ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΤΗ ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: κ. Κ. Δημητρακόπουλος

ΤΙΤΛΟΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΤΡΟΠΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΦΟΙΤΗΤΗΣ: Κώστας Μανουβέλος, ΑΜ: 200209

ΚΕΡΑΤΣΙΝΙ, ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2006

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος

Ο κύριος στόχος της *αλγεβρικής λογικής* είναι η καλύτερη κατανόηση της ίδιας της *λογικής*. Το στόχο αυτό επιτυγχάνουν, οι *αλγεβριστές λογικοί*, αναλύοντας τη *λογική* με αλγεβρικούς όρους. Για μια δοσμένη *λογική*, ένας *αλγεβριστής λογικός* θα ψάξει να βρει μια *κλάση αλγεβρών*, που να «αλγεβροποιεί» τη *λογική* με ένα φυσικό τρόπο. Μόλις πραγματοποιηθεί αυτή η «αλγεβροποίηση», φυσικές ιδιότητες της *λογικής* θα αντιστοιχούν σε φυσικές ιδιότητες των αντίστοιχων *αλγεβρικών κλάσεων*. Έτσι θα είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί η δυναμική της *άλγεβρας* για την επίλυση προβλημάτων της *λογικής*. Η αλγεβρική προσέγγιση έχει μια ιδιαίτερη επίδραση στην ανάπτυξη της *λογικής*, και ιδιαίτερα της *μη-κλασικής λογικής* [1]. Ουσιαστικά η θεωρία της *άλγεβρας* κατασκευάστηκε συγχρόνως με αυτή της *αλγεβρικής λογικής* [3].

Το θέμα μας, μας πάει πίσω στο δέκατο ένατο αιώνα, όπου η *μαθηματική λογική ήταν αλγεβρική λογική*. Ουσιαστικά οι προτάσεις αναπαριστούνταν με αλγεβρικούς όρους και όχι με *λογικούς* τύπους. Πατέρας τόσο της *προτασιακής λογικής* όσο και της μοντέρνας *άλγεβρας* θεωρείται ο Boole, όπου στο έργο του για πρώτη φορά οι *όροι* αναφέρονται σε αντικείμενα εκτός των αριθμών και σε *τελεστές* που δεν είχαν σχέση με αριθμητικές πράξεις. Συνεχιστές του έργου του, ήταν οι de Morgan, Peirce, Schroder κ.α., των οποίων η συνεισφορά στη *θεωρία* των *διμελών σχέσεων*, οδήγησε τον Tarski στην ανάπτυξη της *σχεσιακής άλγεβρας*. Ο MacColl ήταν ο πρώτος *λογικός*, αυτής της παράδοσης, που ασχολήθηκε με την *τροπική λογική* [2].

Το ενδιαφέρον για την *αλγεβρική λογική* εξασθένησε όταν στις αρχές του εικοστού αιώνα παγιώθηκε η χρήση *ποσοδεικτών* στη *λογική*. Εξαιτίας όμως των Birkhoff, Stone, Tarski, Rasiowa και Sikorski [18,19] ήταν δυνατή η συνέχιση της παράδοσης ως και σήμερα. Η μέθοδος να βασίζεται μια *άλγεβρα* σε μια συλλογή *τύπων*, που οφείλεται στους Lindenbaum και Tarski, αποδείχτηκε ένα σημαντικό εργαλείο έρευνας. Την ίδια περίοδο η διαφοροποίηση των *λογικών γλωσσών* από τη *σημασιολογία* τους γίνεται πιο έντονη. Αλλά η μεγάλη επιτυχία της *αλγεβρικής λογικής* είναι η επεξεργασία της *κλασικής προτασιακής λογικής* μέσα στα όρια των *αλγεβρών boole*[1]. Την προσπάθεια αυτή θα σκιαγραφήσουμε στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας[2]. Εδώ η συνεισφορά του Stone [22] ήταν τεράστια. Όχι μόνο απέδειξε το *θεώρημα αναπαράστασης* για *άλγεβρες Boole* (στην εργασία εδώ παρουσιάζεται ως Θεώρημα 2.1.15, αλλά κατανόησε τη σπουδαιότητα που έχουν κάποιες έννοιες *τοπολογίας* στη συγκεκριμένη περιοχή. Αυτό του επέτρεψε να αποδείξει ένα *θεώρημα δυϊκότητας*[3] που μας επιτρέπει να κοιτάμε τις *άλγεβρες Boole* όπως ακριβώς κάποιες συγκεκριμένες *τοπολογίες*. Γενικότερα η δουλειά του Stone έχει επηρεάσει πολλούς κλάδους των μαθηματικών [11].

Οι McKinsey και Tarski [17] βασίστηκαν στο έργο του Stone για να αποδείξουν ένα *θεώρημα αναπαράστασης* για *άλγεβρες κλειστότητας*, το οποίο επέκτεινε κατά πολύ εκείνο που είχε αποδείξει μόνος ο McKinsey [16]. Παρόλα αυτά, όταν μιλάμε σήμερα για την «αλγεβροποίηση» της *τροπικής λογικής*, το σπουδαιότερο έργο είναι σαφώς αυτό των Jónsson και Tarski [12, 13]. Αν και η *τροπική λογική* δεν αναφέρεται στο έργο τους, οι συγγραφείς ανακάλυψαν τη *σχεσιακή σημασιολογία*[4], και

---

[1] Στην εργασία αυτή θα αναπτυχθεί μια *αλγεβρική σημασιολογία* για την *τροπική λογική*. Αυτό που θα γίνει είναι ουσιαστικά μια επέκταση της σχέσης που έχουν *άλγεβρα* και *προτασιακή λογική*, στην *τροπική λογική*. Αντί για *άλγεβρες Boole*, που χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε αλγεβρικά την *προτασιακή λογική*, εδώ θα χρησιμοποιήσουμε *άλγεβρες Boole με τελεστές* (BAT, Ορισμός 2.2.2 στην εργασία) . Οι επιπλέον *τελεστές* της *άλγεβρας*, είναι αυτοί ακριβώς που θα εισαγάγουν τους επιπλέον *τροπικούς τελεστές* που υπάρχουν στην *τροπική λογική*.

[2] Στην αρχή του δευτέρου κεφαλαίου της εργασίας εισάγουμε τις βασικές ιδέες γύρω από την *αλγεβρική* προσέγγιση της *κλασικής προτασιακής λογικής*. Στη συνέχεια του κεφαλαίου επεκτείνουμε τις ιδέες αυτές στην *τροπική λογική*. Αμέσως μετά ακολουθεί η απόδειξη του θεωρήματος των Jónsson και Tarski [12, 13].

[3] Στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας, όπου αναλύουμε τρεις εφαρμογές της «αλγεβροποίησης» της *τροπικής λογικής*, θα μιλήσουμε και για τη *θεωρία δυϊκότητας*, που δεν είναι τίποτε άλλο από τη μελέτη των αντιστοιχιών που υπάρχουν μεταξύ του σύμπαντος των *αλγεβρών* και του σύμπαντος των *πλαισίων*.

[4] Στο πρώτο κεφάλαιο, που είναι και η εισαγωγή της εργασίας, θα εισαγάγουμε την έννοια της *σχεσιακής δομής*, καθώς επίσης θα αναφερθούμε επιγραμματικά σε βασικές έννοιες τόσο της *τροπικής* όσο και της *αλγεβρικής λογικής*.

απέδειξαν μέσω του *θεωρήματος αναπαράστασης*, πώς αυτός ο καινούριος *σχεσιακός κόσμος* μπορούσε να σχετιστεί με τον *αλγεβρικό*. Στην εργασία μας οι συγκεκριμένες αποδείξεις σκιαγραφούνται στο Θεώρημα 2.3.8 και στο Θεώρημα 3.3.4. Αλλά και στην ορολογία που χρησιμοποιούν στην εργασία τους, είναι εμφανές ότι κάτω από την επιφάνεια κρύβεται μια *θεωρία δυϊκότητας* που εκτείνει τα συμπεράσματα του Stone και καλύπτει *τελεστές* που εμφανίζονται σε *άλγεβρες Boole*.

Μετά την έκδοση της εργασίας των Jónsson –Tarski, για αρκετά χρόνια η έρευνα πάνω στην *τροπική λογική* και στη θεωρία των *αλγεβρών Boole με τελεστές*, κινήθηκε σχεδόν παράλληλα. Οι *αλγεβριστές* από την άλλη, σαφώς και δεν αγνόησαν την εργασία των Jónsson –Tarski, από τη στιγμή μάλιστα που αυτή ήταν χρήσιμη για μια σειρά από εργασίες στις *σχεσιακές άλγεβρες*. Ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε στο να βρεθεί ένα ανάλογο αποτέλεσμα με αυτό του Stone, αλλά για τις *άλγεβρες Boole* τώρα, δηλαδή να βρεθεί ένας κομψός χαρακτηρισμός των *αναπαραστάσιμων σχεσιακών αλγεβρών*.

Ο Tarski και οι μαθητές του ανέπτυξαν και άλλους κλάδους της *αλγεβρικής λογικής*, όπως τη θεωρία των *κυλινδρικών αλγεβρών* (Henkin, Monk και Tarski [10]). Οι *κυλινδρικές άλγεβρες*, είναι *άλγεβρες Boole με τελεστές* που μελετούνταν ως αλγεβρικά αντίστοιχα της *πρωτοβάθμιας λογικής*.

Στην *τροπική* όμως *λογική*, οι *αλγεβρικές μέθοδοι* ήταν πολύ διαφορετικές. Με την ανάπτυξη της *σχεσιακής σημασιολογίας* για την *τροπική λογική* στη δεκαετία του 1960, φαινόταν ότι αυτές θα εξαφανίζονταν. Τα *μοντελοθεωρητικά* εργαλεία ήταν πολύ πιο εύχρηστα, και κανένας δεν είχε κοιτάξει το έργο των Jónsson και Tarski και τις σημαντικές εφαρμογές που αυτό έβρισκε στην *τροπική λογική*. Όταν όμως από το 1972 άρχισαν να εμφανίζονται τα *πλαισιοθεωρητικά αποτελέσματα μη-πληρότητας*, που έδειχναν ότι δεν μπορούν όλες οι *κανονικές τροπικές λογικές* (Ορισμός 1.1.20)να χαρακτηριστούν με όρους πλαισίων, τότε πολλοί *λογικοί* άρχισαν να ξανασκέφτονται την χρησιμότητα των *αλγεβρικών μεθόδων*[5].

Η επόμενη σημαντική δουλειά στην περιοχή έγινε από τον Thomason και τον Goldblatt. Ο Thomason [23] αποδεικνύει τα πρώτα *θεωρήματα μη-πληρότητας*, χρησιμοποιεί *άλγεβρες Boole με τελεστές*, και εισάγει τα *γενικά πλαίσια*[6]. Αποδεικνύει ότι τα *γενικά πλαίσια* μπορούν να θεωρηθούν ως απλές *συνολοθεωρητικές αναπαραστάσεις των* BAT, και δείχνει τη σχέση μεταξύ *γενικών πλαισίων* και *μοντέλων* Henkin για τη *δευτεροβάθμια λογική*. Ο Goldblatt από την άλλη απέδειξε τη *δυϊκότητα* που υπάρχει μεταξύ των διάφορων κατηγοριών των *τροπικών λογικών* με αντίστοιχους *ομομορφισμούς* (Ορισμός 1.1.16 στην εργασία), καθώς και των *περιγραφικών γενικών πλαισίων* (Ορισμος 3.2.4) με αντίστοιχους *φραγμένους μορφισμούς* (Ορισμός 1.1.18) [6]. Κατόρθωσε μάλιστα να γενικεύσει τη *δυϊκότητα* αυτή σε τυχαίους *τύπους ομοιότητας*. Από τη δεκαετία του εβδομήντα, που εισήχθησαν τα *γενικά πλαίσια*, τα οποία δεν είναι τίποτε άλλο από ένας συνδυασμός *αλγεβρικής* και *σχεσιακής σημασιολογίας*, οι εφαρμογές τους στην *τροπική λογική* είναι σημαντικές. Η δουλειά του Kracht [14] και του Zakharyaschev είναι αυτές που ξεχωρίζουν.

Η πρώτη απόδειξη για την κανονικότητα των Sahlqvist τύπων, για τη *βασική τροπική γλώσσα*, δόθηκε από τον Sahlqvist [20], αν και διάφορες μικρότερες *κλάσεις* Sahlqvist *αξιωμάτων* είχαν αποδειχτεί *κανονικές*. Σημαντική και εδώ είναι η δουλειά των Jónsson και Tarski. Η αρχική απόδειξη του Sahlqvist δεν είναι *αλγεβρική* και είναι πολύ διαφορετική από την απόδειξη της εργασίας (θεώρημα 3.3.3), που βασίζεται σε αυτήν που δίνουν οι Sambin και Vaccaro [21].

Τα περισσότερα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα υποκεφάλαια 3.1 και 3.2, βρίσκονται στο Goldblatt [6]. Η απόδειξη του Goldblatt- Thomason θεωρήματος (θεώρημα 3.1.9) είναι η αρχική απόδειξη του θεωρήματος και υπάρχει στο [9]. Η απόδειξη του θεωρήματος 3.1.10 είναι μια

---

[5] Όπως θα δούμε, εκτός από το ότι η «αλγεβροποίηση» της *τροπικής λογικής* μας προσφέρει πολύ ισχυρές τεχνικές για να επιλύουμε προβλήματα της *τροπικής λογικής*, αποδεικνύεται ότι τελικά συμπεριφέρεται καλύτερα από την *πλαισιο-θεωρητική σημασιολογία*. Θα αποδείξουμε ένα *αλγεβρικό συμπέρασμα πληρότητας* για *κάθε κανονική τροπική λογική*. Αντίστοιχο συμπέρασμα για τα *πλαίσια* δεν ισχύει.

[6] Η δεύτερη εφαρμογή που θα παρουσιάσουμε σχετίζεται με τα *γενικά πλαίσια*, που δεν είναι τίποτε άλλο από τη *συνολοθεωρητική αναπαράσταση* των BAT. Εξετάζουμε τις ιδιότητές τους και τα χρησιμοποιούμε για να αποδείξουμε το *Θεώρημα Πληρότητας* του Sahlqvist, ως μια τρίτη εφαρμογή.

γενίκευση του Goldblatt [8]. Τα ανοιχτά προβλήματα 1 και 2, έχουν πρωτοεμφανιστεί στο Fine [5]. Η ορολογία που χρησιμοποιείται στην εργασία οφείλεται στους Thomason [23], Goldblatt [6] και Fine [4]. Η γενίκευση της *κανονικότητας* στην έννοια της *persistence* (Ορισμός 3.3.1), προέρχεται από τον Goldblatt [7], ενώ η απόδειξη ενός αντίστοιχου με το δικό μας θεώρημα 3.3.4 βρίσκεται στο Lachlan [15].

Η εργασία αυτή είναι βασισμένη στο βιβλίο: Patrick Blackburn, Maarten de Rijke και Yde Venema. *Modal Logic*. Cambridge University Press, 2001, και ιδίως στο πέμπτο κεφάλαιο του βιβλίου που έχει τίτλο *Algebras and General Frames*.

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή στην τροπική και στην αλγεβρική λογική

1.1. Τροπική λογική

Η γλώσσα της *προτασιακής τροπικής λογικής* δεν είναι τίποτε άλλο από μια *προτασιακή γλώσσα*, στην οποία έχουν προστεθεί κάποιοι *προτασιακοί τελεστές*, τους οποίους καλούμε *τροπικότητες* (*modalities*) ή *τροπικούς τελεστές* (*modal operators*). Ανάλογα της *σημασιολογίας* που εμείς προσάπτουμε στους *τροπικούς τελεστές* της *γλώσσας* μας, υπάρχουν πολλές και διαφορετικές *τροπικές γλώσσες*, κάθε μια από τις οποίες είναι προσαρμοσμένη στο να αναλύσει κάποια *δομή* από πληροφορίες. Παρά τη συντακτική της απλότητα, η *γλώσσα* αυτή μπορεί να περιγράψει αλλά και να χρησιμοποιήσει *σχεσιακές δομές* (*relational structures*). Μια *σχεσιακή δομή* είναι ένα μη-κενό σύνολο στο οποίο κάποιες σχέσεις έχουν οριστεί. Πιο αναλυτικά:

Ορισμός 1.1.1. ***Σχεσιακή δομή.*** Μια *σχεσιακή δομή* είναι μια n-άδα $\mathcal{F}$, της οποίας το πρώτο στοιχείο είναι ένα μη κενό σύνολο W, το οποίο καλείται *σύμπαν* (*universe*) ή *πεδίο ορισμού* (*domain*) της $\mathcal{F}$, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία είναι σχέσεις στο W. Υποθέτουμε ότι κάθε *σχεσιακή δομή* περιέχει τουλάχιστον μια σχέση. Τα στοιχεία του W έχουν διάφορες ονομασίες όπως *σημεία*, *καταστάσεις*, *κόμβοι*, *κόσμοι*, *χρόνοι*, *στιγμιότυπα* και *περιπτώσεις*. ▫

Οι *σχεσιακές δομές* χρησιμοποιούνται συνεχώς στα μαθηματικά, την πληροφορική, την τεχνητή νοημοσύνη και τη γλωσσολογία, ενώ χρησιμοποιούνται και για να ερμηνεύουμε *πρωτοβάθμιες γλώσσες*. Συνήθως θα ενδιαφερόμαστε για *σχεσιακές δομές* που έχουν κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες. Πέρα από τις όποιες ιδιότητες των *σχεσιακών αλγεβρών*, η *τροπική γλώσσα* μπορεί να φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη, αφού οι *τροπικοί τελεστές* είναι ουσιαστικά ένας απλός τρόπος να προσπελάσουμε τις πληροφορίες που περιέχονται σε κάποια *σχεσιακή δομή*.

Ας κάνουμε μια πρώτη επαφή με την *τροπική γλώσσα* που θα χρησιμοποιούμε. Πρωτα θα ορίσουμε τη *βασική τροπική γλώσσα* (*basic modal language*).

Ορισμός 1.1.2. ***Βασική τροπική γλώσσα.*** Η *βασική τροπική γλώσσα* ορίζεται χρησιμοποιώντας ένα σύνολο *προτασιακών μεταβλητών* (ή *προτασιακών συμβόλων* ή *προτασιακών γραμμάτων*) Φ, του οποίου τα στοιχεία συνήθως συμβολίζονται p, q, r ,… και ένα *μονομελή τροπικό τελεστή* $\Diamond$ («το διαμάντι»). Οι *καλά ορισμένοι τύποι* φ της *βασικής τροπικής γλώσσας* δίνονται από τον εξής κανόνα:

$$\Phi ::= p \mid \bot \mid \neg\varphi \mid \psi \vee \varphi \mid \Diamond\varphi,$$

όπου το p είναι κάποιο στοιχείο του Φ. Επομένως ένας *τύπος* μπορεί να είναι είτε μια *προτασιακή μεταβλητή*, είτε η *προτασιακή σταθερά* του *λάθους* («ο πάτος»), είτε ένας *τύπος* με άρνηση μπροστά, είτε μια σύζευξη *τύπων*, είτε τέλος, ένας *τύπος* με τον *τροπικό τελεστή* του *διαμαντιού* μπροστά.

Όπως ακριβώς οι *πρωτοβάθμιοι τελεστές*, ο *υπαρξιακός* και ο *καθολικός*, είναι *δυϊκοί*, δηλαδή ισχύει $\forall x\ \alpha \leftrightarrow \neg\exists x\ \neg\alpha$, έτσι και εδώ έχουμε το *δυϊκό τελεστή* $\Box$ («το κουτί») για το *διαμάντι*, που ορίζεται ως εξής: $\Box\varphi := \neg\Diamond\neg\varphi$.

Θα χρησιμοποιούμε επίσης και τις συνήθεις συντομεύσεις για τη σύζευξη, τη συνεπαγωγή, τη διπλή συνεπαγωγή και τη σταθερά της *αλήθειας* («το ταβάνι»): $\varphi \wedge \psi := \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$, $\varphi \rightarrow \psi := \neg\varphi \vee \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ και $\top := \neg\bot$. ▫

Οι διάφορες ερμηνείες που μπορούμε να δώσουμε στο *διαμάντι* και στο *κουτί* αντίστοιχα, μας οδηγούν και σε διαφορετικές *τροπικές λογικές*. Αν για παράδειγμα ερμηνεύσουμε το $\Diamond\varphi$ ως: «είναι δυνατός ο φ», τότε ο $\Box\varphi$ σημαίνει: «δεν είναι δυνατός ο όχι φ», δηλαδή «είναι αναγκαίος ο φ». Άλλες πιθανές ερμηνείες είναι ο $\Box\varphi$ να σημαίνει: «αποδεικνύεται ότι ισχύει ο φ» ή «σε όλες τις μελλοντικές στιγμές ισχύει ο φ» ή «είναι γνωστό ότι ισχύει ο φ» ή «είναι αναγκαίο να ισχύει ο φ», καθως και πολλές άλλες ερμηνείες.

Μπορούμε όμως να γενικεύσουμε την *βασική τροπική γλώσσα* χρησιμοποιώντας δύο προφανείς τρόπους. Από τη μια δε χρειάζεται να περιορίζουμε την *γλώσσα* μας με μόνο ένα *διαμάντι*, ενώ από την άλλη δεν είμαστε και αναγκασμένοι να περιοριζόμαστε και σε *τροπικότητες* που έχουν μόνο ένα όρισμα. Η *γενική τροπική γλώσσα* που θα ορίσουμε τώρα ως *τροπική γλώσσα* (συμβολικά *Τ ΓΛ*), περιέχει πολλές *τροπικότητες*, ενώ κάθε μία δέχεται *τυχαίο αριθμό ορισμάτων*. Για τον *τυχαίο αριθμό ορισμάτων*, που μπορεί να δεχτεί κάθε *τροπικός τελεστής*, θα χρειαστούμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.1.3. *Τροπικός τύπος ομοιότητας.* Ένας *τροπικός τύπος ομοιότητας* είναι ένα ζεύγος $\tau = (O, \rho)$, όπου O είναι ένα μη-κενό σύνολο, και ρ είναι μια συνάρτηση $O \to \mathbb{N}$. Τα στοιχεία του O καλούνται *τροπικοί τελεστές*, ενώ χρησιμοποιούμε τα $\triangle$ («το τρίγωνο»), $\triangle_0$, $\triangle_1$, ..., για να δηλώσουμε τα στοιχεία του O. Η συνάρτηση ρ αναθέτει σε κάθε *τελεστή* $\triangle \in O$, ένα φυσικό αριθμό (*arity*), που συμβολίζει το πλήθος των *ορισμάτων* που μπορεί να δεχτεί ο κάθε $\triangle$.

Σε αντιστοιχία με τον προηγούμενο ορισμό, αναφερόμαστε συχνά στα *μονομελή* τρίγωνα ως *διαμάντια*, και τα συμβολίζουμε με $\Diamond_\alpha$ ή $<\alpha>$, όπου το α προέρχεται από κάποιο σύνολο *δεικτών*. Συνήθως θα υποθέτουμε ότι το *πλήθος ορισμάτων* των τελεστών είναι δοσμένο και δεν θα διακρίνουμε τα τ και O. ▫

Ο ορισμός της *τροπικής γλώσσας* έχει ως εξής:

Ορισμός 1.1.4. *Τροπική γλώσσα.* Μια *τροπική γλώσσα Τ ΓΛ*(τ, Φ), κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας έναν *τροπικό τύπο ομοιότητας* $\tau = (O, \rho)$ και ένα σύνολο *προτασιακών μεταβλητών* Φ. Το σύνολο *Τύπος*(τ, Φ) των *τροπικών τύπων* πάνω στα τ και Φ δίνεται από τον εξής κανόνα:

$$\varphi ::= p \mid \bot \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \vee \varphi_2 \mid \triangle(\varphi_1, ..., \varphi_{\rho(\triangle)}),$$

όπου το $p \in \Phi$. ▫

Για κάθε *τροπικό τελεστή* $\triangle$, ορίζουμε το *δυϊκό* του, (συμβολικά ∇) ως εξής:

Ορισμός 1.1.5. *Δυϊκός τελεστής.* Ορίζουμε το *δυϊκό τελεστή* (*dual operator*) κάθε *τριγώνου*, που έχει μη-κενό *πλήθος ορισμάτων*. Για κάθε $\triangle \in O$, το *δυϊκό* ∇, του $\triangle$ ορίζεται ως $\nabla(\varphi_1, ..., \varphi_n) := \neg\triangle(\neg\varphi_1, ..., \neg\varphi_n)$. Το *δυϊκό* ενός τριγώνου με *πλήθος ορισμάτων* τουλάχιστον 2, καλείται *νάμπλα* (*nabla*). Όπως και στην *βασική τροπική γλώσσα*, το *δυϊκό* ενός *διαμαντιού* καλείται *κουτί*, και συμβολίζεται $\Box_\alpha$ ή [α]. ▫

Μετά την εισαγωγή της, τώρα θα ερμηνεύσουμε την *τροπική γλώσσα* μέσα σε *σχεσιακές δομές*. Ουσιαστικά θα μιλήσουμε για *μοντέλα* και για *πλαίσια*. Τα *μοντέλα* είναι σημαντικά γιατί σε αυτά θα οριστεί η θεμελιώδης έννοια της *ικανοποιησιμότητας* (***satisfaction***), δηλαδή της *αλήθειας*, ενώ τα *πλαίσια* είναι εξίσου σημαντικά γιατί αυτά υποστηρίζουν την έννοια της *εγκυρότητας* (***validity***).

Ορισμός 1.1.6. *Πλαίσια* και *μοντέλα.* Ένα *πλαίσιο* (*frame*) για την *βασική τροπική γλώσσα* είναι ένα ζεύγος $\mathcal{F} = (W, R)$ τέτοιο που

(i) το W είναι ένα μη-κενό σύνολο και

(ii) η R είναι μια διμελής σχέση στο W.

Επομένως, ένα πλαίσιο για τη *βασική τροπική γλώσσα* είναι απλά μια *σχεσιακή δομή* με μια απλή διμελή σχέση.

Ένα *μοντέλο* (*model*) της *βασικής τροπικής γλώσσας* είναι ένα ζεύγος $\mathfrak{M} = (\mathcal{F}, V)$, όπου $\mathcal{F}$ είναι ένα *πλαίσιο* για τη *βασική τροπική γλώσσα*, και V είναι μια συνάρτηση, που αναθέτει σε κάθε *μεταβλητή* $p \in W$ ένα υποσύνολο $V(p)$ του W. Τυπικά, η V είναι μια συνάρτηση: $\Phi \rightarrow P(W)$, όπου $P(W)$ συμβολίζει το *δυναμοσύνολο* του W. Διαισθητικά σκεφτόμαστε το $V(p)$ ως το σύνολο των *σημείων* του *μοντέλου* όπου το p είναι *αληθές*. Η συνάρτηση V καλείται *αποτίμηση* (*valuation*). Για ένα *μοντέλο* $\mathfrak{M} = (\mathcal{F}, V)$, λέμε ότι το $\mathfrak{M}$ *είναι βασισμένο πάνω στο* πλαίσιο $\mathcal{F}$, ή ότι το $\mathcal{F}$ είναι το *υποβόσκον πλαίσιο* (*underlying frame*) του $\mathfrak{M}$. ▫

Η ερμηνεία της *βασικής τροπικής γλώσσας* μέσα στα *μοντέλα* θα δίνεται από τον ακόλουθο ορισμό της έννοιας της *ικανοποιησιμότητας*, μιας έννοιας που όπως θα δούμε είναι τόσο *καθολική* όσο και *τοπική*.

Ορισμός 1.1.7. *Ικανοποιησιμότητα μοντέλων.* *Έστω* w μια *κατάσταση* στο *μοντέλο* $\mathfrak{M} = (W, R, V)$. Ορίζουμε *αναδρομικά* την έννοια του πότε ένας τύπος φ *ικανοποιείται* (*satisfied*) στο $\mathfrak{M}$ σε μια *κατάσταση* w, ως εξής:

$\mathfrak{M}, w \Vdash p$ *ανν* $w \in V(p)$, όπου $p \in \Phi$,

$\mathfrak{M}, w \Vdash \bot$ ποτέ,

$\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\varphi$ *ανν* δεν ισχύει $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$,

$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \vee \psi$ *ανν* $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ ή $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$,

$\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$ *ανν* για κάποιο $u \in W$ με Rwu, έχουμε $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$. (1.1.7)

Από τον παραπάνω ορισμό έπεται ότι $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\varphi$ *αν και μόνον αν* για κάθε $u \in W$ τέτοιο που Rwu, έχουμε $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$. Θα λέμε ότι ένα *σύνολο τύπων* Σ είναι *αληθές* σε μια *κατάσταση* w ενός *μοντέλου* $\mathfrak{M}$, (συμβολικά $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$), αν κάθε μέλος του Σ είναι *αληθές* στην w.

Θα λέμε ότι ένας *τύπος* φ είναι *παγκόσμια* ή *καθολικά* (*globally*, *universally*) *αληθής* σε ένα *μοντέλο* $\mathfrak{M}$ (συμβολικά $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$), αν *ικανοποιείται* σε όλα τα *σημεία* του $\mathfrak{M}$ (δηλαδή, αν $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$, για κάθε $w \in W$). Ένας τύπος φ είναι *ικανοποιήσιμος* (*satisfiable*) σε ένα μοντέλο $\mathfrak{M}$ αν υπάρχει *κάποια κατάσταση* στο $\mathfrak{M}$ στην όποια ο φ γίνεται *αληθής*. Ένας τύπος είναι *μη-ικανοποιήσιμος* (*falsifiable*, *refutable*) σε ένα *μοντέλο*, αν η άρνησή του είναι *ικανοποιήσιμη*.

Ένα σύνολο *τύπων* Σ είναι *καθολικά αληθές* (*ικανοποιήσιμο* αντίστοιχα) σε ένα *μοντέλο* $\mathfrak{M}$ αν $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$ για όλες τις *καταστάσεις* w στο $\mathfrak{M}$ (για κάποια *κατάσταση* w στο $\mathfrak{M}$, αντίστοιχα). ▫

Τώρα θα ορίσουμε τα *πλαίσια*, τα *μοντέλα* και την *ικανοποιησιμότητα* για κάποια *τροπική γλώσσα* με τυχαίο *τύπο ομοιότητας*.

Ορισμός 1.1.8. *τ-πλαίσια* και *μοντέλα*. Έστω *τ τροπικός τύπος ομοιότητας*. Ένα *τ-πλαίσιο* (*τ-frame*), είναι μια n-άδα $\mathcal{F}$ που αποτελείται από

(i) ένα μη-κενό σύνολο W,

(ii) για κάθε $n \geq 0$, και κάθε n-μελή *τροπικό τελεστή* $\triangle$ του *τύπου ομοιότητας* τ, μια $(n + 1)$-μελή σχέση $R_{\triangle}$.

Τα *πλαίσια* επομένως είναι *σχεσιακές δομές*. Αν ο τ περιέχει μόνο ένα *πεπερασμένο αριθμό τροπικών τελεστών* $\triangle_1, ..., \triangle_n$, θα γράφουμε $\mathcal{F} = (W, R_{\triangle 1}, \ldots, R_{\triangle n})$, αλλιώς θα γράφουμε $\mathcal{F} = (W, R_{\triangle})_{\triangle \in \tau}$ ή $\mathcal{F} = (W, \{ R_{\triangle} \mid \triangle \in \tau \})$. Μπορούμε να μετατρέψουμε αυτό το *πλαίσιο* σε *μοντέλο*, όπως ακριβώς κάναμε και στη *βασική τροπική γλώσσα*. Δηλαδή, ένα *τ-μοντέλο* είναι ένα ζεύγος $\mathfrak{M} = (\mathcal{F}, V)$, όπου $\mathcal{F}$ είναι ένα *τ-πλαίσιο*, και V μια *αποτίμηση* με *πεδίο ορισμού* το Φ και *πεδίο τιμών* το $P(W)$, όπου W το *σύμπαν* του $\mathcal{F}$.

Η έννοια της *ικανοποιησιμότητας*, δηλαδή του πότε ένας τύπος φ *ικανοποιείται σε μια κατάσταση* w στο *μοντέλο* $\mathfrak{M} = (W, \{R_{\triangle} \mid \triangle \in \tau\}, V)$ (συμβολικά $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$), ορίζεται *αναδρομικά*. Ο ορισμός για τους *ατομικούς τύπους* και τους *προτασιακούς συνδέσμους*, είναι ίδιος με τον ορισμό της *βασικής τροπικής γλώσσας* (Ορισμός 1.1.7). Για τον *τροπικό τύπο*, όταν $\rho(\triangle)>0$, έχουμε:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \triangle(\varphi_1,...,\varphi_n) \quad \textit{ανν}$$
$$\text{για κάποιο } u_1, \ldots, u_n \in W \text{ με } R_{\triangle} w u_1 \ldots u_n \text{ έχουμε ότι, για καθε } i,\ \mathfrak{M}, u_i \Vdash \varphi_i.$$

Εδώ δεν έχουμε τίποτε άλλο από μια προφανή γενίκευση του τρόπου που μεταχειριζόμαστε τον *τελεστή* $\Diamond$ στη *βασική τροπική γλώσσα*. Από την άλλη όταν $\rho(\triangle) = 0$, δηλαδή όταν ο $\triangle$ είναι ένας *κενός τροπικός τελεστής*, τότε η $R_{\triangle}$ είναι μια μονομελής σχέση και ορίζεται ως

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \triangle \quad \textit{ανν} \quad w \in R_{\triangle}.$$

Σε αντίθεση επομένως με άλλες *τροπικότητες*, οι *κενές τροπικότητες* δεν έχουν πρόσβαση σε άλλες *καταστάσεις*. Ουσιαστικά η σημασιολογία τους είναι ταυτόσιμη με αυτή των *προτασιακών μεταβλητών*. Επιπλέον οι μονομελείς σχέσεις που χρησιμοποιούνται για να τις παρουσιάσουμε, δεν δίνονται από την τυχούσα *αποτίμηση*, αλλά είναι ουσιαστικά μέρος του υπάρχοντος *πλαισίου*.

Η έννοια της *παγκόσμιας* ή *καθολικής αλήθειας* σε ένα *μοντέλο* ορίζεται όπως και στη *βασική τροπική γλώσσα*, απλά είναι *η αλήθεια σε όλες τις καταστάσεις μέσα στο μοντέλο*. ▫

Ως τώρα έχουμε χρησιμοποιήσει την *τροπική λογική* ως ένα εργαλείο για να μιλήσουμε για *μοντέλα*, τα οποία δεν είναι τίποτε άλλο από *πλαίσια* στα οποία έχουμε προσδώσει κάποια *αποτίμηση* (*valuation*). Συχνά όμως θέλουμε να αγνοήσουμε την όποια *αποτίμηση*, και να επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας σε αυτό καθεαυτό το *πλαίσιο*. Η έννοια της *εγκυρότητας* είναι αυτή που μας επιτρέπει κάτι τέτοιο. Ένας τύπος είναι *έγκυρος* σε ένα *πλαίσιο*, αν είναι *αληθής* σε κάθε *κατάσταση* κάθε *μοντέλου* που μπορεί να κατασκευαστεί βάσει αυτού του *πλαισίου*. Πιο αναλυτικά:

Ορισμός 1.1.9. *Εγκυρότητα πλαισίων*. Ένας τύπος φ *είναι έγκυρος σε μια κατάσταση* w *σε ένα πλαίσιο* $\mathcal{F}$ (συμβολικά θα γράφουμε: $\mathcal{F}, w \Vdash \varphi$) αν ο φ είναι αληθής στην w σε κάθε *μοντέλο*

($\mathcal{F}$, V) που βασίζεται στο $\mathcal{F}$. Ο *φ είναι έγκυρος σε ένα πλαίσιο* $\mathcal{F}$ (συμβολικά: $\mathcal{F} \Vdash \varphi$), αν είναι έγκυρος σε κάθε *κατάσταση* στο $\mathcal{F}$. Ένας τύπος φ είναι *έγκυρος σε μια κλάση πλαισίων* **F** (συμβολικά: $\mathbf{F} \Vdash \varphi$), αν είναι *έγκυρος* σε κάθε *πλαίσιο* $\mathcal{F} \in \mathbf{F}$. Ένας *τύπος* είναι *έγκυρος* (συμβολικά: $\Vdash \varphi$), αν είναι *έγκυρος* στην κλάση όλων των *πλαισίων*. Το σύνολο όλων των *τύπων* που είναι *έγκυροι* σε μια κλάση *πλαισίων* **F**, καλείται η *λογική* της **F** ($\Lambda_{\mathbf{F}}$). ▫

Όταν μιλάμε για *μοντέλα* η κεντρική ιδέα είναι αυτή της *ικανοποιησιμότητας*, η οποία περιλαμβάνει ένα *πλαίσιο* και μια *αποτίμηση*. Αν προχωρήσουμε ένα επίπεδο πιο κάτω, σε αυτό των *πλαισίων*, μπορεί να έχουμε μια καλύτερη όψη της *σχεσιακής δομής* μας, αλλά η έννοια της *εγκυρότητας* είναι γενικότερη από αυτή της *ικανοποιησιμότητας*, αφού ορίζεται σε σχέση με το σύνολο των *αποτιμήσεων* που υπάρχουν στο *πλαίσιο*. Υπάρχει παρόλα αυτά ένα ενδιάμεσο επίπεδο, αυτό των *γενικών πλαισίων*. Ένα *γενικό πλαίσιο* ($\mathcal{F}$, A) είναι ένα *πλαίσιο* $\mathcal{F}$ μαζί με μια *περιορισμένη συλλογή A από επιτρεπτές αποτιμήσεις* (*admissible valuations*).

Η χρησιμότητα των *γενικών πλαισίων* είναι διπλή. Είναι σημαντικό αρχικά ότι μέσω αυτών μπορούμε να πραγματοποιήσουμε πιο εύκολα μια εφαρμογή που να απαιτεί από εμάς να αποκλείσουμε συγκεκριμένες *αποτιμήσεις*. Αλλά πιο σημαντικό είναι ότι υποστηρίζουν μια έννοια *εγκυρότητας*, που μαθηματικά είναι απλούστερη από την *εγκυρότητα* στα απλά *πλαίσια*, ενώ οι πληροφορίες που χάνονται σε σχέση με τα *μοντέλα* δεν είναι ιδιαίτερα πολλές. Αργότερα στην εργασία, όταν θα μιλήσουμε για την *αλγεβρική πλευρά* της *θεωρίας πληρότητας*, θα γίνει κατανοητό γιατί τα *γενικά πλαίσια* έχουν μια «απλούστερη συμπεριφορά». Ουσιαστικά θα αποδείξουμε ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα *πληρότητας* για την *εγκυρότητα* στα *γενικά πλαίσια*, το οποίο δεν υπάρχει στα απλά *πλαίσια*.

Αλλά τί ακριβώς σημαίνει *μια συλλογή από επιτρεπτές αποτιμήσεις*. Σημαίνει μια συλλογή από *αποτιμήσεις* που είναι κλειστή για τους *συνολοθεωρητικούς τελεστές* που αντιστοιχούν στους δικούς μας *συνδέσμους* και *τροπικούς τελεστές*. Οι *σύνδεσμοι* προφανώς αντιστοιχούν στην ένωση, το συμπλήρωμα και τους υπόλοιπους αντίστοιχους *τελεστές*, αλλά για τους *τροπικούς τελεστές* χρειαζόμαστε να ορίσουμε ένα καινούριο *τελεστή*.

Ας δουλέψουμε στη *βασική τροπική γλώσσα*, όπου έχουμε ένα *διαμάντι*. Έστω ένα *πλαίσιο* $\mathcal{F} = (W, R)$, και έστω m_R ο ακόλουθος *τελεστής* στο *δυναμοσύνολο* του W:

$$m_R(X) = \{w \in W \mid Rwx \text{ για κάποιο } x \in X\}.$$

Πρέπει να σκεφτόμαστε το $m_R(X)$ ως το σύνολο των *καταστάσεων* που «βλέπουν» μια *κατάσταση* στο X. Αυτός ο *τελεστής* αντιστοιχεί στο *διαμάντι* αφού για κάθε *αποτίμηση* V και κάθε *τύπο* φ έχουμε $V(\Diamond\varphi) = m_R(V(\varphi))$. Αμέσως μετά ακολουθεί ο τυπικός ορισμός του καινούριου μας *τελεστή* ενώ στη συνέχεια έχουμε τη γενική περίπτωση και τον ορισμό των *γενικών πλαισίων*:

Ορισμός 1.1.10. ***Τελεστής m_R.*** Έστω μια (n + 1)-μελής σχέση R στο σύνολο W. Ορίζουμε τον ακόλουθο n-μελή τελεστή στο *δυναμοσύνολο* $P(W)$ του W:

$m_R(X_1, \ldots, X_n) = \{ w \in W \mid Rww_1 \ldots w_n \text{ για κάποιο } w_1 \in X_1, \ldots, w_n \in X_n\}$. ▫

Ο ορισμός των *γενικών πλαισίων* είναι ο εξής:

Ορισμός 1.1.11. ***Γενικά Πλαίσια.*** Έστω *τ τροπικός τύπος ομοιότητας*. Ένα *γενικό τ-πλαίσιο* είναι ένα ζεύγος ($\mathcal{F}$, A), όπου $\mathcal{F} = (W, R_\triangle)_{\triangle\in\tau}$ είναι ένα *τ-πλαίσιο*, και A είναι μια μη-κενή συλλογή από *επιτρεπτά* υποσύνολα του W που είναι κλειστή για τους ακόλουθους *τελεστές*:

(i) ένωση: αν $X, Y \in A$, τότε $X \cup Y \in A$.

(ii) συμπλήρωμα: αν $X \in A$, τότε $W \setminus X \in A$.

(iii) *τροπικός τελεστής*: αν $X_1, ..., X_n \in A$, τότε $m_{R\triangle}(X_1, \ldots, X_n) \in A$ για κάθε $\triangle \in \tau$.

Ένα *μοντέλο βασισμένο σε ένα γενικό πλαίσιο* είναι μια τριάδα $(\mathcal{F}, A, V)$, όπου το $(\mathcal{F}, A)$ είναι ένα *γενικό πλαίσιο* και V είναι μια *αποτίμηση* που ικανοποιεί τον περιορισμό ότι για κάθε *προτασιακή μεταβλητή* p, το $V(p)$ είναι *στοιχείο* του A. *Αποτιμήσεις* που ικανοποιούν αυτόν τον περιορισμό καλούνται *επιτρεπτές* για το $(\mathcal{F}, A)$. ▫

Έπεται άμεσα από τον ορισμό ότι τόσο το κενό σύνολο όσο και το ίδιο το *σύμπαν* ενός *γενικού πλαισίου* είναι πάντα *επιτρεπτά* σύνολα. Ας παρατηρήσουμε ότι ένα απλό *πλαίσιο* $\mathcal{F} = (W, R_\triangle)_{\triangle\in\tau}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα *γενικό πλαίσιο* όπου $A = P(W)$, δηλαδή ένα *γενικό πλαίσιο* στο οποίο όλες οι *αποτιμήσεις* είναι *επιτρεπτές*. Επίσης, αν μια *αποτίμηση* V είναι *επιτρεπτή* για ένα *γενικό πλαίσιο* $(\mathcal{F}, A)$, τότε οι συνθήκες κλειστότητας του παραπάνω ορισμού, μας εξασφαλίζουν ότι $V(\varphi) \in A$, για όλους τους *τύπους* φ. Ουσιαστικά ένα σύνολο *επιτρεπτών* αποτιμήσεων A, είναι μια «λογικά κλειστή» συλλογή από *αναθέσεις* πληροφοριών. Ακολουθεί ο ορισμός της *εγκυρότητας* σε ένα *γενικό πλαίσιο*:

Ορισμός 1.1.12. ***Εγκυρότητα σε γενικά πλαίσια.*** Ένας *τύπος* φ είναι *έγκυρος σε μια κατάσταση* w *σε ένα γενικό πλαίσιο* $(\mathcal{F}, A)$ (συμβολικά: $(\mathcal{F}, A), w \Vdash \varphi$) αν ο φ είναι *αληθής* στην w σε κάθε *επιτρεπτό μοντέλο* $(\mathcal{F}, A, V)$ στο $(\mathcal{F}, A)$. Ο τύπος φ είναι *έγκυρος σε ένα γενικό πλαίσιο* $(\mathcal{F}, A)$ (συμβολικά : $(\mathcal{F}, A \Vdash \varphi)$, αν ο φ είναι *αληθής* σε κάθε *κατάσταση* όλων των *επιτρεπτών μοντέλων* $(\mathcal{F}, A, V)$ στο $(\mathcal{F}, A)$.

Ένας *τύπος* φ είναι *έγκυρος σε μια κλάση γενικών πλαισίων* **G** (συμβολικά: $\mathbf{G} \Vdash \varphi$) αν είναι *έγκυρος* σε κάθε *γενικό πλαίσιο* $(\mathcal{F}, A)$ στην **G**. Τελειώνοντας, αν ο φ είναι *έγκυρος* στην *κλάση* όλων των *γενικών πλαισίων* θα λέμε ότι είναι *γ-έγκυρος* και θα γράφουμε $\Vdash_\gamma \varphi$. ▫

Επειδή θα χρειαστεί να κατασκευάσουμε καινούρια *μοντέλα* από ήδη υπάρχοντα *μοντέλα*, θα ορίσουμε τους τρεις κλασικούς τρόπους που θα πραγματοποιείται αυτή η κατασκευή. Αυτοί είναι οι *ξένες ενώσεις*, τα *παραγόμενα υπομοντέλα* και οι *φραγμένοι μορφισμοί*. Εδώ θα μιλήσουμε και για *ισομορφισμούς* και *εμφυτεύσεις*.

Πρώτα θα ορίσουμε πότε δύο *δομές* ή δύο *σημεία* σε διαφορετικές *δομές ικανοποιούν* τους ίδιους ακριβώς *προτασιακούς τύπους*.

Ορισμός 1.1.13. ***Τροπική ισοδυναμία μοντέλων.*** Έστω $\mathfrak{M}$ και $\mathfrak{M}'$ *μοντέλα* του ίδιου *τροπικού τύπου ομοιότητας* τ, και έστω w και w' *καταστάσεις* στα $\mathfrak{M}$ και $\mathfrak{M}'$ αντίστοιχα. Η *τ-θεωρία* (ή *τ-τύπος*) της w είναι το *σύνολο* όλων των *τ-τύπων* που *ικανοποιούνται* στην w, δηλαδή το $\{\varphi \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi\}$. Λέμε ότι οι w, w' είναι *τροπικά ισοδύναμες* (συμβολικά: $w \leftrightsquigarrow w'$) αν έχουν τις ίδιες *τ-θεωρίες*.

Η *τ-θεωρία* του μοντέλου $\mathfrak{M}$ είναι το *σύνολο* όλων των *τ-τύπων* που *ικανοποιούνται* από όλες τις *καταστάσεις* στο $\mathfrak{M}$, δηλαδή το $\{\varphi \mid \mathfrak{M} \Vdash \varphi\}$. Τα *μοντέλα* $\mathfrak{M}$ και $\mathfrak{M}'$ καλούνται *τροπικά ισοδύναμα* (συμβολικά: $\mathfrak{M} \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}'$) αν οι *θεωρίες* τους *ταυτίζονται*.▫

Τώρα θα ορίσουμε τους τρείς τρόπους που υποσχεθήκαμε. Πρώτα τις ξένες ενώσεις:

Ορισμός 1.1.14. ***Ξένες ενώσεις.*** Πρώτα θα ορίσουμε τις *ξένες ενώσεις* (*disjoint unions*) για τη *βασική τροπική γλώσσα*. Θα λέμε ότι δύο *μοντέλα* είναι *ξένα* (*disjoint*) αν τα *πεδία ορισμού* τους δεν περιέχουν *κοινά στοιχεία*. Για *ξένα μοντέλα* $\mathfrak{M}_i = (W_i, R_i, V_i)$ $(i \in I)$, η *ξένη ένωσή* τους είναι η *δομή* $\biguplus_i \mathfrak{M}_i = (W, R, V)$, όπου W είναι η *ένωση* των συνόλων W_i, R είναι η *ένωση* των σχέσεων R_i, και για κάθε *προτασιακή μεταβλητή* p, ισχύει $V(p) = \bigcup_{i\in I} V_i(p)$.

Για τη γενική περίπτωση έχουμε τα εξής. Για ξένες τ-δομές $\mathfrak{M}_i = (W_i, R_{\triangle i}, V_i)_{\triangle\in\tau}$ $(i \in I)$ του ίδιου *τροπικού τύπου ομοιότητας τ*, η *ξένη ένωσή* τους είναι η *δομή* $\biguplus_i \mathfrak{M}_i = (W, R_\triangle, V)_{\triangle\in\tau}$, όπου W είναι η *ένωση των συνόλων* W_i, για κάθε $\triangle\in\tau$, $R_\triangle$ είναι η *ένωση* $\bigcup_{i\in I} R_{\triangle i}$, ενώ η V *ορίζεται* όπως στη *βασική τροπική γλώσσα*.

Αν θέλουμε να *ενώσουμε* μια *συλλογή από μοντέλα* τα οποία δεν είναι *ξένα*, πρώτα θα τα *μετατρέψουμε* σε *ξένα*, τοποθετώντας για παράδειγμα κάποιους *δείκτες* στα *πεδία ορισμού* τους. ▫

Ακολουθεί ο ορισμός των *παραγόμενων υπομοντέλων*:

Ορισμός 1.1.15. ***Παραγόμενα υπομοντέλα.*** Πρώτα θα ορίσουμε τα *παραγόμενα υπομοντέλα* (*generated submodels*) για τη *βασική τροπική γλώσσα*. Έστω $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ και $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ δύο *μοντέλα*. Θα λέμε ότι το $\mathfrak{M}'$ είναι *υπομοντέλο* του $\mathfrak{M}$ αν $W' \subseteq W$, R' είναι ο *περιορισμός* της R στο W' (δηλαδή $R' = R \cap (W' \times W')$) και η V είναι ο περιορισμός της V' στο $\mathfrak{M}'$ (δηλαδή για κάθε p, $V'(p) = V(p) \cap W'$). Θα λέμε ότι το $\mathfrak{M}'$ είναι ένα *παραγόμενο υπομοντέλο* του $\mathfrak{M}$ (συμβολικά: $\mathfrak{M}' \rightarrowtail \mathfrak{M}$), αν το $\mathfrak{M}'$ είναι ένα *υπομοντέλο* του $\mathfrak{M}$ και για κάθε *κατάσταση* w ισχύει η ακόλουθη *συνθήκη κλειστότητας*:

$$\text{αν το } w \in W' \text{ και } Rwv, \text{ τότε } v \in W'.$$

Για τη γενική περίπτωση, θα λέμε ότι ένα *μοντέλο* $\mathfrak{M}' = (W', R_\triangle', V')_{\triangle\in\tau}$ είναι ένα *παραγόμενο υπομοντέλο* του *μοντέλου* $\mathfrak{M} = (W, R\triangle, V)_{\triangle\in\tau}$ (συμβολικά $\mathfrak{M}' \rightarrowtail \mathfrak{M}$), όποτε το $\mathfrak{M}'$ είναι ένα *υπομοντέλο* του $\mathfrak{M}$ (και σέβεται τη σχέση $R_\triangle$ για όλους τους $\triangle\in\tau$), και η ακόλουθη *συνθήκη κλειστότητας* ισχύει για όλους τους $\triangle\in\tau$:

$$\text{Αν } u \in W' \text{ και } R_\triangle u u_1 \dots u_n, \text{ τότε } u_1, \dots, u_n \in W'.$$

Έστω $\mathfrak{M}$ ένα *μοντέλο*, και X ένα *υποσύνολο του πεδίου τιμών* του $\mathfrak{M}$. Το *παραγόμενο υπομοντέλο από το X* είναι το *μικρότερο παραγόμενο υπομοντέλο* του $\mathfrak{M}$, το οποίο *περιέχει* το X στο *πεδίο ορισμού* του. ▫

Για να ορίσουμε τον τρίτο τρόπο παραγωγής νέων *μοντέλων* θα χρειαστεί να ορίσουμε τις έννοιες του *ομομορφισμού*, του *ισχυρού ομομορφισμού*, του *ισομορφισμού* και της *εμφύτευσης*. Οι ορισμοί έχουν ως εξής:

Ορισμός 1.1.16. ***Ομομορφισμοί.*** Έστω *τ τροπικός τύπος ομοιότητας*, και $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$' δύο *τ-μοντέλα*. Ένας *ομομορφισμός* (*homomorphism*) *f* από το $\mathfrak{M}$ στο $\mathfrak{M}$' (συμβολικά $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$) είναι μια συνάρτηση από το *W* στο *W* ' με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Για κάθε *προτασιακή μεταβλητή p* και κάθε στοιχείο *w* από το $\mathfrak{M}$, αν $w \in V(p)$, τότε $f(w) \in V'(p)$.

(ii) Για κάθε $n \geq 0$, κάθε *n*-μελή $\triangle \in \tau$, και κάθε $(n+1)$-άδα $\overline{w}$ από το $\mathfrak{M}$, αν $(w_0, \ldots, w_n) \in R_\triangle$ τότε $(f(w_0), \ldots, f(w_n)) \in R'_\triangle$ (η *ομομορφική συνθήκη*).

Το $\mathfrak{M}$ θα καλείται *πηγή* (*source*) και το $\mathfrak{M}$' *στόχος* (*target*) του *ομομορφισμού*. ▫

Ορισμός 1.1.17. ***Ισχυροί ομομορφισμοί, Εμφυτεύσεις και Ισομορφισμοί.*** Έστω *τ τροπικός τύπος ομοιότητας*, και $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$' δύο *τ-μοντέλα*. Ένας *ισχυρός ομομορφισμός* (*strong homomorphism*) από το $\mathfrak{M}$ μέσα στο $\mathfrak{M}$', είναι ένας *ομομορφισμός f*: $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ που *ικανοποιεί* τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Για κάθε *προτασιακή μεταβλητή p* και κάθε στοιχείο *w* από το $\mathfrak{M}$, $w \in V(p)$ *ανν* $f(w) \in V'(p)$.

(ii) Για κάθε $n \geq 0$, κάθε *n*-μελή $\triangle \in \tau$, και κάθε $(n+1)$-άδα $\overline{w}$ από το $\mathfrak{M}$, $(w_0, \ldots, w_n) \in R_\triangle$ *ανν* $(f(w_0), \ldots, f(w_n)) \in R'_\triangle$ (η *ισχυρή ομομορφική συνθήκη*).

Μια *εμφύτευση* (*embedding*) του $\mathfrak{M}$ μέσα στο $\mathfrak{M}$' είναι ένας *ισχυρός ομομορφισμός* ο οποίος είναι και *ένα-προς-ένα* (*injective*). Ένας *ισομορφισμός* είναι ένας *ένα-προς-ένα* και *επί* (*bijective*) *ισχυρός ομομορφισμός*. Θα λέμε ότι το $\mathfrak{M}$ είναι *ισομορφικό* του $\mathfrak{M}$', συμβολικά $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$, αν υπάρχει *ισομορφισμός* (*isomorphism*) από το $\mathfrak{M}$ στο $\mathfrak{M}$'.▫

Ο τελευταίος τρόπος παραγωγής *μοντέλων* από παλαιότερα *μοντέλα* είναι οι *φραγμένοι μορφισμοί*.

Ορισμός 1.1.18. ***Φραγμένοι μορφισμοί.*** Πρώτα θα ορίσουμε τους *φραγμένους μορφισμούς* (*bounded morphisms*) για τη *βασική τροπική γλώσσα*. Έστω $\mathfrak{M}$ και $\mathfrak{M}$' δύο *μοντέλα* της *βασικής τροπικής γλώσσας*. Μια συνάρτηση $f : \mathfrak{M} = (W, R, V) \to \mathfrak{M}' = (W', R', V')$ είναι ένας *φραγμένος μορφισμός* αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

(i) τα *w* και *f*(*w*) *ικανοποιούν* τις ίδιες *προτασιακές μεταβλητές*.

(ii) η *f* είναι *ομομορφισμός* που *σέβεται* τη σχέση *R*, δηλαδή αν *Rwv* τότε $R'f(w)f(v)$.

(iii) Αν $R'f(w)v'$ τότε υπάρχει *v* τέτοιο που *Rwv* και $f(v) = v'$ (η *πίσω συνθήκη*).

Αν υπάρχει *φραγμένος μορφισμός* που είναι και *επί* (*surjective*), από το $\mathfrak{M}$ στο $\mathfrak{M}$', τότε λέμε ότι το $\mathfrak{M}$' είναι μια *φραγμένη μορφική εικόνα* του $\mathfrak{M}$, και γράφουμε $\mathfrak{M} \twoheadrightarrow \mathfrak{M}'$.

Για τις *γενικές τροπικές γλώσσες* θα χρειαστεί να τροποποιήσουμε τα (ii) και (iii) ως εξής:

(ii)’ Για κάθε $\Delta \in \tau$, αν $R_\Delta w v_1 \ldots v_n$ τότε $R'_\Delta f(w) f(v_1) \ldots f(v_n)$.

(iii)’ Αν $R'_\Delta f(w) v_1' \ldots v_n'$ τότε υπάρχουν $v_1 \ldots v_n$ τέτοια που $R_\Delta w v_1 \ldots v_n$ και $f(v_i) = v_i'$ (για $1 \leq i \leq n$). ▫

Ως τώρα έχουμε μιλήσει μόνο *σημασιολογικά*, ενώ προφανώς υπάρχει και μια σημαντική *συντακτική* διάσταση της *λογικής*, με πολλές και ενδιαφέρουσες ερωτήσεις. Αν για παράδειγμα μας ενδιαφέρει μια *κλάση πλαισίων* **F**, υπάρχουν συντακτικοί μηχανισμοί που να μας δίνουν τη $\Lambda_{\mathbf{F}}$, δηλαδή τους *έγκυρους τύπους* της **F**; Μπορούν τέτοιοι μηχανισμοί να προσομοιώσουν τη σημασιολογική έννοια της *λογικής συνεπαγωγής*; Η απάντηση της *τροπικής λογικής* σε τέτοιες ερωτήσεις βρίσκεται μέσα στην έννοια της *κανονικής τροπικής λογικής* (*normal modal logic*).

Μια *κανονική τροπική λογική* είναι απλά ένα σύνολο *τύπων* που ικανοποιούν κάποιες συγκεκριμένες συντακτικές συνθήκες κλειστότητας. Για να βρούμε ποιες συνθήκες θα χρειαστούμε, θα χρησιμοποιήσουμε ένα *αξιωματικό σύστημα* που ονομάζεται **K**. Το **K** είναι το πιο *αδύναμο* σύστημα για να αναλύσουμε τα *πλαίσια*. Μπορούμε να πάρουμε *ισχυρότερα συστήματα* αν προσθέσουμε επιπλέον *αξιώματα*. Θα δώσουμε τον ορισμό του **K** και μετά θα ορίσουμε τις *κανονικές τροπικές λογικές*. Θα δουλέψουμε στη *βασική τροπική γλώσσα*.

Ορισμός 1.1.19. K-*απόδειξη*. Μια **K**-*απόδειξη* είναι μια πεπερασμένη ακολουθία *τύπων*, καθένας από τους οποίους μπορεί είτε να είναι *αξίωμα*, είτε να έπεται από ένα ή περισσότερους προηγούμενους *τύπους* της ακολουθίας εφαρμόζοντας κάποιον από τους *αποδεικτικούς κανόνες*. Τα *αιξώματα* του **K** είναι όλα τα *στιγμιότυπα προτασιακών ταυτολογιών* καθώς και τα εξης δύο:

(K) $\qquad \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

(Δυϊκό) $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$.

Οι αποδεικτικοί κανόνες του **K** είναι οι εξής:

(*modus ponens*): $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$.

(*ομοιόμορφη αντικατάσταση*, *uniform substitution*): $\psi \vdash \theta$, όπου ο θ προέρχεται από τον ψ αν *αντικαταστήσουμε ομοιόμορφα* τις *προτασιακές μεταβλητές* στον φ με τυχαίους *τύπους*.

(*γενίκευση*, *generalization*): $\varphi \vdash \Box\varphi$.

Ένας *τύπος* φ είναι **K**-*αποδείξιμος* αν εμφανίζεται ως το τελευταίο αντικείμενο κάποιας **K**-*απόδειξης*. Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$. ▫

Ορισμός 1.1.20. *Κανονικές τροπικές λογικές*. Μια *κανονική τροπική λογική* Λ είναι ένα σύνολο *τύπων* που περιέχει όλες τις *ταυτολογίες*, τους $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ και $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$, και είναι κλειστό για τους *modus ponens*, *ομοιόμορφη αντικατάσταση* και *γενίκευση*. Συμβολίζουμε την μικρότερη δυνατή *κανονική τροπική λογική* με **K**. ▫

1.2. Αλγεβρική λογική

Με τον ορισμό αυτό της *κανονικής τροπικής λογικής* τελειώνει η εισαγωγή μας στην *τροπική λογική*. Τώρα θα κάνουμε μια μικρή εισαγωγή και στην *αλγεβρική λογική*, παραθέτοντας κάποιους βασικούς ορισμούς.

Όταν αναφερόμαστε σε μια *άλγεβρα* έχουμε στο μυαλό μας ένα *ζεύγος*, που για πρώτο μέλος του έχει ένα σύνολο, ενώ για δεύτερο έχει μια *συλλογή* από συναρτήσεις πάνω στο σύνολο αυτό. Τις συναρτήσεις αυτές θα τις ονομάζουμε *λειτουργίες* (*operations*). Οι *άλγεβρες* εμφανίζονται, και αυτές, σε διάφορους *τύπους ομοιότητας*, που καθορίζονται από το πλήθος των *λειτουργιών* τους αλλά και από το *πλήθος των ορισμάτων* που αυτές οι *λειτουργίες* δέχονται. Ο αντίστοιχος ορισμός του *τροπικού τύπου ομοιότητας* είναι ο *αλγεβρικός τύπος ομοιότητας*. Πιο αναλυτικά έχουμε:

Ορισμός 1.2.1. ***Αλγεβρικός τύπος ομοιότητας.*** Ένας *αλγεβρικός τύπος ομοιότητας* είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $\mathcal{F} = (F, \rho)$, όπου F ένα μη κενό σύνολο και ρ μια συνάρτηση $F \rightarrow \mathbb{N}$. Τα στοιχεία του F καλούνται *συναρτησιακά σύμβολα* (*function symbols*). Η συνάρτηση ρ *αναθέτει* σε κάθε *τελεστή* $f \in F$ ένα πεπερασμένο *πλήθος ορισμάτων* που η f μπορεί να εφαρμοστεί. *Συναρτησικά σύμβολα* με μηδενικό *πλήθος ορισμάτων*, καλούνται *σταθερές* (*constants*). Στον συμβολισμό μας θα είμαστε κάπως ελαστικοί και θα γράφουμε $f \in \mathcal{F}$ αντί για $f \in F$. ▫

Για τον ορισμό της *άλγεβρας* έχουμε:

Ορισμός 1.2.2. ***Άλγεβρες.*** Έστω σύνολο B, και $n \in \mathbb{N}$. Μια *n-μελής λειτουργία* στο B είναι μια συνάρτηση από το B^n στο B.

Έστω $\mathcal{F}$ ένας *αλγεβρικός τύπος ομοιότητας*. Μια *άλγεβρα* τύπου $\mathcal{F}$ είναι ένα ζεύγος $\mathcal{B} = (B, I)$, όπου B είναι ένα μη κενό σύνολο που καλείται *φορέας* (*carrier*) της *άλγεβρας*, και *I είναι μια ερμηνεία (interpretation)*, δηλαδή μια συνάρτηση που *αναθέτει*, για κάθε n, μια n-μελή *λειτουργία* $f_{\mathcal{B}}$ στο B, σε κάθε *συναρτησιακό σύμβολο f*, που δέχεται n το *πλήθος ορίσματα*. Συχνά χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathcal{B} = (B, f_{\mathcal{B}})_{f\in F}$, για μια τέτοια *άλγεβρα*. ▫

Τώρα θα ορίσουμε τις τρεις βασικές τεχνικές που χρησιμοποιούμε για να κατασκευάσουμε καινούριες *άλγεβρες* από παλαιότερες. Πρώτα θα ορίσουμε τη φυσική έννοια της συνάρτησης που διατηρεί την ίδια δομή μεταξύ δύο *αλγεβρών*.

Ορισμός 1.2.3. ***Ομομορφισμοί Αλγεβρών.*** Έστω $\mathcal{B} = (B, f_{\mathcal{B}})_{f\in F}$ και $\mathfrak{C} = (C, f_{\mathfrak{C}})_{f\in F}$ δύο *άλγεβρες* του ίδιου *τύπου ομοιότητας*. Μια συνάρτηση η: $B \rightarrow C$ είναι *ομομορφισμός* (*homomorphism*), αν για κάθε $f \in F$, και κάθε $b_1, ..., b_n \in B$ (όπου n το *πλήθος ορισμάτων* της f):

$$\eta(f_{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n)) = f_{\mathfrak{C}}(\eta(b_1), ..., \eta(b_n)).$$

(στην ειδική περίπτωση της σταθεράς c έχουμε $\eta(c_{\mathcal{B}}) = c_{\mathfrak{C}}$.)

Το *kernel* ενός *ομομορφισμού* f: $\mathcal{B} \rightarrow \mathfrak{C}$ είναι η σχέση $\ker f = \{(b, b') \in B^2 \mid f(b) = f(b')\}$. Λέμε ότι η $\mathfrak{C}$ είναι *ομομορφική εικόνα* (*homomorphic image*) της $\mathcal{B}$ (συμβολισμός $\mathcal{B} \twoheadrightarrow \mathfrak{C}$), αν υπάρχει *επιμορφισμός* (*ομομορφισμός* που είναι *επί -surjective homomorphism*), της $\mathcal{B}$ επί της $\mathfrak{C}$. Αν **C** είναι μια κλάση *αλγεβρών*, τότε θα συμβολίζουμε με **HC** την κλάση όλων των *ομομορφικών εικόνων* των *αλγεβρών* που περιέχονται στην **C**. ▫

Μια ειδική περίπτωση *ομομορφισμού* είναι ο *ισομορφισμός*.

Ορισμός 1.2.4. ***Ισομορφισμοί Αλγεβρών.*** Ένας *ένα-προς-ένα* και *επί ομομορφισμός* θα καλείται *ισομορφισμός* (*isomorphism*). Θα λέμε ότι δύο *άλγεβρες* είναι *ισομορφικές* αν υπάρχει μεταξύ τους *ισομορφισμός*. Συνήθως δεν διακρίνουμε *ισομορφικές άλγεβρες* αλλά αν γίνεται αυτό, συμβολίζουμε με **IC** την κλάση των *ισομορφικών αντίγραφων* (*isomorphic copies*) των *αλγεβρών* που περιέχονται στην **C**.▫

Ο δεύτερος τρόπος να κατασκευάσουμε καινούριες *άλγεβρες* από παλαιότερες, είναι να βρούμε μια μικρότερη *άλγεβρα* μέσα σε μια μεγαλύτερη.

Ορισμός 1.2.5. ***Υποάλγεβρες.*** Έστω $\mathcal{B}$ μια *άλγεβρα* και C ένα υποσύνολο του *φορέα* B. Αν το C είναι κλειστό για κάθε *λειτουργία* $f_{\mathcal{B}}$, τότε καλούμε την $\mathfrak{C} = (C, f_{\mathcal{B}}{\restriction}_{\mathfrak{C}})_{f \in F}$ *υποάλγεβρα* (*subalgebra*) της $\mathcal{B}$. Θα λέμε ότι η $\mathfrak{C}$ είναι *εμφυτεύσιμη* (*embeddable*) στην $\mathcal{B}$ (συμβολικά $\mathfrak{C} \rightarrowtail \mathcal{B}$), αν η $\mathfrak{C}$ είναι *ισομορφική* σε μια *υποάλγεβρα* της $\mathcal{B}$. Ο *ισομορφισμός* τότε θα καλείται *εμφύτευση* (*embedding*). Αν **C** είναι κλάση *αλγεβρών*, θα συμβολίζουμε με **SC** την κλάση των *ισομορφικών αντίγραφων* των *υποαλγεβρών* των *αλγεβρών* που περιέχονται στην **C** (*isomorphic copies of subalgebras of algebras in* **C**). ▫

Ένας τρίτος τρόπος να κατασκευάσουμε καινούριες *άλγεβρες* είναι να φτιάξουμε μια μεγάλη *άλγεβρα* μέσα από μια συλλογή από μικρότερες.

Ορισμός 1.2.6. ***Γινόμενα Αλγεβρών.*** Έστω $(\mathcal{B}_j)_{j\in J}$ μια *οικογένεια αλγεβρών*. Ορίζουμε το *γινόμενο* $\prod_{j\in J} \mathcal{B}_j$ αυτής της οικογένειας ως την *άλγεβρα* $\mathcal{B} = (B, f_{\mathcal{B}})_{f\in F}$, όπου B είναι το *καρτεσιανό γινόμενο* $\prod_{j\in J} B_j$ των B_j *φορέων*. Η *λειτουργια* $f_{\mathcal{B}}$, ορίζεται με τον συνήθη τρόπο,δηλαδή για τα στοιχεία $b_1, ..., b_n \in \prod_{j\in J} B_j$, το $f_{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n)$ είναι το στοιχείο του $\prod_{j\in J} A_j$ που δίνεται απο το

$$f_{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n)(j) \;=\; f_{\mathcal{B}}(b_1(j), ..., b_n(j)).$$

Όταν όλες οι άλγεβρες $\mathcal{B}_j$ είναι ίδιες, έστω η $\mathcal{B}$, τότε καλούμε το $\prod_{j \in J} \mathcal{B}$ *δύναμη της* $\mathcal{B}$, και γράφουμε $\mathcal{B}^J$ αντί για $\prod_{j \in J} \mathcal{B}$. Αν **C** κλάση *αλγεβρών*, θα συμβολίζουμε με **PC** την κλάση των *ισομορφικών αντίγραφων* των *γινομένων* των *αλγεβρων* που περιέχονται στην **C** (*isomorphic copies of products of algebras in* **C**). ▫

Τι γίνεται όμως όταν δουλεύουμε με μια *κλάση αλγεβρών*, από την οποία δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούριες *άλγεβρες* χρησιμοποιώντας κάποιον από τους παραπάνω τρόπους; Διαισθητικά, μια τέτοια *κλάση* είναι *πλήρης*. Τέτοιου είδους *κλάσεις* παίζουν ένα σπουδαίο ρόλο στην *άλγεβρα* και καλούνται *ποικιλίες* (*varieties*).

Ορισμός 1.2.7. ***Ποικιλίες.*** Μια *κλάση αλγεβρών* καλείται *ποικιλία* (*variety*), αν είναι κλειστή ως προς τις *υποάλγεβρες*, τις *ομομορφικές εικόνες* και τα *γινόμενα*. Αν **C** είναι μια κλάση *αλγεβρών*, θα συμβολίζουμε με **VC** την *ποικιλία* που παράγεται απο την **C**, δηλαδή την *ελάχιστη ποικιλία* που περιέχει την **C**. ▫

Ένα από τα πλέον γνωστά αποτελέσματα στην *άλγεβρα* είναι ότι **VC** = **HSPC**. Αυτό που μας λέει είναι ότι για να δημιουργήσουμε την *ποικιλία* που προέρχεται από την **C**, αρχικά θα πάρουμε τα *γινόμενα* των *αλγεβρών* της κλάσης, μετά τις *υποάλγεβρές* της και στο τέλος θα σχηματίσουμε τις *ομομορφικές εικόνες* της. Δεν χρειάζεται να κάνουμε τίποτε άλλο. Συνεχείς εφαρμογές οποιασδήποτε από αυτές τις τρεις *λειτουργίες* δεν πρόκειται να μας δώσουν τίποτε το καινούριο.

Για τους *ομομορφισμούς* μιας *άλγεβρας* $\mathfrak{B}$, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι σχετίζονται στενά με ειδικές *σχέσεις ισοδυναμίας* στον *φορέα* B. Πιο συγκεκριμένα:

Ορισμός 1.2.8. *Congruences.* Έστω $\mathfrak{B}$ μια *άλγεβρα* για τον *τύπο ομοιότητας* F. Μια *σχέση ισοδυναμίας* ~ στο B είναι μια *congruence* αν για κάθε $f \in F$ ικανοποιεί το εξής:

$$\text{αν} \quad b_1 \sim c_1 \;\&\; \dots \;\&\; b_n \sim c_n, \quad \text{τότε} \quad f_{\mathfrak{B}}(b_1, \dots, b_n) \sim f_{\mathfrak{C}}(c_1, \dots, c_n), \tag{1.2.8}$$

όπου n είναι το *πλήθος ορισμάτων* της f. ▫

Η σπουδαιότητα των *congruences* έγκειται στο ότι είναι ακριβώς το είδος των *σχέσεων ισοδυναμίας*, που επιτρέπουν μια *φυσική αλγεβρική δομή* να οριστεί στη *συλλογή* των *κλάσεων ισοδυναμίας*.

Ορισμός 1.2.9. *Άλγεβρες πηλίκου.* Έστω $\mathfrak{B}$ μια F-άλγεβρα και ~ μια congruence στην $\mathfrak{B}$. Η *άλγεβρα πηλίκου* της $\mathfrak{B}$ από την ~ είναι η άλγεβρα $\mathfrak{B}/\sim$ της οποίας ο *φορέας* είναι το σύνολο

$$B/\sim \; = \; \{[b] \mid b \in B\}$$

των *κλάσεων ισοδυναμίας* του B από την ~, και της οποίας οι *λειτουργίες* ορίζονται ως εξής:

$$f_{\mathfrak{B}/\sim}([b_1], \dots, [b_n]) \; = \; [\, f_{\mathfrak{B}}(b_1, \; \dots, b_n)].$$

(το οποίο είναι *καλά ορισμένο* από την (1.2.8)).

Η συνάρτηση ν που στέλνει ένα στοιχείο $b \in B$ στην κλάση ισοδυναμίας του $[b]$ καλείται η *φυσική συνάρτηση* που σχετίζεται με την *congruence*. ▫

Η σχέση μεταξύ *ομομορφισμών* και *congruences* δίνεται από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.2.10. *Ομομορφισμοί* και *Congruences.* Έστω $\mathfrak{B}$ μια *F-άλγεβρα*. Τότε:

(α) Αν f: $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ είναι *ομομορφισμός,* το *kernel* του είναι μια *congruence* στην $\mathfrak{B}$.

(β) Αντίστροφα, αν η ~ είναι μια *congruence* στην $\mathfrak{B}$, η *σχετιζόμενη φυσική* της *συνάρτηση* είναι ένας *επιμορφισμός* από την $\mathfrak{B}$ *επί* της $\mathfrak{B}/\sim$. ▫

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι μια εύκολη εφαρμογή των παραπάνω ορισμών. ▫

1.3. Αλγεβρική θεωρία μοντέλων.

Η *άλγεβρα* μπορεί να θεωρηθεί ως ένα κομμάτι της *θεωρίας μοντέλων* στο οποίο ενδιαφερόμαστε για *δομές* όπου όλες οι *σχέσεις* είναι *συναρτήσεις*. Η συνήθης *γλώσσα* για να μιλάμε για τέτοιες *δομές* χρησιμοποιεί *ισότητες* (*equations*), όπου μια *ισότητα* είναι μια δήλωση ότι δύο *όροι* ουσιαστικά δηλώνουν το ίδιο *στοιχείο*.

Ορισμός 1.3.1. *Όροι και ισότητες.* Έστω F ένας *αλγεβρικός τύπος ομοιότητας*, και X ένα σύνολο *στοιχείων* που καλούμε *μεταβλητές*. Ορίζουμε το σύνολο $Όροι_F(X)$ των *F-όρων στο X* επαγωγικά: είναι το μικρότερο σύνολο T που περιέχει όλες τις *σταθερές* και όλες τις μεταβλητές στο X, τέτοιο που το $f(t_1, ..., t_n) \in T$ όποτε τα $t_1, ..., t_n \in T$, ενώ το f είναι *συναρτησιακό σύμβολο* με *πλήθος ορισμάτων* (*arity*) n.

Μια *ισότητα* είναι ένα ζεύγος *όρων* (s, t), όπου ο συνήθης συμβολισμός είναι $s \approx t$. ▫

Τώρα θα δούμε πως θα ερμηνεύουμε την *αλγεβρική* μας *γλώσσα* μέσα στις *άλγεβρες*. Προφανώς οι *όροι* αναφέρονται σε *στοιχεία* των *αλγεβρών*, αλλά για να υπολογίσουμε τη *σημασία* ενός *όρου* χρειάζεται να γνωρίζουμε τι αντιπροσωπεύουν οι *μεταβλητές* του *όρου* αυτού. Την πληροφορία αυτή θα μας τη δίνει μια *συνάρτηση*. Έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.3.2. *Αλγεβρική σημασιολογία.* Έστω F ένας *αλγεβρικός τύπος ομοιότητας*, X ένα *σύνολο μεταβλητών* και $\mathcal{B}$ μια *F-άλγεβρα*. Μια *ανάθεση* (*assignment*)στην $\mathcal{B}$ είναι μια συνάρτηση θ: $X \rightarrow A$ που συσχετίζει ένα *στοιχείο* του A με κάθε *μεταβλητή* στο X. Δοσμένης συνάρτησης θ, μπορούμε να υπολογίσουμε την *σημασία* $\widetilde{\theta}\,(t)$ ενός όρου t στο $Όροι_F(X)$ ως εξής:

$$\widetilde{\theta}\,(x) = \theta(x),$$

$$\widetilde{\theta}\,(x) = c_{\mathcal{B}},$$

$$\widetilde{\theta}\,(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\widetilde{\theta}\,(t_1), \ldots, \widetilde{\theta}\,(t_n)). ▫$$

Η τελευταία *ισότητα* του παραπάνω ορισμού μας θυμίζει πολύ τη συνθήκη ορισμού των *ομομορφισμών*. Στην πραγματικότητα μπορούμε να μετατρέψουμε τη *συνάρτηση σημασίας* σε έναν *ομομορφισμό* τοποθετώντας μια *φυσική αλγεβρική δομή* στο σύνολο των όρων $Όροι_F(X)$. Έχουμε:

Ορισμός 1.3.3. *Άλγεβρες όρων.* Έστω F ένας *αλγεβρικός τύπος ομοιότητας*, X ένα *σύνολο μεταβλητών*. Η *άλγεβρα όρων του F στο X* είναι η *άλγεβρα* $\mathcal{O}ροι_F(X)= (Όροι_F(X), I)$, όπου κάθε *συναρτησιακό σύμβολο f* ερμηνεύεται ως η *λειτουργία* $I(f)$ στο $Όροι_F(X)$ ως εξής:

$$I(f)(t_1, ..., t_n) = f(t_1, ..., t_n) \text{ (B.3). ▫}$$

Με άλλα λόγια ο *φορέας* της *άλγεβρας τύπων* πάνω στο F είναι το *σύνολο* των *F-όρων* πάνω στο *σύνολο* των *μεταβλητών X*, ενώ η *λειτουργία* $I(f)$ αναθέτει μια n-άδα $t_1, \ldots, t_n$ *όρων* στον *όρο* $f(t_1, \ldots, t_n)$. Πρέπει να προσέξουμε το διπλό ρόλο του f. Στη δεξιά πλευρά της *ισότητας*, το f δηλώνει ένα *στατικό μέρος* του συντακτικού *όρου* $f(t_1, \ldots, t_n)$, ενώ στην αριστερή πλευρά το $I(f)$ δηλώνει μια *δυναμική ερμηνεία* του f σαν μια *λειτουργία* πάνω στους *όρους*.

Η προσπάθεια μας να βλέπουμε τους *F-όρους* σαν μέλη μιας *F-άλγεβρας*, είναι πολύ βολική. Μπορούμε για παράδειγμα να δούμε την *λειτουργία* της *αντικατάστασης* (*substitution*) *τύπων* με *μεταβλητές*, ως έναν *ενδομορφισμό* (*endomorphism*) της *άλγεβρας τύπων*, δηλαδή έναν *ομομορφισμό* από την *άλγεβρα* στον εαυτό της. Έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.3.4. ***Αντικατάσταση όρων.*** Έστω F ένας *αλγεβρικός τύπος ομοιότητας*, και X ένα *σύνολο μεταβλητών*. *Αντικατάσταση* είναι μια *συνάρτηση* σ: $X \to Οροι_F(X)$ από *μεταβλητές* σε *όρους*. Μια τέτοια *αντικατάσταση* μπορεί να *επεκταθεί* σε μια συνάρτηση $\widetilde{\sigma}: Οροι_F(X) \to Οροι_F(X)$ με τον ακόλουθο *επαγωγικό ορισμό*:

$$\widetilde{\sigma}(x) := \sigma(x),$$
$$\widetilde{\sigma}(f(t_1, ..., t_n)) := f(\widetilde{\sigma}(t_1), \ldots, \widetilde{\sigma}(t_n)).$$

Μερικές φορές χρησιμοποιούμε την λέξη «*αντικατάσταση*» για συνάρτηση από *όρους* σε *όρους*, η οποία να ικανοποιεί την δεύτερη από τις παραπάνω *συνθήκες*, δηλαδή μερικές φορές καλούμε την $\widetilde{\sigma}$ *αντικατάσταση*. ▫

Η επόμενη πρόταση μας δείχνει τη σχέση μεταξύ *αντικαταστάσεων* και *ομομορφισμών*.

Πρόταση 1.3.5. ***Αντικαταστάσεις* και *ομομορφισμοί*.** Έστω σ: $Οροι_F(X) \to Οροι_F(X)$ μια *αντικατάσταση*. Τότε η σ: $\mathcal{O}ροι_F(X) \to \mathcal{O}ροι_F(X)$ είναι *ομομορφισμός*.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι μια άμεση εφαρμογή των ορισμών της *αντικατάστασης* και του *ομομορφισμού*. ▫

Έπεται ότι και η *συνάρτηση σημασίας* (*νοήματος*), που σχετίζεται με μια *ανάθεση* θ είναι ουσιαστικά ένας *ομομορφισμός*. Έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.3.6. ***Συνάρτηση σημασίας* και *ομομορφισμοί*.** Για τυχούσα συνάρτηση θ από *μεταβλητές* X σε *στοιχεία* μιας *άλγεβρας* $\mathcal{B}$, η αντίστοιχη *συνάρτηση σημασίας* $\widetilde{\theta}$ είναι *ομομορφισμός* από το $\mathcal{O}ροι_F(X)$ στη $\mathcal{B}$.

Απόδειξη. Η πρόταση αυτή θα αποδειχτεί αργότερα μέσα στην εργασία. Ουσιαστικά πρόκειται για γενίκευση της προηγούμενης πρότασης. ▫

Ο συνήθης τρόπος για να πραγματοποιούμε δηλώσεις σχετικά με *άλγεβρες*, είναι να συγκρίνουμε τη *σημασία* που έχουν δύο όροι κάτω από την ίδια *αποτίμηση*, δηλαδή να χρησιμοποιήσουμε *ισότητες*.

Ορισμός 1.3.7. ***Αλήθεια* και *Εγκυρότητα* στις *άλγεβρες*.** Μια *ισότητα* $s \approx t$ *αληθεύει* ή *ισχύει* σε μια *άλγεβρα* $\mathcal{B}$ (συμβολικά $\mathcal{B} \vDash s \approx t$), αν για κάθε *ανάθεση* θ, $\widetilde{\theta}(s) = \widetilde{\theta}(t)$.

Ένα *σύνολο ισοτήτων* E ισχύει σε μια *άλγεβρα* $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B} \vDash E$), αν κάθε *ισότητα* στο E ισχύει στην $\mathcal{B}$. Αν $\mathcal{B} \vDash s \approx t$ ή $\mathcal{B} \vDash E$ και πάλι θα λέμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι *μοντέλο* της $s \approx t$ ή E αντίστοιχα.

Μια *ισότητα* $s \approx t$ είναι μια *σημασιολογική συνέπεια* (*semantic consequence*) ενός *συνόλου ισοτήτων* E ($E \vDash s \approx t$), αν κάθε *μοντέλο* του E είναι *μοντέλο* για την $s \approx t$. ▫

Οι αλγεβριστές συνήθως ενδιαφέρονται για συγκεκριμένες *κλάσεις αλγεβρών*, όπως *ομάδες* και *άλγεβρες Boole*. Τέτοιες *κλάσεις* συνήθως ορίζονται από *σύνολα* με *ισότητες*.

Ορισμός 1.3.8. ***Κλάσεις ισοτήτων.*** Μια *κλάση αλγεβρών* **C** είναι *ισοτικά ορίσιμη* (*equationally definable*), ή *κλάση ισότητας* (*equational class*), αν υπάρχει *συνόλο ισοτήτων E* τέτοιο που η **C** περιέχει ακριβώς τα *μοντέλα* για το *E*. ▫

Το ακόλουθο θεώρημα είναι από τα σημαντικότερα της άλγεβρας.

Θεώρημα 1.3.9. ***Θεώρημα*** **Birkhoff.** Μια *κλάση αλγεβρών* είναι *ισοτικά ορίσιμη αν και μόνο αν* είναι μια *ποικιλία*. ▫

Κεφάλαιο 2: Αλγεβρική τροπική λογική και το θεώρημα Jónsson – Tarski.

2.1. Άλγεβρα και προτασιακή λογική.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ερευνήσουμε τη σχέση *άλγεβρας* και *λογικής*. Θα δούμε ότι *άλγεβρα* και *λογική* μοιράζονται κάποιες κεντρικές ιδέες, με την *αλγεβρική λογική* να προσφέρει ένα φυσικό τρόπο να επανεξετάσουμε πολλά βασικά *λογικά* θέματα. Αρχικά θα αναλύσουμε την *κλασική προτασιακή λογική* με αλγεβρικούς όρους. Στην προσπάθειά μας αυτή θα συναντήσουμε και θα ορίσουμε τις *άλγεβρες τύπων*, *αληθοτιμών*, *συνόλων*, καθώς και τις *άλγεβρες Boole* και τις Lindenbaum-Tarski *άλγεβρες*.

Η πιο σημαντική ιδιότητα των *προτασιακών τύπων* είναι η συντακτική τους απλότητα. Το μόνο που έχουμε είναι μια συλλογή από *ατομικά σύμβολα*, τις *προτασιακές μεταβλητές* (p, q, r,…), οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους σε πιο πολύπλοκες εκφράσεις χρησιμοποιώντας τα σύμβολα $\bot$, $\top$, $\neg$, $\vee$ και $\wedge$. Θα χρησιμοποιούμε τα $\bot$, $\neg$ και $\vee$ ως *πρωταρχικά σύμβολα* και τα υπόλοιπα ως *συντομεύσεις*.

Οι *προτασιακές μεταβλητές* είναι *οντότητες* που φέρουν κάποια συγκεκριμένη πληροφορία, ενώ οι *σύνδεσμοι* δεν κάνουν τίποτε άλλο από το να συνδυάζουν τις διάφορες πληροφορίες. Οι *σύνδεσμοι* $\vee$ και $\wedge$ δηλώνουν κάποιες διμελείς *λειτουργίες* στις προτάσεις (θα συμβολίζουμε αυτές τις *λειτουργίες* + και · αντίστοιχα), ο $\neg$ δηλώνει μια μονομελή *λειτουργία* (θα τη συμβολίζουμε με −), ενώ τα σύμβολα $\bot$ και $\top$ δηλώνουν κάποιες ειδικές *λειτουργίες* των προτάσεων, δηλαδή είναι τα ονόματα κάποιων *ειδικών προτάσεων* (θα τα συμβολίζουμε με 0 και 1 αντίστοιχα). Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι *οι τύποι μπορούν να ιδωθούν ως όροι που δηλώνουν προτάσεις.*

Τις *λειτουργίες* αυτές θα τις μετατρέψουμε σε *συναρτησιακά σύμβολα* και θα μας προκύψει ένας συγκεκριμένος *αλγεβρικός τύπος ομοιότητας*:

Ορισμός 2.1.1. ***Άλγεβρες τύπου ομοιότητας Boole.*** Έστω *Boole* ένας *αλγεβρικός τύπος ομοιότητας* που έχει μια σταθερά (ή κενό *συναρτησιακό σύμβολο*) $\bot$, ένα μονομελές *συναρτησιακό σύμβολο* $\neg$, και ένα διμελές συναρτησιακό σύμβολο $\vee$. Για δοσμένο σύνολο προτασιακών μεταβλητών Φ, ορίζουμε το *Τύπος*(Φ) ώς το σύνολο των *Boole*-τύπων στο Φ. Αυτό το σύνολο είναι ακριβώς η συλλογή όλων των *προτασιακών τύπων* στο Φ.

Οι *άλγεβρες τύπου ομοιότητας Boole* συνήθως αναπαρίστανται ως 4-άδες $\mathcal{B} = (B, +, -, 0)$. Θα χρησιμοποιούμε συνεχώς τις ακόλουθες συντομεύσεις: · και 1. Πιο συγκεκριμένα το $a \cdot b$ είναι συντόμευση για το $-(-a + -b)$, και το 1 συντόμευση για το -0. ▫

Υπάρχουν πολλές *άλγεβρες τύπου ομοιότητας Boole*, αλλά εμάς μας ενδιαφέρουν αυτές που μπορούν να αναλύσουν *προτασιακούς τύπους*. Από τη στιγμή που η *προτασιακή λογική* είναι δίτιμη, μας ενδιαφέρει δηλαδή η *αλήθεια* ή το *ψεύδος* μια πρότασης, θα πάρουμε για *φορέα* της *άλγεβράς* μας ένα αντίστοιχο σύνολο. Έστω λοιπόν **Δύο** = {0, 1} , ο *φορέας* της *άλγεβρας*, όπου το 0 αντιστοιχεί στην τιμή αληθείας «*ψευδής*», και το 1 στην τιμή αληθείας «*αληθής*». Πάνω στον *φορέα* τώρα πρέπει να οριστούν κατάλληλες *λειτουργίες*, που να ερμηνεύουν με ένα φυσικό τρόπο τους λογικούς συνδέσμους.

Αρχικά θα πρέπει να υπάρχει μια συνάρτηση που να αναθέτει τιμές αληθείας στις *προτασιακές μεταβλητές* που εμφανίζονται σε ένα *προτασιακό τύπο*. Έστω θ: $\Phi \rightarrow$ **Δύο**, η συνάρτηση που κάνει ακριβώς αυτό. Έχοντας μια τέτοια συνάρτηση, που στην λογική επέχει θέση *αποτίμησης*, ερχόμαστε να ερμηνεύσουμε και τους *πρωταρχικούς συνδέσμους* που έχουμε δεχτεί με τη βοήθεια μιας δεύτερης συνάρτησης, η οποία ουσιαστικά *θα μας δίνει το νόημα του προτασιακού* *τύπου* (*meaning function*). Η συνάρτηση μας αυτή δεν θα κάνει τίποτε άλλο από το να εμφανίζει τους *πίνακες αληθείας* των *συνδέσμων* που πήραμε ως *πρωταρχικούς*. Έστω λοιπόν η συνάρτηση $\widetilde{\theta}$:*Τύπος*(*Φ*) → **Δύο,** που υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \widetilde{\theta}\,(p) &= \theta(p), \text{ για κάθε } p \in \Phi, \\ \widetilde{\theta}\,(\perp) &= 0, \\ \widetilde{\theta}\,(\neg\varphi) &= 1 - \widetilde{\theta}\,(\varphi), \\ \widetilde{\theta}\,(\varphi \vee \psi) &= \max(\widetilde{\theta}\,(\varphi),\ \widetilde{\theta}\,(\psi)). \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Από τον παραπάνω υπολογισμό, προκύπτει και ο ακόλουθος ορισμός:

Ορισμός 2.1.2. ***Άλγεβρες αληθοτιμών.*** Η *άλγεβρα των τιμών αληθείας* είναι η $\mathscr{D}$*ύο* = ({0,1}, +, −, 0), όπου − και + ορίζονται ως εξής: $-a = 1 - a$ και $a + b = \max(a, b)$ αντίστοιχα. ▫

Αν προσέξουμε το πως ορίστηκε η $\widetilde{\theta}$, βλέπουμε ότι η ομοιότητά της με τις συνθήκες ορισμού ενός *ομομορφισμού* είναι ευδιάκριτη. Από την στιγμή που οι *ομομορφισμοί* είναι οι θεμελιώδεις συναρτήσεις μεταξύ των *αλγεβρών*, θα προσπαθήσουμε να θέσουμε μια *αλγεβρική δομή* στο *πεδίο τιμών* τέτοιων *συναρτήσεων νοήματος*, όπως η $\widetilde{\theta}$. Οι *συναρτήσεις* αυτές *νοήματος*, τελικά θα προκύψει ότι δεν είναι τίποτε άλλο από *ομομορφισμοί*.

Η *αλγεβρική δομή* στο σύνολο των *τύπων*, θα έχει ως *φορέα* τη συλλογή των *προτασιακών τύπων* πάνω στο σύνολο των *προτασιακών μεταβλητών Φ*. Θα υπάρχουν και οι κατάλληλες *λειτουργίες* και θα ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 2.1.3. ***Άλγεβρες τύπων προτασιακής λογικής.*** Έστω *Φ* ένα σύνολο *προτασιακών μεταβλητών*. Η προτασιακή *άλγεβρα τύπων* στο *Φ* είναι η *άλγεβρα*

$$\mathscr{T}\!upos(\Phi) = (Τύπος(\Phi), +, -, \perp),$$

όπου *Τύπος*(*Φ*) είναι η συλλογή των *προτασιακών τύπων* στο *Φ*, και – και + οι *λειτουργίες* που ορίζονται ως εξής: $-\varphi := \neg\varphi$ και $\varphi + \psi := \varphi \vee \psi$. ▫

Η συνάρτηση $\widetilde{\theta}$: *Τύπος*(*Φ*) → **Δύο,** είναι *ομομορφιμός* σύμφωνα με την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 2.1.4. ***Ομομορφισμός αλγεβρών.*** Έστω *Φ* ένα σύνολο *προτασιακών μεταβλητών*. Δοσμένης τυχούσας *ανάθεσης θ*: *Φ* → **Δύο**, η συνάρτηση $\widetilde{\theta}$:*Τύπος*(*Φ*) → **Δύο** που *αναθέτει* σε κάθε τύπο το *νόημα* του, σύμφωνα με αυτή την *αποτίμηση*, είναι ένας *ομομορφισμός* απο την $\mathscr{T}\!upos(\Phi)$ στην $\mathscr{D}$*ύο*.▫

Απόδειξη. Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας δώσαμε έναν ακριβή ορισμό του *ομομορφισμού* μεταξύ *αλγεβρών* (Ορισμός 1.2.3.). Ουσιαστικά ένας *ομομορφισμός* μεταξύ *αλγεβρών αναθέτει στοιχεία* που υπάρχουν στην *άλγεβρα* «πηγή» με *στοιχεία* της *άλγεβρας* «στόχο», με έναν τρόπο που να *διατηρεί* τις *λειτουργίες*. Αυτό ακριβώς μας εξασφαλίζουν οι *συνθήκες ορισμού* (*υπολογισμού*) της συνάρτησης $\widetilde{\theta}$ που έχουμε πιο πάνω στο (2.1.1) ▫

Επειδή η *άλγεβρα* έχει να κάνει ουσιαστικά με *ισότητες* (*equations*), θα θέλαμε η *αλγεβρική προτασιακή λογική* να μας δίνει ένα τρόπο να καθορίζουμε πότε δύο *προτάσεις* είναι *ίσες*. Πρέπει για παράδειγμα να μπορούμε να διακρίνουμε ότι οι τύποι $p\vee(p\wedge q)$ και p, δηλώνουν την ίδια πρόταση.

Για να επιλύσουμε αυτό το θέμα, θα λέμε ότι μια ισότητα $s \approx t$, είναι *έγκυρη* σε μια *άλγεβρα* $\mathcal{B}$, αν για κάθε *αποτίμηση* των *μεταβλητών* που υπάρχουν στους *όρους*, οι s και t έχουν το ίδιο *νόημα* (*σημασία*) στην $\mathcal{B}$. Άρα ένας *αλγεβρικός* τρόπος να πούμε ότι ένας *τύπος* φ είναι *ταυτολογία* (συμβολικά $\vDash_C \varphi$), είναι να πούμε ότι η *ισότητα* $\varphi \approx \top$ είναι *έγκυρη* στην *άλγεβρα των αληθοτιμών*.

Στην *προτασιακή λογική* αντίστοιχα, ορίζουμε το *σύνδεσμο* της διπλής συνεπαγωγής $\leftrightarrow$, ως μια *λειτουργία* στις προτάσεις οι οποίες έχουν το ίδιο *νόημα* (είτε αληθείς και οι δύο, είτε ψευδείς και οι δύο), ως εξής:

$$\widetilde{\theta}\,(\varphi \leftrightarrow \psi) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \alpha\nu \quad \widetilde{\theta}(\phi) = \widetilde{\theta}(\psi) \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{array} \right\}$$

Το επόμενο θεώρημα μας δείχνει ότι μπορούμε να μιλάμε τόσο *αλγεβρικά* όσο και *λογικά*, με την ίδια ευκολία.

Θεώρημα 2.1.5. ***Άλγεβρες και εγκυρότητα της προτασιακής λογικής.*** Η *άλγεβρα* $\mathcal{D}$*ύο* μετατρέπει σε *αλγεβρική* μορφή την εγκυρότητα της *προτασιακής λογικής*. Έστω φ και ψ προτασιακοί τύποι / όροι. Τότε:

$$\vDash_C \varphi \quad \alpha\nu\nu \quad \mathcal{D}\acute{\upsilon}o \vDash \varphi \approx \top \quad (2.1.5.\alpha),$$
$$\mathcal{D}\acute{\upsilon}o \vDash \varphi \approx \psi \quad \alpha\nu\nu \quad \vDash_C \varphi \leftrightarrow \psi \qquad (2.1.5.\beta),$$
$$\vDash_C \varphi \quad \leftrightarrow \quad (\varphi \leftrightarrow \top) \qquad (2.1.5.\gamma).\ ▫$$

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι άμεση από τους ορισμούς. ▫

Εκτός όμως της *άλγεβρας* $\mathcal{D}$*ύο*, και γενικά των *αλγεβρών* με *τύπο ομοιότητας Boole*, των οποίων η σημασιολογία για την *προτασιακή λογική* δεν είναι ιδιαιτέρως ενδιαφέρουσα, υπάρχει και μια άλλη *κλάση αλγεβρών*, οι *άλγεβρες συνόλων* (*set algebras*), που είναι πολύ πιο ενδιαφέρουσες και οι οποίες *επεκτείνονται* πιο κομψά στη *τροπική λογική*, που είναι και το θέμα μας εδώ. Έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.1.6. ***Άλγεβρες συνόλων και δυναμοσυνόλων.*** Έστω σύνολο B. Ως συνήθως συμβολίζουμε το *δυναμοσύνολο* του B με $P(B)$. Η *άλγεβρα δυναμοσυνόλου* (*power set algebra*) $\wp(B)$ είναι η *δομή*

$$\wp(B) = (P(B), \cup, -, \varnothing),$$

όπου – είναι η *λειτουργία* που επιτελείται όταν παίρνουμε το *συμπλήρωμα* ενός συνόλου, και $\varnothing$, $\cup$, οι συνήθεις λειτουργίες του *κενού συνόλου* και της *ένωσης συνόλων* αντίστοιχα. Από αυτές τις βασικές *λειτουργίες* ορίζουμε με τον κλασικό τρόπο την *λειτουργία* της *τομής* ,$\cap$. Επίσης ορίζουμε το ειδικό στοιχείο B, ώς το *ανώτερο σύνολο* (*top set*) της *άλγεβρας*.

Μια *άλγεβρα συνόλων* ή *πεδίο συνόλων* (*field of sets*), είναι μια *υποάλγεβρα* μιας *άλγεβρας δυναμοσυνόλου*. Δηλαδή, μια *άλγεβρα συνόλων* (στο B) είναι μια συλλογή από υποσύνολα του B, που περιέχει το $\varnothing$ και είναι κλειστό για την $\cup$ και το –. Άρα κάθε *άλγεβρα συνόλων* περιέχει το *B*, και είναι κλειστή και για την $\cap$. Την *κλάση* όλων των *αλγεβρών συνόλων* θα ονομάζουμε **Σύνολο**. ▫

Σε σχέση με την *τροπική λογική*, οι *άλγεβρες συνόλων*, έχουν κάποιες προφανείς αντιστοιχίες. Μπορούμε να δούμε το *B* ως ένα σύνολο *καταστάσεων*, και μια *πρόταση* ως ένα υποσύνολο του *B*, που περικλείει τις *καταστάσεις* που κάνουν την *πρόταση αληθή*. Το σύμβολο $\varnothing$, είναι ουσιαστικά η *πρόταση* που είναι *ψευδής* σε κάθε *κατάσταση*, και νοηματικά αντιστοιχεί στο $\perp$. Από την άλλη το *B*, είναι η *πρόταση* που είναι παντού *αληθής* και αντιστοιχεί στο $\top$. Το σύμβολο $\cup$ αντιστοιχεί στο σύνδεσμο $\vee$.

Η παρακάτω πρόταση μας δείχνει ότι οι *άλγεβρες συνόλων* και η *άλγεβρα* $\mathcal{D}$*ύο* ικανοποιούν ακριβώς τις ίδιες *ισότητες*. Θα δείξουμε *αλγεβρικά* ότι η κλάση των *αλγεβρών συνόλων συμπίπτει* (modulo έναν *ισομορφισμό*) με την *κλάση* των *υποαλγεβρών δυνάμεων* της $\mathcal{D}$*ύο*. Έχουμε το εξής:

Πρόταση 2.1.7. ***Ισομορφικές άλγεβρες.*** *Κάθε άλγεβρα δυναμοσυνόλου είναι ισομορφική με μια δύναμη της* $\mathcal{D}$*ύο, και αντίστροφα.*

Απόδειξη. Έστω ένα τυχόν σύνολο *B*, και έστω η συνάρτηση χ: *P*(*A*) → **Δύο** που ορίζεται ως εξής:

$$\chi(X)(\beta) = \begin{Bmatrix} 1, & \alpha\nu \quad \beta \in \mathrm{X}, \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{Bmatrix}$$

όπου η χ(*X*) είναι προφανώς η *χαρακτηριστική συνάρτηση* του *X*. Το μόνο που χρειάζεται να δείξουμε είναι ότι η χ είναι *ισομορφισμός* μεταξύ της $\wp(B)$ και της $\mathcal{D}$*ύο*$^{\boldsymbol{B}}$.

Αντίστροφα, για να δείξουμε ότι κάθε δύναμη της $\mathcal{D}$*ύο* είναι *ισομορφική* με κάποια *άλγεβρα δυναμοσυνόλου*, έστω $\mathcal{D}$*ύο*^{I} κάποια δύναμη της $\mathcal{D}$*ύο*. Η συνάρτηση *α*: **Δύο**^{I} → *P*(*I*) που ορίζεται ως:

$$a(f) = \{i \in I \mid f(i) = 1\}.$$

είναι ο απαιτούμενος *ισομορφισμός* μεταξύ των $\mathcal{D}$*ύο*^{I} και $\wp(I)$.▫

Όπως το παραπάνω θεώρημα 2.1.5, μπορούμε να αποδείξουμε και ένα αντίστοιχο θεώρημα «αλγεβροποίησης» για την κλάση **Σύνολο**.

Θεώρημα 2.1.8. ***Κλάσεις και εγκυρότητα της προτασιακής λογικής.*** (Η *κλάση* **Σύνολο** μετατρέπει σε *αλγεβρική μορφή* την Κλασική Εγκυρότητα) *Έστω φ και ψ προτασιακοί τύποι / όροι. Τότε*

$$\vDash_C \varphi \quad \alpha\nu\nu \ \textbf{Σύνολο} \vDash \varphi \approx \top. \qquad (2.1.8) ▫$$

Απόδειξη. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι η *εγκυρότητα* των *ισοτήτων διατηρείται* όταν παίρνουμε *γινόμενα* (και άρα *δυνάμεις*) και *υποάλγεβρες*. Χρησιμοποιώντας στην συνέχεια το Θεώρημα 2.1.5 και την Πρόταση 2.1.7 παίρνουμε αυτό που ζητάμε. ▫

Ως τώρα έχουμε δει την *άλγεβρα* $\mathscr{D}$*ύο* και τις *άλγεβρες συνόλων*, που είναι δύο σκοπιές της *σημασιολογίας* της *προτασιακής λογικής*, που ενδιαφέρεται κυρίως για τις *ισότητες* που προκύπτουν μεταξύ των *προτάσεων*. Τώρα θα δούμε τί γίνεται με τη *συντακτική* πλευρά της *προτασιακής λογικής*.

Έστω λοιπόν ότι δουλεύουμε σε ένα *έγκυρο* και *πλήρες αποδεικτικό σύστημα* της *προτασιακής λογικής*. Έστω ότι με $\vdash_C \varphi$ δηλώνουμε ότι ο φ είναι *θεώρημα* του συστήματος. Θα λέμε ότι οι τύποι φ και ψ είναι *αποδεικτικά ισοδύναμοι* (*provably equivalent*), (συβολικά $\varphi \equiv_C \psi$) αν $\vdash_C \varphi \leftrightarrow \psi$. Για να αποδείξουμε το ανάλογο συντακτικό θεώρημα του Θεωρήματος 2.1.8, θα χρειαστούμε τις *άλγεβρες Boole*, τις οποίες θα ορίσουμε τώρα.

Ορισμός 2.1.9. ***Άλγεβρες Boole.*** Έστω $\mathscr{B}$ = (B, +, –, 0) μια *άλγεβρα* του *τύπου ομοιότητας Boole*. Η $\mathscr{B}$ καλείται *άλγεβρα Boole ανν* ικανοποιεί τις ακόλουθες *ταυτότητες*, (όπου $x \cdot y$ είναι συντόμευση για το $-(-x + -y)$ και το 1 συντόμευση για το -0):

(B0)	$x + y = x + y$	$x \cdot y = y \cdot x$
(B1)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
(B2)	$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$
(B3)	$x + (-x) = 1$	$x \cdot (-x) = 0$
(B4)	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	$x \cdot (y + z) = (x \cdot z) + (x \cdot z)$

Οι *λειτουργίες* + και · καλούνται *join* και *meet* αντίστοιχα, ενω τα στοιχεία 1 και 0 θα τα ονομάζουμε *κορυφή* και *πάτος*. *Διατάσουμε* τα στοιχεία μιας *άλγεβρας Boole* ορίζοντας τη σχέση $a \leq b$ αν $a + b = b$ (ή ισοδύναμα, αν $a \cdot b = a$). Δοσμένης *άλγεβρας Boole* $\mathscr{B}$ = (B, +, –, 0), το σύνολο B θα καλείται ως συνήθως *σύνολο φορέας* (*carrier set*). Καλούμε την *κλάση* των *αλγεβρών Boole* **BA**. ▫

Στην εισαγωγή αναφερθήκαμε σε ένα σημαντικότατο θεώρημα που απέδειξε ο Birkhoff (Θεώρημα 1.3.9). Σύμφωνα με αυτό μια *κλάση αλγεβρών* που ορίζεται από μια *συλλογή ισοτήτων* μπορεί να χαρακτηριστεί και ως μια *ποικιλία*. Στη συνέχεια επομένως μπορούμε να μιλάμε για μια *ποικιλία αλγεβρών Boole* αντί για μια *κλάση αλγεβρών Boole*.

Εύκολα βλέπουμε ότι η *άλγεβρα* $\mathscr{D}$*ύο* και οι *άλγεβρες συνόλων* είναι ουσιαστικά *άλγεβρες Boole*. Οι *άλγεβρες συνόλων* μάλιστα είναι γνωστές και ως *συγκεκριμένες άλγεβρες Boole* (*concrete boolean algebras*).

Ακολουθεί το ανάλογο συντακτικό θεώρημα του Θεωρήματος 2.1.8.

Θεώρημα 2.1.10. ***Κλάσεις και πληρότητα της προτασιακής λογικής.*** (Η κλάση **BA** μετατρέπει σε αλγεβρική μορφή την *εγκυρότητα* και *πληρότητα* της *προτασιακής λογικής*.) Έστω φ και ψ *προτασιακοί τύποι* / *όροι*. Τότε

$$\vdash_C \varphi \quad \text{ανν} \quad \mathbf{BA} \vDash \varphi \approx \top. \qquad (2.1.10)$$ ▫

Απόδειξη.

(⇒) Η απόδειξη της *εγκυρότητας* μπορεί εύκολα να δειχτεί με *επαγωγή* στο *μήκος της τυπικής απόδειξης*.

(⇐) Η απόδειξη της *πληρότητας* έπεται από τις παρακάτω Προτάσεις 2.1.13. και 2.1.14. ▫

Για να αποδείξουμε αυτό το *αποτέλεσμα πληρότητας*, θα πρέπει να δείξουμε ότι κάθε *πρόταση*, που δεν είναι θεώρημα της *κλασικής προτασιακής λογικής*, μπορεί να *διαψευσθεί* σε κάποια *άλγεβρα Boole*. Οπότε πρέπει να κατασκευάσουμε *διαψεύσιμες άλγεβρες*, δηλαδή πρέπει να κατασκευάσουμε *άλγεβρες από σύνολα τύπων*, τέτοιες που μέσα τους θα υπάρχει όλη η *προτασιακή λογική* που χρειαζόμαστε. Τέτοιες *άλγεβρες* υπάρχουν και ονομάζονται Lindenbaum-Tarski *άλγεβρες*. Στην ουσία πρόκειται για *κανονικές άλγεβρες* (*canonical algebras*).

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι η σχέση της *αποδεικτικής ισοδυναμίας* (*provable equivalence*) είναι μια *congruence* στην *άλγεβρα τύπων*. Μια *congruence* σε μια *άλγεβρα* είναι ουσιαστικά μια *σχέση ισοδυναμίας* στην *άλγεβρα*, η οποία σέβεται τις *λειτουργίες*. Η *αποδεικτική ισοδυναμία* είναι μια τέτοια σχέση.

Πρόταση 2.1.11. ***Αποδεικτική ισοδυναμία.*** *Η σχέση* $\equiv_C$ *είναι μια congruence στην άλγεβρα προτασιακών τύπων.*

Απόδειξη. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η $\equiv_C$ είναι *σχέση ισοδυναμίας* που ικανοποιεί το εξής:

$$\varphi \equiv_C \psi \text{ μόνο αν } \neg\varphi \equiv_C \neg\psi \qquad (2.1.11.\alpha),$$

και

$$\varphi_0 \equiv_C \psi_0 \text{ και } \varphi_1 \equiv_C \psi_1 \text{ μόνο αν } (\varphi_0 \vee \varphi_1) \equiv_C (\psi_0 \vee \psi_1). \qquad (2.1.11.\beta)$$

Για να αποδείξουμε ότι η $\equiv_C$ είναι *ανακλαστική*, πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε τύπο φ, ο τύπος $\varphi \leftrightarrow \varphi$ είναι *θεώρημα* του *εκάστοτε αποδεικτικού συστήματος* του *προτασιακού λογισμού*. Όμοια και οι *ιδιότητες* της *συμμετρικότητας* και *μεταβατικότητας*.

Για το (2.1.11.α) υποθέτουμε ότι $\varphi \equiv_C \psi$, δηλαδή ότι $\vdash_C \varphi \leftrightarrow \psi$. Εφόσον όμως εργαζόμαστε σε ένα *έγκυρο* και *πλήρες αποδεικτικό σύστημα* του *προτασιακού λογισμού*, μπορούμε να συνάγουμε με *αντιθετοαναστροφή* ότι $\vdash_C \neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$, και άρα ισχύει το (2.1.11.α).

Για το (2.1.11.β), πάλι εξαιτίας της *εγκυρότητας* και της *πληρότητας* του αποδεικτικού μας συστήματος μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ισχύει. ▫

Οι *κλάσεις ισοδυναμίας* που *επάγει* η σχέση *αποδεικτικής ισοδυναμίας*, είναι τα βασικά εργαλεία για την συνέχεια. Αφού κάθε τέτοια *κλάση ισοδυναμίας* που *επάγει* η σχέση $\equiv_C$ είναι ένα *μεγιστικό σύνολο ισοδύναμων τύπων*, μπορούμε να κοιτάμε αυτές τις *κλάσεις* ως *προτάσεις*. Επειδή μάλιστα η $\equiv_C$ είναι μια *congruence*, μπορούμε να ορίσουμε μια *αλγεβρική δομή* σε αυτές τις *προτάσεις*. Με αυτό το τρόπο θα ορίσουμε τις *άλγεβρες* Lindenbaum-Tarski.

Ορισμός 2.1.12. ***Άλγεβρες* Lindenbaum–Tarski.** Έστω Φ σύνολο *προτασιακών μεταβλητών*. Έστω *Τύπος*(Φ)/ $\equiv_C$ το σύνολο των *κλάσεων ισοδυναμίας* που επάγει η $\equiv_C$ στο σύνολο των *τύπων*, και για κάθε *τύπο* φ, έστω $[\varphi]$ η *κλάση ισοδυναμίας* που περιέχει τον φ. Θα λέμε ότι η *άλγεβρα* Lindenbaum – Tarski για αυτή τη *γλώσσα* είναι η *δομή*

$$\mathcal{L}_C(\Phi) := (\,\textit{Τύπος}(\Phi)/\equiv_C,\ +, -, 0),$$

όπου τα +, – και 0 ορίζονται ως εξής: $[\varphi] + [\psi] := [\varphi \vee \psi]$, $-[\varphi] := [\neg\varphi]$ και $0 := [\bot]$. Θα έπρεπε να γράφουμε $[\varphi]_\Phi$ αντί για $[\varphi]$, αφού η *κλάση congruence* εξαρτάται από το σύνολο Φ των *προτασιακών μεταβλητών*, αλλά κάτι τέτοιο συνήθως παραλείπεται. ▫

Είναι εμφανές ότι η *δομή* μιας *άλγεβρας* Lindenbaum-Tarski εξαρτάται μόνο από την *πληθικό-τητα* του συνόλου Φ των *προτασιακών μεταβλητών*. Τώρα πρέπει να δείξουμε ότι πράγματι αυτές οι *άλγεβρες* είναι ένα *κανονικό αλγεβρικό μοντέλο*, δηλαδή μας δίνουν *αντιπαράδειγμα* για κάθε πρόταση που δεν είναι *θεώρημα* της *προτασιακής λογικής*. Στην συνέχεια πρέπει να δείξουμε ότι είναι *αντιπαραδείγματα* του σωστού είδους, δηλαδή πρέπει να δείξουμε ότι κάθε *άλγεβρα* Lindenbaum-Tarski είναι και *άλγεβρα Boole*.

Πρόταση 2.1.13. *Άλγεβρες* Lindenbaum–Tarski και *διαψευσιμότητα*. *Έστω φ προτασιακός τύπος, και Φ σύνολο προτασιακών μεταβλητών μεγέθους όχι μικρότερου του αριθμού των προτασιακών μεταβλητών που εμφανίζονται στον φ. Τότε*

$$\vdash_C \varphi \quad ανν \quad \mathcal{L}_C(\Phi) \vDash \varphi \approx \top. \qquad (2.1.13.α)$$

Απόδειξη. Αρχικά θα υποθέσουμε ότι το Φ περιέχει όλες τις *μεταβλητές* που εμφανίζονται στον φ.

($\Leftarrow$) Έστω ότι ο φ δεν είναι *θεώρημα της κλασικής προτασιακής λογικής*. Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι τύποι φ και $\top$, δεν μπορούν να αποδειχτούν *ισοδύναμοι*, άρα $[\varphi] \neq [\top]$. Πρέπει να βρούμε μια *ανάθεση* στην $\mathcal{L}_C(\Phi)$ που να δημιουργεί ένα *αντιπαράδειγμα* στην *εγκυρότητα* του φ. Υπάρχει ένας προφανής υποψήφιος, η *ανάθεση* ι που ορίζεται από τον τύπο $\iota(p) = [p]$. Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε με *επαγωγή στην πολυπλοκότητα του τύπου* ότι $\widetilde{\iota}(\psi) = [\psi]$, για όλους τους *τύπους* ψ που χρησιμοποιούν *μεταβλητές* από το σύνολο Φ. Από την υπόθεσή μας όμως έχουμε:

$$\widetilde{\iota}(\varphi) = [\varphi] \neq [\top] = 1 \quad (2.1.13.β)$$

που είναι ακριβώς αυτό που χρειαζόμαστε.

($\Rightarrow$) Άν $\vdash_C \varphi$, τότε ισχύει $\widetilde{\iota}(\varphi) = [\varphi] = [\top] = 1$. Τώρα όμως δεν μας αρκεί μόνο η *ανάθεση* ι. Πρέπει να δείξουμε ότι για τυχούσα *ανάθεση* θ, $\widetilde{\theta}(\varphi) = [\top]$.

Έστω επομένως θ τυχούσα ανάθεση, η οποία αναθέτει μια *κλάση ισοδυναμίας* (που επάγει η σχέση $\equiv_C$) σε κάθε *προτασιακή μεταβλητή*. Για κάθε *μεταβλητή* p, παίρνουμε έναν αντιπροσωπευτικό *τύπο* $\rho(p)$ στην *κλάση ισοδυναμίας* $\theta(p)$, δηλαδή έχουμε $\theta(p) = [\rho(p)]$. Μπορούμε να δούμε την ρ, ως μια συνάρτηση που *αναθέτει τύπους* σε *προτασιακές μεταβλητές*. Με άλλα λόγια η ρ είναι μια *αντικατάσταση*. Έστω ότι με $\rho(\psi)$ συμβολίζουμε αυτήν την *αντικατάσταση* πάνω στον *τύπο* ψ. Μπορούμε εύκολα, με μια *επαγωγή στην πολυπλοκότητα του τύπου*, να δείξουμε ότι για κάθε τύπο ψ:

$$\widetilde{\theta}(\varphi) = [\rho(\psi)]. \qquad (2.1.13.γ)$$

Η *συλλογή* όμως των *προτασιακών θεωρημάτων* είναι κλειστή για *ομοιόμορφες αντικαταστάσεις*, σε οποιοδήποτε *έγκυρο και πλήρες αποδεικτικό σύστημα*. Αυτή η ιδιότητα *κλειστότητας* μας εξασφαλίζει ότι ο τύπος $\rho(\varphi)$ είναι *θεώρημα*, και άρα $\rho(\varphi) \equiv_C \top$ ή ισοδύναμα $[\rho(\varphi)] = [\top]$. Αλλά τότε από την (2.1.13.γ) έχουμε

$$\widetilde{\theta}(\varphi) = [\top], \qquad (2.1.13.δ)$$

το οποίο είναι ακριβώς ό,τι χρειαζόμασταν για να δείξουμε ότι $\mathcal{L}_C(\Phi) \vDash \varphi$. ▫

Τώρα πρέπει να δείξουμε ότι η $\mathcal{L}_C(\Phi)$ είναι *άλγεβρα Boole*.

Πρόταση 2.1.14. *Άλγεβρες* Lindenbaum–Tarski και *Άλγεβρες Boole.* *Για κάθε σύνολο προτασιακών μεταβλητών Φ, η $\mathcal{L}_C(\Phi)$ είναι άλγεβρα Boole.*

Απόδειξη. Αυτό που θα κάνουμε είναι για ένα *τυχαίο σύνολο προτασιακών μεταβλητών* θα δείξουμε ότι όλες οι *ταυτότητες* ($B0$)-($B4$) ισχύουν στην $\mathcal{L}_C(\Phi)$. ▫

Ως τώρα είδαμε ότι τα *αξιώματα* τις *προτασιακής λογικής* μπορούμε να τα «αλγεβροποιήσουμε» σε μια *κλάση αλγεβρών*, που δεν είναι άλλη από την *ποικιλία των αλγεβρών Boole*. Είδαμε επίσης ότι οι *άλγεβρες* Lindenbaum-Tarski, ενεργούν ως *κανονικοί αντιπρόσωποι* της κλάσης των *αλγεβρών Boole*.

Το θεώρημα 2.1.8 μας λέει ότι οι *ταυτολογίες* μπορούν να ιδωθούν ως *έγκυρες ισότητες* μιας *άλγεβρας συνόλων*:

$$\vDash_C \varphi \quad \textit{ανν} \quad \textbf{Σύνολο} \vDash \varphi \approx \top .$$

Από την άλλη στο θεώρημα 2.1.10 βρήκαμε την *αλγεβρική σημασιολογία* της *κλασικής προτασιακής απόδειξης*:

$$\vdash_C \varphi \quad \textit{ανν} \quad \textbf{BA} \vDash \varphi \approx \top .$$

Αλλά το *θεώρημα εγκυρότητας και πληρότητας της προτασιακής λογικής* μας λέει ότι τα $\vDash_C$ και $\vdash_C$ είναι *ισοδύναμα*. Η ερώτηση επομένως που άμεσα προκύπτει είναι αν υπάρχει κάποιο ανάλογο *αλγεβρικό* θεώρημα του *θεωρήματος εγκυρότητας και πληρότητας της προτασιακής λογικής*. Η απάντηση είναι ότι υπάρχει, και το όνομα του είναι το *Θεώρημα αναπαράστασης του Stone*.

Θεώρημα 2.1.15 *Θεώρημα* Stone *αναπαράστασης.* *Κάθε άλγεβρα Boole είναι ισομορφική με μια άλγεβρα συνόλων.*

Απόδειξη. Μια πιο λεπτομερής διατύπωση καθώς και η απόδειξη του θεωρήματος θα γίνουν σε επόμενες σελίδες της εργασίας σαν Θεώρημα 2.3.4. ▫

Αυτό που ουσιαστικά μας ενδιαφέρει εδώ είναι οι *λογικές* προεκτάσεις του θεωρήματος. Ουσιαστικά πρόκειται για το κλειδί της *ασθενούς πληρότητας της κλασικής προτασιακής λογικής*.

Θεώρημα 2.1.16 *Εγκυρότητα* και *ασθενής Πληρότητα.* *Για κάθε τύπο φ, ο φ είναι έγκυρος ανν ο φ είναι θεώρημα.*

Απόδειξη. Το πόρισμα έπεται άμεσα από τα παραπάνω, αφού από το θεώρημα της Stone *αναπαράστασης*, οι *ισότητες* που είναι *έγκυρες* στο **Σύνολο** πρέπει να συμπίπτουν με εκείνες που είναι *έγκυρες* στη **BA**. ▫

2.2. Άλγεβρα και τροπική λογική.

Όπως είδαμε στα προηγούμενα, η βασική αρχή της *αλγεβρικής λογικής* είναι οτι μπορούμε να επεξεργαζόμαστε τους *τύπους* μιας *λογικής γλώσσας* ως *όρους* μιας *αλγεβρικής γλώσσας*. Ας ορίσουμε εδώ τις *αλγεβρικές γλώσσες* που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

Ορισμός 2.2.1. ***Αλγεβρικός τύπος ομοιότητας.*** Έστω *τ τροπικός τύπος ομοιότητας*. Ο *αντίστοιχος αλγεβρικός τύπος ομοιότητας* F_τ, περιέχει ως *συναρτησιακά σύμβολα* όλους τους *τροπικούς τελεστές*, μαζί με τα σύμβολα Boole $\vee$ (διμελές), $\neg$ (μονομελές) και $\perp$ (σταθερά). Έστω ένα *σύνολο μεταβλητών* Φ, το $Οροι_\tau(\Phi)$ θα συμβολίζει τη συλλογή των F_τ-*όρων* πάνω στο Φ. ▫

Αντί για *άλγεβρες Boole* που χρησιμοποιήσαμε για να «αλγεβροποιήσουμε» την *κλασική προτασιακή λογική*, για την *τροπική λογική* θα χρησιμοποιήσουμε *άλγεβρες Boole με τελεστές* ή BAT. Ας δώσουμε το γενικό ορισμό μιας τυχούσας BAT:

Ορισμός 2.2.2. ***Άλγεβρες Boole* με *Τελεστές* ή BAT.** Έστω $\tau = (O, \rho)$ ένας *τροπικός τύπος ομοιότητας*. Μια *άλγεβρα boole με τ-τελεστές* είναι μια *άλγεβρα*

$$\mathcal{B} = (B, +, -, 0, f_\triangle)_{\triangle \in \tau}$$

τέτοια που η $(B, +, -, 0)$ είναι *άλγεβρα Boole* και κάθε $f_\triangle$ είναι *τελεστής* με *πλήθος ορισμάτων* $\rho(\triangle)$. Δηλαδή, το $f_\triangle$ είναι μια *λειτουργία* που ικανοποιεί τα εξής:

(*κανονικότητα*, *normality*) $f_\triangle(b_1, \ldots, b_{\rho(\triangle)}) = 0$, όποτε $b_i = 0$ για κάποιο i όπου : $0 < i \leq \rho(\triangle)$, και

(*προσθετικότητα*, *additivity*) για κάθε $0 < i \leq \rho(\triangle)$,
$f_\triangle(b_1, \ldots, b_i + b'_i, \ldots, b_{\rho(\triangle)}) = f_\triangle(b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_{\rho(\triangle)}) + f_\triangle(b_1, \ldots, b'_i, \ldots, b_{\rho(\triangle)})$.

Όταν ο *τροπικός τύπος ομοιότητας* ειναι δεδομένος ή προκύπτει άμεσα απο τα προηγούμενα , απλά θα αναφερόμαστε σε *άλγεβρες Boole με τελεστές*, ή BAT. ▫

Προφανώς, το κομμάτι της *άλγεβρας Boole* που έχουμε στον ορισμό, το χρειαζόμαστε για να τακτοποιήσουμε τους *προτασιακούς συνδέσμους*. Ποιός είναι όμως ο ρόλος που παίζουν οι *συνθήκες κανονικότητας* και *προσθετικότητας*. Ας πάρουμε ένα *μονομελή τελεστή f*. Οι δύο *συνθήκες* γράφονται τώρα ως εξής:

$$f(0) = 0,$$
$$f(x + y) = fx + fy.$$

Οι *ισότητες* αυτές αντιστοιχούν στους παρακάτω *τροπικούς τύπους*:

$$\diamond\perp \leftrightarrow \perp,$$
$$\diamond(p \vee q) \leftrightarrow \diamond p \vee \diamond q,$$

οι οποίοι είναι και οι δύο *τροπικές ταυτολογίες*. Μπορούν μάλιστα να χρησιμοποιηθούν για να *αξιωματικοποιήσουν* την *ελαχιστική κανονική λογική* **K**. Παρατηρούμε επομένως ότι και σε αυτό το σημείο, οι *αλγεβρικοί τελεστές* μας είναι *καλά ορισμένοι*, αφού οι *ιδιότητες* που τους ορίζουν είναι θεμελιώδεις για την *τροπική λογική*.

Ο επόμενος τύπος BAT θα παίξει κεντρικό ρόλο στην εργασία μας, και αυτός δεν είναι άλλος από τις *πολύπλοκες άλγεβρες* (*complex algebras*). Οι *δομές* αυτές κάνουν χρήση της *λειτουργίας* που επιτελεί ο n-μελής *τελεστής* m_R, ο οποίος σε δοσμένη (n+1)-μελή σχέση R στο σύνολο W ορίζεται ως εξής στο *δυναμοσύνολο* $P(W)$ του W:

$$M_R(X_1,\ldots,X_n) := \{ w \in W \mid \text{υπάρχει } w_1, \ldots, w_n \text{ τέτοιο που } Rww_1\ldots w_n \text{ και } w_i \in X_i \text{ για κάθε } i \}.$$

Ο ορισμός για τις *πολύπλοκες άλγεβρες* έχει ως εξής:

Ορισμός 2.2.3. ***Πολύπλοκες Άλγεβρες.*** Έστω τ ένας *τροπικός τύπος ομοιότητας*, και $\mathcal{F}=(W,R_\triangle)_{\triangle\in\tau}$ ένα *τ-πλαίσιο*. Η *πλήρως πολύπλοκη άλγεβρα* (*full complex algebra*) *του* $\mathcal{F}$ (συμβολικά $\mathcal{F}^+$), είναι η επέκταση της *άλγεβρας δυναμοσυνόλων* $\wp(W)$ με τις *λειτουργίες* $m_{R\triangle}$ για κάθε *τελεστή* $\triangle$ στον τ. Μια *πολύπλοκη άλγεβρα* είναι μια *υποάλγεβρα* μιας *πλήρους πολύπλοκης άλγεβρας*. Αν **K** είναι μια *κλάση πλαισίων*, τότε συμβολίζουμε την *κλάση των πλήρως πολύπλοκων αλγεβρών πλαισίων* στην **K,** με **CmK**. ▫

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι *πολύπλοκες άλγεβρες* είναι ουσιαστικά *άλγεβρες συνόλων*, στις οποίες έχουμε προσθέσει τις *λειτουργίες* m_R. Για μια διμελή σχέση R, η μονομελής *λειτουργία* m_R, μας δίνει το σύνολο όλων των καταστάσεων που «βλέπουν» μια κατάσταση σε ένα δοσμένο υποσύνολο X του *σύμπαντος*:

$$m_R(X) = \{y \in W \mid \text{υπάρχει ένα } x \in X \text{ τέτοιο που } Ryx\}.$$

Για μια σχέση με *πλήθος ορισμάτων* $n+1$, η n-μελής *λειτουργία* m_R αναθέτει μια n-άδα από υποσύνολα του *σύμπαντος*, στο σύνολο όλων των *καταστάσεων* που «βλέπουν» μια n-άδα από *καταστάσεις*, καθεμιά από τις οποίες ανήκει στο αντίστοιχο υποσύνολο. Έπεται ότι όταν έχουμε ένα *μοντέλο* και με $\widetilde{V}(\varphi)$ δηλώσουμε το σύνολο των *καταστάσεων* όπου ο φ γίνεται *αληθής*, τότε

$$\widetilde{V}(\triangle(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = m_{R\triangle}(\widetilde{V}(\varphi_1), \ldots, \widetilde{V}(\varphi_n)).$$

Αν θεωρήσουμε ότι οι *άλγεβρες συνόλων* «μοντελοποιούν» τις *προτάσεις*, ως σύνολα κάποιων *πιθανών κόσμων*, τότε προσθέτοντας τις m_R *λειτουργίες*, έχουμε «μοντελοποιήσει» την ιδέα ότι ένας *κόσμος* μπορεί να έχει πρόσβαση στις πληροφορίες ενός άλλου *κόσμου*. Με άλλα λόγια έχουμε ορίσει μια *κλάση αλγεβρών* η οποία παρουσιάζει με ένα φυσικό τρόπο την *τροπική έννοια* της *προσβασιμότητας* μεταξύ των *καταστάσεων* του *σύμπαντος*.

Ένα τρόπο για το πώς συνδέονται οι *πολύπλοκες άλγεβρες* με τις τυχούσες BAT, μας δίνει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.2.4. ***Πολύπλοκες άλγεβρες*** **και BAT.** *Έστω* τ *τροπικός τύπος ομοιότητας, και* $\mathcal{F} = (W, R_\triangle)_{\triangle\in\tau}$ *ένα τ-πλαίσιο. Τότε* $\mathcal{F}^+$ *είναι άλγεβρα Boole με τ-τελεστές.* ▫

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι οι λειτουργίες m_R είναι *κανονικές* και *προσθετικές*.▫

Υπάρχει και ένας άλλος σύνδεσμος μεταξύ των *πολύπλοκων αλγεβρών* και των BAT. Όπως θα δούμε παρακάτω, οι *πολύπλοκες άλγεβρες* είναι για τις BAT, ότι είναι οι *άλγεβρες συνόλων* για τις *άλγεβρες Boole*: κάθε τυχούσα *άλγεβρα Boole με τελεστές* έχει μια *συνολοθεωρητική* *αναπαράσταση*, γιατί κάθε *άλγεβρα Boole με τελεστές* είναι *ισομορφική* με μια *πολύπλοκη άλγεβρα*. Χρειάζεται όμως πολλή δουλειά για να φτάσουμε ως εκεί.

Στην συνέχεια θα ορίσουμε την *ερμηνεία* των τ-όρων και της *ισότητας*, στις *τυχαίες άλγεβρες Boole με τ-τελεστές*. Όπως και στην *προτασιακή λογική*, τα πράγματα και εδώ είναι απλά. Μια *ανάθεση* μας λέει τι γίνεται με τις *αληθοτιμές* των μεταβλητών, και μετά *αναδρομικά* ορίζουμε τη *σημασία* του κάθε όρου.

Ορισμός 2.2.5. ***Ερμηνεία τ-όρων.*** Έστω τ *τροπικός τύπος ομοιότητας* και Φ σύνολο *μεταβλητών*. Ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{B}=(B, +, -, 0, f_{\triangle})_{\triangle\in\tau}$, είναι *άλγεβρα Boole με τ-τελεστές*. Μια *ανάθεση* για το Φ είναι μια συνάρτηση θ: $\Phi \to A$. Μπορούμε να επεκτείνουμε την θ, με ένα μοναδικό τρόπο σε μια *συνάρτηση σημασίας*, $\widetilde{\theta}$: $Οροι_\tau(\Phi) \to A$, που ικανοποιεί τα εξής:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\theta}(p) &= \theta(p), \text{ για κάθε } p \in \Phi,\\
\widetilde{\theta}(\bot) &= 0,\\
\widetilde{\theta}(\neg s) &= -\widetilde{\theta}(s),\\
\widetilde{\theta}(s \vee t) &= \widetilde{\theta}(s) + \widetilde{\theta}(t),\\
\widetilde{\theta}(\triangle(s_1, \ldots, s_n)) &= f_{\triangle}(\widetilde{\theta}(s_1), \ldots, \widetilde{\theta}(s_n)).
\end{aligned}$$

Έστω $s \approx t$ μια τ-ισότητα. Θα λέμε ότι η $s \approx t$ είναι αληθής στην $\mathcal{B}$ (συμβολικά $\mathcal{B} \models s \approx t$), αν για κάθε ανάθεση θ: $\widetilde{\theta}(s) = \widetilde{\theta}(t)$. ▫

Τί γίνεται όμως όταν $\mathcal{B}$ είναι μια *πολύπλοκη άλγεβρα* $\mathcal{F}^+$. Αφού τα στοιχεία της $\mathcal{F}^+$ είναι *υποσύνολα* του *δυναμοσυνόλου* $P(W)$ του *σύμπαντος* W του $\mathcal{F}$, οι *αναθέσεις* θ είναι *απλές συνηθισμένες τροπικές αποτιμήσεις*. Τα συμπεράσματα αυτής της παρατήρησης παρουσιάζονται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.2.6. ***Ερμηνεία πολύπλοκων αλγεβρών.*** *Έστω τ τροπικός τύπος ομοιότητας, φ τ-τύπος, $\mathcal{F}$ τ-πλαίσιο, θ μια ανάθεση (ή αποτίμηση) και w ένα σημείο στο $\mathcal{F}$. Τότε*

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}, \theta), w \Vdash \varphi \quad &\textit{ανν} \quad w \in \widetilde{\theta}(\varphi), && (2.2.6.α)\\
\mathcal{F} \Vdash \varphi \quad &\textit{ανν} \quad \mathcal{F}^+ \Vdash \varphi \approx \top, && (2.2.6.β)\\
\mathcal{F}^+ \Vdash \varphi \approx \psi \quad &\textit{ανν} \quad \mathcal{F}^+ \Vdash \varphi \leftrightarrow \psi. && (2.2.6.γ)
\end{aligned}$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την πρώτη συνθήκη για τον βασικό τροπικό τύπο ομοιότητας. Οι δύο επόμενες είναι άμεσα συμπεράσματα της πρώτης συνθήκης και των ορισμών.

Έστω φ, $\mathcal{F}$ και θ όπως στην πρόταση. Θα αποδείξουμε την (2.2.6.α), για όλα τα w, με *επαγωγή* στην *πολυπλοκότητα* του φ. Το μόνο ενδιαφέρον σημείο είναι η περίπτωση του *τροπικού τελεστή* στο *επαγωγικό βήμα*. Υποθέτουμε ότι ο φ είναι της μορφής $\Diamond\psi$. Η βασική παρατήρηση είναι ότι:

$$\widetilde{\theta}(\Diamond\psi) = m_{R\Diamond}(\widetilde{\theta}(\psi)). \quad (2.2.6.δ)$$

Άρα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{F}, \theta), w \Vdash \varphi \quad & \textit{ανν} \quad \exists v \text{ τ.π } R_\diamond wv \text{ και } (\mathcal{F}, \theta), v \Vdash \varphi \\
& \textit{ανν} \quad \exists v \text{ τ.π } R_\diamond wv \text{ και } v \in \widetilde{\theta}(\psi) \quad [\text{Ε.Υ}] \\
& \textit{ανν} \quad w \in m_{R\diamond}(\widetilde{\theta}(\psi)) \\
& \textit{ανν} \quad w \in \widetilde{\theta}(\diamond\psi). \quad [(2.2.6.\delta)] \ ▫
\end{aligned}
$$

Την προηγούμενη πρόταση μπορούμε εύκολα να τη δούμε και στο επίπεδο των *κλάσεων πλαισίων και πολύπλοκων αλγεβρών*. Το ακόλουθο θεώρημα είναι το *τροπικό* ανάλογο του *θεωρήματος* 2.1.8 και μας λέει ότι *κλάσεις πολύπλοκων αλγεβρών* «αλγεβροποιούν» *την τροπική σημασιολογία*.

Θεώρημα 2.2.7. ***Κλάσεις πολύπλοκων αλγεβρών* και *εγκυρότητα της προτασιακής λογικής*.** *Έστω τ τροπικός τύπος ομοιότητας, φ και ψ τ-τύποι, και* Κ *κλάση τ-πλαισίων*. Τότε

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K} \Vdash \varphi \quad & \textit{ανν} \quad \mathbf{CmK} \Vdash \varphi \approx \top, \quad (2.2.7.\alpha) \\
\mathbf{CmK} \Vdash \varphi \approx \psi \quad & \textit{ανν} \quad \mathbf{K} \Vdash \varphi \leftrightarrow \psi. \quad (2.2.7.\beta)
\end{aligned}
$$

Απόδειξη. Άμεση από την προηγούμενη πρόταση. ▫

Το παραπάνω θεώρημα μας επιτρέπει να δούμε την ισοδυναμία που υπάρχει μεταξύ της *τροπικής λογικής* $\Lambda_{\mathbf{K}}$ μιας *κλάσης πλαισίων* **K** (δηλαδή του συνόλου των *τύπων* που είναι *έγκυροι* σε κάθε πλαίσιο $\mathcal{F} \in$ K) και της *θεωρίας ισοτήτων* (*equational theory*) της *κλάσης* **CmK** των *πολύπλοκων αλγεβρών* από *πλαίσια* στην **K** (δηλαδή το σύνολο των *ισοτήτων* $\{s \approx t \mid \mathcal{F}^+ \vDash s \approx t$, για κάθε $\mathcal{F} \in \mathbf{K}\}$).

Ως τώρα κατασκευάσαμε μια *αλγεβρική προσέγγιση της σημασιολογίας της τροπικής λογικής*, με όρους *πολύπλοκων αλγεβρών*. Αυτές οι *πολύπλοκες άλγεβρες*, που ουσιαστικά είναι *συμπαγείς άλγεβρες Boole με τελεστές*, γενικεύουν στις *τροπικές γλώσσες* την ιδέα των *προτασιακών αλγεβρών* που δίνουν οι *άλγεβρες συνόλων*. Μάλιστα, οι *πολύπλοκες άλγεβρες* περιέχουν όλες τις πληροφορίες για τις *κανονικές τροπικές λογικές* που περιέχουν και τα *πλαίσια*. Οπότε αντί για *πλαίσια* μπορούμε να χρησιμοποιούμε *πολύπλοκες άλγεβρες*.

Για την «αλγεβροποίηση» των *τροπικών αξιωμάτων*, θα δουλέψουμε όπως και πριν. Θα δούμε ουσιαστικά ότι το *αλγεβρικό ισοδύναμο* μιας *λογικής*, είναι μια *κλάση αλγεβρών* με ισότητες (*equational class of algebras*). Θα χρειαστούμε τον επόμενο ορισμό:

Ορισμός 2.2.8. ***Κλάση*** $\mathbf{V}_\Sigma$**.** Δοθέντος *τύπου φ*, έστω $\varphi^\approx$ η *ισότητα* $\varphi \approx \top$, και *τ* ένας *τροπικός τύπος ομοιότητας*. Για ένα σύνολο *τ-τύπων Σ*, ορίζουμε την $\mathbf{V}_\Sigma$ να είναι η *κλάση* των *αλγεβρών Boole*, με *τ*-τελεστές, στην οποία το σύνολο $\Sigma^\approx = \{\sigma^\approx \mid \sigma \in \Sigma\}$, είναι έγκυρο. ▫

Το *αλγεβρικό θεώρημα πληρότητας* της *τροπικής λογικής* είναι το ανάλογο του θεωρήματος 2.1.10. Έχουμε:

Θεώρημα 2.2.9. ***Κλάση*** $\mathbf{V}_\Sigma$ **και *πληρότητα της προτασιακής λογικής*.** *Έστω τ τροπικός τύπος ομοιότητας, και Σ σύνολο τ-τύπων. Τότε η* $\mathbf{K}_\tau\mathbf{\Sigma}$ (*η κανονική τροπική τ-λογική που αξιωματικοποιείται απο το Σ*), *είναι έγκυρη και πλήρης ως προς την* $\mathbf{V}_\Sigma$. Δηλαδή, για κάθε τύπο *φ* έχουμε

$$\vdash_{\mathbf{K}\tau\mathbf{\Sigma}} \varphi \quad \textit{ανν} \quad \mathbf{V}_\Sigma \vDash \varphi^\approx.$$

Απόδειξη. Η εγκυρότητα προκύπτει όπως και στο θεώρημα 2.1.10. Η πληρότητα θα προκύψει από τα παρακάτω Θεωρήματα 2.2.14 και 2.2.15 ▫

Σαν ένα πόρισμα της *εγκυρότητας* του παραπάνω θεωρήματος, έχουμε ότι $\mathbf{V}_{\mathbf{K}\tau\Sigma} = \mathbf{V}_{\Sigma}$, για κάθε *σύνολο τύπων Σ*. Στην συνέχεια θα μπορούμε αντί για *σύνολα αξιωμάτων* να δουλεύουμε με *λογικές* στην θέση τους.

Για να αποδείξουμε την *πληρότητα* του θεωρήματος 2.2.9 χρειαζόμαστε την αντίστοιχη τροπική εκδοχή των *αλγεβρών* Lindenbaum-Tarski. Όπως και στις *προτασιακές γλώσσες*, θα κατασκευάσουμε μια *άλγεβρα* πάνω από το *σύνολο των τύπων* έτσι που η σχέση της *αποδεικτικής ισοδυναμίας* μεταξύ δύο τύπων να είναι σχέση *congruence*. Η διαφορά είναι ότι δεν έχουμε μία μόνο σχέση *αποδεικτικής ισοδυναμίας* αλλά πολλές, αφού θέλουμε να ορίσουμε την έννοια της Lindenbaum-Tarski *άλγεβρας* για *τυχούσες κανονικές τροπικές λογικές*. Χρειαζόμαστε δύο ορισμούς και μια πρόταση πριν ορίσουμε τις άλγεβρές μας. Έχουμε:

Ορισμός 2.2.10. ***Άλγεβρες τύπων τροπικής λογικής.*** Έστω *τ αλγεβρικός τύπος ομοιότητας*, και *Φ* σύνολο *προτασιακών μεταβλητών*. Η *άλγεβρα τύπων του τ πάνω στο Φ* είναι η *άλγεβρα* $\mathfrak{Tupos}(\tau, \Phi) = (\textit{Τύπος}\ (\tau, \Phi), +, -, \bot, f_{\triangle})_{\triangle\in\tau}$, όπου τα $+, -$ και $\bot$ έχουν οριστεί στον Ορισμό 2.1.3, ενώ για κάθε *τροπικό τελεστή* $\triangle$, η *λειτουργία* $f_{\triangle}$ ορίζεται ως

$$f_{\triangle}(t_1, \ldots, t_n) = \triangle(t_1, \ldots, t_n). \ ▫$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε τον διπλό ρόλο του συμβόλου $\triangle$ στον ορισμό. Στο δεξιό μέρος της *ισότητας*, το $\triangle$ είναι το σταθερό κομμάτι του *όρου* $\triangle(t_1, \ldots, t_n)$, ενώ στο αριστερό μέρος έχει έναν πιο δυναμικό ρόλο στην *ερμηνεία* $f_{\triangle}$ του συμβόλου της *λειτουργίας* $\triangle$.

Θα χρειαστούμε και έναν ορισμό για την *ισοδυναμία modulo Λ*:

Ορισμός 2.2.11. ***Ισοδυναμία modulo Λ.*** Έστω *τ ένας τροπικός τύπος ομοιότητας*, *Φ* ένα *σύνολο προτασιακών μεταβλητών* και *Λ* μια *κανονική τροπική τ-λογική*. Ορίζουμε το $\equiv_{\Lambda}$ ως τη *διμελή σχέση* μεταξύ *τ-τύπων* (στο *Φ*) ως εξής:

$$\varphi \equiv_{\Lambda} \psi \quad \textit{ανν} \quad \vdash_{\Lambda} \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Αν $\varphi \equiv_{\Lambda} \psi$, λέμε ότι τα φ και ψ είναι ισοδύναμα *modulo Λ*. ▫

Η επόμενη πρόταση μας δείχνει μια κεντρική *ιδιότητα* της *ισοδυναμίας modulo Λ* την οποία θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω.

Πρόταση 2.2.12. ***Ισοδυναμία modulo Λ* και *congruence σχέσεις.*** *Έστω τ τροπικός τύπος ομοιότητας, Φ ένα σύνολο προτασιακών μεταβλητών και Λ μια κανονική τροπική τ-λογική. Τότε η* $\equiv_{\Lambda}$ *είναι μια congruence σχέση στο* $\mathfrak{Tupos}(\tau, \Phi)$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την πρόταση για τον βασικό τροπικό τύπο ομοιότητας. Πρώτα πρέπει να αποδείξουμε ότι η $\equiv_{\Lambda}$ είναι σχέση ισοδυναμίας, το οποίο είναι σχεδόν προφανές. Στην συνέχεια πρέπει να δείξουμε ότι η $\equiv_{\Lambda}$ είναι μια congruence σχέση στην άλγεβρα τύπων, δηλαδή πρέπει να δείξουμε ότι η $\equiv_{\Lambda}$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\varphi_0 \equiv_{\Lambda} \psi_0 \ \wedge \ \varphi_1 \equiv_{\Lambda} \psi_1 \ \Rightarrow \ \varphi_0 \vee \varphi_1 \equiv_{\Lambda} \varphi_0 \vee \psi_1,$$
$$\varphi \equiv_{\Lambda} \psi \Rightarrow \neg\varphi \equiv_{\Lambda} \neg\psi, \qquad (2.2.12)$$

$$\varphi \equiv_\Lambda \psi \Rightarrow \Diamond\varphi \equiv_\Lambda \Diamond\psi.$$

Οι δύο πρώτες ιδιότητες έπονται εύκολα από την *προτασιακή λογική*, ενώ η τρίτη είναι άμεσο πόρισμα του εξής απλού Λήμματος: *Για κάθε κανονική λογική Λ, αν* $\vdash_\Lambda \varphi\leftrightarrow\varphi$ *τότε* $\vdash_\Lambda \Diamond\varphi\leftrightarrow\Diamond\varphi$ ▫

Με τη βοήθεια της παραπάνω πρότασης, μπορούμε να ορίσουμε την Lindenbaum-Tarski *άλγεβρα* οποιασδήποτε *κανονικής τροπικής λογική*. Απλά την ορίζουμε να είναι η *άλγεβρα πηλίκου* της *άλγεβρας τύπων* πάνω στην σχέση *congruence* $\equiv_\Lambda$.

Ορισμός 2.2.13. ***Τροπικές Άλγεβρες* Lindenbaum–Tarski.** Έστω *τ τροπικός τύπος ομοιότητας*, *Φ* σύνολο *προτασιακών μεταβλητών*, και *Λ* μια *κανονική τροπική τ-λογική* σε αυτήν την γλώσσα. Η *Lindenbaum – Tarski άλγεβρα της Λ πάνω στο σύνολο των γεννητόρων Φ*, είναι η δομή

$$\mathcal{L}_\Lambda(\Phi) := (\ Τύπος(\tau,\Phi)/\equiv_\Lambda, +, -, f_\triangle),$$

όπου οι *λειτουργίες* $+, -$ και $f_\triangle$ ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} [\varphi]+[\psi] &:= [\varphi \vee \psi], \\ -[\varphi] &:= [\neg\varphi], \\ f_\triangle([\varphi_1], ..., [\varphi_n]) &:= [\triangle(\varphi_1, ..., \varphi_n)], \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

όπου για μονομελή διαμάντια η τελευταία πρόταση γράφεται: $f_\Diamond[\varphi] := [\Diamond\varphi]$. ▫

Όπως στη *προτασιακή λογική*, θα αποδείξουμε ότι οι Lindenbaum-Tarski *άλγεβρες* παρέχουν *κανονικά αντιπαραδείγματα* για την *εγκυρότητα* των *προτάσεων* που δεν είναι *θεωρήματα* της *Λ* στη $\mathbf{V}_\Lambda$.

Έχουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 2.2.14. ***Τροπικές Άλγεβρες* Lindenbaum–Tarski και *διαψευσιμότητα*.** *Έστω τ τροπικός τύπος ομοιότητας, και Λ μια κανονική τροπική τ-λογική. Έστω φ κάποιος προτασιακός τύπος, και Φ ένα σύνολο προτασιακών μεταβλητών μεγέθους όχι μικρότερου από τον αριθμό των προτασιακών μεταβλητών που εμφανίζονται στον φ. Τότε*

$$\vdash_\Lambda \varphi \quad ανν \quad \mathcal{L}_\Lambda(\Phi) \vDash \tilde{\tilde{\varphi}}. \quad (2.2.14)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ανάλογη με την απόδειξη της πρότασης 2.1.13. ▫

Τώρα πρέπει να δείξουμε ότι οι *τροπικές* Lindenbaum-Tarski *άλγεβρες* είναι *άλγεβρες Boole με τελεστές*, δηλαδή πρέπει να δείξουμε ότι η Lindenbaum-Tarski *άλγεβρα* οποιασδήποτε *κανονικής τροπικής λογικής Λ* ανήκει στη $\mathbf{V}_\Lambda$.

Πρόταση 2.2.15. ***Τροπικές Άλγεβρες* Lindenbaum–Tarski και BAT.** *Έστω τ τροπικός τύπος ομοιότητας, και Λ μια κανονική τροπική τ-λογική. Τότε για κάθε σύνολο προτασιακών μεταβλητών Φ,* $\mathcal{L}_\Lambda(\Phi) \in \mathbf{V}_\Lambda$.

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι η $\mathcal{L}_\Lambda(\Phi) \in \mathbf{V}_\Lambda$, είναι μια *άλγεβρα Boole* με *τ-τελεστές*. Μόλις γίνει αυτό το *θεώρημα* θα αποδεικνύεται άμεσα από την *πρόταση* 2.2.14. Το ότι η $\mathcal{L}_\Lambda(\Phi) \in$

$\mathbf{V}_\Lambda$, είναι *άλγεβρα Boole*, είναι εύκολο να το δούμε. Το μόνο που μένει να δείξουμε είναι ότι οι *τροπικότητες* όντως δημιουργούν τους *τ-τελεστές*.

Ας υποθέσουμε ότι ο *τ* περιέχει ένα *διαμάντι* $\diamond$. Ας αποδείξουμε την *προσθετικότητα* (*additivity*) του $f_\diamond$. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$f_\diamond(a + b) \ = f_\diamond a \ + f_\diamond b,$$

για τυχαία στοιχεία $a\ ,b \in \mathcal{L}_\Lambda(\Phi)$. Έστω $a,\ b$ τέτοια στοιχεία. Από τον ορισμό υπάρχουν τύποι φ και ψ τέτοιοι που $a = [\varphi]$ και $b = [\psi]$. Τότε

$$f_\diamond(a + b) \ = f_\diamond([\varphi] + [\psi]) \ = \ f_\diamond([\varphi \vee \psi]) \ = \ [\diamond(\varphi \vee \psi)]$$

ενώ

$$f_\diamond a \ + f_\diamond b \ = f_\diamond([\varphi]) + f_\diamond([\psi]) \ = \ [\diamond\varphi] + [\diamond\psi]) \ = \ [\diamond\varphi \vee \diamond\psi)].$$

Έυκολα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\vdash_\Lambda \diamond(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\diamond\varphi \vee \diamond\psi),$$

και επομένως έπεται ότι $[\diamond(\varphi \vee \psi)] = [\diamond\varphi \vee \diamond\psi]$. ▫

Σαν πόρισμα των παραπάνω μπορούμε να πάρουμε ότι οι *τροπικές λογικές* είναι πάντα *πλήρεις ως προς την ποικιλία των αλγεβρών Boole με τελεστές*, όπου τα *αξιώματά* τους είναι *έγκυρα*. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το τί συμβαίνει στη *σχεσιακή σημασιολογία*, όπου οι *τροπικές λογικές* δεν χρειάζεται να είναι *πλήρεις ως προς την κλάση των πλαισίων* που αυτές ορίζουν.

Το πόρισμα είναι ενδιαφέρον αλλά δεν είναι ακριβώς αυτό που ζητούσαμε, γιατί αποδεικνύει *πληρότητα ως προς τυχούσες BAT* και όχι ως προς *πολύπλοκες άλγεβρες*. Έμεις θέλουμε *πληρότητα ως προς κλάσεις πολύπλοκων αλγεβρών*, γιατί αυτές είναι που περιέχουν όλες τις πληροφορίες που δίνει και η *εγκυρότητα πλαισίων*.

Τη λύση έρχεται να δώσει το θεώρημα Jónsson – Tarski, το οποίο μας λέει ότι *κάθε άλγεβρα Boole με τελεστές* είναι *ισομορφική* με μια *πολύπλοκη άλγεβρα*, και οπότε μας βεβαιώνει ότι μπορούμε να αναπαραστήσουμε την Lindenbaum-Tarski *άλγεβρα* οποιασδήποτε *κανονικής τροπικής λογικής Λ* ως μια *πολύπλοκη άλγεβρα*. Επειδή μάλιστα οι *πολύπλοκες άλγεβρες* σχετίζονται με τη *σχεσιακή σημασιολογία*, θα μπορέσουμε να ερευνήσουμε την *πληρότητα πλαισίων αλγεβρικά*.

2.3. Το θεώρημα Jónsson – Tarski.

Ως τώρα ξέρουμε ότι παίρνοντας την *πολύπλοκη άλγεβρα* ενός *πλαισίου* έχουμε κατασκευάσει την BAT του. Τώρα θα δούμε πως θα κατασκευάσουμε ένα *πλαίσιο* από μια BAT, παίρνοντας το *πλαίσιο υπερφίλτρων της άλγεβρας*. Αυτή η *λειτουργία* ουσιαστικά γενικεύει δύο άλλες κατασκευές. Η μία είναι το να πάρουμε την *επέκταση των υπερφίλτρων ενός μοντέλου*, και η άλλη είναι να κατασκευάσουμε το *κανονικό πλαίσιο* που σχετίζεται με μια *κανονική τροπική λογική*.

Η καινούρια μας κατασκευή θα μας οδηγήσει στο *θεώρημα αναπαράστασης* που επιθυμούμε. Παίρνοντας την *πολύπλοκη άλγεβρα του πλαισίου υπερφίλτρων μιας* BAT, παίρνουμε την *κανονική εμφυτεύσιμη άλγεβρα της αρχικής* BAT. Το θεμελιώδες συμπέρασμα εδώ είναι ότι *κάθε άλγεβρα Boole με τελεστές μπορεί να εμφυτευθεί ισομορφικά στην κανονική άλγεβρά της*. Θα αποδείξουμε αυτό το συμπέρασμα και θα μιλήσουμε για την *αλγεβρική δομή* των *κανονικών μοντέλων* και των *επεκτάσεων υπερφίλτρων*, καθώς και την σπουδαιότητα των *κανονικών ποικιλιών* από BAT για την *τροπική θεωρία πληρότητας*.

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα να *εμφυτεύσουμε* (*ισομορφικά*) μια τυχούσα BAT $\mathcal{B}$ σε μια *πολύπλοκη άλγεβρα*. Το πρώτο ερώτημα είναι ποιο θα είναι το *υποβόσκον* (*underlying*) *πλαίσιο της πολύπλοκης άλγεβρας*. Έστω ότι δουλεύουμε με *τύπο ομοιότητας* ο οποίος έχει μία *μονομελή τροπικότητα*, και έστω $\mathcal{B} = (B, +, -, 0, f)$ η *άλγεβρα Boole* με ένα *μονομελή τελεστή f*. Πρέπει να βρούμε ένα σύμπαν W, και μια διμελή σχέση R στο W, τέτοια που η $\mathcal{B}$ να μπορεί να *εμφυτευθεί* στην *πολύπλοκη άλγεβρα* του *πλαισίου* (W, R). Το θεώρημα της Stone αναπαράστασης που είδαμε πιο πάνω, μας δίνει την μισή απάντηση, αφού μας λέει πώς να *εμφυτεύσουμε το Boole κομμάτι της* $\mathcal{B}$, στην *άλγεβρα δυναμοσυνόλου* του συνόλου $Uf\mathcal{B}$ *των υπερφίλτρων* της $\mathcal{B}$. Ας κοιτάξουμε πιο προσεκτικά.

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό των *φίλτρων* και των *υπερφίλτρων* που χρειαζόμαστε για την συνέχεια.

Ορισμός 2.3.1. ***Φίλτρα και υπερφίλτρα μιας άλγεβρας Boole.*** Ένα *φίλτρο* μιας *άλγεβρας boole* $\mathcal{B} = (B, +, -, 0)$ είναι ένα υποσύνολο $F \subseteq A$ που ικανοποιεί τα εξής:

(F1) $1 \in F$,

(F2) το F είναι κλειστό για την *λειτουργία meets*, δηλαδή αν $a, b \in F$ τότε $a \cdot b \in F$,

(F3) το F είναι κλειστό προς τα πάνω, δηλαδή αν $a \in F$ και $a \leq b$ τότε $b \in F$.

Ένα *φίλτρο* είναι *γνήσιο* αν δεν περιέχει το ελάχιστο στοιχείο 0, ή, ισοδύναμα, αν $F \neq B$. Ένα *υπερφίλτρο* είναι ένα *γνήσιο φίλτρο* που ικανοποιεί την (F4).

(F4) για κάθε $b \in B$, είτε $b \in F$ είτε $-b \in F$.

Η *συλλογή από υπερφίλτρα* της $\mathcal{B}$ θα συμβολίζεται ως $Uf\mathcal{B}$. ▫

Στην συνέχεια έχουμε μια πρόταση με *ιδότητες των υπερφίλτρων* την οποία θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα.

Πρόταση 2.3.2. ***Ιδιότητες Φίλτρων* και *υπερφίλτρων* μιας *άλγεβρας Boole*.** *Έστω* $\mathcal{B} = (B, +, -, 0)$ *μια άλγεβρα Boole. Τότε*

(1) Για κάθε *υπερφίλτρο u της* $\mathcal{B}$ και για κάθε ζεύγος στοιχείων $a, b \in B$, έχουμε ότι $a + b \in u$ *ανν* $a \in u$ ή $b \in u$.

(2) Η $Uf\mathcal{B}$ ταυτίζεται με το σύνολο των *μεγιστικά γνησίων φίλτρων* στην $\mathcal{B}$. (Το «μεγιστικά» αναφέρεται στην σχέση «*ανήκει*» του συνόλου.) ▫

Το ακόλουθο θεώρημα μας βεβαιώνει ότι έχουμε αρκετά *υπερφίλτρα* για να ικανοποιήσουμε τους στόχους μας.

Θεώρημα 2.3.3. ***Θεώρημα υπερφίλτρου.*** *Έστω* $\mathcal{B}$ *μια άλγεβρα Boole,* b *ένα στοιχείο της* B*, και* F *ένα γνήσιο φίλτρο της* $\mathcal{B}$ *που δεν περιέχει το* b*. Τότε υπάρχει υπερφίλτρο που επεκτείνει το* F *και δεν περιέχει το* b*.*

Απόδειξη. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι κάθε *κανονικό φίλτρο* μπορεί να *επεκταθεί* σε ένα *υπερφίλτρο*. Έστω G ένα *κανονικό φίλτρο* της $\mathcal{B}$, και έστω το σύνολο X όλων των *κανονικών φίλτρων* H που *επεκτείνουν* το G. Έστω και Y μια *αλυσίδα* μέσα στο X. Αυτό σημαίνει ότι το Y είναι ένα μη κενό υποσύνολο του X, του οποίου τα στοιχεία είναι *διατεταγμένα* κατά ζεύγη μέσω της σχέσης του *ανήκειν*. Εύκολα αποδεικνύεται ότι το $\bigcup Y$ είναι ένα *κανονικό φίλτρο* και επομένως το $\bigcup Y$ *επεκτείνει* το G. Συνεπώς το $\bigcup Y$ ανήκει στο ίδιο το X. Αυτό μας δείχνει ότι το X είναι κλειστό για *ενώσεις αλυσίδων*, και από το **Λήμμα του *Zorn***[7] έπεται ότι το X περιέχει ένα *μεγιστικό στοιχείο* u. Θα δείξουμε ότι το u είναι ένα *υπερφίλτρο*.

Έστω προς άτοπο ότι το u δεν είναι *υπερφίλτρο*. Τότε υπάρχει $b \in B$ τέτοιο που ούτε το b ούτε το $-b$ ανήκουν στο u. Έστω τώρα τα *φίλτρα* H και H' που παράγονται από τα $u\cup\{b\}$ και $u\cup\{-b\}$ αντίστοιχα. Εφόσον κανένα από αυτά δεν μπορεί να ανήκει στο X, πρέπει και τα δύο να μην είναι *κανονικά*, και άρα $0 \in H$ και $0 \in H'$. Όμως τότε από τον ορισμό υπάρχουν στοιχεία $u_1, \ldots, u_n, u'_1, \ldots, u'_m$ στο u τέτοια που

$$u_1 \cdot \ldots \cdot u_n \cdot b \leq 0 \text{ και } u'_1 \cdot \ldots \cdot u'_m \cdot -b \leq 0.$$

Από αυτό εύκολα προκύπτει ότι

$$u_1 \cdot \ldots \cdot u_n \cdot u'_1 \cdot \ldots \cdot u'_m = 0.$$

Το οποίο αντιτίθεται στο γεγονός ότι το u είναι *κανονικό φίλτρο*.

Έστω τώρα ότι τα b και F είναι όπως ορίζονται στην πρόταση. Εύκολα δείχνουμε ότι το $F \cup \{-b\}$ είναι ένα σύνολο που έχει την *πεπερασμένη ιδιότητα meet*. Μπορούμε να βρούμε ότι υπάρχει ένα *κανονικό φίλτρο* G που *επεκτείνει* το F και περιέχει το $-a$. Τώρα χρησιμοποιούμε το πρώτο μέρος της απόδειξης για να βρούμε ένα *υπερφίλτρο* u που *επεκτείνει* το G. Αλλά αν το u *επεκτείνει* το G, *επεκτείνει* επίσης και το F, και αν περιέχει το $-b$ δεν μπορεί να περιέχει το a. ▫

Έπεται από το θεώρημα που μόλις αποδείξαμε, ότι κάθε υποσύνολο μιας *άλγεβρας Boole* μπορεί να *επεκταθεί* σε κάποιο *υπερφίλτρο* αρκεί να έχει την *πεπερασμένη ιδιότητα meet*. Τώρα έχουμε ότι χρειαζόμαστε για να αποδείξουμε το *θεώρημα* του Stone.

Θεώρημα 2.3.4. ***Θεώρημα* Stone *αναπαράστασης.*** *Κάθε άλγεβρα Boole είναι ισομορφική με ένα πεδίο συνόλων, και άρα, με μια υποάλγεβρα δύναμης της* $\mathcal{D}$*ύο. Συνεπώς, η ποικιλία των αλγεβρών Boole παράγεται απο την άλγεβρα* $\mathcal{D}$*ύο:*

$$\mathbf{BA} = \mathbf{V}(\{\mathcal{D}\text{ύο}\}).$$

Απόδειξη. *Έστω* $\mathcal{B} = (B, +, -, 0)$ *μια άλγεβρα Boole.* Θα *εμφυτεύσουμε* την $\mathcal{B}$ στο *δυναμοσύνολο* της $Uf\mathcal{B}$. Έστω η συνάρτηση $\rho \colon A \to P(Uf\mathcal{B})$ που ορίζεται ως εξής:

[7] Το **Λήμμα του Zorn**: *αν κάθε αλυσίδα έχει άνω φράγμα σε κάποιο διατεταγμένο χώρο P, τότε ο P έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό σημείο.*

$$\rho(a) \;=\; \{u \in Uf\mathcal{B} \mid a \in u\}.$$

Πρώτα θα δείξουμε ότι η ρ είναι *ομομορφισμός*. Ως παράδειγμα θα πάρουμε τον τελεστή της *ένωσης* (*join*):

$$\begin{aligned}\rho(a+b) &= \{u \in Uf\mathcal{B} \mid a+b \in u\}\\ &= \{u \in Uf\mathcal{B} \mid a \in u \text{ ή } a \in u\} \quad \text{[Πρόταση 2.3.2]}\\ &= \{u \in Uf\mathcal{B} \mid a \in u\} \cup \{u \in Uf\mathcal{B} \mid b \in u\}\\ &= \rho(\alpha) \cup \rho(b).\end{aligned}$$

Απομένει να δείξουμε ότι η ρ είναι *μονομορφισμός*. Ας υποθέσουμε ότι τα a και b είναι διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία του B. Συνεπώς είτε $a \nleq b$ είτε $b \nleq a$. Χωρίς να έχουμε πρόβλημα γενίκευσης, μπορούμε να υποθέσουμε το δεύτερο. Αλλά αν $b \nleq a$, τότε το a δεν ανήκει στο *φίλτρο* $b\!\uparrow$ που παράγεται από το $\{b\}$, και άρα από την Θεώρημα 2.3.3, υπάρχει κάποιο *υπερφίλτρο* u τέτοιο που $b\!\uparrow \subseteq u$ και $a \notin u$. Προφανώς από $b\!\uparrow \subseteq u$, έχουμε ότι $b \in u$. Αλλά τότε έχουμε ότι $u \in \rho(b)$ και $u \notin \rho(a)$.

Το επιχείρημα μας δείχνει ότι η $\mathcal{B}$ είναι *ισομορφική* με ένα *πεδίο συνόλων*. Έπεται από την πρόταση 2.1.7 ότι η $\mathcal{B}$ είναι *ισομορφική με μια υποάλγεβρα δύναμης της* $\mathcal{D}$*ύο*. Από αυτό είναι άμεσο ότι η **BA** είναι η *ποικιλία* που παράγεται από την *άλγεβρα* $\mathcal{D}$*ύο*. ▫

Τώρα που έχουμε βρει έναν υποψήφιο για το *σύμπαν* του *πλαισίου υπερφίλτρων* για κάποια δοσμένη BAT $\mathcal{B}$, πρέπει να ορίσουμε μια σχέση R στα *υπερφίλτρα* τέτοια που να μπορούμε να *εμφυτεύσουμε* την $\mathcal{B}$ στην άλγεβρα $(Uf\mathcal{B}, R)^+$. Για τον ορισμό της R, θα κοιτάξουμε τα στοιχεία της *άλγεβρας* σαν προτάσεις και θα θεωρήσουμε την $r(\alpha)$ ως την *συνάρτηση* που μας δίνει το σύνολο των *καταστάσεων* όπου η α είναι αληθής, σύμφωνα με κάποια *αποτίμηση*. Αν επομένως διαβάσουμε την $f\alpha$ ως $\Diamond\alpha$, πρέπει να δεχτούμε ότι μια *κατάσταση* u πρέπει να είναι στην $r(f\alpha)$ *αν και μόνον αν* υπάρχει ένα v, τ.π Ruv και $v \in r(\alpha)$. Οπότε, για να αποφασίσουμε αν η Ruv πρέπει να ισχύει για δύο τυχαίες *καταστάσεις* (*υπερφίλτρα*) u και v, πρέπει να κοιτάξουμε όλες τις *προτάσεις* α που ισχύουν στο v (δηλαδή όλα τα στοιχεία $\alpha \in v$), και να ελέξουμε αν η $f\alpha$ ισχύει στο u (δηλαδή αν $f\alpha \in u$). Πιο τυπικά, μπορούμε να πούμε ότι η «κανονική» επιλογή για την R είναι η σχέση Q_f που δίνεται από το εξής:

$$Q_f uv \;\; ανν \;\; f\alpha \in u, \; \text{για κάθε } \alpha \in v.$$

Στην γενική περίπτωση θα χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.3.5. Η *σχέση* Q_f. (α) Δοθέντος ενός n-μελούς *τελεστή* f μιας *άλγεβρας Boole* $(B, +, -, 0)$, ορίζουμε τη $(n+1)$-μελή σχέση Q_f στο σύνολο των υπερφίλτρων της άλγεβρας ως εξής:

$$Q_f uu_1 \ldots u_n \;\; ανν \;\; f(a_1, \ldots, a_n) \in u \text{ για κάθε } a_1 \in u_1, \ldots, a_n \in u_n.$$

Έστω $\mathcal{B} = (B, +, -, 0, f_{\triangle})_{\triangle \in \tau}$ μια *άλγεβρα Boole με τελεστές*. Το *πλαίσιο υπερφίλτρου* της $\mathcal{B}$, συμβολικά $\mathcal{B}_+$ είναι η δομή $(Uf\mathcal{B}, Q_{f\triangle})_{\triangle \in \tau}$. Η *πολύπλοκη άλγεβρα* $(\mathcal{B}_+)^+$ καλείται η (*κανονική*) *εμφυτευμένη άλγεβρα της* $\mathcal{B}$ (συμβολικά $\mathfrak{Cm}\mathcal{B}$). ▫

Η επόμενη *πρόταση* μας δείχνει οτι μπορούσαμε να δώσουμε κάποιο διαφορετικό αλλά ισοδύναμο *ορισμό* της *σχέσης* Q_f.

Πρόταση 2.3.6. Η *σχέση* Q_f. (β) *Έστω f ένας n-μελής τελεστής στην άλγεβρα Boole $\mathcal{B}$, και u, $u_1, \ldots, u_n$ μια (n+1)-άδα από υπερφίλτρα της $\mathcal{B}$. Τότε το*

$$Q_f\, uu_1\ldots u_n \quad ανν\ -f(-a_1, \ldots, -a_n) \in u \text{ συνεπάγεται ότι για κάποιο } i,\ a_i \in u_i\,.$$

Απόδειξη.

($\Leftarrow$) Η κατεύθυνση αυτή προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς.

($\Rightarrow$) Έστω ότι $Q_f\, uu_1\ldots u_n$, και ότι $-f(-a_1, \ldots, -a_n) \in u$. Προς άτοπο, έστω ότι δεν υπάρχει i τέτοιο που $a_i \in u_i$. Αλλά αφού $Q_f\, uu_1\ldots u_n$, συνεπάγεται ότι $f(-a_1, \ldots, -a_n) \in u$. Αλλά αυτό αντιτίθεται στο γεγονός ότι $-f(-a_1, \ldots, -a_n) \in u$. ▫

Αυτό που πρέπει να παρατηρήσουμε είναι ότι το *κανονικό πλαίσιο μιας λογικής* είναι ουσιαστικά *ισομορφικό* με το *πλαίσιο υπερφίλτρων* της Lindenbaum-Tarski άλγεβράς της.

Πρόταση 2.3.7. *Κανονικό πλαίσιο* και *πλαίσιο υπερφίλτρων* της Lindenbaum-Tarski *άλγεβρας* μιας *λογικής Λ*. *Έστω τ τροπικός τύπος ομοιότητας, Λ μια κανονική τροπική τ-λογική, και Φ ένα σύνολο προτασιακών μεταβλητων που χρησιμοποιούνται για να ορίσουμε το κανονικό πλαίσιο $\mathcal{F}^{\Lambda}$. Τότε*

$$\mathcal{F}^{\Lambda} \cong (\mathcal{L}_{\Lambda}(\Phi))_+.$$

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι η συνάρτηση θ, που αντιστοιχεί ένα μεγιστικά Λ- συνεπές σύνολο Γ, στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των μελών του, και που ορίζεται ως:

$$\theta(\Gamma) = \{\, [\varphi] \mid \varphi \in \Gamma \,\},$$

είναι ο απαιτούμενος *ισομορφισμός* μεταξύ των $\mathcal{F}^{\Lambda}$ και $(\mathcal{L}_{\Lambda}(\Phi))_+$. ▫

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε το περιβόητο θεώρημα Jónsson – Tarski. Σύμφωνα με αυτό, κάθε *άλγεβρα Boole με τελεστές* είναι *εμφυτεύσιμη* στην *πλήρη πολύπλοκη άλγεβρα* του *πλαισίου υπερφίλτρων* της.

Θεώρημα 2.3.8. *Θεώρημα* Jónsson – Tarski. *Έστω τ τροπικός τύπος ομοιότητας, και $\mathcal{B} = (B, +, -, 0, f_{\triangle})_{\triangle \in \tau}$ μια άλγεβρα Boole με τ-τελεστές. Τότε η συνάρτηση αναπαράστασης $r\colon B \to P(Uf\mathcal{B})$* που δίνεται από το

$$r(b) = \{u \in Uf\mathcal{B} \mid b \in u\}$$

είναι μια *εμφύτευση* της $\mathcal{B}$ στην $\mathfrak{C}\mathbf{m}\mathcal{B}$.

Απόδειξη. Για απλότητα θα εργαστούμε με *τύπο ομοιότητας με έναν μόνο n-μελή τροπικό τελεστή*, υποθέτοντας ότι η $\mathcal{B} = (B, +, -, 0, f)$ είναι *μια άλγεβρα Boole με έναν μονο n-μελή τελεστή f*. Από το *θεώρημα αναπαράστασης* του Stone, η συνάρτηση r: $B \to P(Uf\mathcal{B})$ που δίνεται από τον τύπο

$$r(x) = \{u \in Uf\mathcal{B} \mid x \in u\}$$

είναι μια *εμφύτευση Boole*. Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι η r είναι και *τροπικός ομομορφισμός*, δηλαδή ότι:

$$r(f(b_1, ..., b_n)) = m_{Qf}(r(b_1), \ldots, r(b_n)). \quad (2.3.8.α)$$

θα αποδείξουμε αρχικά την (2.3.8.α) για μονομελή f. Με άλλα λόγια πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$r(fb) = m_{Qf}(r(b)).$$

($\Leftarrow$) Έστω ότι $u \in m_{Qf}(r(b))$. Από τον ορισμό του m_{Qf}, υπάρχει *υπερφίλτρο* u_1 τέτοιο που $u_1 \in r(b)$, (δηλαδή $b \in u_1$) και $Q_f u u_1$. Από τον ορισμό του Q_f παίρνουμε ότι $fb \in u$, ή ότι $u \in r(fb)$.

($\Rightarrow$) Έστω ότι u ένα *υπερφίλτρο* στον $r(fb)$, δηλαδή ότι, $fb \in u$. Για να αποδείξουμε ότι $u \in m_{Qf}(r(b))$, αρκεί να βρούμε ένα *υπερφίλτρο* u_1 τέτοιο που $u_1 \in r(b)$, (δηλαδή $a \in u_1$) και $Q_f u u_1$. Η βασική ιδέα της απόδειξης είναι ότι πρώτα επιλέγουμε τα στοιχεία εκείνα του B (εκτός του b) τα οποία δεν είναι δυνατόν να μην βάλουμε στο u_1. Αυτά τα στοιχεία δίνονται από την συνθήκη $Q_f u u_1$. Από την πρόταση 2.3.6 έχουμε ότι για κάθε στοιχείο της μορφής $-f(-y)$ στο u, το y πρέπει να ανήκει στο u_1, οπότε ορίζουμε

$$F := \{y \in A \mid -f(-y) \in u\}.$$

Τώρα θα δείξουμε ότι υπάρχει *υπερφίλτρο* $u_1 \supseteq F$ που περιέχει το a. Αρχικά παρατηρούμε, χρησιμοποιώντας την *προσθετικότητα* της f, ότι το F είναι κλειστό για *meets*. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι το

$$F' := \{ b \cdot y \mid y \in F \}$$

έχει την ιδιότητα του *πεπερασμένου meet*. Αφού το F είναι κλειστό για *meets*, αρκεί να δείξουμε ότι $b \cdot y \neq 0$, όποτε $y \in F$. Προς άτοπο, έστω ότι $b \cdot y = 0$. Τότε $b \leq -y$, και από την *μονοτονικότητα* της f, $fa \leq f(-y)$. Οπότε, $f(-y) \in u$, που αντιτίθεται στο ότι $y \in F$.

Από το θεώρημα 2.3.3 υπάρχει ένα *υπερφίλτρο* $u_1 \supseteq F'$. Όμως το $a \in u$, αφού $1 \in F$. Τελικά, το $Q_f u u_1$ ισχύει από τον ορισμό του F: αν $-f(-y) \in u$ τότε $y \in F \subseteq u_1$.

Με επαγωγή στο *πλήθος ορισμάτων n* της f, θα αποδείξουμε ότι η (2.3.8.α) ισχύει για τυχαίο n. Μόλις αποδείξαμε την *επαγωγική βάση*, και έστω ότι η *επαγωγική υπόθεση* ισχύει για n.

($\Leftarrow$) Η απόδειξη είναι ίδια με αυτήν της *επαγωγικής βάσης*.

($\Rightarrow$) Έστω f μια *κανονική* και *προσθετική* συνάρτηση με *πλήθος ορισμάτων* $n+1$, και έστω ότι τα b_1, ..., b_n είναι στοιχεία της $\mathcal{B}$, τέτοια ώστε $f(b_1, ..., b_{n+1}) \in u$. Πρέπει να βρούμε υπερφίλτρα u_1, ..., u_{n+1} της $\mathcal{B}$ τέτοια που: (i) $a_i \in u_i$ για κάθε $1 \leq \iota \leq n+1$, και (ii) $Q_f u u_1, ..., u_{n+1}$. Η ιδέα είναι να αφήσουμε την *επαγωγική υπόθεση* να ικανοποιήσει τα u_1, ..., u_n, και εμείς να κοιτάξουμε για το u_{n+1}.

Έστω $f' : A^n \rightarrow A$ η συνάρτηση με τύπο

$$f'(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n, a_{n+1}).$$

Προς το παρόν σταθεροποιούμε το a_{n+1}. Εύκολα βλέπουμε ότι η f' είναι *κανονική* και *προσθετική*, και οπότε εφαρμόζουμε την *επαγωγική υπόθεση*. Αφου $f'(x_1, ..., x_n) \in u$, τότε υπάρχουν *υπερφίλτρα* u_1, ..., u_n, τέτοια που $a_i \in u_i$, για κάθε $1 \leq i \leq n$, και

$$f(x_1, ..., x_n, a_{n+1}) \in u, \text{ όποτε } x_i \in u_i \text{, για κάθε } 1 \leq i \leq n. \quad (2.3.8.β)$$

Τώρα θα ορίσουμε ένα *υπεφίλτρο* u_{n+1}, τέτοιο που $a_{n+1} \in u_{n+1}$, και $Qfuu_1 \ldots u_{n+1}$. Η τελευταία αυτή συνθήκη μπορεί να γραφεί και ως εξής (για συντομία γράφουμε $\vec{x} \in \vec{u}$ αντί για $x_1 \in u_1, ..., x_n \in u_n$):

$$\begin{aligned}
&Qfuu_1 \ldots u_{n+1} \\
&\text{ανν για όλα τα } \vec{x}, y\text{: αν } \vec{x} \in \vec{u}\text{, τότε } y \in u_{n+1} \Rightarrow f(\vec{x}, y) \in u \\
&\text{ανν για όλα τα } \vec{x}, y\text{: αν } \vec{x} \in \vec{u}\text{, τότε } f(\vec{x}, y) \notin u \Rightarrow y \notin u_{n+1} \\
&\text{ανν για όλα τα } \vec{x}, y\text{: αν } \vec{x} \in \vec{u}\text{, τότε } -f(\vec{x}, y) \in u \Rightarrow -y \in u_{n+1} \\
&\text{ανν για όλα τα } \vec{x}, z\text{: αν } \vec{x} \in \vec{u}\text{, τότε } -f(\vec{x}, -z) \in u \Rightarrow z \in u_{n+1}.
\end{aligned}$$

Με αυτό παίρνουμε ένα ελάχιστο σύνολο στοιχείων που πρέπει να περιέχει το u_{n+1}, δηλαδή το

$$F := \{z \in B \mid \exists \vec{x} \in \vec{u} \, (-f(\vec{x}, -z) \in u)\}.$$

Αν $-f(\vec{x}, -z) \in u$, λέμε ότι η $\vec{x}$ *οδηγεί την z μέσα στο F*. Τώρα θα χρειαστούμε και την πρώτη συνθήκη και θα ορίσουμε το $F := \{a_{n+1}\} \cup F$.

Στόχος μας είναι να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός *υπερφίλτρου* u_{n+1} που περιέχει το F'. Θα είναι προφανές γιατί αυτό αρκεί για να αποδείξουμε το θεώρημα (ας σημειώσουμε ότι $a_{n+1} \in F$ αφού και $1 \in F$). Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Υπερφίλτρου 2.3.3, θα δείξουμε ότι το F' έχει την *πεπερασμένη ιδιότητα meet*. Θα χρειαστούμε την ακόλουθη ιδιότητα:

το F είναι κλειστό για meets. (2.3.8.γ)

Έστω ότι z', $z'' \in F$, και έστω ότι τα z' και z'' *οδηγούνται μέσα στο F* από τα $\vec{x}\,'$ και $\vec{x}\,''$ αντίστοιχα. Θα δείξουμε τώρα ότι το $\vec{x} := (x_1' \cdot x_1'', \ldots, x_n' \cdot x_n'')$ οδηγεί το $z := z' \cdot z''$ μέσα στο F, δηλαδή ότι $-f(\vec{x}, -z) \in u$.

Αφού η f είναι *μονοτονική*, έχουμε $f(\vec{x}, -z') \leq f(\vec{x}', -z')$ και άρα προκύπτει ότι $-f(\vec{x}', -z') \leq -f(\vec{x}, -z')$. Αφού το u είναι *κλειστό προς τα πάνω* και $-f(\vec{x}', -z') \in u$ από την υπόθεσή μας, παίρνουμε ότι $-f(\vec{x}, -z') \in u$. Με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε ότι $-f(\vec{x}, -z'') \in u$. Τότε όμως

$$f(\vec{x}, -z) = f(\vec{x}, -(z' \cdot z'')) = f(\vec{x}, (-z') + (-z'')) = f(\vec{x}, -z') + f(\vec{x}, -z''),$$

και άρα

$$-f(\vec{x}, -z) = [-f(\vec{x}, -z')] \cdot [-f(\vec{x}, -z'')].$$

Τελειώνοντας την απόδειξη θα δείξουμε ότι:

το F' έχει την πεπερασμένη ιδιότητα meet.(2.3.8.δ)

Από την (2.3.8.γ) αρκεί να δείξουμε ότι $a_{n+1} \cdot z \neq 0$ για κάθε $z \in F$. Με *αντιθετοαναστροφή*, έστω ότι $z \in F$ και $a_{n+1} \cdot z = 0$. Έστω και $\vec{x} \in \vec{u}$ μια ακολουθία που οδηγεί το z μέσα στο F, δηλαδή $-f(\vec{x}, -z) \in u$. Από το $a_{n+1} \cdot z = 0$ έπεται ότι $a_{n+1} \leq -z = 0$, και άρα από την *μονοτονικότητα* της f παίρνουμε $-f(\vec{x}, -z) \leq -f(\vec{x}, a_{n+1})$. Αλλά τότε $-f(\vec{x}, a_{n+1}) \in u$, το οποίο αντιτίθεται την (2.3.8.β). Άρα $a_{n+1} \cdot z \neq 0$, και οπότε αποδείξαμε την (2.3.8.δ) και συνεπώς και το Θεώρημα Jónsson – Tarski. ▫

2.4. Η αλγεβρική σκοπιά της *κανονικότητας*.

Η σημασία του προηγούμενου θεωρήματος είναι πολύ μεγάλη. Το θεώρημα Jónsson – Tarski μας βεβαιώνει ότι μπορούμε να *αναπαραστήσουμε* τις Lindenbaum-Tarski *άλγεβρες* των *κανονικών τροπικών λογικών* ως *πολύπλοκες άλγεβρες*. Συνεπώς το θεώρημα 2.2.14 μετατρέπεται άμεσα σε ένα *αποτέλεσμα πληρότητας* ως προς τις *πολύπλοκες άλγεβρες*.

Αυτό που μας δείχνει το θεώρημα Jónsson – Tarski είναι ότι κάθε *άλγεβρα* $\mathcal{B}$ είναι μια *πολύπλοκη άλγεβρα* πάνω σε κάποιο *πλαίσιο*. Άρα για κάθε *λογική* Λ έχουμε ότι $\mathbf{V}_\Lambda \subseteq \mathbf{SCmK}$ για κάποια κλάση $\mathbf{K}$. Από αυτό παίρνουμε ότι $\mathbf{V}_\Lambda \subseteq \mathbf{HSCmK}$. Παρόλα αυτά για να αποδείξουμε ένα *θεώρημα πληρότητας*, χρειάζεται να αποδείξουμε κάποια *ισότητα* και όχι μια *απλή σχέση μέλους*. Ένας τρόπος για να το αποδείξουμε αυτό είναι να δείξουμε ότι οι *πολύπλοκες άλγεβρες* που έχουμε βρει συνθέτουν μια *υποκλάση* της $\mathbf{V}_\Lambda$. Από την πρόταση 2.2.6 αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε *άλγεβρα* $\mathcal{B}$ στην *ποικιλία* $\mathbf{V}_\Lambda$, το πλαίσιο $\mathcal{B}_+$ είναι *πλαίσιο* της *λογικής* Λ. Αυτό μας δίνει μια *αλγεβρική σκοπιά* στην έννοια της *κανονικότητας*.

Ουσιαστικά η απαιτούμενη *αλγεβρική σκοπιά* δίνεται από το *ποιες ποικιλές από BAT είναι κλειστές ως προς τις κανονικές εμφυτεύσιμες άλγεβρες*. Από αυτή τη παρατήρηση έπεται ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 2.4.1. ***Κανονικές κλάσεις* και *ποικιλίες*.** Έστω τ ένας *τροπικός τύπος ομοιότητας*, και $\mathbf{C}$ μια *κλάση αλγεβρών Boole με τ-τελεστές*. Η $\mathbf{C}$ είναι *κανονική* αν είναι *κλειστή* ως προς *κανονικές εμφυτεύσιμες άλγεβρες*, δηλαδή αν για όλες τις *άλγεβρες* $\mathcal{B}$, η $\mathfrak{Cm}\mathcal{B} \in \mathbf{C}$ όποτε $\mathcal{B} \in \mathbf{C}$. Ισοδύναμα, μια *εξίσωση* είναι *κανονική* αν η *εγκυρότητά* της διατηρείται όταν κινηθούμε από μια BAT στην *κανονική εμφυτεύσιμη άλγεβρά* της. ▫

Τώρα έχουμε δύο έννοιες *κανονικότητας*. Από την μία έχουμε τη *λογική* έννοια της *κανονικότητας*, ότι δηλαδή μια *λογική* Λ είναι *κανονική* αν για κάθε φ, τέτοιο που $\vdash_\Lambda \varphi$, ο φ είναι έγκυρος στο *κανονικό πλαίσιο* για την Λ. Από την άλλη έχουμε την *αλγεβρική* έννοια *κανονικότητας* του προηγούμενου ορισμού. Θα δείξουμε ότι οι δύο έννοιες έχουν άμεση σχέση.

Πρόταση 2.4.2. ***Αλγεβρικός* και *λογικός* ορισμός *κανονικότητας*.** *Έστω τ ένας τροπικός τύπος ομοιότητας, και Σ ένα σύνολο τ-τύπων. Αν η* $\mathbf{V}_\Sigma$ *είναι μια κανονική ποικιλία, τότε το Σ είναι κανονικό.*

Απόδειξη. Έστω ότι η $\mathbf{V}_\Sigma$ είναι *κανονική*, και έστω Φ ένα *καθορισμένο μετρήσιμο σύνολο προτασιακών μεταβλητών*, το οποίο χρησιμοποιούμε για να ορίσουμε τα *κανονικά πλαίσια*. Από το θεώρημα 2.2.14, η Lindenbaum – Tarski άλγεβρα $\mathscr{R}_{\mathbf{K\Sigma}}(\Phi) \in \mathbf{V}_\Sigma$. Από την υπόθεση τότε, και η *κανονική εμφυτεύσιμη άλγεβρά* της θα ανήκει στο $\mathbf{V}_\Sigma$, δηλαδή $\mathfrak{Cm}\mathscr{R}_{\mathbf{K\Sigma}}(\Phi) \in \mathbf{V}_\Sigma$. Όμως από το θεώρημα 2.3.7 έπεται ότι αυτή η άλγεβρα είναι *ισομορφική* με την *πολύπλοκη άλγεβρα* του *κανονικού πλαισίου* της $\mathbf{K\Sigma}$:

$$\mathfrak{Cm}\mathscr{R}_{\mathbf{K\Sigma}}(\Phi) = (\mathscr{R}_{\mathbf{K\Sigma}}(\Phi))_{+})^{+} \cong (\mathcal{F}^{\mathbf{K\Sigma}})^{+}.$$

Επειδή όμως το $(\mathcal{F}^{\mathbf{K\Sigma}})^{+} \in \mathbf{V}_\Sigma$, έχουμε ότι $(\mathcal{F}^{\mathbf{K\Sigma}})^{+} \Vdash \Sigma$ από την πρόταση 2.2.6. Αλλά αυτό σημαίνει ότι το Σ είναι *κανονικό*. ▫

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η *κανονικότητα* του Σ, το μόνο που μας δίνει είναι ότι μια *συγκεκριμένη άλγεβρα Boole με τελεστές* έχει την *εμφυτεύσιμη άλγεβρά της* στην $\mathbf{V}_\Sigma$. Η συγκεκριμένη αυτή *άλγεβρα*, είναι η Lindenbaum-Tarski *άλγεβρα*, η οποία έχει *απαριθμήσιμα άπειρους τρόπους παραγωγής*. Αυτό γίνεται γιατί δουλεύουμε σε ένα *σύμπαν* με *αριθμήσιμο σύνολο προτασιακών μεταβλητών*.

Είναι προφανές ότι ο περιορισμός που έχουμε πάρει για *αριθμήσιμες* μόνο *γλώσσες*, δεν είναι και από τους πιο φυσικούς περιορισμούς που παίρνουμε στα μαθηματικά. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να ορίσουμε την έννοια της *κανονικότητας* έτσι που να αναφέρεται και σε *γλώσσες* τυχαίου μεγέθους. Αυτό που θα κάνουμε είναι να ορίσουμε μια *λογική* Λ να είναι *κανονική* αν είναι *έγκυρη* σε καθένα από τα *κανονικά πλαίσιά* της. Με αυτόν τον ορισμό μπορούμε να επιτύχουμε ισοδυναμία μεταξύ του *λογικού* και του *αλγεβρικού* ορισμού της *κανονικότητας*.

Όποιος και να είναι όμως ο ορισμός που θα διαλέξουμε, η *αλγεβρική έννοια* της *κανονικότητας* αποδεικνύεται ιδιαιτέρως χρήσιμη. Μας παρέχει μια καινούρια σκοπιά της *κανονικότητας*, η οποία μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε πολλά *αλγεβρικά* επιχειρήματα. Αυτό θα γίνει εμφανές στο υποκεφάλαιο 3.3, όπου θα εισαγάγουμε την έννοια της *persistence*, που είναι μια γενίκευση της *κανονικότητας*, και θα αποδείξουμε το Θεώρημα Πληρότητας του Sahlqvist.

Κεφάλαιο 3: Εφαρμογές Αλγεβρικής τροπικής λογικής

3.1. *Θεωρία Δυϊκότητας.*

Ως τώρα έχουμε δείξει πώς να κατασκευάζουμε *πλαίσια* από *άλγεβρες* καθώς και *άλγεβρες* από *πλαίσια*, με τρόπους που να διατηρούν κάποιες βασικές *λογικές ιδιότητες*. Από την μια έχουμε τους *λογικούς* που ασχολούνται με την *τροπική λογική*, οι οποίοι ενδιαφέρονται να κατασκευάσουν νέα *πλαίσια* από παλαιότερα, χρησιμοποιώντας *φραγμένους μορφισμούς*, *παραγόμενα υποπλαίσια* και *ξένες ενώσεις*. Από την άλλη έχουμε τους *αλγεβριστές* οι οποίοι ενδιαφέρονται να συσχετίσουν *άλγεβρες* χρησιμοποιώντας *ομομορφισμούς*, *υποάλγεβρες* και *γινόμενα*. Έχουμε δηλαδή από την μια το *μαθηματικό σύμπαν* των *λογικών* και από την άλλη αυτό των *αλγεβριστών*. Τώρα, μέσω της *θεωρίας δυϊκότητας*, θα κοιτάξουμε τις τυχόν σχέσεις που δημιουργούνται μεταξύ αυτών των δύο διαφορετικών *μαθηματικών αντικειμένων*.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τις βασικές *δυϊκότητες* που δημιουργούνται μεταξύ των δύο αυτών *συμπάντων*, και θα καταδείξουμε την σπουδαιότητά τους αποδεικνύοντας δύο *θεμελιώδη θεωρήματα* της *τροπικής λογικής*.

Τα παρακάτω θεωρήματα μας παρουσιάζουν τις βασικές σχέσεις που δημιουργούνται μεταξύ του *αλγεβρικού* και του *πλαισιο-θεωρητικού σύμπαντος*. Ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί είναι ο ακόλουθος.

Ορισμός 3.1.1. ***Συμβολισμός*** Έστω *τ τροπικός τύπος ομοιότητας*, $\mathcal{F}$ και $\mathcal{E}$ δύο *τ-πλαίσια*, και $\mathcal{B}$ και $\mathfrak{C}$ δύο *άλγεβρες Boole με τ-τελεστές*. Θα ακολουθήσουμε τον ακόλουθο συμβολισμό για σχέσεις μεταξύ αυτών των δομών:

$\mathcal{F} \rightarrowtail \mathcal{E}$ για το ότι το $\mathcal{F}$ είναι *ισομορφικό* με ένα *παραγόμενο υποπλαίσιο* του $\mathcal{E}$,
$\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{E}$ για το ότι το $\mathcal{E}$ είναι μια *φραγμένη μορφική εικόνα* του $\mathcal{F}$,
$\mathcal{B} \rightarrowtail \mathfrak{C}$ για το ότι η $\mathcal{B}$ είναι *ισομορφική* με μια *υποάλγεβρα* της $\mathfrak{C}$,
$\mathcal{B} \twoheadrightarrow \mathfrak{C}$ για το ότι η $\mathfrak{C}$ είναι μια *ομομορφική* εικόνα της $\mathcal{B}$. ▫

Η ακόλουθη πρόταση παρουσιάζει κάποια σημαντικά αποτελέσματα της *θεωρίας δυϊκότητας*:

Πρόταση 3.1.2. Βασικά αποτελέσματα *θεωρίας δυϊκότητας*.(α) *Έστω τ τροπικός τύπος ομοιότητας,* $\mathcal{F}$ και $\mathcal{E}$ *δύο τ-πλαίσια, και* $\mathcal{B}$ *και* $\mathfrak{C}$ *δύο άλγεβρες Boole με τ-τελεστές.*

(i) Αν $\mathcal{F} \rightarrowtail \mathcal{E}$, τότε $\mathcal{E}^+ \twoheadrightarrow \mathcal{F}^+$.
(ii) Αν $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{E}$, τότε $\mathcal{E}^+ \rightarrowtail \mathcal{F}^+$.
(iii) Αν $\mathcal{B} \rightarrowtail \mathfrak{C}$, τότε $\mathfrak{C}_+ \twoheadrightarrow \mathcal{B}_+$.
(iv) Αν $\mathcal{B} \twoheadrightarrow \mathfrak{C}$, τότε $\mathfrak{C}_+ \rightarrowtail \mathcal{B}_+$.

Απόδειξη. Η απόδειξη έπεται από τις παρακάτω Προτάσεις 3.1.6 και 3.1.7. ▫

Πρόταση 3.1.3. Βασικά αποτελέσματα *θεωρίας δυϊκότητας*.(β) *Έστω τ τροπικός τύπος ομοιότητας, και* $\mathcal{F}_i, i \in I$*, μια οικογένεια τ-πλαισίων. Τότε*

$$(\biguplus_{i \in I} \mathcal{F}_i)^+ \cong \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i^+.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε μια συνάρτηση *η* από το *δυναμοσύνολο* της *ξένης ένωσης* $\uplus_{i\in I} W_i$ στο *φορέα* $\prod_{i\in I} P(W_i)$ του *γινομένου της οικογένειας των πολύπλοκων αλγεβρών* $(\mathcal{F}_i^+)_{i\in I}$.

Έστω *X* ένα *υποσύνολο* της $\uplus_{i\in I} W_i$. Προφανώς το *η*(*X*) πρέπει να είναι ένα *στοιχείο* του *συνόλου* $\prod_{i\in I} P(W_i)$. Τα *στοιχεία* του $\prod_{i\in I} P(W_i)$ είναι *ακολουθίες σ* τέτοιες που $\sigma(i)\in P(W_i)$. Οπότε αρκεί να δείξουμε τί είναι το *i*-στό στοιχείο της ακολουθίας *η*(*X*):

$$\eta(X)(i) \;=\; X \cap W_i.$$

Απομένει να δείξουμε ότι η *η* είναι *ισομορφισμός*. ▫

Θα χρειαστούμε κάποια συγκεκριμένη ορολογία για τους *μορφισμούς* μεταξύ *αλγεβρών Boole με τελεστές*.

Ορισμός 3.1.4. BAT-*ομομορφισμοί.* Έστω $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}$' δύο BAT του ίδιου *τύπου ομοιότητας*, και έστω *η*: $A\to A$' μια συνάρτηση. Λέμε ότι η *η* είναι *Boole ομομορφισμός* αν η *η* είναι *ομομορφισμός* από το $(A,+,-,0)$ στο $(A',+',-',0')$. Λέμε ότι η *η* είναι *τροπικός ομομορφισμός* αν η *η*, για όλους τους *τροπικούς τελεστές* $\triangle$, ικανοποιεί το εξής:

$$\eta(f_\triangle(a_1,\, ...,\, a_{\rho(\triangle)})) \;=\; f_\triangle(\eta\,(a_1),\; ...\;,\, \eta(a_{\rho(\triangle)})).$$

Επίσης θα λέμε ότι η *η* είναι BAT-*ομομορφισμός* αν είναι και *Boole* και *τροπικός ομομορφισμός*. ▫

Στον ακόλουθο ορισμό θα δώσουμε τον τρόπο κατασκευής *δυϊκών μορφισμών*, όπου η λέξη *δυϊκός* δε χρησιμοποιείται με την έννοια που είχαμε, ότι το σύμβολο ◇ είναι το δυϊκό του □.

Ορισμός 3.1.5. *Δυϊκοί μορφισμοί.* Έστω μια συνάρτηση *θ* από το *W* στο *W'*. Η *δυϊκή* της, $\theta^+ : P(W') \to P(W')$ ορίζεται ως εξής:

$$\theta^+(X') \;=\; \{\, u \in W \mid \theta(u) \in X'\}.$$

Για την άλλη κατεύθυνση, έστω $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}$' δύο BAT, και η: $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ μια συνάρτηση από το *B* στο *B'*. Τότε η δυϊκή της, από *υπερφίλτρα* της $\mathcal{B}$' σε υποσύνολα του *B*, δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\eta_+(u') \;=\; \{\, \alpha \in A \mid \eta(a) \in u'\,\}.\ ▫$$

Η ακόλουθη πρόταση μας βεβαιώνει ότι οι *δυϊκοί* των *φραγμένων μορφισμών* δεν είναι τίποτε άλλο από BAT-*ομομορφισμοί*.

Πρόταση 3.1.6. *Φραγμένοι μορφισμοί* και BAT- *ομομορφισμοί.* *Έστω $\mathcal{F}$ και $\mathcal{F}$' δύο πλαίσια, και θ*: *W→W' μια συνάρτηση. Τότε*

(i) *Η θ^+ είναι Boole ομομορφισμός.*

(ii) *Αν η θ έχει την εμπρός ιδιότητα, τότε* $m_R\,(\theta^+(Y_1'),\, ...,\, \theta^+\,(Y_n')) \subseteq \theta^+\,(m_{R'}\,(Y_1',\, ...,\, Y_n'))$.

(iii)*Αν η θ έχει την πίσω ιδιότητα, τότε* m_R $(\theta^+(Y_1'),..., \theta^+(Y_n')) \supseteq \theta^+(m_{R'}(Y_1', ..., Y_n'))$.

(iv)*Αν η θ είναι φραγμένος μορφισμός, τότε η* θ^+ *είναι ένας BAT-ομομορφισμός από το* $\mathcal{F}'^+$ στο $\mathcal{F}^+$.

(v)*Αν η θ είναι μονομορφισμός, τότε η* θ^+ *είναι επιμορφισμός.*

(vi)*Αν η θ είναι επιμορφισμός, τότε η* θ^+ *είναι μονομορφισμός.*

Απόδειξη.

(i) Ας κοιτάξουμε για παράδειγμα το συμπλήρωμα.

$$x \in \theta^+(-X') \quad ανν \quad \theta(x) \in -X' \; ανν \; \theta(x) \notin X' \quad ανν \quad x \notin \theta^+(X').$$

Από αυτό έπεται άμεσα ότι $\theta^+(-X') = -\theta^+(X')$.

(ii) Έστω ότι η θ έχει την *εμπρός ιδιότητα*. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
& x \in m_R(\theta^+(Y_1'), ..., \theta^+(Y_n')) \\
& \Rightarrow \exists y_1, ..., y_n \text{ τέτοια που } \theta(y_i) \in Y_i' \text{ και } Rxy_1...y_n \\
& \Rightarrow \exists y_1, ..., y_n \text{ τέτοια που } \theta(y_i) \in Y_i' \text{ και } R'\theta(x)\theta(y_1) ... \theta(y_n) \\
& \Rightarrow \theta(x) \in m_{R'}(Y_1',..., Y_n') \\
& \Rightarrow x \in \theta^+(m_{R'}(Y_1',..., Y_n')).
\end{aligned}$$

(iii) Έστω ότι $x \in \theta^+(m_{R'}(Y_1',...,Y_n'))$. Τότε $\theta(x) \in m_{R'}(Y_1',...,Y_n')$. Οπότε υπάρχουν $y'_1, ..., y'_n \in W'$ με $y'_\imath \in Y'_i$ και $R'\theta(x)\, y'_1,...,y'_n$. Αφού η θ έχει την πίσω ιδιότητα, υπάρχουν $y_1, ..., y_n \in W$ με $\theta(y_i)=y_i$ για κάθε i, και $Rxy_1,...,y_n$. Αλλά τότε $y'_\imath \in \theta(Y'_i)$ για κάθε i, και άρα $x \in m_R(\theta^+(Y_1'),..., \theta^+(Y_n'))$.

(iv) Άμεσο από τα ((i), (ii), (iii)).

(v) Έστω ότι η θ είναι *μονομορφισμός*, και έστω $X \subseteq W$. Πρέπει να βρούμε ένα υποσύνολο X' του W' τέτοιο που $\theta^+(X') = X$. Ορίζουμε

$$\theta[X] := \{ \theta(x) \in W' \mid x \in X\}.$$

Υποστηρίζουμε ότι το σύνολο αυτό έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες. Προφανώς $X \subseteq \theta^+(\theta[X])$. Για την άλλη κατεύθυνση, έστω $x \in \theta^+(\theta[X])$. Τότε από τον ορισμό $\theta(x) \in \theta[X]$, και άρα υπάρχει $y \in X$ τέτοιο που $\theta(x) = \theta(y)$. Επειδή η θ είναι *μονομορφισμός*, έχουμε $x = y$. Άρα $x \in X$.

(vi) Έστω ότι η θ είναι *επιμορφισμός*, και έστω X', Y' διακριτά υποσύνολα του W'. Χωρίς κίνδυνο γενίκευσης μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\exists x' \in X'$ τέτοιο που $x' \notin Y'$. Αφού η θ είναι *επιμορφισμός*, $\exists x \in W$ τέτοιο που $\theta(x) = x'$. Άρα $x \in \theta^+(X')$, αλλά $x \notin \theta^+(Y')$. Οπότε $\theta(X') \neq \theta(Y')$, και άρα η θ^+ είναι *μονομορφισμός*. ▫

Πηγαίνοντας στην αντίθετη κατεύθυνση, δηλαδή από *άλγεβρες* στις *σχεσιακές δομές*, βρίσκουμε ότι οι *δυϊκοί* των BAT-*ομομορφισμών* είναι *φραγμένοι μορφισμοί*.

Πρόταση 3.1.7. BAT- *ομομορφισμοί* και *Φραγμένοι μορφισμοί*. *Έστω* $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ *άλγεβρες Boole με τελεστές, και η μια συνάρτηση από το B στο B'.*

(i) *Αν η είναι ένας Boole ομομορφισμός, τότε* η_+ *είναι συνάρτηση από υπερφίλτρα σε υπερφίλτρα.*

(ii) *Αν* $f'(\eta(a_1),\dots,\eta(a_n)) \leq \eta(f(a_1,\dots,a_n))$*, τότε η* η_+ *έχει την εμπρός ιδιότητα.*

(iii) *Αν* $f'(\eta(a_1),\dots,\eta(a_n)) \geq \eta(f(a_1,\dots,a_n))$*, και η η είναι Boole ομομορφισμός, τότε η* η_+ *έχει την πίσω ιδιότητα.*

(iv) *Αν η η είναι ένας BAT-ομομορφισμός, τότε η* η_+ *είναι ένας φραγμένος μορφισμός από το* $\mathcal{B}'_+$ στο $\mathcal{B}_+$.

(v) *Αν η η είναι ένας* 1-1 *Boole-ομομορφισμός, τότε η* $\eta_+\colon Uf\mathcal{B}' \to Uf\mathcal{B}$ *είναι ένας επι μορφισμός.*

(vi) *Αν η η είναι ένας επί Boole-ομομορφισμός, τότε η* $\eta_+\colon Uf\mathcal{B}' \to Uf\mathcal{B}$ *είναι ένας μονομορφισμός.*

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι ο τ έχει έναν μόνο *τροπικό τελεστή*, και έτσι γράφουμε $\mathcal{B} = (B, +, -, 0, f)$.

(i) Όπως στο παραπάνω θεώρημα.

(ii) Έστω ότι $Q_{f'}\, u'u_1'\dots u_n'$ ισχύει μεταξύ κάποιων *υπερφίλτρων* $u', u_1',\dots,u_n'$ της $\mathcal{B}'$. Για να δείξουμε ότι $\mathcal{B}_+ \vDash Q_f\, \eta_+(u')\eta_+(u_1')\dots \eta_+(u_n')$, έστω $a_1,\dots,a_n$ τυχαία στοιχεία των $\eta_+(u_1')\dots \eta_+(u_n')$ αντίστοιχα. Από τον ορισμό της η_+, $\eta a_i \in u_i'$, άρα το $Q'_f u'u_1'\dots u_n'$ μας δίνει $(f'(a_1),\dots,\eta(a_n)) \in u'$. Από την υπόθεση τώρα παίρνουμε ότι $\eta(f(a_1,\dots,a_n)) \in u'$, αφού τα *υπερφίλτρα είναι κλειστά προς τα πάνω*. Αλλά τότε $f(a_1,\dots,a_n) \in \eta_+ u'$, το οποίο και θέλαμε.

(iii) Όπως πριν.

(iv) Έπεται άμεσα από τα ((i), (ii) και (iii)).

(v) Έστω ότι η η είναι *μονομορφισμός*, και έστω u ένα *υπερφίλτρο* της $\mathcal{B}$. Θα ακολουθήσουμε την ίδια στρατηγική όπως στην πρόταση 3.1.6.(v), και θα ορίσουμε

$$\eta[u] := \{\, \eta(a) \mid a \in u \,\}.$$

Η διαφορά με την προηγούμενη απόδειξη της 3.1.6.(v), είναι ότι εδώ το $\eta_+(\eta[u])$ μπορεί να μην οριστεί. Ο λόγος είναι ότι, γενικά, το $\eta[u]$ δεν θα είναι *κλειστό προς τα πάνω* και άρα δεν θα είναι (*υπερ*)*φίλτρο*, ενώ η η_+ ορίζεται μόνο για *υπερφίλτρα*. Οπότε ορίζουμε:

$$F' := \{\, a' \mid \eta(a) \leq a' \text{ για κάποιο } a \in u \,\}.$$

Προφανώς, $\eta[u] \subseteq F'$. Πρώτα θα δείξουμε ότι το F' είναι ένα *γνήσιο φίλτρο* της $\mathcal{B}'$, δηλαδή πρέπει να δείξουμε ότι ικανοποιεί τις συνθήκες ($F1$)-($F3$) του ορισμού 2.3.1. Για το ($F1$), παρατηρούμε ότι $1 \in u$, άρα $\eta(1) = 1 \in \eta[u] \subseteq F'$. Για το ($F2$), έστω ότι $a', b' \in F'$. Τότε $\exists a, b \in u$ τέτοια που $\eta(a) \leq a'$ και $\eta(b) \leq b'$. Έπεται ότι $\eta(a \cdot b) = \eta(a) \cdot \eta(b) \leq a' \cdot b' \in \eta[u]$, άρα $a' \cdot b' \in F'$ αφού $a' \cdot b' \in u$. Αυτό δείχνει ότι το F' είναι *κλειστό για meets*. Το ($F3$), ότι το F' είναι *κλειστό προς τα πάνω*, είναι άμεσο. Τελικά για να δείξουμε ότι το F' είναι *γνήσιο*, έστω ότι $0' \in F'$. Τότε $0' = \eta(\alpha)$, για κάποιο $a \in u$, αφού $0' = \eta(0)$ και η είναι *μονομορφισμός* παίρνουμε ότι $0 = a$, και άρα, $0 \in u$. Αλλά τότε το u δεν είναι *υπερφίλτρο*.

Από το θεώρημα Υπερφίλτρου 2.3.3, το F' μπορεί να επεκταθεί σε ένα *υπερφίλτρο* u'. Υποστηρίζουμε ότι $u = \eta_+(u')$. Έστω ότι $a \in u$. Τότε $\eta a \in \eta[u] \subseteq \eta_+(u')$. Αυτό δείχνει ότι $u \subseteq \eta_+(u')$. Για την άλλη κατεύθυνση, αρκεί να δείξουμε ότι $a \notin \eta_+(u')$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
& a \notin u \Rightarrow -a \in u \\
& \Rightarrow -\eta\,(a) = \eta\,(-a) \in \eta[u] \\
& \Rightarrow -\eta\,(a) \in u' \\
& \Rightarrow \eta\,(a) \notin u' \\
& \Rightarrow a \notin \eta_+\,(u').
\end{aligned}$$

(vi) Η απόδειξη είναι όμοια με αυτήν της πρότασης 3.1.6(vi). ▫

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε την *δυϊκότητα* μεταξύ *πλαισίων* και *αλγεβρών* για να δώσουμε κάποιες σύντομες αποδείξεις μερικών θεμελιωδών θεωρημάτων της *τροπικής λογικής*.

Πρώτα θα δείξουμε ότι η διατήρηση της *εγκυρότητας ισοτήτων* (*equational validity*), όταν εφαρμόζουμε κάποιες βασικές λειτουργίες στα *πλαίσια*, είναι ουσιαστικά μια απλή συνέπεια πολύ γνωστών συμπερασμάτων διατήρησης της *άλγεβρας*. Πιο συγκεκριμένα η *εγκυρότητα ισοτήτων* διατηρείται όταν κατασκευάζουμε *υποάλγεβρες*, *ομομορφικές εικόνες* και *γινόμενα αλγεβρών*.

Πρόταση 3.1.8. Η *εγκυρότητα ισοτήτων* είναι *κλειστή* για *υποάλγεβρες*, *ομομορφικές εικόνες* και *γινόμενα αλγεβρών*. *Έστω τ ένας τροπικός τύπος ομοιότητας, φ ένας τ-τύπος και $\mathcal{F}$ ένα τ-πλαίσιο. Τότε*

(i) *Αν $\mathcal{E}$ μια φραγμένη μορφική εικόνα του $\mathcal{F}$, τότε $\mathcal{E} \Vdash \varphi \Rightarrow \mathcal{F} \Vdash \varphi$.*

(ii) *Αν $\mathcal{E}$ ένα παραγόμενο υποπλαίσιο του $\mathcal{F}$, τότε $\mathcal{E} \Vdash \varphi \Rightarrow \mathcal{F} \Vdash \varphi$.*

(iii) *Αν $\mathcal{F}$ είναι η ξένη* ένωση *μιας οικογένειας $\{ \mathcal{F}_i \,|\, i \in I \}$, τότε $\mathcal{F} \Vdash \varphi$, αν για κάθε $i \in I$, $\mathcal{F}_i \Vdash \varphi$.*

(iv) *Αν* **ue**$\mathcal{F} \Vdash \varphi$, *τότε $\mathcal{F} \Vdash \varphi$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το πρώτο κομμάτι της απόδειξης και με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες προτάσεις.

(i) Έστω ότι $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{E}$, και $\mathcal{F} \Vdash \varphi$. Από την πρόταση 2.2.6, έχουμε $\mathcal{F}^+ \vDash \varphi \approx \top$, και από την πρόταση 3.1.2, η $\mathcal{E}^+$ είναι μια *υποάλγεβρα* της $\mathcal{F}^+$. Από το γεγονός ότι η *ισοτική εγκυρότητα* διατηρείται όταν παίρνουμε *υποάλγεβρες*, έχουμε ότι $\varphi \approx \top$ ισχύει στην $\mathcal{E}^+$. Αλλά τότε η πρόταση 2.2.6 μας δίνει $\mathcal{E} \Vdash \varphi$.▫

Θα δώσουμε τώρα μια απλή απόδειξη του θεωρήματος Goldblatt-Thomason, το οποίο μας δίνει έναν ακριβή δομικό χαρακτηρισμό των *πρωτοβάθμια ορίσιμων κλάσεων από πλαίσια*, οι οποίες είναι *τροπικά ορίσιμες*. Εκτός της κλασικής *μοντελοθεωρητικής* απόδειξης, θα δείξουμε ότι υπάρχει και η *αλγεβρική σκοπιά* του θεωρήματος. Η απόδειξη είναι ουσιαστικά ένα πόρισμα του θεωρήματος του Birkhoff, που ταυτίζει τις *κλάσεις ισοτήτων* (*equational classes*)και τις *ποικιλίες*.

Θεώρημα 3.1.9. ***Θεώρημα* Goldblatt- Thomason.** *Έστω τ τροπικός τύπος ομοιότητας, και έστω* **K** *κλάση τ-πλαισίων που είναι κλειστή ως προς υπερφίλτρα. Τότε η* **K** *είναι τροπικά ορίσιμη αν και μόνο αν είναι κλειστή ως προς φραγμένες μορφικές εικόνες, παραγόμενα υποπλαίσια, ξένες ενώσεις και αντανακλά επεκτάσεις υπερφίλτρων.*

Απόδειξη.

($\Rightarrow$) Άμεσο πόρισμα από την προηγούμενη πρόταση.

($\Leftarrow$) Έστω **K** μια *κλάση πλαισίων* που ικανοποιεί τις συνθήκες κλειστότητας του θεωρήματος. Αρκεί να δείξουμε ότι όποιο *πλαίσιο* είναι *μοντέλο* της *τροπικής θεωρίας* της **K** είναι και το ίδιο μέλος της **K**.

Έστω $\mathcal{F}$ ένα τέτοιο *πλαίσιο*. Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι η Πρόταση 2.2.6 μας δίνει ότι το $\mathcal{F}^+$ είναι ένα *μοντέλο* της *ισοτικής θεωρίας* της *κλάσης* **CmK**. Έπεται από το θεώρημα του Birkhoff (που διακρίνει *ποικιλίες* και *ισοτικές κλάσεις*), ότι το $\mathcal{F}^+$ βρίσκεται μέσα στην *ποικιλία* που παράγεται από την **CmK**. Άρα $\mathcal{F}^+ \in$ **HSPCmK**. Με άλλα λόγια υπάρχει μια *οικογένεια* $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ *πλαισίων* μέσα στην **K**, και *άλγεβρες Boole* $\mathcal{B}$, $\mathfrak{C}$ με *τελεστές* τέτοιες που:

(i) Η $\mathfrak{C}$ είναι το *γινόμενο* $\prod_{i\in I} \mathcal{E}_i^+$, των *πολύπλοκων αλγεβρών* του $\mathcal{E}_i$,

(ii) η $\mathcal{B}$ είναι *υποάλγεβρα* της $\mathfrak{C}$, και

(iii) το $\mathcal{F}^+$ είναι *ομομορφική εικόνα* της $\mathcal{B}$.

Από την πρόταση 3.1.3, η $\mathfrak{C}$ είναι *ισομορφική* στην *πολύπλοκη άλγεβρα* της *ξένης ένωσης* $\mathcal{E}$ της *οικογένειας* $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$:

$$\mathfrak{C} \cong \mathcal{E}^+ = (\uplus_{i\in I} \mathcal{E}_i)^+ .$$

Εφόσον η **K** είναι κλειστή για *ξένες ενώσεις*, το $\mathcal{E} \in$ **K**.
Τώρα έχουμε την ακόλουθη εικόνα: $\mathcal{F}^+ \twoheadleftarrow \mathcal{B} \rightarrowtail \mathcal{E}^+$. Από την πρόταση 3.1.2 έπεται ότι:

$$(\mathcal{F}^+)_+ \twoheadleftarrow (\mathcal{B})_+ \rightarrowtail (\mathcal{E}^+)_+.$$

Αφού η **K** είναι κλειστή για *υπερδυνάμεις* (*ultrapowers*), από γνωστό θεώρημα έχουμε ότι $(\mathcal{E}^+)_+ = \boldsymbol{ue}\mathcal{E} \in$ **K**. Επειδή όμως η **K** είναι κλειστή για σχηματισμό *φραγμένων μορφικών εικόνων* και *παραγόμενα υποπλαίσια*, έπεται ότι $\mathcal{B}_+$ και $\boldsymbol{ue}\mathcal{F} = (\mathcal{F}^+)_+ \in \mathbf{K}$. Αλλά τότε και το $\mathcal{F} \in \mathbf{K}$, αφού η **K** αντανακλά *επεκτάσεις υπερφίλτρων*. ▫

Το επόμενο θεώρημα μας δείχνει τη σχέση μεταξύ *κανονικών ποικιλιών* και *πρωτοβάθμια ορίσιμων κλάσεων από πλαίσια*.

Θα κάνουμε εδώ δύο παρατηρήσεις. (α) Κάθε *στοιχειώδης κλάση από πλαίσια* είναι κλειστή για τον *σχηματισμό υπεργινομένων*. (β) Έστω *τ τροπικός τύπος ομοιότητας*, και **K** μια *κλάση τ-πλασίων*. Η *ποικιλία* που παράγεται από την **K** (συμβολικά $\mathbf{V_K}$) είναι η *κλάση* **HSPCmK**. ▫

Θεώρημα 3.1.10 ***Κανονικές ποικιλίες* και *πρωτοβάθμια ορίσιμες κλάσεις πλαισίων*.** *Έστω τ τροπικός τύπος ομοιότητας, και* K *κλάση τ-πλαισίων η οποία είναι κλειστή για υπερδυνάμεις. Τότε η ποικιλία* $\mathbf{V_K}$ *είναι κανονική.*

Απόδειξη. Έστω ότι η **K** είναι κλειστή για *υπερδυνάμεις*. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι η *κλάση* **HSPCmK** είναι *κανονική*. Έστω $\mathcal{B} \in \mathbf{K}$, δηλαδή έστω ότι $\exists \mathcal{F} \in$ K και άλγεβρα $\mathfrak{C}$ τέτοια που

$$\mathcal{B} \twoheadleftarrow \mathfrak{C} \rightarrowtail \mathcal{F}^+.$$

Έπεται από την πρόταση 3.1.2 ότι

$$\mathfrak{Cm}\mathcal{B} \twoheadleftarrow \mathfrak{Cm}\mathfrak{C} \rightarrowtail \mathfrak{Cm}\mathcal{F}^+ = (\boldsymbol{ue}\mathcal{F})^+. \quad (3.1.10.α)$$

Από γνωστό θεώρημα ξέρουμε ότι $\boldsymbol{ue}\mathcal{F}$ είναι η *φραγμένη μορφική εικόνα κάποιας υπερδύναμης* $\mathcal{E}$ του $\mathcal{F}$. Από την υπόθεση ξέρουμε ότι $\mathcal{E} \in \mathbf{K}$. Από την πρόταση 3.1.2 παίρνουμε

$$(\boldsymbol{ue}\mathcal{F})^+ \rightarrowtail \mathcal{E}^+. \quad (3.1.10.β)$$

Όμως $\mathcal{E}^+ \in$ **CmK**, και από τις (3.1.10.α) και (3.1.10.β) παίρνουμε ότι $\mathfrak{Cm}\mathcal{B} \in$ **HSCmK**. Άρα η κλάση είναι *κανονική*.

Για να αποδείξουμε ότι η *ποικιλία* που παράγεται από την **K** είναι *κανονική*, χρειαζόμαστε ένα επιπλέον στοιχείο. Σύμφωνα με πρόταση της τροπικής λογικής, η *υπερδύναμη* μιας *ξένης ένωσης* μπορεί να επιτευχθεί ως μια *φραγμένη μορφική εικόνα μιας ξένης ένωσης υπεργινομένων*.

Έστω ότι $\mathcal{B} \in \mathbf{V_K} =$ **HSPCmK**. Με άλλα λόγια, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια *οικογένεια* $\{\mathcal{F}_i \mid i \in I\}$ *πλαισίων* στην **K** και μια *άλγεβρα* $\mathfrak{C}$ τέτοια που

$$\mathcal{B} \twoheadleftarrow \mathfrak{C} \rightarrowtail \textstyle\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i^+.$$

Για να αποδείξουμε ότι $\mathfrak{Cm}\mathcal{B} \in$ **HSCmK**, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathfrak{Cm}(\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i^+) \in$ **SPCmK**. Η υπόλοιπη απόδειξη είναι όπως πριν. Έστω $\mathcal{F}$ το πλαίσιο $\biguplus_{i \in I} \mathcal{F}_i$. Τότε από την προταση 3.1.3, $\mathcal{F}^+ \cong \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i^+$. Άρα από την πρόταση 3.1.2:

$$\mathfrak{Cm}(\textstyle\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i^+) \cong ((\mathcal{F}^+)_+)^+ = (\boldsymbol{ue}\mathcal{F})^+. \quad (3.1.10.γ)$$

Από γνωστό θεώρημα, υπάρχει *υπερδύναμη* $\mathcal{E}$ του $\mathcal{F}$ τέτοια που $\mathcal{E} \twoheadrightarrow \boldsymbol{ue}\mathcal{F}$. Εφαρμόζοντας γνωστή πρόταση της τροπικής λογικής, προκύπτει ένα *πλαίσιο* $\mathcal{H}$ τέτοιο που (i) το $\mathcal{H}$ είναι μια *ξένη ένωση* από *υπεργινόμενα πλαισίων* στην **K**, και (ii) $\mathcal{H} \twoheadrightarrow \mathcal{E}$. Συνδυάζοντας αυτές τις παρατηρήσεις παίρνουμε $\mathcal{F} \twoheadleftarrow \mathcal{E} \twoheadleftarrow \mathcal{H}$. Άρα από την πρόταση 3.1.2:

$$(\boldsymbol{ue}\mathcal{F})^{+} \twoheadleftarrow \mathcal{E}^{+} \twoheadleftarrow \mathcal{H}^{+}. \text{ (3.1.10.δ)}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι το $\mathcal{H}$ είναι μια *ξένη ένωση πλαισίων* μέσα στην **K**, αφού η **K** είναι κλειστή για *υπεργινόμενα*. Από αυτό παίρνουμε ότι $\mathcal{H}^{+} \in$ **PCmK**. Αλλά τότε από τις (3.1.10.γ) και (3.1.10.δ) έχουμε ότι $\mathfrak{Cm}(\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i^{+}) \in$ **SPCmK**, το οποίο και θέλαμε. ▫

Σε όρους *τροπικής λογικής* το παραπάνω θεώρημα είναι ουσιαστικά το εξής συμπέρασμα.

Πόρισμα 3.1.11. ***Κανονικές λογικές* και *τροπικές θεωρίες*.** *Έστω τ τροπικός τύπος, και* **K** *κλάση τ-πλαισίων η οποία είναι κλειστή για υπεργινόμενα. Τότε η τροπική θεωρία της* **K** *είναι μια κανονική λογική.*

Ένα από τα πλέον γνωστά ανοιχτα προβλήματα είναι αν ισχύει και το *αντίστροφο* του θεωρήματος που μόλις αποδείξαμε.

Πρόταση 3.1.12. ***Ανοιχτό πρόβλημα* .** *Έστω τ τροπικός τύπος ομοιότητας, και* **V** *μια κανονική ποικιλία αλγεβρών Boole με τ-τελεστές. Υπάρχει κλάση τ-πλαισίων* **K**, *κλειστή για υπεργινόμενα, τέτοια που η* **V** *να παράγεται από την* **K**; ▫

3.2. Γενικά πλαίσια.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα συζητήσουμε για μια ενδιάμεση *σημασιολογία*, η οποία κατά κάποιο τρόπο ενώνει τη *σχεσιακή* με την *αλγεβρική σημασιολογία*. Όπως θα δούμε, ένα *γενικό πλαίσιο*, το οποίο είχαμε ορίσει σην αρχή της εργασίας μας, είναι ουσιαστικά ένα σύνηθες *πλαίσιο* στο οποίο έχει προστεθεί μια *άλγεβρα Boole με τελεστές*. Το ενδιαφέρον με τα *γενικά πλαίσια* είναι ότι από τη μια μπορούμε να αποδείξουμε ένα θεμελιώδες *θεώρημα πληρότητας* για την *τροπική λογική*, ενώ από την άλλη είναι τόσο διαισθητικά απλά όσο και η συνηθισμένη *σχεσιακή σημασιολογία*.

Στην συνέχεια θα (ξανα)ορίσουμε τα *γενικά πλαίσια*, θα δούμε κάποιες σημαντικές *κλάσεις γενικών πλαισίων* και θα αναλύσουμε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των *γενικών πλαισίων*, των *απλών πλαισίων* και των BAT.

Για τυχαίο *τροπικό τύπο ομοιότητας τ*, ένα *γενικό πλαίσιο* ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 3.2.1. ***Γενικά τ-πλαίσια.*** Έστω *τ τροπικός τύπος ομοιότητας*. Ένα *γενικό τ-πλαίσιο* είναι ένα ζεύγος $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, A)$, τέτοιο που $\mathcal{F} = (W, R_{\triangle})_{\triangle \in \tau}$ είναι *τ-πλαίσιο*, και A είναι ο *φορέας* μιας *πολύπλοκης άλγεβρας* πάνω στο $\mathcal{F}$. Δηλαδή, το A είναι μια *μη-κενή συλλογή από υποσύνολα* του W, που είναι κλειστό για τους *τελεστές Boole* και την *τροπική λειτουργία* $m_{R\triangle}(X_1,\ldots,X_n)$, για κάθε $\triangle \in \tau$.

Μια *αποτίμηση* V στο $\mathcal{F}$ καλείται *επιτρεπτή* (*admissible*) για το $\mathcal{G}$, αν για κάθε *προτασιακή μεταβλητή* p, το $V(p)$ είναι ένα *επιτρεπτό* υποσύνολο του W, δηλαδή είναι στοιχείο του A. Ένα *μοντέλο βασισμένο σε ένα γενικό πλαίσιο*, είναι μια τριάδα $(\mathcal{F}, A, V)$, όπου $(\mathcal{F}, A)$ είναι *γενικό* *πλαίσιο* και V είναι μια *επιτρεπτή αποτίμηση* για το $(\mathcal{F}, A)$. Η *αλήθεια* σε ένα τέτοιο *μοντέλο* ορίζεται με τον προφανή τρόπο, δηλαδή, σαν να μιλούσαμε για το *μοντέλο* $(\mathcal{F}, V)$.

Για να αποφύγουμε τη σύγχυση, θα χρησιμοποιούμε τον όρο 'Kripke *πλαίσιο'* όταν θα μιλάμε για τα συνηθισμένα *πλαίσια*, δηλαδή αυτά που δεν είναι *γενικά πλαίσια*. ▫

Η έννοιες της *εγκυρότητας* και της *σημασιολογικής συνεπαγωγής* για *κλάσεις γενικών πλαισίων* ορίζονται με τον αναμενόμενο τρόπο:

Ορισμός 3.2.2. ***Εγκυρότητα σε γενικά τ-πλαίσια.*** Έστω $\mathcal{g}$ ένα *γενικό πλαίσιο*. Ένας τύπος φ είναι *έγκυρος* στο $\mathcal{g}$, αν ο φ ισχύει σε κάθε κατάσταση του $\mathcal{g}$, υπό οποιαδήποτε *επιτρεπτή αποτίμηση* V. Ο ίδιος ορισμός ισχύει και για *σύνολα τύπων* καθώς και για *κλάσεις γενικών πλαισίων*.

Για ένα *σύνολο τύπων*, και πιο συγκεκριμένα για μια *κανονική τροπική λογική* Λ, ένα *γενικό πλαίσιο* θα καλείται *Λ-πλαίσιο*, αν η Λ είναι *έγκυρη* στο *πλαίσιο*.

Έστω **K** μια *κλάση γενικών πλαισίων*, Σ ένα *σύνολο πλαισίων* και φ τύπος. Θα λέμε ότι το Σ *συνεπάγεται σημασιολογικά* τον φ πάνω στην *κλάση* **K**, αν για κάθε *γενικό πλαίσιο* $\mathcal{g}$ στην **K**, κάθε *επιτρεπτή αποτίμηση* V στο $\mathcal{g}$ και κάθε κατάσταση s στο $\mathcal{g}$, έχουμε ότι $(\mathcal{g}, V), s \Vdash \Sigma \Rightarrow (\mathcal{g}, V), s \Vdash \varphi$.▫

Όπως θα δούμε στο παρακάτω *θεώρημα πληρότητας*, τα *γενικά πλαίσια* μοιράζονται μια ιδιότητα των BAT. Παρέχουν μια *επαρκή σημασιολογία* για *κανονικές τροπικές λογικές*.

Θεώρημα 3.2.3. ***Κανονικές λογικές* και *γενικά πλαίσια.*** *Έστω Λ μια κανονική τροπική λογική. Τότε η Λ είναι έγκυρη και ισχυρά πλήρης ως προς την κλάση των γενικών Λ-πλαισίων.*

Απόδειξη. Η *εγκυρότητα* προκύπτει άμεσα. Για την *πληρότητα*, έστω το *κανονικό πλαίσιο* $f^c_\Lambda = (\mathcal{F}^c_\Lambda, \{\hat{\phi} \mid$ ο φ είναι τύπος$\})$. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι $f^c_\Lambda \Vdash \Lambda$. Έστω ότι $\Sigma \nVdash_\Lambda \varphi$. Έπεται ότι το σύνολο $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ είναι Λ-συνεπές. Από τον ορισμό του *κανονικού πλαισίου* και από το Λήμμα Αλήθειας, υπάρχει κατάσταση $s \in f^c_\Lambda$, τέτοια που $(f^c_\Lambda, V^c), s \Vdash \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$. Αφού η *κανονική αποτίμηση* V^c είναι *επιτρεπτή*, αυτό σημαίνει ότι αποδείξαμε ότι δεν ισχύει ο ισχυρισμός ότι ο φ είναι *σημασιολογική συνέπεια* του Σ στην κλάση των γενικών Λ-πλαισίων.▫

Ο ακόλουθος ορισμός μας δίνει κάποιες σημαντικές *ιδιότητες* και *κλάσεις γενικών πλαισίων*.

Ορισμός 3.2.4. ***Ιδιότητες γενικών πλαισίων.*** **(α)** Έστω τ *τροπικός τύπος ομοιότητας*, και $\mathcal{g} = (\mathcal{F}, A)$ ένα *γενικό τ-πλαίσιο*, όπου $\mathcal{F}$ το Kripke *τ-πλαίσιο* $(W, R_\triangle)_{\triangle\in\tau}$. Τότε το $\mathcal{g}$ καλείται:

εξειδικευμένο (*differentiated*) αν $\forall\, s, t \in W$:

$$s = t \text{ ανν } \forall a \in A (s \in a \Leftrightarrow t \in a),$$

σφικτό (*tight*) αν για κάθε $\triangle \in \tau$ (έστω ότι $\rho(\triangle)=n$), και για όλα τα $s, s_1, \ldots, s_n \in W$:

$$R_\triangle\, s s_1 \ldots s_n \text{ ανν } \forall\, a_1, \ldots, a_n \in A((\textstyle\bigwedge_i s_i \in a_i) \Rightarrow s_i \in m_{R\triangle}(a_1, \ldots, a_n)),$$

συμπαγές (*compact*) αν $\bigcap A_0 \neq \varnothing$, για κάθε υποσύνολο A_0 του A, το οποίο έχει την *ιδιότητα της πεπερασμένης τομής*,

καθαρό (*refined*) αν το $\mathcal{g}$ είναι differentiated και tight,

περιγραφικό (*descriptive*) αν το $\mathcal{g}$ είναι refined και compact,

γεμάτο (*full*) αν κάθε υποσύνολο του W είναι *επιτρεπτό*, δηλαδή, αν $A = P(W)$, και

διακριτό (*discrete*) αν κάθε *μονοσύνολο* είναι *επιτρεπτό*, δηλαδή, αν $\{s\} \in A$ για κάθε $s \in W$.

Όταν θα είναι εμφανές ότι μιλάμε για *γενικά πλαίσια* και όχι για Kripke *πλαίσια* δεν θα χρησιμοποιούμε το επίθετο «*γενικά*» μπροστά από τη λέξη «*πλαίσια*». Δηλαδή θα γράφουμε «*σφικτό πλαίσιο*» αντί για «*σφικτό γενικό πλαίσιο*». ▫

Ο καλύτερος τρόπος για να κατανοήσουμε την έννοια της *εξειδίκευσης* είναι να παρατηρήσουμε ότι ένα *γενικό πλαίσιο* είναι *εξειδικευμένο* αν και μόνο αν για κάθε διαφορετικό ζεύγος καταστάσεων s και t, υπάρχει ένα *επιτρεπτό σύνολο α* που *μαρτυρά* αυτή τη διαφορά, δηλαδή ότι $s \in \alpha$ και $t \notin \alpha$. Αντίστοιχα ένα *γενικό πλαίσιο* είναι *σφικτό* αν και μόνο αν για κάθε κατάσταση s και κάθε κατάσταση t που δεν είναι *προσβάσιμη* από την s, υπάρχει ένα *επιτρεπτό σύνολο α* που *μαρτυρα* αυτό ακριβώς, δηλαδή $t \in s$ και $s \notin m_{R\Diamond}(\alpha)$. Η *εξειδίκευση* και η *σφικτότητα* επομένως είναι μια ένδειξη ότι υπάρχουν πολλά *επιτρεπτά σύνολα*.
Για την συμπάγεια ας θεωρήσουμε μια *συλλογή* A_0 από επιτρεπτά σύνολα. Αν το A_0 δεν είναι *πεπερασμένα αντιφατικό*, δηλαδή υπάρχει μια κατάσταση στην *τομή οποιασδήποτε πεπερασμένης υποσυλλογής* της A_0, τότε υπάρχει κάποια κατάσταση που ανήκει σε όλα τα σύνολα της A_0.
Μια απλή εφαρμογή στον παραπάνω ορισμό είναι και η εξής.

Πρόταση 3.2.5. ***Διακριτά γενικά πλαίσια.*** *Τα διακριτά πλαίσια είναι καθαρά.*

Απόδειξη. Θα κοιτάξουμε μόνο την *σφικτότητα* και θα περιοριστούμε στον *βασικό τύπο ομοιότητας*. Έστω $\mathcal{g}=(W, R, A)$ ένα *διακριτό πλαίσιο*, και έστω ότι η κατάσταση t δεν είναι επόμενη της κατάστασης s. Τότε $s \notin m_R(\{t\})$, ενώ προφανώς $t \in \{t\}$. Από τον ορισμό της *διακριτότητας*, το $\{t\}$ είναι *επιτρεπτό*. ▫

Η σημαντικότερη *κλάση* που ορίσαμε παραπάνω είναι αυτή των *περιγραφικών πλαισίων*. Ένας λόγος είναι ότι ουσιαστικά από την σκοπιά της *θεωρίας κατηγοριών*, τα *περιγραφικά γενικά πλαίσια* είναι το ίδιο *μαθηματικό αντικείμενο* με τις *άλγεβρες Boole με τελεστές*. Για παράδειγμα θα δείξουμε ότι ότι κάθε BAT μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα *περιγραφικό γενικό πλαίσιο*.

Πρόταση 3.2.6. ***Περιγραφικά γενικά πλαίσια* και *κανονικές λογικές*.** *Έστω τ τροπικός τύπος ομοιότητας, και Λ μια κανονική τροπική τ-λογική. Τότε το* f_Λ^c *είναι ένα περιγραφικό γενικό πλαίσιο.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι το f_Λ^c είναι *εξειδικευμένο*, έστω Γ και Δ *διακριτά μεγιστικά Λ-συνεπή σύνολα τύπων*. Με άλλα λόγια, υπάρχει τύπος γ τέτοιος που $\gamma \in \Gamma$, ενώ $\gamma \notin \Delta$. Αλλά τότε $\Gamma \in \hat{\gamma}$, ενώ $\Delta \notin \hat{\gamma}$. Με τον ίδιο εύκολο τρόπο αποδεικνύουμε και την *σφικτότητα*, χρησιμοποιώντας απλά τον ορισμό της *κανονικής σχέσης προσβασιμότητας*.

Για την *συμπάγεια*, έστω ότι $S := \{\hat{\sigma} \mid \sigma \in \Sigma\}$ είναι μια *συλλογή* από *επιτρεπτά σύνολα*, και ότι έχει την *ιδιότητα πεπερασμένης τομής*. Έπεται ότι το Σ είναι *συνεπές*, γιατί αν δεν ήταν, τότε υπάρχουν $\sigma_1, ..., \sigma_n \in \Sigma$ τέτοια που $\vdash_\Lambda (\sigma_1 \wedge ... \wedge \sigma_n) \to \bot$. Αυτό συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει *μεγιστικό Λ-συνεπές σύνολο* Γ τέτοιο που $\sigma_i \in \Gamma$ για κάθε $i \leq n$. Αλλά τότε $\hat{\sigma}_1 \cap ... \cap \hat{\sigma}_n = \emptyset$, το οποίο αντιτίθεται στην υπόθεσή μας για το S.

Αλλά αν το Σ είναι *συνεπές*, τότε μπορεί να *επεκταθεί* σε ένα *μεγιστικά Λ-συνεπές σύνολο* Σ^+. Έπεται άμεσα ότι $\Sigma^+ \in \bigcap \{\hat{\sigma} \mid \sigma \in \Sigma\}$. Αυτό ακριβώς μας *μαρτυρά* ότι το S έχει *μη κενή τομή*. ▫

Θα κοιτάξουμε τώρα τη σχέση μεταξύ *πλαισίων*, *γενικών πλαισίων* και ΒΑΤ. Πρώτα θα χρειαστούμε κάποιες έννοιες από τη θεωρία των Kripke *πλαισίων*.

Ορισμός 3.2.7. ***Φραγμένοι μορφισμοί*, *εμφυτεύσεις*, *ισομορφισμοί* και *ξένες ενώσεις*.** Έστω $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, A)$ και $\mathcal{G}' = (\mathcal{F}', A')$ δύο *γενικά πλαίσια*, και έστω ότι $\mathcal{F} = (W, R_\Delta)_{\Delta\in\tau}$, και $\mathcal{F}' = (W', R'_\Delta)_{\Delta\in\tau}$. Μια συνάρτηση θ: $W \to W'$, καλείται *φραγμένος μορφισμός μεταξύ των* $\mathcal{G}$ και $\mathcal{G}'$ (συμβολικά θ:$\mathcal{G} \to \mathcal{G}'$), αν η θ είναι *φραγμένος μορφισμός μεταξύ των πλαισίων* $\mathcal{F}$ και $\mathcal{F}'$ τέτοιος που

$$\theta^{-1}(a') \in A \text{ για κάθε } a' \in A'. \quad (3.2.7.α)$$

Ένας τέτοιος *φραγμένος μορφισμός* θ, καλείται *εμφύτευση* αν είναι *μονομορφισμός* και ικανοποιεί το εξής:

$$\text{για κάθε } a \in A \text{ υπάρχει } a' \in A' \text{ τέτοιο ώστε } \theta[a] = \theta[W] \cap a'. \quad (3.2.7.β)$$

Εδώ έχουμε ότι $\theta[a] = \{\theta(s) \mid s \in a\}$, ενώ γράφουμε $\mathcal{G} \rightarrowtail \mathcal{G}'$ για να συμβολίσουμε ότι το $\mathcal{G}$ μπορεί να *εμφυτευθεί* στο $\mathcal{G}'$.

Το *γενικό πλαίσιο* $\mathcal{G}'$ καλείται *φραγμένη μορφική εικόνα* του $\mathcal{G}$ (συμβολικά $\mathcal{G} \twoheadrightarrow \mathcal{G}'$), αν υπάρχει *φραγμένος επιμορφισμός* από το $\mathcal{G}$ στο $\mathcal{G}'$. Δύο γενικά πλαίσια $\mathcal{G}$ και $\mathcal{G}'$ είναι *ισομορφικά* αν υπάρχει *εμφύτευση* που είναι και *επί*, θ: $\mathcal{G} \to \mathcal{G}'$.

Έστω ότι για κάθε $i \in I$, το $\mathcal{G}_i$ είναι το *γενικό πλαίσιο* $(\mathcal{F}_i, A_i)$. Ορίζουμε την *ξένη ένωση* $\biguplus_i \mathcal{G}_i$, της *οικογένειας* $(\mathcal{G}_i)_{i\in I}$, ως το *γενικό πλαίσιο* $(\biguplus_i \mathcal{F}_i, A_i)$, όπου το A αποτελείται από αυτά τα *υποσύνολα* $a \subseteq \bigcup_i W_i$, που ικανοποιούν το $a \cap W_i \in A_i$, για κάθε $i \in I$. ▫

Όπως και στα Kripke *πλαίσια*, έτσι και οι ορισμοί που δώσαμε παραπάνω διατηρούν την *αλήθεια*. Το ακόλουθο πόρισμα προκύπτει εύκολα από τους ορισμούς.

Πόρισμα 3.2.8. Οι *ξένες ενώσεις*, οι *φραγμένες μορφικές εικόνες* και οι *εμφυτεύσεις* *διατηρούν* την *αλήθεια*. *Έστω τ τροπικός τύπος ομοιότητας, και φ τ-τύπος.*

(i) *Έστω* $\{\mathcal{G}_i \mid i \in I\}$ *μια οικογένεια γενικών πλαισίων. Τότε* $\biguplus \mathcal{G}_i \Vdash \varphi$ *αν* $\mathcal{G}_i \Vdash \varphi$, για κάθε $i \in I$.

(ii) *Έστω ότι* $\mathcal{G}' \rightarrowtail \mathcal{G}$. Αν $\mathcal{G} \Vdash \varphi$ τότε $\mathcal{G}' \Vdash \varphi$.

(iii) *Έστω ότι* $\mathcal{G} \twoheadrightarrow \mathcal{G}'$. Αν $\mathcal{G} \Vdash \varphi$ τότε $\mathcal{G}' \Vdash \varphi$.

Ακολούθως θα ορίσουμε μια σειρά από *λειτουργίες* που μας επιτρέπουν να κατασκευάζουμε *γενικά πλαίσια* από Kripke *πλαίσια* ή από ΒΑΤ, και *αντίστροφα*.

Ορισμός 3.2.9. ***Γενικά πλαίσια υπερφίλτρων.*** Έστω *τ τροπικός τύπος ομοιότητας*, και έστω $\mathcal{G} = (W, R_\triangle, A)_{\triangle\in\tau}$ ένα *γενικό πλαίσιο*. Το *υποβόσκον τ-πλαίσιο* του $\mathcal{G}$ δίνεται από το $\mathcal{G}_\# = (W, R_\triangle)_{\triangle\in\tau}$. Έπεται από τις *συνθήκες κλειστότητας* στο A ότι η δομή

$$\mathcal{G}^* = (A, \cup, -, \varnothing, m_{R\triangle})_{\triangle\in\tau}$$

είναι μια *άλγεβρα boole με τ-τελεστές*. Αυτή η *άλγεβρα* καλείται *υποβόσκουσα άλγεβρα Boole με τ-τελεστές του* $\mathcal{G}$.
Αντιστρόφως, το *πλήρες τ-πλαίσιο ενός τ-πλαισίου* $\mathcal{F} = (W, R_\triangle)_{\triangle\in\tau}$ δίνεται από το

$$\mathcal{F}^\# = (\mathcal{F}, P\,(W)).$$

Το *γενικό πλαίσιο υπερφίλτρων* μιας ΒΑΤ $\mathcal{B} = (B, +, -, 0, f_\triangle)_{\triangle\in\tau}$ ορίζεται ως εξής

$$\mathcal{B}_* = (\, \mathcal{B}_+, \{\hat{b} \ | b \ \in B\}),$$

όπου το $\hat{b} \subseteq Uf\mathcal{B}$ ορίζεται ως το *σύνολο των υπερφίλτρων u* τέτοιο που $b \in u$:

$$\hat{b} = \{ u \in Uf\mathcal{B} \mid b \in u \}. \ ▫$$

Υπάρχουν πολλοί τρόποι να συνδυάσουμε τις παραπάνω *λειτουργίες*.

Πρόταση 3.2.10. ***Ιδιότητες γενικών πλαισίων.*** **(β)** *Έστω τ τροπικός τύπος ομοιότητας,* $\mathcal{F}$ *τ πλαίσιο,* $\mathcal{G}$ *γενικό τ- πλαίσιο και* $\mathcal{B}$ *μια άλγεβρα Boole με τ-τελεστές. Τότε*

(i) $(\mathcal{F}^\sharp)_\sharp \ = \ \mathcal{F}$,
(ii) $(\mathcal{F}^\sharp)^* \ = \ \mathcal{F}^+$,
(iii) $(\mathcal{B}_*)_\sharp \ = \ \mathcal{B}_+$,
(iv) $(\mathcal{G}_\sharp)^\sharp \ = \ \mathcal{G}$ *ανν το* $\mathcal{G}$ *είναι full.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή των ορισμών. ▫

Το ακόλουθο θεώρημα μας δείχνει τη σχέση μεταξύ των ΒΑΤ και των *γενικών πλαισίων*.

Θεώρημα 3.2.11. ***Ιδιότητες γενικών πλαισίων.*** **(γ)** *Έστω τ τροπικός τύπος ομοιότητας,* $\mathcal{G}$ *γενικό τ- πλαίσιο και* $\mathcal{B}$ *μια άλγεβρα boole με τ-τελεστές. Τότε για κάθε τ-τύπο φ*:

$$\mathcal{G} \Vdash \varphi \quad \text{ανν} \quad \mathcal{G}^* \vDash \varphi \approx \top,$$
$$\mathcal{B} \vDash \varphi \approx \top \quad \text{ανν} \quad \mathcal{B}_* \Vdash \varphi.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη έπεται από τα παραπάνω θεωρήματα. ▫

Στο επόμενο θεώρημα βλέπουμε ότι οι BAT και τα *περιγραφικά γενικά πλαίσια* είναι όντως το ίδιο *μαθηματικό αντικείμενο*.

Θεώρημα 3.2.12. ***Περιγραφικά γενικά πλαίσια*** **και BAT.** *Έστω τ τροπικός τύπος ομοιότητας,* $\mathcal{G}$ *γενικό τ- πλαίσιο και* $\mathcal{B}$ *μια άλγεβρα Boole με τ-τελεστές. Τότε*

(i)$\mathcal{B}_*$ είναι ένα *περιγραφικό γενικό πλαίσιο*,

(ii) $(\mathcal{B}_*)^* \cong \mathcal{B}$,

(iii) $(\mathcal{G}^*)_* \cong \mathcal{G}$ *ανν το* $\mathcal{G}$ *είναι περιγραφικό*.

Απόδειξη. Για ευκολία στον συμβολισμό θα υποθέσουμε ότι ο *τ* έχει μόνο ένα *τροπικό τελεστή* $\triangle$, με *πλήθος ορισμάτων n*.

(i) Αυτό το μέρος της απόδειξης είναι παρόμοιο με την απόδειξη του ότι κάθε *κανονικό γενικό πλαίσιο είναι περιγραφικό* (Πρόταση 3.2.6).

(ii) Έστω $\mathcal{B} = (B, +, -, f)$ μια *άλγεβρα Boole με τελεστή*. Τότε το $\mathcal{B}_*$ είναι ένα *γενικό πλαίσιο* που το Kripke *πλαίσιο* του, είναι της μορφής $(Uf\mathcal{B}, Q_f)$, ενώ τα *επιτρεπτά σύνολα* είναι της μορφής $\hat{\alpha}$, με α $\in A$. Συνεπώς ο *κουβαλητής* της *άλγεβρας* $(\mathcal{B}_*)^*$, αποτελείται από όλα τα στοιχεία $\hat{\alpha}$, και ο *τελεστής* του είναι της μορφής m_{Qf}. (Οι ορισμοί των Q και m βρίσκονται στα Ορισμός 2.3.5 και Ορισμός 2.2.3). Προφανώς, αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση r: $A \to P(Uf\mathcal{B})$, που δίνεται από τον τύπο

$$r : α \mapsto \hat{\alpha} ,$$

είναι ένας BAT- *ισομορφισμός*. Αλλά από το θεώρημα 2.3.8, έπεται ότι η r είναι *μονομορφισμός*, και ο *επιμορφισμός* είναι άμεσος από τους ορισμούς.

(iii) Η «μόνον αν» κατεύθυνση έπεται άμεσα από το (i). Για την άλλη κατεύθυνση, ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{G} = (W, R, A)$ είναι ένα *περιγραφικό πλαίσιο*. Για κάθε κατάσταση $s \in W$, ορίζουμε το U_s να είναι το *σύνολο των επιτρεπτών συνόλων α*, τέτοιων που $s \in α$. Υποστηρίζουμε ότι αυτά τα *σύνολα* αποτελούν ακριβώς το *σύνολο των υπερφίλτρων* του $\mathcal{G}^*$, δηλαδή ότι:

$$\{ Us \mid s \in W \} = Uf\mathcal{G}^* .(3.2.12.α)$$

Η *συμπερίληψη* '$\subseteq$' είναι προφανής. Για την άλλη κατεύθυνση, έστω *u* ένα *τυχαίο υπερφίλτρο* της BAT του $\mathcal{G}^*$, δηλαδή της *άλβεβρας Boole* $(A, \cup, -, \varnothing)$. Αφού τα *υπερφίλτρα είναι κλειστά ως προς την τομή* και δεν περιέχουν ποτέ το *κενό σύνολο*, έπεται ότι το *u* έχει την *ιδιότητα πεπερασμένης τομής*. Από *συμπάγεια*, $\exists s$ τέτοιο που $s \in \bigcap u$. Από αυτό παίρνουμε ότι $u \subseteq U_s$. Αλλά εφόσον το U_s είναι και *υπερφίλτρο* του $(A, \cup, -, \varnothing)$, παίρνουμε ότι $u = U_s$. Οπότε αποδείξαμε την (3.2.12.α).

Έστω τώρα το *γενικό πλαίσιο* $(\mathcal{g}^*)_*$. Αφού οι καταστάσεις του είναι τα *υπερφίλτρα* του $\mathcal{g}^*$, από τη (3.2.12.α) παίρνουμε ότι η συνάρτηση θ, που δίνεται από τον τύπο θ: $s \mapsto U_s$, είναι συνάρτηση από το *σύμπαν* W του g επί του *σύμπαντος* $Uf\mathcal{g}^*$ του $(\mathcal{g}^*)_*$. Το 1-1 έπεται από την *εξειδίκευση* του $\mathcal{g}$. Επομένως, η συνάρτηση θ: $W \rightarrow Uf\mathcal{g}^*$ είναι 1-1 και επί.

Θα δείξουμε ότι η θ είναι *ισομορφισμός* μεταξύ *γενικών πλαισίων*. Έστω R' η σχέση *προσβασιμότητας* του Δ στο $(\mathcal{g}^*)_*$. Από τον ορισμό της R', για τα *υπερφίλτρα* u, u_1, …, u_n έχουμε:

$$R'uu_1\ldots u_n \quad \textit{ανν} \quad \forall a_1,\ldots,a_n \in A\ (\bigwedge a_i \in u_i \Rightarrow m_R\,(a_1,\ldots,a_n) \in u).\ (3.2.12.\beta)$$

Έστω s, s_1,…, s_n τυχαία σημεία του $\mathcal{g}$. Από την *σφικτότητα*, έχουμε:

$$Rss_1\ldots s_n \quad \textit{ανν} \quad \forall a_1,\ldots,a_n \in A\ (\bigwedge s_i \in a_i \Rightarrow s \in m_R\,(a_1,\ldots,a_n)).\ (3.2.12.\gamma)$$

Αλλά από τον ορισμό της θ, έχουμε $t \in a$ *ανν* $a \in \theta(t)$, για κάθε $t \in W$. Οπότε από την (3.2.12.γ) έπεται ότι:

$$Rss_1\ldots s_n \quad \textit{ανν} \quad \forall a_1,\ldots,a_n \in A\ (\bigwedge a_i \in \theta(s_i) \Rightarrow m_R\,(a_1,\ldots,a_n) \in \theta(s)).\ (3.2.12.\delta)$$

Αλλά από τις (3.2.12.β) και (3.2.12.δ) παίρνουμε ότι:

$$Rss_1\ldots s_n \quad \textit{ανν} \quad R'\theta(s)\theta(s_1)\ldots\theta(s_n).$$

Με άλλα λόγια, η θ είναι *ισομορφισμός* μεταξύ των *υποκείμενων* Kripke *πλαισίων* των $\mathcal{g}$ και $(\mathcal{g}^*)_*$.

Τελειώνοντας, έστω a, ένα *τυχαίο επιτρεπτό σύνολο* του $\mathcal{g}$. Θα δείξουμε ότι το $\theta(a)$ είναι ένα *επιτρεπτό σύνολο* του $(\mathcal{g}^*)_*$. Από τον ορισμό του *τελεστή* $(\bullet)^*$, το a είναι μέλος του *κουβαλητή* του $\mathcal{g}^*$. Άρα, από τον ορισμό του *τελεστή* $(\bullet)_*$, το σύνολο $\hat{\alpha} := \{u \in Uf(\mathcal{g}^*) |\ a \in u\}$ είναι ένα *επιτρεπτό σύνολο* του $(\mathcal{g}^*)_*$. Εύκολα επιβεβαιώνουμε ότι $\hat{\alpha} = \theta(a)$, και άρα τελικά ότι $a = \theta^{-1}[\hat{\alpha}]$. ▫

Ένα άμεσο πόρισμα των θεωρημάτων 3.2.11 και 3.2.12 είναι ότι κάθε *γενικό πλαίσιο* έχει ένα ισοδύναμο *περιγραφικό γενικό πλαίσιο*.

Πόρισμα 3.2.13. ***Περιγραφικά γενικά πλαίσια* και *γενικά πλαίσια*.** *Έστω* $\mathcal{g}$ *ένα γενικό τ-πλαίσιο για κάποιο τροπικό τύπο ομοιότητας τ. Τότε το* $(\mathcal{g}^*)_*$ *είναι ένα περιγραφικό γενικό πλαίσιο ισοδύναμο του* $\mathcal{g}$, *δηλαδή για κάθε τ-τύπο* φ:

$$\mathcal{g} \Vdash \varphi \quad \textit{ανν} \quad (\mathcal{g}^*)_* \Vdash \varphi.\ ▫$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε τις κατασκευές που δώσαμε στον ορισμό 3.2.9 σε *μορφισμούς* μεταξύ *αλγεβρών* ή μεταξύ *γενικών πλαισίων*.

Ορισμός 3.2.14. ***Γενικά πλαίσια* και *μορφισμοί*.** *Έστω τ τροπικός τύπος ομοιότητας, και* $\mathcal{G} = (W, R_\Delta, A)_{\Delta\in\tau}$, $\mathcal{G}' = (W', R'_\Delta, A')_{\Delta\in\tau}$ *, δύο γενικά τ-πλαίσια. Έστω και ένας φραγμένος μορφισμός θ: W → W'. Ο δυϊκός του* $\theta^*: A' \rightarrow A$*, ορίζεται ως εξής*:

$$\theta^*(a') = \theta^{-1}[a'] \ (= \{ s \in W \mid \theta s \in a'\}).$$

Έστω τώρα $\mathfrak{B} = (B, +, -, 0, f_\Delta)_{\Delta\in\tau}$, $\mathfrak{B}' = (B', +', -', 0', f'_\Delta)_{\Delta\in\tau}$, *δύο άλγεβρες Boole με τ-τελεστές, και η, μια συνάρτηση από το A στο A'. Τώρα ορίζουμε την δυϊκή* η_* *της η να είναι η ακόλουθη συνάρτηση από το* $Uf\mathfrak{B}'$ *στο P(A)*:

$$\eta_*(u') = \eta^{-1}[u'] \ (=\{ a \in A \mid \eta a \in u'\}). ▫$$

Για τις συναρτήσεις που μόλις ορίσαμε μπορούμε να αποδείξουμε αντίστοιχα αποτελέσματα που δείξαμε στις προτάσεις 3.1.6 και 3.1.7.

Η ανάλογη πρόταση της 3.1.6 είναι η εξής:

Πρόταση 3.2.15. ***Φραγμένοι μορφισμοί* και BAT-*ομομορφισμοί*.** *Έστω τ τροπικός τύπος ομοιότητας, και έστω* $\mathcal{G}$ *και* $\mathfrak{H}$ *δύο γενικά τ-πλαίσια, και θ μια συνάρτηση από το σύμπαν του* $\mathcal{G}$ *στο σύμπαν του* $\mathfrak{H}$. *Τότε*:

(i) *Αν θ είναι ένας φραγμένος μορφισμός, τότε θ* είναι ένας* BAT-*ομομορφισμός από το* $\mathfrak{H}^*$ *στο* $\mathcal{G}^*$.

(ii) *Αν* $\theta: \mathcal{G} \rightarrowtail \mathfrak{H}$, *τότε* $\theta^*: \mathfrak{H}^* \twoheadrightarrow \mathcal{G}^*$.

(iii) *Αν* $\theta: \mathcal{G} \twoheadrightarrow \mathfrak{H}$, *τότε* $\theta^*: \mathfrak{H}^* \rightarrowtail \mathcal{G}^*$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι όμοια με αυτή της πρότασης 3.1.6. ▫

Για την πρόταση 3.1.7 η αντίστοιχη πρόταση είναι η εξής:

Πρόταση 3.2.16. **BAT-*ομομορφισμοί* και *φραγμένοι μορφισμοί*.** *Έστω τ τροπικός τύπος ομοιότητας, και έστω* $\mathfrak{B}$ *και* $\mathfrak{C}$ *δύο άλγεβρες Boole με τ-τελεστές, και η μια συνάρτηση από το B στο C. Τότε*

(i) *Αν η είναι ένας* BAT-*ισομορφισμός, τότε η* είναι ένας φραγμένος μορφισμός από την* $\mathfrak{B}_*$ *στην* $\mathfrak{C}_*$.

(ii) *Αν* $\eta: \mathfrak{B} \rightarrowtail \mathfrak{C}$, *τότε* $\eta_*: \mathfrak{C}_* \twoheadrightarrow \mathfrak{B}_*$.

(iii) *Αν* $\eta: \mathfrak{B} \twoheadrightarrow \mathfrak{C}$, *τότε* $\eta_*: \mathfrak{C}_* \rightarrowtail \mathfrak{B}_*$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι όμοια με αυτή της πρότασης 3.1.7. ▫

Συνδυάζοντας τα θεωρήματα 3.2.12, 3.2.15 και 3.2.16 ισχυροποιούμε τον ισχυρισμό μας ότι τα *περιγραφικά γενικά πλαίσια* και οι BAT είναι πράγματι ισοδύναμα αντικείμενα. Τα τρία αυτά θεωρήματα μας δίνουν την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.2.17. ***Περιγραφικά γενικά πλαίσια*** **και ΒΑΤ.** *Έστω τ τροπικός τύπος ομοιότητας, και έστω* $\mathfrak{g}$ *και* $\mathfrak{H}$ *δύο περιγραφικά γενικά πλαίσια, και* $\mathfrak{B}$ *και* $\mathfrak{C}$ *δύο άλγεβρες Boole με τ-τελεστές. Τότε*

(i) $\mathfrak{g} \rightarrowtail \mathfrak{H}$ *ανν* $\mathfrak{H}^* \twoheadrightarrow \mathfrak{g}^*$,
(ii) $\mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{H}$ *ανν* $\mathfrak{H}^* \rightarrowtail \mathfrak{g}^*$,
(iii) $\mathfrak{B} \rightarrowtail \mathfrak{C}$ *ανν* $\mathfrak{C}_* \twoheadrightarrow \mathfrak{B}_*$,
(iv) $\mathfrak{B} \twoheadrightarrow \mathfrak{C}$ *ανν* $\mathfrak{C}_* \rightarrowtail \mathfrak{B}_*$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση απο τα τρία παραπάνω θεωρήματα. ▫

3.3. Persistence

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την έννοια της *persistence*, που δεν είναι τίποτε άλλο από μια *γενίκευση* της έννοιας της *κανονικότητας*. Με τη καινούρια αυτή έννοια θα δείξουμε ότι όλοι οι Sahlqvist *τύποι* είναι *κανονικοί*.

Ορισμός 3.3.1. ***Persistence.*** Έστω *τ τροπικός τύπος ομοιότητας, φ τ-τύπος* και *X* μια *ιδιότητα* (ή *κλάση*) των *γενικών πλαισίων*. Ο *φ* θα καλείται *X-persistent* (ή *persistent ως προς την X*), αν, για κάθε *γενικό τ-πλαίσιο* $\mathfrak{g}$ στην *X*, $\mathfrak{g} \Vdash \varphi$ *μόνο αν* $\mathfrak{g}_\sharp \Vdash \varphi$. Persistence ως προς την κλάση των *καθαρών* (*refined*), *περιγραφικών* (*descriptive*), και *διακριτών* (*discrete*) *πλαισίων*, καλείται *r-persistence, d-persistence και di-persistence* αντίστοιχα. ▫

Ας δούμε πιο διαισθητικά τι είναι αυτό που μας λέει η έννοια της *persistence*. Έστω $\mathfrak{g} = (W, R, A)$ ένα *γενικό πλαίσιο* και *φ* ένας *τροπικός τύπος του βασικού τύπου ομοιότητας*. Η *συνεπαγωγή* '$\mathfrak{g}_\sharp \Vdash \varphi \Rightarrow \mathfrak{g} \Vdash \varphi$' είναι *άμεση*, γιατί αν $V(\varphi) = W$ για κάθε *αποτίμηση*, τότε σίγουρα $V(\varphi) = W$ για κάθε *επιτρεπτή αποτίμηση*. Η *αντίστροφη συνεπαγωγή*, η οποία δεν ισχύει γενικά, μας λέει ότι για να δούμε αν ο *φ* ισχύει σε ένα *υποβόσκον* Kripke *πλαίσιο* $\mathfrak{g}_\sharp = (W, R)$, αρκεί να ελέγξουμε τις *επιτρεπτές αποτιμήσεις*. Αν αυτό ισχύει όταν παίρνουμε ένα *γενικό πλαίσιο* από μια δοσμένη *κλάση X γενικών πλαισίων*, τότε καλούμε τον *φ X-persistent*.

Για την έννοια της *X-persistence* έχουμε και την *αλγεβρική* της *ερμηνεία*. Αυτή προέρχεται από την παρατήρηση ότι για ένα *γενικό πλαίσιο* $\mathfrak{g}$, η αντίστοιχη *άλγεβρά του* $\mathfrak{g}^*$, είναι μια *υποάλγεβρα της πλήρους πολύπλοκης άλγεβρας* $(\mathfrak{g}_\sharp)^+$ του *υποβόσκοντος* Kripke *πλαισίου* $\mathfrak{g}_\sharp$ του *πλαισίου* $\mathfrak{g}$. Η *διατήρηση* της *εγκυρότητας* όταν παίρνουμε *υποάλγεβρες* σημαίνει ότι $(\mathfrak{g}_\sharp)^+ \models s \approx t \Rightarrow \mathfrak{g}^* \models s \approx t$ για κάθε ισότητα $s \approx t$. Η *διατήρηση* όμως της *εγκυρότητας* προς την άλλη κατεύθυνση δεν ισχύει πάντα.

Εύκολα βλέπουμε ότι η *κανονικότητα* και η *d-persistence* είναι ουσιαστικά η ίδια έννοια

Προταση 3.3.2. ***Κανονικότητα*** **και** ***d-persistence.*** *Έστω τροπικός τύπος φ, με τύπο ομοιότητας τ. Τότε ο φ είναι κανονικός αν και μόνον αν ο φ είναι d-persistent.*

Τώρα θα δείξουμε ότι όλοι οι *πολύ απλοί* Sahlqvist *τύποι* είναι *di-persistent*.

Θεώρημα 3.3.3. ***Θεώρημα απλών*** **Sahlqvist** ***τύπων.*** *Κάθε πολύ απλός Sahlqvist τύπος είναι di-persistent.*

Απόδειξη. Ένας *πολύ απλός* Sahlqvist *τύπος* είναι της μορφής $\varphi \rightarrow \psi$, όπου ο φ αποτελείται από *άτομα*, μαζί με τη χρήση *συζεύξεων* και *υπαρξιακών τροπικών τελεστών*, ενώ ο ψ είναι *θετικός*.

Έστω $\chi \equiv \varphi \rightarrow \psi$, ένας *πολύ απλός* Sahlqvist *τύπος*, και έστω $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, A)$ ένα *διακριτό γενικό πλαίσιο* τέτοιο που $\mathcal{G} \Vdash \chi$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\mathcal{F} \Vdash \chi$. Από τη συζήτηση της απόδειξης του Θεωρήματος Sahlqvist για την τροπική λογική, γνωρίζουμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο:

$$\mathcal{F} \vDash \forall P_1 \ldots \forall P_{\mathrm{n}} \forall x \forall x_1 \ldots \forall x_{\mathrm{m}} (\mathrm{REL} \wedge \mathrm{AT} \rightarrow \mathrm{POS}),$$

όπου,

REL: είναι η *σύζευξη πρωτοβάθμιων τύπων* της μορφής $R_{\Delta} x_0 \ldots x_{\mathrm{n}}$, που αντιστοιχούν σε εμφανίσεις *υπαρξιακών τροπικών τελεστών* στον φ,

AT: είναι η *σύζευξη* από μεταφράσεις *ατομικών τύπων*, που αντιστοιχούν στις *προτασιακές μεταβλητές* και *σταθερές* του φ, και

POS: είναι η *standard μετάφραση* του τύπου ψ.

Έστω $\vec{s}$ μια *καθορισμένου μήκους* αλλά *τυχαία ακολουθία* από *καταστάσεις* στο $\mathcal{F}$, και V_m η ακόλουθη *αποτίμηση*:

$$V_m(p) = \{ s_i \mid Px_i \text{ είναι μέρος του AT } \}.$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η V_m είναι η *ελάχιστη αποτίμηση* U τέτοια που $(\mathcal{F}, U), \vec{s} \Vdash$ AT. Με άλλα λόγια, $(\mathcal{F}, U)$, $\vec{s} \Vdash$ AT μόνο αν U είναι μια *επέκταση* της V_m.

Οι βασικές παρατηρήσεις για την απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι οι εξής:

$$\text{η } V_m \text{ είναι επιτρεπτή} \quad (3.3.3.\alpha)$$

και

$$(\mathcal{F}, V_m), \vec{s} \Vdash (\mathrm{REL} \wedge \mathrm{AT}) \rightarrow \mathrm{POS} \quad \textit{ανν}$$
$$(\mathcal{F}, V), \vec{s} \Vdash (\mathrm{REL} \wedge \mathrm{AT}) \rightarrow \mathrm{POS} \text{ για κάθε } \textit{αποτίμηση } V. \quad (3.3.3.\beta)$$

Η υπόθεση ότι ο χ είναι *αληθής* σε κάθε *επιτρεπτό μοντέλο* πάνω στο $\mathcal{F}$ σημαίνει ότι πρέπει να έχουμε $(\mathcal{F}, U)$, $\vec{s} \Vdash (\mathrm{REL} \wedge \mathrm{AT}) \rightarrow \mathrm{POS}$ για κάθε *επιτρεπτή αποτίμηση* U. Οπότε το θεώρημα προκύπτει άμεσα από τις (3.3.3.α) και (3.3.3.β).

Η απόδειξη για την (3.3.3.α) είναι εύκολη. Για κάθε p, η $V_m(p)$ είναι μια *πεπερασμένη ένωση* από *πεπερασμένα τον αριθμό μονοσύνολα*, και, αφού το A περιέχει όλα τα *μονοσύνολα* και είναι *κλειστό* ως προς την *ένωση*, κάθε $V_m(p)$ *ανήκει* στο A.

Για την (3.3.3.β), η κατεύθυνση από αριστερά προς δεξιά είναι άμεση. Για την άλλη, υποθέτουμε ότι:

$(\mathcal{F}, V_m)$, $\vec{s} \Vdash (\mathrm{REL} \wedge \mathrm{AT}) \rightarrow \mathrm{POS}$ και

$(\mathcal{F}, V)$, $\vec{s} \Vdash (\mathrm{REL} \wedge \mathrm{AT})$.

Από το $(\mathcal{F}, V)$, $\vec{s} \Vdash$ AT, προκύπτει ότι η V είναι *επέκταση* της V_m. Από το $(\mathcal{F}, V)$, $\vec{s} \Vdash$ REL, προκύπτει ότι *ανεξάρτητα από την αποτίμηση* U, $(\mathcal{F}, U)$, $\vec{s} \Vdash$ REL. Συγκεκριμένα έχουμε ότι $(\mathcal{F}, V_m)$, $\vec{s} \Vdash$ REL. Αλλά τότε $(\mathcal{F}, V_m)$, $\vec{s} \Vdash \mathrm{REL} \wedge \mathrm{AT}$ και άρα $(\mathcal{F}, V_m)$, $\vec{s} \Vdash$ POS. Εφόσον η V είναι *επέκταση* της V_m, η *μονοτονικότητα θετικών τύπων* μας δίνει ότι $(\mathcal{F}, V)$, $\vec{s} \Vdash$ POS. ▫

Ένα από τα πλέον σημαντικά θεωρήματα που θα δείξουμε σε αυτή την εργασία είναι ότι όλοι οι Sahlqvist *τύποι* είναι *d-persistent* και άρα *κανονικοί*.

Θεώρημα 3.3.4. *Θεώρημα* Sahlqvist *τύπων*. *Κάθε Sahlqvist τύπος είναι d-persistent και άρα κανονικός.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα για *απλούς τύπους* Sahlqvist σε *τροπικό τύπο ομοιότητας* που περιέχει μόνο *διαμάντια*. Τέτοιοι *τύποι* είναι της μορφής $\varphi\rightarrow\psi$, όπου ο φ κατασκευάζεται από *σταθερές* και *άτομα* με *τετράγωνα μπροστά*, χρησιμοποιώντας *συζεύξεις* και *υπαρξιακούς τροπικούς τελεστές*, ενώ ο ψ είναι *θετικός*.

Έστω $\chi \equiv \varphi\rightarrow\psi$ ένας τέτοιος *τύπος*, και έστω $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, A)$ ένα *περιγραφικό γενικό πλαίσιο* τέτοιο που $\mathcal{G}\Vdash\chi$. Πρέπει να δείξουμε ότι ο χ είναι *έγκυρος* στο *υποβόσκον* Kripke *πλαίσιο* $\mathcal{F}$ του $\mathcal{G}$. Από την Sahlqvist *αντιστοιχία* αυτό είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο:

$$\mathcal{F}\models\forall P_1\ldots\ \forall P_n\forall x\forall x_1\ldots\ \forall x_m\ (\text{REL} \wedge \text{BOX-AT} \rightarrow \text{POS}),\ (3.3.4.\alpha)$$

όπου,

REL είναι μια *σύζευξη πρωτοβάθμιων τύπων* της μορφής $R_{\diamond}x_ix_j$, που αντιστοιχεί σε *εμφανίσεις διαμαντιών* στον φ,

BOX-AT είναι μια *σύζευξη τύπων* της μορφής $\forall y\ (R_\beta x_i y \rightarrow Py)$, που αντιστοιχεί στις *εμφανίσεις* $\Box_\beta p$ των *ατόμων με τετράγωνο* στον φ, και

POS είναι η *standard μετάφραση* του τύπου ψ.

Όπως και στην προηγούμενη απόδειξη, η πρόταση (3.3.4.α) είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη:

$$\text{για κάθε } \vec{s} \text{ στο } \mathcal{F}\text{: για κάθε αποτίμηση } V,\ (\mathcal{F}, V),\ \vec{s}\ \Vdash(\text{REL} \wedge \text{BOX-AT} \rightarrow \text{POS}).$$

Καθορίζουμε μια *ακολουθία* $\vec{s}$ από *καταστάσεις* στο $\mathcal{F}$, και ορίζουμε μια *αποτίμηση* V_m:

$$V_m(p) = \bigcup\ \{R_\beta[si] \mid \text{ ο τύπος } \forall y\ (R_\beta x_i y \rightarrow Py) \text{ εμφανίζεται στην BOX - AT}\}.$$

Τώρα όμως η $V_m(p)$ είναι η *ελαχιστική αποτίμηση* U τέτοια που $(\mathcal{F}, U)$, $\vec{s}\ \Vdash$BOX-AT, και όπως την απόδειξη του θεωρήματος 3.3.3 μπορούμε εύκολα να δειξουμε ότι:

$$(\mathcal{F},V_m),\ \vec{s}\ \Vdash(\text{REL} \wedge \text{BOX-AT}) \rightarrow \text{POS} \quad \textit{ανν}$$
$$(\mathcal{F},V),\ \vec{s}\ \Vdash (\text{REL} \wedge \text{BOX-AT}) \rightarrow \text{POS για κάθε } \textit{αποτίμηση } V. \quad (3.3.4.\beta)$$

Σε αντίθεση με το προηγούμενο θεώρημα, εδώ η V_m δεν χρειάζεται να είναι *επιτρεπτή*. Παρόλα αυτά ισχύει ότι:

$$(\mathcal{F},V_m),\ \vec{s}\ \Vdash (\text{REL} \wedge \text{BOX-AT}) \rightarrow \text{POS}\ . \quad (3.3.4.\gamma)$$

Για να αποδείξουμε την (3.3.4.γ), που μαζί με την (3.3.4.β) θα ολοκληρώσουν την απόδειξη του θεωρήμταος, θα χρειαστεί να ορίσουμε κάποιες έννοιες.

Θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $U \lessdot V$, για να πούμε ότι η V είναι μια *επιτρεπτή επέκταση* της U, όπου η V είναι μια *επέκταση* της U αν $U(p) \subseteq V(p)$, για κάθε *προτασιακή μεταβλητή* p. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι το σύνολο των *αποτιμήσεων* σε ένα δοσμένο *πλαίσιο* είναι *κλειστό* ως προς την *τομή* και την *ένωση* των *ορισμάτων* τους. Ένα σύνολο $c \subseteq W$, είναι *κλειστό* αν είναι η *τομή* ενός *συνόλου* από *επιτρεπτά σύνολα*. Μια *αποτίμηση* V είναι *κλειστή* αν το $V(p)$ είναι ένα *κλειστό σύνολο* για κάθε *προτασιακή μεταβλητή* p. Ως συμπέρασμα παίρνουμε ότι μια *αποτίμηση* είναι *κλειστή ανν* $U = \bigcup_{U \lessdot V} V$.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι η (3.3.4.γ) έπεται από τις ακόλουθες δύο προτάσεις:

V_m είναι *κλειστή* (3.3.4.δ)

και

αν U είναι μια *κλειστή αποτίμηση* και γ ένας *θετικός τύπος*, τότε $U(\gamma) = \bigcup_{U \lessdot V} V(\gamma)$. (3.3.4.ε)

Έστω ότι ισχύουν οι (3.3.4.δ), (3.3.4.ε) και έστω ότι

$$(\mathcal{F}, V_m), \vec{s} \Vdash (\text{REL} \wedge \text{BOX-AT}).$$

Έστω V μια *τυχούσα επιτρεπτή αποτίμηση* τέτοια που $V_m \lessdot V$. Τότε $(\mathcal{F}, \vec{s}) \Vdash \text{REL} \wedge \text{BOX-AT}$, αλλά από την υπόθεση παίρνουμε $(\mathcal{F}, \vec{s}) \Vdash \text{POS}$. Το POS αντιστοιχεί στην *standard μετάφραση* του τύπου ψ, άρα έχουμε ότι $s \in V(\psi)$, όπου ο ψ είναι το συμπέρασμα ενός Sahlqvist *τύπου*. Εφόσον η V είναι *τυχαία* παίρνουμε ότι $s \in \bigcap_{V_m \lessdot V} V(\psi)$. Οι (3.3.4.δ), (3.3.4.ε) μας δίνουν ότι $s \in V_m(\psi)$, και άρα $(\mathcal{F}, V_m), \vec{s} \Vdash \text{POS}$, το οποίο αποδεικνύει την (3.3.4.γ).

Τώρα πρέπει να αποδείξουμε τις (3.3.4.δ), (3.3.4.ε). Η (3.3.4.δ) έπεται από γνωστή πρόταση της τοπολογίας και από το γεγονός ότι οι *πεπερασμένες ενώσεις κλειστών συνόλων είναι και αυτές κλειστές*.

Για την (3.3.4.ε), υποθέτουμε ότι ο γ κατασκευάζεται από *ατομικούς τύπους* χρησιμοποιώντας τα $\wedge$, $\vee$, $\Diamond$ και $\Box$. Η απόδειξη γίνεται με *επαγωγή*:

Αρχικά παίρνουμε την περίπτωση **ο γ να είναι *ατομικός τύπος***. Αν ο γ είναι μια *μεταβλητή* p, τότε άμεσα από την *κλειστότητα* της U, έπεται ότι $U(p) = \bigcap_{U \lessdot V} V(p)$. Αν ο γ είναι *σταθερά*, τότε $U(\gamma) = V(\gamma)$ για κάθε *αποτίμηση* V, *επιτρεπτή* ή όχι, και άρα $U(\gamma) = \bigcap_{U \lessdot V} V(\gamma)$.

Έστω ότι **ο γ είναι της μορφής $\gamma_1 \wedge \gamma_2$**. Τότε $U(\gamma) = U(\gamma_1) \cap U(\gamma_2) = \bigcap_{U \lessdot V} V(\gamma_1) \cap \bigcap_{U \lessdot V} V(\gamma_2) = \bigcap_{U \lessdot V} (V(\gamma_1) \cap V(\gamma_2)) = \bigcap_{U \lessdot V} V(\gamma)$.

Έστω ότι **ο γ είναι της μορφής $\gamma_1 \vee \gamma_2$**. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι $U(\gamma) \subseteq \bigcap_{U \lessdot V} V(\gamma)$. Τότε $U(\gamma) = U(\gamma_1) \cup U(\gamma_2) = \bigcap_{U \lessdot V} V(\gamma_1) \cup \bigcap_{U \lessdot V} V(\gamma_2) = \bigcap_{U \lessdot V} (V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2)) = \bigcap_{U \lessdot V} V(\gamma)$.

Για την άλλη *κατεύθυνση*, ας υποθέσουμε ότι $u \notin U(\gamma)$. Έπεται ότι $u \notin U(\gamma_1)$ και $u \notin U(\gamma_2)$. Από την *επαγωγική υπόθεση*, αυτό έπεται την ύπαρξη *επιτρεπτών αποτιμήσεων* V_1 και V_2 τέτοιες που $U \lessdot V_i$. και $u \notin V_i(\gamma_i)$, με $i \in \{1,2\}$. Έστω V_{12} η *τομή των αποτιμήσεων* V_1 και V_2, δηλαδή

$$V_{12}(p) = V_1(p) \cap V_2(p), \text{ για κάθε } p.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η V_{12} είναι *επιτρεπτή* και ότι $U \lessdot V_{12}$. Αλλά οι γ_1 και γ_2 είναι *θετικοί* και άρα *μονοτονικοί*. Επομένως $V_{12}(\gamma_1) \subseteq V_1(\gamma_1)$ και $V_{12}(\gamma_2) \subseteq V_2(\gamma_2)$. Συνεπώς έχουμε ότι $u \notin V_{12}(\gamma_1)$ και $u \notin V_{12}(\gamma_2)$ και οπότε $u \notin V_{12}(\gamma_1 \vee \gamma_2) = V_{12}(\gamma)$. Αλλά τότε από $U \lessdot V_{12}$ έχουμε ότι $u \notin \bigcap_{U \lessdot V} V(\gamma)$.

Έστω ότι **ο γ είναι της μορφής $\Box\gamma'$**. Τότε :$U(\gamma) = l_{R\Diamond}\ (U(\gamma'))\ = l_{R\Diamond}\ (\bigcap_{U \lessdot V}\ V(\gamma')) = \bigcap_{U \lessdot V} l_{R\Diamond}(V(\gamma')) = \bigcap_{U \lessdot V}\ V(\gamma)$.

Έστω ότι **ο γ είναι της μορφής $\Diamond\gamma'$**. Όμοια, η *κατεύθυνση* $U(\gamma) \subseteq \bigcap_{U \lessdot V}\ V(\gamma)$ είναι εύκολη: $U(\gamma) = m_{R\Diamond}\ (U(\gamma'))\ = m_{R\Diamond}\ (\bigcap_{U \lessdot V}\ V(\gamma')) = \bigcap_{U \lessdot V}\ m_{R\Diamond}(V(\gamma')) = \bigcap_{U \lessdot V}\ V(\gamma)$.

Η άλλη *κατεύθυνση* είναι πιο δύσκολη. Υποθέτουμε ότι $u \in \bigcap_{U \lessdot V}\ V(\gamma)$. Οπότε για κάθε *επιτρεπτή επέκταση* V της U, υπάρχει ένα t_V τέτοιο που Rut_V και $t_V \in V(\gamma')$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει κάποιο t τέτοιο που Rut και $t \in U(\gamma')$. Από την *επαγωγική υπόθεση* αυτό είναι *ισοδύναμο* με το να δείξουμε ότι υπάρχει ένα *μοναδικό* t τέτοιο που Rut και $t \in V(\gamma')$, για κάθε επιτρεπτή V με $U \lessdot V$. Με άλλα λόγια αρκεί να δείξουμε ότι

$$R[u] \cap \bigcap_{U \lessdot V}\ V(\gamma) \neq \varnothing. \text{ (3.3.4.στ)}$$

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι το σύνολο

$$X = \{ R[u] \} \cup \{ V(\gamma') \mid U \lessdot V \}$$

έχει την *ιδιότητα πεπερασμένης τομής*.

Έστω μια *τυχαία πεπερασμένη υποσυλλογή* του X. Χωρίς περιορισμό, το $R[u]$ είναι μέλος του, και οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουμε πάρει τα σύνολα $R[u]$, $V_1(\gamma')$, ..., $V_n(\gamma')$. Έστω V_0 η *αποτίμηση* που δίνεται ως εξής

$$V_0(p) = V_1(p) \cap \ldots \cap V_n(p) \text{ για κάθε } p.$$

Τώρα έχουμε ότι $U \lessdot V_0$, και από την *υπόθεση* υπάρχει μια *κατάσταση* t_0 στο $\mathcal{F}$ τέτοια που Rut_0 και $t_0 \in V_0(\gamma')$. Αλλά εφόσον ο γ' είναι *θετικός* και η V_i είναι μια *επέκταση* της V_0 για κάθε i, έπεται ότι $V_0(\gamma') \subseteq V_i(\gamma')$ για κάθε i. Οπότε $t_0 \in R[u] \cap V_1(\gamma') \cap \ldots \cap V_n(\gamma')$. Αυτό δείχνει ότι το X έχει την *ιδιότητα πεπερασμένης τομής*.

Έπεται από γνωστή πρόταση της τοπολογίας, ότι το $R[u]$ είναι *κλειστό*, και οπότε πάλι από πρόταση της τοπολογίας παίρνουμε την (3.3.4.στ). Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της (3.3.4.ε) και άρα και του θεωρήματος 3.3.4. ▫

Βιβλιογραφία

[1] A. Andréka, A. Kurucz, I. Németi, και I. Spain. Applying algebraic logic to logic. Στο M. Nivat και M. Wirsing, εκδότες, *Algebraic Methodology and Software Technology*, σελίδες 201-221. Springer, 1994.

[2] I. H. Anellis και N. Houser. Nineteenth century roots of algebraic logic and universal algebra. Στο A. Andréka, J. D. Monk, και I. Németi, εκδότες. *Algebraic Logic*, volume 54 of Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai. North-Holland Publishing Company, 1991.

[3] W. J. Blok και D. Pigozzi. Algebraizable logics. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 77, 396, 1989.

[4] K. Fine. Logics extending *K4*. Part I. *Journal of Symbolic Logic*, 39:31-42, 1974.

[5] K. Fine. Some connections between elementary and modal logic. Στο S. Kanger, εκδότης, *Proceedings of the Third Scandinavian Logic Symposium*. *Uppsala 1973*. North-Holland Publishing Company, 1975.

[6] R.I. Goldblatt. Metamathematics of modal logic I. *Reports on Mathematical Logic*, 6:41-78, 1976.

[7] R.I. Goldblatt. Metamathematics of modal logic II. *Reports on Mathematical Logic*, 7:21-52, 1976.

[8] R.I. Goldblatt. Varieties of complex algebras. *Annals of Pure and Applied Logic*, 38:173-241, 1989.

[9] R.I. Goldblatt και S.K. Thomason. Axiomatic classes in propositional modal logic. Στο J. Crossley, εκδότης, *Algebra and Logic*, σελίδες 163-173. Springer, 1974.

[10] L. Henkin, J.D. Monk, και A. Tarski. *Cylindric Algebras. Part 1. Part 2.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1971, 1985.

[11] P.J. Johnstone. *Stone Spaces*, volume 3 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[12] B. Jónsson και A. Tarski. Boolean algebras with operators, Part I. *American Journal of Mathematics*, 73:891-939, 1952.

[13] B. Jónsson και A. Tarski. Boolean algebras with operators, Part II. *American Journal of Mathematics*, 74:127-162, 1952.

[14] M. Kracht. *Tools and Techniques in Modal Logic*. Number 142 in Studies in Logic. Elsevier, Amsterdam, 1999.

[15] A.H. Lachlan. A note on Thomason's refined structures for tense logics. *Theoria*, 40:117-120, 1970.

[16] J.C.C. McKinsey. A solution to the decision problem for the Lewis systems **S2** and **S4** with an application to topology. *Journal of Symbolic Logic*, 6:117-134, 1941.

[17] J.C.C. McKinsey και A. Tarski. The algebra of topology. *Annals of Mathematics*, σελίδες 141-191, 1944.

[18] H. Rasiowa, R. Sikorski. *The Mathematics of Metamathematics*. Polish Scientific Publishers, 1963.

[19] H. Rasiowa, R. Sikorski. *An Algebraic Approach to Non-Classical Logics*. North Holland, 1974.

[20] H. Sahlqvist. Comleteness and correspondence in the first and second order semantics for modal logic. Στο S. Kanger, εκδότης, *Proceedings of the Third Scandinavian Logic Symposium. Uppsala 1973*. North-Holland Publishing Company, σελίδες 110-143, 1975.

[21] G. Sambin και V. Vaccaro. A topological proof of Sahlqvist's theorem. *Journal of Symbolic Logic*, 54:992-999, 1989.

[22] M. H Stone. The theory of representations for boolean algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 40:37-111, 1936.

[23] S.K. Thomason. Semantic analysis of tense logics. *Journal of Symbolic Logic*, 37:150-158, 1972.