυαδικό πλαίσιο. Αυτό, από αρκετά φιλόδοξο σχέδιο, αλλά σίγουρα ενδιαφέρον, για το κεφάλαιο 1 και τον σύνδεσμο του Post, γίνεται εφικτό και ήδη δοκιμασμένο στα κεφάλαια 2 και 3. Για την πολυειδή εκδοχή του θεωρήματος Schaefer, το σχεδιάγραμμα απόδειξης που μας δίνουν οι A. Bulatov και P. Jeavons (βλ. [3]) είναι ήδη σε μη-δυαδικό πλαίσιο. Για το κεφάλαιο 3, μας φαίνεται αρκετά σαφές ότι ο τρόπος να γίνει αυτή η γενίκευση, είναι η μέθοδος που χρησιμοποιείται στα [16] και [21]: η αναπροσαρμογή δηλαδή των διαφόρων ορισμών και θεωρημάτων σε ζεύγη στοιχείων από το κάθε πεδίο.

Βιβλιογραφία

[1] John Kenneth Arrow. Social choice and individual values. *Wiley, New York*, 1951.

[2] K. J. Arrow. A difficulty in the concept of social welfare. *Journal of Political Economy*, 58:328–346, 1950.

[3] A. Bulatov and P. Jeavons. An algebraic approach to multi-sorted constraints. *J*, Y.

[4] Andrei A. Bulatov. Complexity of conservative constraint satisfaction problems. *J*, Y.

[5] Jin-Yi Cai and Aaron Gorenstein. Geiger's theorem. *Complexity of Counting Problems: Lecture 9*, 2012.

[6] Jin-Yi Cai and Chetan Rao. Universal algebra. *Complexity of Counting Problems: Lecture 8*, 2012.

[7] M. C. Cooper. An optimal k-consistency algorithm. *Artificial Intelligence*, 41:89–95, 1989.

[8] Marquis de Condorcet. Essai sur l'application de l'analyse a la probabilite de decisions rendues a la pluralite de voix. *Imprimerie Royal*, 1785.

[9] R. Dechter. From local to global consistency. *Artificial Intelligence*, 55:87–107, 1992.

[10] C. L. Dodgson. A method for taking votes on more than two issues. *Clarendon Pressl*, 1876.

[11] C. L. Dodgson and F. F. Abeles. The pamphlets of lewis carroll, vol. 3, the political pamphlets and letters of charles lutwidge dodgson and related pieces: a mathematical approach. *Lewis Carroll Society of North America, New York*, 2001.

[12] S. Reich E. Boehler, N. Creignou and H. Vollmer. Playing with boolean blocks, part i: Post's lattice with applications to complexity theory. *J*, Y.

[13] S. Reich E. Boehler, N. Creignou and H. Vollmer. Playing with boolean blocks, part ii: Constraint satisfaction problems. *J*, Y.

[14] R. Holzman E. Dokow. Aggregation of binary evaluations for truth-functional agendas. *Social Choice and Welfare*, 32(2):221–241, 2009.

[15] R. Holzman E. Dokow. Aggregation of binary evaluations. *Journal of Economic Theory*, 145:495–511, 2010.

[16] R. Holzman E. Dokow. Aggregation of non-binary evaluations. *Advances in Applied Mathematics*, 45:487–504, 2010.

[17] E. C. Freuder. Synthesizing constraint expressions. *Commun. ACM*, 21:958–966, 1978.

[18] D. Geiger. Closed systems of functions and predicates. *Pacific Journal of Mathematics*, 27(2):228–250, 1968.

[19] C. C. Han and C. H. Lee. Comments on mohr and henderson's path consistency algorithm. *Artificial Intelligence*, 36:125–130, 1988.

[20] L. M. Kirousis and P. Kolaitis. Complexity of minimal satisfiability poblems. *Information and Computation*, 187:20–39, 2003.

[21] L. M. Kirousis and P.Kolaitis. Aggregation of votes with multiple positions on each issue. *J*, 2015.

[22] R. Mohr and T. C. Henderson. Arc and path consistency revisited. *Artificial Intelligence*, 28:225–233, 1986.

[23] D. A. Cohen P. G. Jeavons and M. C. Cooper. Constraints, consistency and closure. *Artificial Intelligence*, 101(1-2):251–265, 1998.

[24] D. A. Cohen P. G. Jeavons and M. Gyssens. Closure properties of constraints. *Journal of the ACM*, 44:527–548, 1997.

[25] Reinhard Poeschel. A general galois theory for operations and relations and concrete characterization of related algebraic structures. *Report*, 1980.

[26] E. L. Post. The two-valued iterative systems of mathematical logic. *Annals of Mathematical Studies*, 5:1–122, 1941.

[27] R. Poeschel S. Kerkhoff and F. M. Schneider. A short introduction to clones. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 303:107–120, 2014.

[28] T.J. Schaefer. Proceedings of the 10th acm symposium on theory of computing. In *The Complexity of satisfiability problems*, 1978.

[29] Igor' E. Zverovich. Characterizations of closed classes of boolean functions in terms of forbidden subfunctions and post classes. *Discrete Applied Mathematics*, 149:200–218, 2005.