Στοιχεια Παραμετρικης Πολυπλοκοτητας

Κωνσταντῖνος Ἀ. Παπανικολάου
Α.Μ. 200401
μΠλ∀

Διπλωματικὴ Ἐργασία
Ἐπιβλέπων: Ἐπίκουρος Καθηγητὴς Δημήτριος Μ. Θηλυκός

Λογικη και Θεωρια Αλγοριθμων και Υπολογισμου
Διαπανεπιστημιακὸ Πρόγραμμα Μεταπτυχιακῶν Σπουδῶν

Μάιος 2008

Ἡ παροῦσα διπλωματικὴ ἐργασία

ἐκπονήθηκε στὰ πλαίσια τῶν σπουδῶν

γιὰ τὴν ἀπόκτηση τοῦ

μεταπτυχιακοῦ διπλώματος εἰδικεύσεως

στὴν

Λογικὴ καὶ Θεωρία Ἀλγορίθμων καὶ Ὑπολογισμοῦ

ποὺ ἀπονέμει τὸ

Τμῆμα Μαθηματικῶν

τοῦ

Ἐθνικοῦ καὶ Καποδιστριακοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν

Ἐγκρίθηκε τὴν Πέμπτη 8 Μαΐου 2008 ἀπὸ τὴν κάτωθι Ἐξεταστικὴ Ἐπιτροπή:

Ὀνοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**	**Ὑπογραφή**
Δημήτριος Μ. Θηλυκός	Ἐπίκουρος Καθηγητὴς τμήματος Μαθηματικῶν Ε.Κ.Π.Α.	
Ἠλίας Β. Κουτσουπιάς	Καθηγητὴς τμήματος Πληροφορικῆς καὶ Τηλεπικοινωνιῶν Ε.Κ.Π.Α.	
Γιάννης Ν. Μοσχοβάκης	Καθηγητὴς τμήματος Μαθηματικῶν U.C.L.A. Ὁμότιμος Καθ. Ε.Κ.Π.Α.	

Στοιχεια Παραμετρικης Πολυπλοκοτητας

Κωνσταντῖνος Ἀ. Παπανικολάου
Α.Μ. 200401
μΠλ∀

Διπλωματικὴ Ἐργασία
Ἐπιβλέπων: Ἐπίκουρος Καθηγητὴς Δημήτριος Μ. Θηλυκός

Λογικη και Θεωρια Αλγοριθμων και Υπολογισμου
Διαπανεπιστημιακὸ Πρόγραμμα Μεταπτυχιακῶν Σπουδῶν

Ἡ διπλωματικὴ ἐργασία αὐτή,
γράφθηκε μὲ κωδικοποίηση UTF8
καὶ σελιδοποιήθηκε στὸ LaTeX 2_ε
μὲ τὴν χρήση τῆς ὑλοποιήσεως
MiKTeX ἔκδοση 2.5, τοῦ LaTeX 2_ε.

Πρόλογος

Μια Μικρη Εισαγωγη Στην Παραμετρικη Πολυπλοκοτητα

Ἡ παραμετρικὴ πολυπλοκότητα εἶναι ἕνας νέος κλάδος τῆς πολυπλοκότητας, ἡ ἀνάπτυξη τοῦ ὁποίου ἀρχίζει ἀπὸ μία σειρὰ ἄρθρων τῶν Downey καὶ Fellows στὶς ἀρχὲς τῆς δεκαετίας τοῦ 1990. Ἡ παραμετρικὴ πολυπλοκότητα ἀντιμετωπίζει ἀπὸ μία νέα ἔποψη τὰ ὑπάρχοντα προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἡ κλασσικὴ πολυπλοκότητα, μὲ τὴν γνωστὴ εἰκασία $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, τὰ κατατάσσει ἐκτὸς κλάσεως $\mathbf{P}$, δηλαδὴ ὑπολογιστικῶς δύσκολα.

Ἡ παραδοχὴ τῆς κλασσικῆς πολυπλοκότητας, ὅτι $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, ἂν καὶ δὲν ἔχει ἀποδειχθῆ ἀκόμη, ἔχει καταστήσει ὁλόκληρες κλάσεις προβλημάτων ὑπολογιστικῶς δύσκολα. Βεβαίως, πολλὰ ἀπὸ αὐτὰ τὰ προβλήματα ἐπιλύονταν σχετικῶς ἱκανοποιητικὰ μέχρι τώρα, διότι κάποιο μέρος τῆς εἰσόδου των ἦταν γνωστὸ ἐκ τῶν προτέρων, ἢ ἐκυμαίνετο ἐντὸς μικροῦ εὔρους τιμῶν, ἔτσι ἡ ἐφαρμογὴ στὴν πράξη τῶν ὑπαρχόντων μὴ πολυωνυμικῶν ἀλγορίθμων, ἔδινε πολὺ καλά ἀποτελέσματα. Ἡ κλασσικὴ πολυπλοκότητα, λόγω τῆς δομῆς της, δὲν ἔχει τὴν δυνατότητα νὰ ἀξιοποιήση αὐτὸ τὸ γεγονός. Ἡ κλασσικὴ πολυπλοκότητα μετρᾶ μόνο τὸ μέγεθος τῆς εἰσόδου καὶ τὸν χρόνο ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος ὡς πρὸς τὸ μέγεθος τῆς εἰσόδου καὶ προσπαθεῖ νὰ λύση τὴν γενικὴ περίπτωση ἑνὸς προβλήματος, χωρὶς νὰ ἐξετάζη καθόλου τὴν δομὴ τοῦ κάθε προβλήματος καὶ πῶς αὐτὸ συμπεριφέρεται, ὅταν κάποιο μέγεθος τῆς εἰσόδου του ἔχη τιμὲς ἐντὸς κάποιου πεπερασμένου πεδίου τιμῶν. Ἐν ἀντιθέσει, ἡ παραμετρικὴ πολυπλοκότητα εἰσάγοντας τὴν ἔννοια τῆς παραμέτρου, καταβάλει προσπάθεια νὰ ἐξετάση τὴν δομὴ τοῦ ἑκάστοτε προβλήματος καὶ νὰ δῆ ἐὰν γιὰ κάποια παράμετρο, ἡ ὁποία πλέον προκαθορίζει τὸ πεδίο τιμῶν ἑνὸς μεγέθους τῆς εἰσόδου, εἶναι δυνατὴ μία ἀποτελεσματικὴ ἀλγοριθμικὴ λύση.

Ἡ παράμετρος δὲν θεωρεῖται πλέον μέρος τῆς εἰσόδου τοῦ προβλήματος, ἀλλὰ ὁδηγὸς γιὰ περαιτέρω ἀνάλυση τοῦ προβλήματος γιὰ τὴν ἐπίτευξη ἀποτελεσματικοῦ ἀλγορίθμου. Ἔτσι ἀλλάζουν πλέον ὅλες οἱ γνωστὲς κλάσεις τῆς κλασσικῆς πολυπλοκότητας σὲ ἀντίστοιχες τῆς παραμετρικῆς, προσπαθώντας πλέον οἱ κλασσικὲς ἀναγωγὲς νὰ μετασχηματισθοῦν σὲ ἀντίστοιχες ἀναγωγὲς τῆς παραμετρικῆς, οἱ ὁποῖες κάνουν ταυτοχρόνως καὶ ἀναγωγὴ τῆς παραμέτρου τοῦ ἑκάστοτε προβλήματος, ἔτσι ὥστε οἱ νέες κλάσεις τῆς παραμετρικῆς πολυπλοκότητας νὰ εἶναι ἐξ ἴσου συμπαγεῖς μὲ αὐτὲς τῆς κλασσικῆς ὡς πρὸς αὐτὲς τὶς παραμετρικὲς ἀναγωγές.

Ἔτσι π.χ. στὸ DNA ὑπάρχουν μόνο 4 βασικὰ ἀμινοξέα καὶ ὅλα τὰ σχετικὰ μὲ τὸ DNA προβλήματα, τὸ θεωροῦν δεδομένο. Ἄρα εἰσάγοντας μία παράμετρο, ξέρουμε μὲ μεγάλη βεβαιότητα ἐκ τῶν προτέρων, ὅτι ἡ παράμετρος αὐτή, γιὰ ὁποιοδήποτε πρόβλημα ποὺ ἀφορᾶ τὸ DNA θὰ ἔχη χαμηλὴ τιμή. Πλέον ἡ παράμετρος θεωρεῖται, κατὰ κάποιον τρόπο, σταθερὴ κατὰ τὴν ἐπίλυση τοῦ προβλήματος καὶ αὐτὸ ὁδηγεῖ στὴν εὕρεση πιὸ ἀποτελεσματικῶν ἀλγορίθμων.

Συνοψίζοντας, στὴν παραμετρικὴ πολυπλοκότητα προσπαθοῦμε νὰ καταστήσουμε τὰ προβλήματα ἀλγοριθμικῶς ἀποτελεσματικῶς ἐπιλύσιμα, ὅταν ἡ παράμετρος θεωρῆται ὅτι ἔχει χαμηλὲς τιμὲς κατὰ τὴν ἐπίλυση τοῦ προβλήματος, μὲ ἀποτέλεσμα ἡ λύση νὰ εἶναι ἀλγοριθμικὰ ἐφικτή. Τέλος στὴν πράξη, οἱ παράμετροι τῶν περισσοτέρων προβλημάτων ἔχουν μικρὲς τιμὲς καὶ αὐτὸ καταδεικνύει τὴν σπουδαιότητα τῆς παραμετρικῆς πολυπλοκότητας στὴν κατανόηση προϋπαρχόντων ἀλγορίθμων οἱ ὁποῖοι δίνουν ἀκριβὴ λύση σὲ αὐτὰ τὰ προβλήματα, ἀλλὰ καὶ στὴν δημιουργία νέων ἀλγορίθμων.

Πολυτονικὸ Σύστημα

Ἡ ἐργασία αὐτή, γράφθηκε στὸ πολυτονικό, διατηρώντας καὶ τὸ ξεχασμένο ἦτα στὴν ὑποτακτικὴ κ.λπ., διότι αὐτὸ διδάχθηκα στὸ σχολεῖο. Σὰν μαθηματικός, προτιμῶ ἕνα σύστημα μὲ περισσότερους κανόνες γραμματικῆς καὶ συντακτικοῦ, φαινομενικὰ πιὸ δύσκολο, τὸ ὁποῖο ὅμως προάγη τὴν δομημένη σκέψη ὅπως τὰ μαθηματικά. Καλό εἶναι ἐπίσης, νὰ γνωρίζη κάποιος ὅτι ἡ ἐξέλιξη τῶν γλωσσῶν δὲν γίνεται μὲ νόμους καὶ διατάγματα, ἀλλὰ μέσα ἀπὸ σχετικὰ ἀργὲς διαδικασίες μὲ τὴν συμμετοχὴ ὅλων. Τέλος μοῦ ἀρέσει πολὺ τὸ πολυτονικὸ σύστημα ὀπτικῶς καὶ θὰ μοῦ ἦταν ἐξαιρετικὰ δύσκολο νὰ τὸ ἐγκαταλείψω. Εὐχαριστῶ τὸν κ. Δημήτριο Μ. Θηλυκό, διότι ὄχι μόνον ἀποδέχθηκε πλήρως, ἀλλὰ καὶ ἐνθάρρυνε τὴν γραφὴ αὐτῆς τῆς ἐργασίας στὸ πολυτονικό.

Εὐχαριστίες

Τὸ ἐαρινὸ ἐξάμηνο τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ ἔτους 2005-6, δόθηκε ἀπὸ τὸ μΠλ∀ ὡς προαιρετικό, τὸ μάθημα Λ05Γ. Παραμετρικη Πολυπλοκοτητα και Αλγοριθμοι, μὲ διδάσκοντα τὸν κ. Δημήτριο Μ. Θηλυκό. Τὸ ἐνδιαφέρον μου γιὰ τὴν κλασσικὴ πολυπλοκότητα, μὲ ὤθησε νὰ ἐπιλέξω αὐτὸ τὸ προαιρετικὸ μάθημα. Βρίσκοντας πολὺ ἐνδιαφέροντα τὸν τρόπο, μὲ τὸν ὁποῖον ἡ παραμετρικὴ πολυπλοκότητα προσεγίζει τὰ προβλήματα, ἐπέλεξα νὰ κάνω τὴν διπλωματική μου ἐργασία πάνω σὲ αὐτὸ τὸ θέμα.

Εὐχαριστῶ ὅλο τὸ διδακτικὸ προσωπικὸ τοῦ μΠλ∀, διότι μὲ προσπάθεια καὶ κόπο προσφέρουν κάθε ἔτος, ἐκτὸς τῶν ὑποχρεωτικῶν, μία μεγάλη ποικιλία προαιρετικῶν μαθημάτων, μὲ μόνη ἀμοιβὴ τὴν ἠθικὴ ἱκανοποίηση τῆς προσφορᾶς καὶ τῆς μεταδόσεως τῆς γνώσεως στοὺς μαθητές τους.

Εὐχαριστῶ τὸν κ. Δημήτριο Μ. Θηλυκό, ὁ ὁποῖος μοῦ ἔδωσε τὸν σκελετό καὶ ἐπέβλεψε μὲ προθυμία καὶ ἐνδιαφέρον αὐτὴν τὴν ἐργασία.

Τέλος εὐχαριστῶ τὴν σύζυγό μου Μοσχοπία Θ. Σιμωνίδου, διότι μὲ ἀγάπη καὶ προπαντὸς ὑπομονή, μοῦ ἔδωσε τὴν εὐκαιρία νὰ τελειώσω αὐτὸ τὸ μεταπτυχιακὸ μὲ αὐτὴν τὴν ἐργασία.

Ἀπρίλιος 2008

Περιεχόμενα

1 Εἰσαγωγή **1**

1.1 Τρία NP-πλήρη προβλήματα 1

1.2 Οἱ Παράμετροι 3

1.2.1 Βασικοὶ Ὁρισμοί 3

1.2.2 Ἄλλα παραδείγματα 4

1.2.3 Ἄλλα Παραμετροποιημένα Προβλήματα 5

1.3 Ἀναφορές, Σχόλια 9

2 Ἡ κλάση FPT **11**

2.1 Εἰσαγωγή 11

2.2 Μελέτη τῶν FPT προβλημάτων 12

2.2.1 Ἕνας fpt-ἀλγόριθμος γιὰ τὸ p-Καλυμμα Κορυφων . . . 12

2.2.2 Ἕνας fpt-ἀλγόριθμος γιὰ τὸ p-Φραγμενο Συνολο Αφης 15

2.3 fpt-Ἀναγωγές 19

2.3.1 Ἡ κλάση FPT καὶ οἱ fpt-ἀναγωγές 20

2.3.2 Ἄλλες κλάσεις καὶ οἱ fpt-ἀναγωγές 21

2.4 Ἀναφορές, Σχόλια 25

3 Ἡ κλάση para-NP **27**

3.1 Εἰσαγωγή 27

3.2 Διάφορα προβλήματα τῆς κλάσεως para-NP 28

3.3 Θεωρήματα γιὰ τὴν κλάση para-NP 30

3.4 Ἀναφορές, Σχόλια 36

4 Ἡ κλάση XP **37**

4.1 Εἰσαγωγή 37

4.2 XP-πλήρη προβλήματα 39

4.3 Θεωρήματα γιὰ τὴν κλάση XP 40

4.4 Ἀναφορές, Σχόλια 42

5 Ἄλλες κλάσεις **45**
5.1 Εἰσαγωγή . . . 45
5.2 Ἡ κλάση W[P] . . . 45
5.2.1 W[P]-πλήρη προβλήματα . . . 46
5.2.2 Θεωρήματα γιὰ τὴν κλάση W[P] . . . 50
5.3 Ἡ κλάση W[SAT] . . . 52
5.3.1 Ὁρισμὸς τῆς W[SAT] βάσει τοῦ p-WSat(PROP) . . . 53
5.3.2 W[SAT]-πλήρη προβλήματα . . . 53
5.3.3 Θεωρήματα γιὰ τὴν κλάση W[SAT] . . . 54
5.4 Ἡ ἱεραρχία W[t] . . . 55
5.4.1 Τὸ σύνολο προβλημάτων p-WSat($\Gamma_{t,d}$) . . . 55
5.4.2 Ὁρισμὸς τῶν W[t] βάσει τοῦ p-WSat($\Gamma_{t,d}$) . . . 56
5.4.3 Πλήρη προβλήματα γιὰ τὴν ἱεραρχία W[t] . . . 57
5.4.4 Θεωρήματα γιὰ τὴν ἱεραρχία W[t] . . . 60
5.5 Ἡ ἱεραρχία A[t] . . . 63
5.5.1 Ὁρισμὸς τῶν A[t] βάσει τοῦ p-MC . . . 64
5.6 Ἀναφορές, Σχόλια . . . 64

6 Πυρηνοποίηση **67**
6.1 Εἰσαγωγή . . . 67
6.2 Πυρηνοποίηση . . . 68
6.3 Πυρηνοποιήσεις τοῦ προβλήματος p-Καλυμμα Κορυφων . . . 70
6.3.1 Ἡ πυρηνοποιήση Buss . . . 71
6.3.2 Ἡ πυρηνοποιήση Nemhauser Trotter . . . 72
6.3.3 Σπουδαιότητα τοῦ p-Καλυμμα Κορυφων . . . 81
6.4 Πυρηνοποιήσεις ἄλλων προβλημάτων . . . 82
6.4.1 p-Φραγμενο Ανεξαρτητο Συνολο . . . 82
6.4.2 p-Ευκολη Γραμμικη Παραταξη . . . 84
6.4.3 p-Σχεδον Μεγιστος Βαθμος Ενα . . . 85
6.5 Ἀναφορές, Σχόλια . . . 89

Κεφάλαιο 1

Εἰσαγωγή

Στὴν κλάση **NP** τῆς κλασσικῆς πολυπλοκότητας παρατηροῦμε μία σωρία διαφορετικῶν προβλημάτων. Ἂν περιορισθοῦμε πρὸς τὸ παρὸν μόνο σὲ ὅσα εἶναι **NP**-πλήρη, παρατηροῦμε ὅτι δὲν εἶναι ὅλα τὸ ἴδιο εὔκολο νὰ λυθοῦν γιὰ τὸ ἴδιο μέγεθος εἰσόδου, πρᾶγμα τὸ ὁποῖο φαίνεται ἀπὸ τὰ βήματα ποὺ χρειάζονται γιὰ νὰ ἐπιλυθῆ τὸ κάθε πρόβλημα. Ἔτσι ἔχουμε προβλήματα τῶν ὁποίων ἡ χρονικὴ πολυπλοκότητα εἶναι ὑπερπολυωνυμική, πάντα μὲ τὴν γνωστὴ ὑπόθεση $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$. Ὁ χρόνος ἐπιλύσεως αὐτῶν τῶν προβλημάτων εἶναι συναρτήσεις ποὺ εἶναι ὅλες ἐκθετικές, ἀλλὰ διαφέρουν πολὺ μεταξύ τους π.χ. $O\left(2^k \cdot n\right)$, $O\left(n^k\right)$, $O\left(k^n\right)$, κ.λπ. Στὰ περισσότερα προβλήματα ὑπεισέρχεται ἐντελῶς φυσικὰ ἡ ἔννοια τῆς παραμέτρου, ὅπως μάλιστα ὑποδηλώνει καὶ ἡ συνάρτηση τοῦ χρόνου ἐπιλύσεώς τους. Ἡ διαπλοκὴ ὅμως τῆς παραμέτρου k καὶ τοῦ κυρίως ὄγκου τῆς εἰσόδου εἶναι πολὺ διαφορετική, μὲ συνέπεια ὁ ρυθμὸς αὐξήσεως τῆς κάθε συναρτήσεως ὡς πρὸς τὸ μέγεθος τῆς εἰσόδου x ($|x| = n$) νὰ εἶναι πολὺ διαφορετικός.

Ἀπὸ αὐτὰ τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα εἶναι **NP**-πλήρη, διαλέγουμε τρία, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντιπροσωπευτικὰ ἀπὸ τὴν σκοπιὰ τῆς παραμετρικῆς πολυπλοκότητας, γιατὶ δὲν εἶναι ἰσοδύναμα, ἂν καὶ στὴν κλασσικὴ πολυπλοκότητα εἶναι.

1.1 Τρία NP-πλήρη προβλήματα

Χρωματισμὸς Κορυφῶν (Vertex Coloring ἢ Colorability)

Μποροῦμε νὰ χρωματίσουμε κάθε κορυφὴ ἑνὸς δοθέντος γραφήματος G μὲ διαφορετικὸ χρῶμα ἀπὸ τὶς γειτονικές της κορυφές, χρησιμοποιώντας τὸ πολὺ k (διαφορετικά) χρώματα;

ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΣ ΚΟΡΥΦΩΝ (VERTEX COLORING ἢ COLORABILITY)
Εἴσοδος : Ἕνα γράφημα G καὶ ἕνας ἀκέραιος $k \geq 0$.
Ἐρώτηση : $\exists \sigma : V(G) \rightarrow \{1, \ldots, k\} : \forall \{v, u\} \in E(G)\ \sigma(v) \neq \sigma(u)$;

Ἐδῶ ἡ ἔννοια τῆς παραμέτρου εἰσέρχεται μὲ προφανὴ τρόπο καὶ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν χρωμάτων. Στὸν πιὸ ἁπλὸ ἀλγόριθμο ἐπιλύσεως ὁ χρόνος εἶναι $O\left(n^2 \cdot k^n\right)$ βήματα. Παρατηροῦμε ὅτι ὁ χρόνος αὐξάνεται ἐκθετικά, ὡς πρὸς τὴν αὔξηση τοῦ ἀριθμοῦ κορυφῶν $V(G)$ τοῦ γραφήματος G, ἔτσι ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν χρωμάτων διατηρηθῆ μικρὸς π.χ. 3 ἢ 4 ἢ 5, δὲν βελτιώνεται σημαντικὰ ὁ χρόνος ἐπιλύσεώς του, ἀφοῦ ὁ ρυθμὸς αὐξήσεως εἶναι ἐκθετικὸς ὡς πρὸς τὸ μέγεθος τοῦ γραφήματος, ἐὰν $k_2 > k_1$ τότε $\frac{n^2 \cdot k_2^n}{n^2 \cdot k_1^n} = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^n$.

Ἀνεξάρτητο Σύνολο (Independent Set)

Δοθέντος ἑνὸς γραφήματος G, μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕνα σύνολο κορυφῶν $S \subseteq V(G)$ μεγέθους τὸ πολὺ k, ἔτσι ὥστε ἀνὰ δύο οἱ κορυφὲς τοῦ συνόλου S νὰ μὴν συνδέωνται μὲ ἀκμή;

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ (INDEPENDENT SET)
Εἴσοδος : Ἕνα γράφημα G καὶ ἕνας ἀκέραιος $k \geq 0$.
Ἐρώτηση : $\exists S \subseteq V(G) : \lvert S \rvert \leq k \wedge \forall e \in E(G) \Rightarrow \lvert e \cap S \rvert \leq 1$;

Καὶ ἐδῶ ἡ ἔννοια τῆς παραμέτρου εἰσέρχεται μὲ προφανὴ τρόπο καὶ εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ συνόλου S. Στὸν πιὸ ἁπλὸ ἀλγόριθμο ἐπιλύσεως ὁ χρόνος εἶναι $O\left(n^{k+1}\right)$ βήματα. Παρατηροῦμε ὅτι ὁ χρόνος αὐξάνεται πολυωνυμικά, ὡς πρὸς τὴν αὔξηση τοῦ ἀριθμοῦ κορυφῶν $V(G)$ τοῦ γραφήματος G. Ἔτσι μία μικρὴ αὔξηση στὸ μέγεθος τοῦ συνόλου S αὐξάνει βεβαίως τὸν χρόνο ἐπιλύσεως, ἀλλὰ μὲ πολυωνυμικὸ ρυθμὸ ὡς πρὸς τὸ μέγεθος τοῦ γραφήματος π.χ. ἐὰν $k_2 > k_1$ τότε $\frac{n^{k_2}}{n^{k_1}} = n^{k_2 - k_1}$.

Κάλυμμα Κορυφῶν (Vertex Cover)

Δοθέντος ἑνὸς γραφήματος G, ὑπάρχει ἕνα σύνολο κορυφῶν S μεγέθους τὸ πολὺ k, ἔτσι ὥστε κάθε ἀκμὴ τοῦ γραφήματος νὰ ἔχη μία κορυφὴ στὸ S;

ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ (VERTEX COVER)
Εἴσοδος : Ἕνα γράφημα G καὶ ἕνας ἀκέραιος $k \geq 0$.
Ἐρώτηση : $\exists S \subseteq V(G) : \lvert S \rvert \leq k \wedge \forall e \in E(G)\ \lvert e \cap S \rvert \geq 1$;

Καὶ ἐδῶ ἡ ἔννοια τῆς παραμέτρου εἰσέρχεται μὲ προφανὴ τρόπο καὶ εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ συνόλου S. Ἕνας καλὸς χρόνος ἐπιλύσεως εἶναι $O\left((1,2738)^k + k \cdot n\right)$ βήματα (βλέπε στὸ [22]). Παρατηροῦμε ὅτι ἐδῶ ὁ χρόνος αὐξάνεται γραμμικὰ, ὡς πρὸς τὴν αὔξηση τοῦ ἀριθμοῦ κορυφῶν $V(G)$ τοῦ γραφήματος G, ἀλλὰ τὸ σημαντικότερο εἶναι ὅτι μικρὴ αὔξηση στὸ μέγεθος τοῦ συνόλου S αὐξάνει βεβαίως τὸν χρόνο ἐπιλύσεως, ἀλλὰ μὲ ἀνεξάρτητο ρυθμὸ ὡς πρὸς τὸ μέγεθος τοῦ γραφήματος π.χ. ἐὰν $k_2 > k_1$ τότε $\frac{(1,2738)^{k_2}+k_2 \cdot n}{(1,2738)^{k_1}+k_1 \cdot n} < (1,2738)^{k_2-k_1}$.

1.2 Οἱ Παράμετροι

Βλέπουμε λοιπὸν ὅτι στὰ τρία προηγούμενα παραδείγματα τὸ k εἶναι μία παράμετρος, ἡ ὁποία παίζει καθοριστικὸ καὶ διαφορετικὸ ρόλο στὸν χρόνο ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος. Στὴν παραμετρικὴ πολυπλοκότητα λοιπόν, θὰ θεωρήσουμε τὴν παράμετρο σταθερὴ καὶ δὲν θὰ ἀποτελῇ μέρος τῆς εἰσόδου τοῦ προβλήματος, ἀλλὰ τρόπόν τινα στοιχεῖο τῆς δομῆς τοῦ προβλήματος γιὰ περαιτέρω ἀνάλυση.

Γενικεύοντας λοιπὸν τὰ προηγούμενα τρία παραδείγματα βλέπουμε τὸν τρόπο μὲ τὸν ὁποῖο ἡ παράμετρος ὑπεισέρχεται στὸν χρόνο ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος. Φυσικά, τὰ πιὸ εὔκολα (ὑπολογιστικῶς) προβλήματα εἶναι αὐτὰ ποὺ ἐπιλύονται, ὅταν τὸ μέγεθος τοῦ προβλήματος ἐπηρεάζῃ γραμμικὰ ἢ στὴν χειρότερη περίπτωση πολυωνυμικὰ τὸν χρόνο ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος, ἀνεξαρτήτως τῆς τιμῆς τῆς παραμέτρου, ὅπως στὸ παράδειγμα τοῦ καλύμματος κορυφῶν (vertex cover). Ἂς δοῦμε λοιπὸν ἕνα συγκριτικὸ πίνακα τοῦ λόγου τῶν ρυθμῶν αὐξήσεως τοῦ χρόνου ἐπιλύσεως γιὰ τὰ δύο τελευταῖα προβλήματα τοῦ προηγουμένου τμήματος.

	$n = 50$	$n = 100$	$n = 150$
$k = 2$	625	2.500	5.625
$k = 3$	15.625	125.000	421.875
$k = 5$	9.765.625	312.500.000	2.373.046.875
$k = 10$	$\approx 95,367 \times 10^{12}$	$97,65625 \times 10^{15}$	$\approx 5,631 \times 10^{18}$
$k = 20$	$\approx 9,094 \times 10^{27}$	$\approx 9,536 \times 10^{33}$	$\approx 3,024 \times 10^{71}$

Πίνακας 1: Ὁ λόγος $\frac{n^{k+1}}{2^k \cdot n} = \left(\frac{n}{2}\right)^k$

1.2.1 Βασικοὶ Ὁρισμοί

Ἂς δοῦμε τὶς δύο πιὸ βασικὲς ἔννοιες τῆς παραμετρικῆς πολυπλοκότητας, ὥστε ὅλα τὰ προηγούμενα νὰ γίνουν πιὸ κατανοητά.

Δεδομένου ἑνὸς ἀλφαβήτου Σ καλοῦμε:

Ὁρισμός 1.1: *Παραμετροποίηση (Parametrization)* τοῦ Σ^* εἶναι κάθε πολυωνυμικὰ ὑπολογίσιμη συνάρτηση $\kappa : \Sigma^* \to \mathbb{N}$.

Ὁρισμός 1.2: *Παραμετροποιημένο Πρόβλημα (Parametrized Problem)* εἶναι τὸ ζεῦγος (L, κ) ὅπου $L \subseteq \Sigma^*$ καὶ κ μία παραμετροποίηση τοῦ Σ^*.

Ἡ παραμετροποίηση βάσει τοῦ ὁρισμοῦ της, εἶναι μία πολὺ γενικὴ ἔννοια (φθάνει νὰ εἶναι πολυωνυμικὰ ὑπολογίσιμη συνάρτηση) καὶ μπορεῖ τυπικὰ νὰ εἶναι ὁτιδήποτε π.χ. νὰ εἶναι σταθερή: $\kappa_c(x) = c, \forall x \in \Sigma^*$, ἐὰν αὐτὸ χρειάζεται κάπου. Τὸ παραμετροποιημένο πρόβλημα πάλι, δὲν ἀπαιτεῖ κάτι ἰδιαίτερο ἐκτὸς ἀπὸ τὴν ὕπαρξη μιᾶς ὁποιασδήποτε παραμέτρου, ποὺ νὰ ἱκανοποιῆ τὸν ὁρισμὸ τῆς παραμετροποιήσεως, ὅμως ἡ ἐπιλογὴ κάθε φορὰ τῆς παραμετροποιήσεως παίζει σημαντικὸ ρόλο στὴν μετέπειτα ἀνάλυση τοῦ προβλήματος. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἐπιλέγεται κάθε φορὰ ἔτσι, ὥστε ὁ ἀλγόριθμος ποὺ θὰ ἐπιλύη τὸ πρόβλημα νὰ εἶναι ὁ πιὸ κατάλληλος ἀνὰ περίπτωση. Ἔτσι πολλὲς φορὲς ἡ παραμετροποίηση ἀναφέρεται σὲ προφανὴ μεγέθη π.χ. μέγεθος συνόλου, ἀριθμὸς μεταβλητῶν κ.λπ. ἢ ἄλλες φορὲς σὲ λιγότερο προφανὴ μεγέθη π.χ. δενδροπλάτος, πυκνότητα, βαθμός, ἐκφυλισμὸς γραφήματος κ.λπ. Ἀναλόγως τοῦ σκοποῦ γιὰ τὸν ὁποῖο ἐπιλύεται τὸ κάθε πρόβλημα, εἶναι δυνατὸν κάθε φορὰ νὰ χρησιμοποιῆται διαφορετικὴ παράμετρος.

1.2.2 Ἄλλα παραδείγματα

Ὑπάρχει μία πληθώρα προβλημάτων, στὰ ὁποία ἡ παραμετροποίηση τοῦ προβλήματος ἔρχεται κατ' εὐθείαν μὲ τὸ πρόβλημα, ἂς δοῦμε μερικά.

Σχεδιασμὸς VLSI

Στὴν σχεδίαση ὁλοκληρωμένων κυκλωμάτων οἱ στρώσεις (layers), λόγω τεχνικῶν - χωρικῶν περιορισμῶν, δὲν ξεπερνοῦν τὶς 10. Ἔτσι ἂν καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι **NP**-πλῆρες, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν στρώσεων εἶναι μικρός, ἔχουμε μία καλὴ λύση στὸ πρόβλημα.

Ὑπολογιστικὴ Βιολογία

Γενικά, ἕνας μεγάλος ἀριθμὸς προβλημάτων ἀνακατασκευῆς ἁλυσίδων DNA εἶναι ὑπολογιστικῶς δύσκολα. Ὅμως ἐπειδὴ συντρέχουν δυναμικοὶ περιορισμοί, σχετικὰ μὲ τὴν τοπολογία τῆς εἰσόδου, δίνεται ἡ δυνατότητα κατασκευῆς ἀλγορίθμων οἱ ὁποῖοι ἐπιλύουν ἱκανοποιητικὰ αὐτὰ τὰ προβλήματα.

Μεταγλωττιστές (Compilers)

Ἕνα ἀπὸ τὰ προβλήματα στὴν μεταγλώττιση εἶναι ὁ ἔλεγχος συμβατότητος τῶν δηλώσεων τῶν τύπων τοῦ προγράμματος. Στὴν γλῶσσα ML τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι **EXP**-πλῆρες. Ὅμως οἱ μεταγλωττιστὲς γι' αὐτὴν τὴν γλῶσσα δουλεύουν ἀρκετὰ καλά, διότι τὸ βάθος τῶν δηλώσεων τῶν τύπων στὴν πράξη δὲν εἶναι μεγαλύτερο τοῦ 10. Ἔτσι χρησιμοποιεῖται ἀλγόριθμος πολυπλοκότητας $O\left(2^k n\right)$ ὅπου k τὸ βάθος δηλώσεων τῶν τύπων τοῦ ἑκάστοτε προγράμματος καὶ n εἶναι τὸ μῆκος του. Ἐπειδὴ τὸ βάθος τῶν τύπων εἶναι σχετικὰ μικρό, προφανῶς ἡ μεταγλώττιση γίνεται ἱκανοποιητικά.

Ρομποτική

Ὁ ἀριθμὸς τῶν βαθμῶν ἐλευθερίας κινήσεως στὰ ρομπότ, συνήθως δὲν ξεπερνᾶ τὸ 10. Ἔτσι πολλὰ προβλήματα Σχεδιασμοῦ Κινήσεως (Motion Planing), ἂν καὶ εἶναι **NP**-πλήρη, λύονται σχετικὰ εὔκολα ἐὰν λάβουμε ὑπ' ὄψιν τὸν ἀνωτέρω περιορισμό.

Συζευκτικὰ ἐρωτήματα σὲ σχεσιακὲς βάσεις δεδομένων

Τὰ συζευκτικὰ ἐρωτήματα (conjunctive queries) σὲ μία σχεσιακὴ βάση δεδομένων (relational database) εἶναι μία γνωστὴ κλάση ἐρωτημάτων. Ἐὰν λάβουμε ὡς εἴσοδο τοῦ προβλήματος τὸ ἐρώτημα, ἐκπεφρασμένο σὲ κάποια τυπικὴ γλῶσσα SQL καὶ τὴν βάση δεδομένων, ἡ κλασσικὴ πολυπλοκότητα μᾶς λέει ὅτι εἶναι **NP**-πλῆρες. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ μπορεῖ νὰ λυθῆ σὲ χρόνο $O\left(n^k\right)$ ὅπου k τὸ μέγεθος τοῦ ἐρωτήματος καὶ n τὸ μέγεθος τῆς βάσεως δεδομένων. Φαίνεται λοιπὸν, ὅτι ὅταν τὸ μέγεθος τοῦ ἐρωτήματος εἶναι μικρὸ σὲ σχέση μὲ τὸ μεγάλο μέγεθος τῆς βάσεως δεδομένων, τότε τὸ πρόβλημα ἐπιλύεται σὲ πολυωνυμικὸ χρόνο $O\left(n^k\right)$. Παρ' ὅλα αὐτά, εἶναι μᾶλλον ἀπίθανο νὰ βρεθῆ ἀλγόριθμος πολυπλοκότητας $f\left(k\right) \cdot p\left(n\right)$ μὲ f ὑπολογίσιμη συνάρτηση καὶ p πολυώνυμο, ὁ ὁποῖος νὰ ἐπιλύη τὸ πρόβλημα αὐτό, ὅπως ἔχουν δείξει οἱ Παπαδημητρίου καὶ Γιαννακάκης στὸ [54].

1.2.3 Ἄλλα Παραμετροποιημένα Προβλήματα

Ἂς δοῦμε λοιπὸν πῶς διατυπώνονται μερικὰ παραμετροποιημένα προβλήματα. Ἐμπρὸς ἀπὸ κάθε τέτοιο πρόβλημα βάζουμε τὸ πρόθεμα p- ὥστε νὰ γνωστοποιῆται κατ' εὐθείαν ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι παραμετροποιημένο. Ἐὰν κάποιο πρόβλημα ἔχει περισσότερες ἀπὸ μία γνωστὲς παραμετροποιήσεις τότε συνήθως

μετὰ τὸ πρόθεμα p- ἀναφέρεται κωδικοποιημένα καὶ ἡ παραμετροποίηση.
Προσοχή: Ὅταν ἡ παράμετρος εἶναι σταθερὴ π.χ. $\forall x : \kappa(x) = c$, τότε συνήθως ἀγνοεῖται, ἔτσι εἰσάγεται ἡ ἔννοια τῆς βουβῆς (dummy) παραμέτρου $\kappa_{one}(x) = 1$, ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται σὲ πολλὰ προβλήματα ὥστε νὰ μελετηθοῦν αὐτούσια ἀπὸ τὴν σκοπιὰ τῆς παραμετρικῆς πολυπλοκότητας.

Γενικὴ Παρατήρηση : Ἡ εἴσοδος x ἑνὸς προβλήματος (L, κ), πολλὲς φορές, ἔχει μία δομὴ καὶ εἶναι μία διατεταγμένη n-άδα $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ [1].
Γιὰ λόγους εὐκολίας θὰ βάζουμε στὴν παράμετρο κ ὡς εἴσοδο τὴν n-άδα $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ἔτσι ἡ παράμετρος θὰ γράφεται ὡς $\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ἀντὶ τοῦ $\kappa(x)$ ποὺ εἶναι τυπικὰ σωστό.

p-SAT

Ἔστω $SAT(\Sigma)$ (γιὰ συντομία SAT ἀφοῦ τὸ ἀλφάβητο δὲν παίζει τελικὰ ρόλο) τὸ σύνολο ὅλων τῶν ἱκανοποιησίμων συζευκτικῶν προτασιακῶν τύπων (propositional forms) κωδικοποιημένων σὲ ἕνα ἀλφάβητο Σ. Ἂς ὁρίσουμε τὴν ἑξῆς παραμετροποίηση κ :

$$\kappa(\phi) = \begin{cases} \text{Ἀριθμὸς μεταβλητῶν στὸν } \phi & \text{ἂν ὁ } \phi \text{ εἶναι μία ἔγκυρη κωδικοποίη-} \\ & \text{ση συζευκτικοῦ προτασιακοῦ τύπου} \\ -1 & \text{Διαφορετικά} \end{cases}$$

Τὸ πεδίο τιμῶν τῆς $\kappa(\phi) : SAT(\Sigma) \to \mathbb{Z}$ εἶναι ὅλοι οἱ ἀκέραιοι μεγαλύτεροι ἢ ἴσοι τοῦ -1.
Ἔτσι ἔχουμε τὸ ἑξῆς παραμετροποιημένο πρόβλημα:

p-SAT

Εἴσοδος : Ἕνας προτασιακὸς τύπος ϕ.
Παράμετρος : κ ὅπως ὁρίσθηκε παραπάνω (ἀριθμὸς μεταβλητῶν τοῦ ϕ).
Ἐρώτηση : Εἶναι ὁ ϕ ἱκανοποιήσιμος;

[1] Προφανῶς, ἡ ὑλοποίηση τοῦ προβλήματος καὶ τοῦ ἀλγορίθμου στὸ ἑκάστοτε ὑπολογιστικὸ μοντέλο, δὲν ἀφορᾶ τὴν παραμετρικὴ πολυπλοκότητα. Ἀναλόγως τοῦ ὑπολογιστικοῦ μοντέλου π.χ. μηχανὴ Turing μὲ μία ἢ πολλὲς ταινίες, Random Access Memory μηχανὴ κ.λπ. γίνεται καὶ διαφορετικὴ ὑλοποίηση. Ὅλα τὰ ὑπολογιστικὰ μοντέλα ἱκανοποιοῦν κάποιες κοινὲς καὶ λογικὰ παραδεκτὲς παραδοχὲς π.χ. ἡ κωδικοποίηση - ἀποκωδικοποίηση εἶναι γραμμικοῦ χρόνου συνάρτηση ὡς πρὸς τὸ μῆκος τῆς εἰσόδου της, δηλαδὴ $|y| \leq O(|x|)$, συνεπῶς ἡ κωδικοποιημένη εἴσοδος y δὲν ἀποκωδικοποιεῖται σὲ χρόνο $O(|x|^r)$, μὲ $r > 1$ κ.λπ.

p-Σύνολο Αφής (p-Hitting Set)

Σύνολο Ἀφῆς $S \subseteq V(G)$ μεγέθους k ἑνὸς (ὑπερ)γραφήματος G, ὀνομάζεται ἕνα σύνολο k κορυφῶν, γιὰ τὸ ὁποῖο ἰσχύει: $\forall e \in E(G)$ ἔχουμε $e \cap S \neq \emptyset$. Ὁρίζουμε γιὰ κ τὴν συνάρτηση $\kappa(G,k) = k$ ἡ ὁποία εἶναι ἀνεξάρτητη τοῦ G, ἀλλὰ ὄχι τῆς εἰσόδου, ἡ ὁποία περιέχει καὶ τὸ k.
Ἔτσι ἔχουμε τὸ ἑξῆς παραμετροποιημένο πρόβλημα:

p-Σύνολο Αφής (p-Hitting Set)
Εἴσοδος : Ἔστω G (ὑπερ)γράφημα καὶ $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος : $\kappa(G,k) = k$.
Ἐρώτηση : Ὑπάρχει σύνολο ἀφῆς μεγέθους μικροτέρου ἢ ἴσου k;

Σχόλιο: Ἐδῶ, κατὰ κάποιον τρόπο, ἡ ἐπιλογὴ τῆς παραμέτρου ὑπαγορεύεται ἀπὸ τὴν κλασσικὴ πολυπλοκότητα. Ἡ ἐπιλογὴ τῆς παραμετροποιήσεως δὲν γίνεται τυχαῖα, ἀλλὰ συνεισφέρει στὴν ἀποτελεσματικὴ λύση τοῦ προβλήματος.

p-Φραγμένο Σύνολο Αφής (p-card-Hitting Set)

Ἐὰν ἀλλάξουμε λίγο τὴν παράμετρο, θέτοντας $\kappa(G,k) = k + d$ ὅπου $d = \max\{|e| \mid e \in E(G)\}$, τότε ἔχουμε τὸ πρόβλημα p-Φραγμένο Σύνολο Αφής. Αὐτὸ τὸ πρόβλημα καὶ τὸ προηγούμενο δείχνουν τὴν σημασία τῆς παραμέτρου ὡς πρὸς τὴν ὁποία λύεται τὸ πρόβλημα.

p-Φραγμένο Σύνολο Αφής (p-card-Hitting Set)
Εἴσοδος : Ἕνα (ὑπερ)γράφημα G καὶ $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος : $\kappa(G,k) = k + d$ ὅπου d ὁ μέγιστος ἀριθμὸς κορυφῶν μιᾶς ὑπερακμῆς e, δηλαδὴ $d = \max\{|e| \mid e \in E(G)\}$.
Ἐρώτηση : Ὑπάρχει σύνολο ἀφῆς μεγέθους μικροτέρου ἢ ἴσου k;

p-Σύνολο Κυριαρχίας (p-Dominating Set)

Σύνολο Κυριαρχίας $S \subseteq V(G)$ μεγέθους k ἑνὸς γραφήματος G, ὀνομάζεται ἕνα σύνολο k κορυφῶν, γιὰ τὸ ὁποῖο ἰσχύει: $\forall v \in V(G) - S$ ἔχουμε $\exists u \in S$ τέτοιο ὥστε $\{v, u\} \in E(G)$.

Ἔτσι ἔχουμε τὸ ἑξῆς παραμετροποιημένο πρόβλημα:

p-Συνολο Κυριαρχιας (p-Dominating Set)
Είσοδος : Έστω G γράφημα καὶ $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος : $\kappa(G,k) = k$.
Ἐρώτηση : Ὑπάρχει σύνολο κυριαρχίας μεγέθους μικροτέρου ἢ ἴσου k;

Ἐὰν ἡ εἴσοδος τοῦ προβλήματος p-Συνολο Κυριαρχιας περιορισθῆ σὲ ἐπίπεδα γραφήματα, ἔχουμε τὸ p-Επιπεδο Συνολο Κυριαρχιας (p-Planar Dominating Set).

p-Καλυμμα Κορυφων (p-Vertex Cover)

Ἂς δοῦμε λοιπὸν πῶς ἐκφράζεται τὸ γνωστὸ πρόβλημα Καλυμμα Κορυφων στὴν παραμετροποιημένη του μορφή.
Κάλυμμα Κορυφῶν $S \subseteq V(G)$ μεγέθους k ἑνὸς γραφήματος G, ὀνομάζεται ἕνα σύνολο k κορυφῶν, γιὰ τὸ ὁποῖο ἰσχύει: $\forall e \in E(G)$ ἔχουμε $e \cap S \neq \emptyset$.

p-Καλυμμα Κορυφων (p-Vertex Cover)
Είσοδος : Ἕνα γράφημα G καὶ $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος : $\kappa(G,k) = k$.
Ἐρώτηση : Ὑπάρχει κάλυμμα κορυφῶν μεγέθους μικροτέρου ἢ ἴσου k;

Παρομοίως καὶ ἐδῶ, ἐὰν ἡ εἴσοδος τοῦ προβλήματος p-Καλυμμα Κορυφων περιορισθῆ σὲ ἐπίπεδα γραφήματα, ἔχουμε τὸ p-Επιπεδο Καλυμμα Κορυφων (p-Planar Vertex Cover).

p-Χρωματισμος Κορυφων (p-Vertex Coloring ἢ p-Colorability)

Στὸ τέλος ἄς δοῦμε τὴν παραμετροποιημένη μορφή, ἑνὸς πολὺ γνωστοῦ καὶ σημαντικοῦ προβλήματος, τοῦ χρωματισμοῦ τῶν κορυφῶν ἑνὸς γραφήματος.

p-Χρωματισμος Κορυφων (p-Colorability)
Είσοδος : Ἕνα γράφημα G καὶ $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος : $\kappa(G,k) = k$.
Ἐρώτηση : $\exists \sigma : V(G) \to \{1, \ldots, k\} : \forall \{v,u\} \in E(G)\ \sigma(v) \neq \sigma(u)$;

Τέλος πρέπει νὰ ποῦμε, ὅτι δώσαμε ὡς παραδείγματα μερικὰ παραμετροποιημένα προβλήματα σχετικὰ ἁπλά, ὥστε νὰ γίνη ὅσο τὸ δυνατὸν καλύτερα κατανοητή, ἡ ἔννοια τῆς παραμετροποιήσεως.

1.3 Ἀναφορές, Σχόλια

Οἱ Rodney G. Downey καὶ Michael R. Fellows μελέτησαν ἀρχικὰ τὴν παραμετρικὴ πολυπλοκότητα καὶ τὴν θεμελίωσαν μὲ τὴν μορφὴ ποὺ παρουσιάζεται ἐδῶ. Ἡ πρώτη ἐργασία ἐμφανίσθηκε στὸ ἄρθρο [26] τοῦ Feasible Mathematics II καὶ μετὰ γράφθηκε ἀπὸ τοὺς ἰδίους τὸ πρῶτο βιβλίο [29] γιὰ τὴν παραμετρικὴ πολυπλοκότητα.

Δύο σύγχρονα βιβλία γιὰ τὴν παραμετρικὴ πολυπλοκότητα εἶναι τὰ [51] καὶ [37]. Τὸ πρῶτο Invitation to Fixed-Parameter Algorithms εἶναι εἰσαγωγικὸ καὶ σχετικὰ πιὸ εὔκολο ἀπὸ τὸ δεύτερο Parameterized Complexity Theory, τὸ ὁποῖο ὅμως εἶναι πιὸ πλῆρες καὶ ὁλοκληρωμένο. Γιὰ τὴν πλήρη κατανόηση τῆς παραμετρικῆς πολυπλοκότητας χρειάζεται καλὴ γνώση τῆς κλασσικῆς πολυπλοκότητας, τὸ βιβλίο [53] τοῦ Παπαδημητρίου εἶναι μία κλασσικὴ ἀναφορὰ ἐπὶ τοῦ θέματος. Πολλὰ ἀποτελέσματα τῆς κλασσικῆς πολυπλοκότητας μεταφέρονται αὐτούσια καὶ στὴν παραμετρική.

Μιὰ πολὺ καλὴ ἐργασία γιὰ παραμετροποιημένα προβλήματα εἶναι τὸ [17], ποὺ βρίσκεται στὴν ἱστοσελίδα

`http://bravo.ce.uniroma2.it/home/cesati/research/compendium/`

Ἡ ἐργασία αὐτή, ἡ ὁποία ἐνημερώνεται κατὰ καιρούς, περιλαμβάνει ἕναν πολὺ μεγάλο κατάλογο προβλημάτων τῆς κλασσικῆς πολυπλοκότητας, τὰ ὁποῖα παραμετροποιεῖ μὲ διαφόρους τρόπους. Τέλος, σχολιάζει τὰ προβλήματα ὡς πρὸς τὴν κλασσικὴ καὶ παραμετρικὴ πολυπλοκότητα, σὲ ποιὰ κλάση βρίσκονται καὶ δίνει πολλὲς βιβλιογραφικὲς ἀναφορὲς γιὰ τὸ τί ἔχει γίνει γιὰ τὸ κάθε πρόβλημα.

Γιὰ τὸ κάλυμμα κορυφῶν, τὸ πλῆρες κείμενο γιὰ τὸ ἄρθρο [22] βρίσκεται στὴν ἱστοσελίδα

`http://facweb.cs.depaul.edu/research/techreports/`

Τὸ [20] πραγματεύεται ἕνα λίγο μεγαλύτερο ὅριο $O\Big((1,2832)^k \cdot k^{1,5} + k \cdot n\Big)$, ποὺ μὲ λίγη προσπάθεια κατεβαίνει στὸ $O\Big((1,2745)^k \cdot k^4 + k \cdot n\Big)$. Γίνεται ἐμφανές, ὅτι ἡ βάση $1,2832$ ἢ $1,2745$ τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτη τὸ k, εἶναι καθοριστικὸς παράγων τοῦ γινομένου, διότι γιὰ μικρὲς τιμὲς τῆς παραμέτρου ὑπερισχύει τὸ k^4, ἀλλὰ γιὰ μεγάλες τὸ $(1,2832)^k$.

Κεφάλαιο 2

Ἡ κλάση FPT

2.1 Εἰσαγωγή

Ὅλα τὰ προηγούμενα παραδείγματα μποροῦν νὰ κατηγοριοποιηθοῦν ὡς πρὸς τὸν χρόνο σὲ τρεῖς βασικὲς κατηγορίες δηλαδή:

1. Χρόνος $O\left((\kappa(x))^{q(|x|)}\right)$, ὅπου q πολυώνυμο π.χ. χρωματισμὸς κορυφῶν.

2. Χρόνος $O\left(|x|^{f(\kappa(x))}\right)$, ὅπου f ὑπολογίσιμη συνάρτηση π.χ. ἀνεξάρτητο σύνολο.

3. Χρόνος $O\left(f(\kappa(x)) \cdot p(|x|)\right)$, ὅπου f ὑπολογίσιμη συνάρτηση καὶ p πολυώνυμο π.χ. κάλυμμα κορυφῶν.

Βλέπουμε μία τεράστια διαφορὰ τῶν τιμῶν τῶν τριῶν παραπάνω συναρτήσεων, ὅπως φαίνεται καὶ στὸν σχετικὸ πίνακα (Πίνακας 1) τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου. Ἄς δοῦμε λοιπὸν τί μπορεῖ νὰ προσφέρουν ὅλα τὰ παραπάνω παραδείγματα ὅταν κατηγοριοποιηθοῦν καταλλήλως.

Μόνο ὅμως οἱ ἀλγόριθμοι τῆς περιπτώσεως 3 ἀπὸ πιὸ πάνω μποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ἱκανοποιητικοί. Ἔτσι λοιπὸν ὁρίζουμε :

Ὁρισμός 2.3: *fpt-ἀλγόριθμος* γιὰ τὸ παραμετροποιημένο πρόβλημα (Q,κ) μὲ ἀλφάβητο Σ, εἶναι ἕνας αἰτιοκρατικός (ντετερμινιστικός) ἀλγόριθμος $\mathcal{A}$, ποὺ μὲ εἴσοδο τὸ $x \in \Sigma^*$, τερματίζει ἐντὸς $f(\kappa(x)) \cdot p(|x|)$ βημάτων, ὅπου κ παραμετροποίηση τοῦ x, $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ εἶναι ὑπολογίσιμη συνάρτηση καὶ $p \in \mathbb{N}_0[X]$ εἶναι πολυώνυμο.

Ὁρισμός 2.4: *Ἡ κλάση* **FPT**. Ἕνα πρόβλημα (Q,κ) μὲ ἀλφάβητο Σ, εἶναι *παραμετρικὰ εὔκολο*, ἐὰν ὑπάρχῃ ἕνας fpt-ἀλγόριθμος, ὁ ὁποῖος ἀποφασίζει

γιὰ κάθε $x \in \Sigma^*$ ἐὰν $x \in Q$.
Ἡ κλάση **FPT** περιλαμβάνει ὅλα τὰ παραμετροποιημένα προβλήματα (Q, κ), τὰ ὁποῖα ἐπιλύονται (ἀποφασίζονται) ἀπὸ fpt-ἀλγόριθμο, δηλαδὴ $(Q, \kappa) \in$ **FPT** ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν ὑπάρχη fpt-ἀλγόριθμος ποὺ ἐπιλύει τὸ (Q, κ).

Γιὰ τὴν εὔκολη μελέτη αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου θὰ χρειασθοῦν μερικοὶ ὁρισμοὶ γιὰ τὰ γραφήματα.

Ὁρισμός 2.5: *Γειτονιὰ μιᾶς κορυφῆς* v τοῦ ἁπλοῦ γραφήματος G, εἶναι τὸ ὑποσύνολο $N_G(v) = \{u \mid u \in V(G) - \{v\} \wedge \{v, u\} \in E(G)\}$ τοῦ $V(G)$. Ὅταν τὸ γράφημα G ἐννοῆται ἀπὸ τὰ συμφραζόμενα, ὁ δείκτης $_G$ στὸ N_G παραλείπεται.

Ὁρισμός 2.6: *Μέγιστος βαθμὸς* $\Delta(G)$ ἑνὸς γραφήματος G, εἶναι ὁ μέγιστος ἀριθμὸς ἀκμῶν ποὺ προσπίπτουν σὲ κάποια κορυφὴ τοῦ G. Ἐπειδὴ κάθε ἀκμὴ προσπίπτει σὲ δύο κορυφές, ὁ *βαθμὸς* κάθε κορυφῆς εἶναι ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τῆς γειτονιᾶς της, ἰσοδύναμα ὁρίζεται ὡς

$$\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} \{|N_G(v)|\}$$

2.2 Μελέτη τῶν FPT προβλημάτων

Θὰ μελετηθοῦν δύο **FPT** προβλήματα, γιὰ νὰ γίνη ἐμφανὴς ὁ ρόλος τῆς παραμέτρου καὶ πῶς μπορεῖ ἕνα πρόβλημα νὰ σχετίζεται μὲ ἕνα ἄλλο.

2.2.1 Ἕνας fpt-ἀλγόριθμος γιὰ τὸ p-Καλυμμα Κορυφων

Ἄς ἐπαναλάβουμε τὸ πρόβλημα:

p-Καλυμμα Κορυφων (p-Vertex Cover)
Εἴσοδος : Ἕνα γράφημα G καὶ $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος : $\kappa(G, k) = k$.
Ἐρώτηση : Ὑπάρχει κάλυμμα κορυφῶν μεγέθους μικροτέρου ἢ ἴσου k;

Προφανῶς ἡ $\kappa(G, k)$ βάζει ἕνα ὅριο στὸ μέγεθος τοῦ καλύμματος κορυφῶν. Ἔστω λοιπὸν S ἕνα κάλυμμα κορυφῶν τοῦ G μεγέθους $|S|$. Παρατηροῦμε ὅτι κάθε ἀκμή, θὰ καλύπτεται ὁπωσδήποτε ἀπὸ τοὐλάχιστον μία κορυφὴ τοῦ S, αὐτὸ θὰ πρέπη νὰ ἰσχύη γιὰ κάθε κάλυμμα τοῦ G, ἑπομένως ἐὰν ὑπάρχη

κάλυμμα μεγέθους μικροτέρου ἢ ἴσου τοῦ k, θὰ πρέπη κάθε ἀκμὴ νὰ ἔχη μία τοὐλάχιστον κορυφὴ σὲ αὐτὸ τὸ κάλυμμα. Λαμβάνουμε λοιπὸν αὐθαίρετα μία ἀκμὴ $e = \{u, v\} \in E(G)$ καὶ ἐκ τῶν πραγμάτων προκύπτει ὅτι εἴτε ἡ κορυφὴ u εἴτε ἡ κορυφὴ v ἀνήκει στὸ κάλυμμα μεγέθους k γιὰ αὐτὴν τὴν ἀκμή. Ἔστω ὅτι ἀνήκει ἡ u τότε ὅλες οἱ ἀκμὲς στὴν γειτονιὰ τῆς u εἶναι καλυμμένες, ἄρα ἀναδρομικὰ προκύπτει τὸ ἐρώτημα ἐὰν τὸ ἐναγόμενο ὑπογράφημα $G - u$ ἔχη κάλυμμα μεγέθους $k - 1$. Συνεχίζοντας ἔτσι, μετὰ ἀπὸ k ἀφαιρέσεις κορυφῶν, ἐὰν ὑπάρχουν ἀκμὲς στὸ ἐναπομείναν ὑπογράφημα, τότε αὐτὲς δὲν εἶναι κάλυμμα κορυφῶν τοῦ G, ὁπότε ἀπαντοῦμε ἀρνητικὰ γιὰ αὐτὲς τὶς k κορυφές, ἐὰν ὅμως δὲν ὑπάρχουν ἀκμὲς στὸ ἐναπομείναν ὑπογράφημα τοῦ G, τότε αὐτὲς εἶναι κάλυμμα κορυφῶν τοῦ G, ὁπότε ἀπαντοῦμε θετικά. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ἴδια ὑπόθεση ἰσχύει καὶ γιὰ τὴν κορυφὴ v, παρατηροῦμε ὅτι σὲ κάθε βῆμα αὐτῆς τῆς ἀναδρομῆς τὰ ἐρωτήματα διπλασιάζονται καὶ τελικὰ ἐλέγχονται 2^k συνδυασμοὶ κορυφῶν. Γίνεται σαφὲς ὅτι τελικὰ θὰ ἔχουμε ἕνα δένδρο βάθους k μὲ 2^k φύλλα τὸ πολύ. Σὲ κάθε κορυφὴ τοῦ δένδρου χρειάζεται χρόνος $O(n)$, ὅπου $n = |V(G)| + |E(G)|$.
Ἐδῶ κατασκευάζουμε ἕνα δένδρο τοῦ ὁποίου τὸ μέγεθος θὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μέγεθος τοῦ καλύμματος (k), δηλαδὴ τὸ βάθος τοῦ δένδρου θὰ εἶναι $O(k)$.
Ἡ τεχνικὴ αὐτὴ λέγεται μέθοδος τοῦ φραγμένου δένδρου ἀνιχνεύσεως (bounded search tree method).

Θεώρημα 2.1: Τὸ p-Κάλυμμα Κορυφῶν ἀνήκει στὴν κλάση **FPT**.

Ἀπόδειξη: Ὁ παρακάτω ἀλγόριθμος algVC λύει τὸ p-Κάλυμμα Κορυφῶν. Γιὰ εὐκολία στὴν ἀπόδειξη, ἔστω ὅτι τὸ ἀρχικὸ μέγεθος τοῦ ζητουμένου καλύμματος εἶναι τὸ $k_s \geq 0$, ὁπότε στὴν πρώτη κλήση τῆς συναρτήσεως algVCf ἡ παράμετρος k ἔχει τιμὴ k_s.
Βῆμα 1. Εἶναι προφανές, ἐὰν $|V(G)| \leq k$ τότε λαμβάνουμε ὡς κάλυμμα ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ G.
Βῆμα 2. Ἀπὸ τὸ προηγούμενο βῆμα συνάγεται ὅτι $|V(G)| > k$, ἐὰν τὸ γράφημα G δὲν ἔχη ἀκμές, δηλαδὴ $|E(G)| = 0$, τότε γνωρίζουμε ὅτι ὑπάρχει ἕνα κάλυμμα κορυφῶν, γιατί οἱ προηγούμενες $k_s - k$ ἀφαιρεθεῖσες κορυφές, ἔχουν ἀφήσει ἕνα ἐναγόμενο ὑπογράφημα, τὸ ὁποῖο εἶναι σκόνη[1]. Τὸ κάλυμμα αὐτό, μάλιστα, βρίσκεται μὲ τροποποίηση τοῦ ὑπάρχοντος ἀλγορίθμου, βάζοντας ἕναν πίνακα μεγέθους k_s καὶ πρὶν ἀπό κάθε κλήση τῆς algVCf, τοποθετεῖται ἡ ἀφαιρουμένη κορυφή.
Βῆμα 3. Ἀπὸ τὸ προηγούμενο βῆμα συνάγεται ὅτι $|E(G)| > 0$, ἐὰν τὸ k εἶναι 0 σημαίνει ὅτι οἱ προηγούμενες k_s κορυφὲς δὲν εἶναι κάλυμμα.
Βῆμα 4. Ἀπὸ τὸ προηγούμενο βῆμα συνάγεται ὅτι $k > 0$. Ἑπομένως μία

[1] Ἕνα γράφημα εἶναι σκόνη, ὅταν ἔχη κορυφὲς καὶ δὲν ἔχη ἀκμές.

ὁποιαδήποτε ἀκμή, π.χ. ἡ $e = \{u, v\}$, θὰ πρέπη νὰ καλύπτεται μὲ τοὐλάχιστον μία, ἀπὸ τὶς δύο κορυφές της, ἔτσι φτιάξε τὰ δύο νέα ἐναγόμενα ὑπογραφήματα $G - u$ (ὑποθέτουμε ὅτι ἡ u ἀνήκει στὸ κάλυμμα) καὶ $G - v$ (ὑποθέτουμε ὅτι ἡ v ἀνήκει στὸ κάλυμμα) ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὴν ἀκμὴ e, σὲ χρόνο τοὐλάχιστον $O\left(|V\left(G\right)| + |E\left(G\right)|\right)$.
Βῆμα 5. Ὑπάρχει κάλυμμα μεγέθους $k-1$ γιὰ ἕνα τοὐλάχιστον ἀπὸ τὰ γραφήματα $G - u$ καὶ $G - v$; Αὐτὸ διαπιστώνεται σὲ αὐτὸ τὸ βῆμα καλώντας τὴν algVCf καὶ γιὰ τὰ δύο γραφήματα.

Ὀρθότητα τοῦ ἀλγορίθμου: Γίνεται προφανές, ὅτι ἐὰν τὸ γράφημα G δὲν ἔχη κάλυμμα κορυφῶν, ὁ ἀλγόριθμος θὰ ἀπαντήση ὄχι, διότι ὁποιεσδήποτε k_s κορυφὲς θὰ ἀφῆσουν ἀκμές. Ἔστω ὅτι τὸ γράφημα G ἔχει κάλυμμα κορυφῶν μεγέθους μικροτέρου ἢ ἴσου τοῦ k_s, τότε ὁποιαδήποτε ἀκμὴ καὶ νὰ πάρουμε, σίγουρα τοὐλάχιστον μία ἐκ τῶν δύο κορυφῶν της θὰ ἀνήκη στὸ κάλυμμα, ἄρα στὸ βῆμα 5 ὁπωσδήποτε σὲ μία κλήση τῆς VC θὰ ἔχουμε πάρει τὴν σωστὴ κορυφή. Ἀναδρομικὰ σὲ κάθε ἐναγόμενο ὑπογράφημα τοῦ G στὸ βῆμα 5 θὰ παίρνουμε τὴν σωστὴ κορυφή. Ἔτσι θὰ πάρη μὲ τὴν ὁριζομένη σειρὰ ἀπὸ τὸ βῆμα 4, ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ καλύμματος καὶ ὅταν τὸ ἐναπομείναν ἐναγόμενο ὑπογράφημα θὰ εἶναι σκόνη, θὰ ἔχη βρεῖ τὸ κάλυμμα.

Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ βάθος τῆς ἀναδρομῆς εἶναι τὸ πολὺ k καὶ ὅτι στὸ βῆμα 5 ἡ algVCf καλεῖται 2 φορές, ἄρα ὁ παραπάνω ἀλγόριθμος ἔχει τὴν ἑξῆς ἀναδρομή:

$$T\left(k, n\right) = 2T\left(k-1, n-1\right) + O\left(n\right)$$

ἡ ὁποῖα δίνει τὸν χρόνο τοῦ ἀλγορίθμου ποὺ εἶναι $O\left(2^k n\right)$. $\dashv$

Ἀλγόριθμος algVC.

algVCf(G, k)
// $G = (V, E)$ γράφημα, $k \geq 0$

1. Ἐὰν $|V\left(G\right)| \leq k$ τότε ἐπίστρεψε $TRUE$
2. Ἐὰν $|E\left(G\right)| = 0$ τότε ἐπίστρεψε $TRUE$
3. Ἐὰν $k = 0$ τότε ἐπίστρεψε $FALSE$
4. Πάρε αὐθαίρετα μία ἀκμὴ $e = \{u, v\} \in E\left(G\right)$. Φτιάξε τὰ γραφήματα $G - u$ καὶ $G - v$.
5. Ἐπίστρεψε algVCf$(G - u, k-1) \bigvee$ algVCf$\left(G - v, k-1\right)$

Ἂς δοῦμε καὶ τὴν γενίκευση τοῦ προβλήματος p-Καλυμμα Κορυφων ποῦ εἶναι σὲ ὑπεργραφήματα.

2.2.2 Ἕνας fpt-ἀλγόριθμος γιὰ τὸ p-Φραγμενο Συνολο Αφησ

p-Φραγμενο Συνολο Αφησ (p-card-Hitting Set)

Εἴσοδος : Ἕνα ὑπεργράφημα G καὶ $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος : $\kappa(G,k) = k + d$ ὅπου d ὁ μέγιστος ἀριθμὸς κορυφῶν μιᾶς ὑπερακμῆς e, δηλαδὴ $d = \max\{|e| \mid e \in E(G)\}$.
Ἐρώτηση : Ὑπάρχει κάλυμμα κορυφῶν μεγέθους μικροτέρου ἢ ἴσου k;

Τὸ ἀντίστοιχο πρόβλημα στὴν κλασσικὴ πολυπλοκότητα εἶναι τὸ d-Φραγμενο Συνολο Αφησ (d-Hitting Set), τὸ ὁποῖο φράσσει μὲ τὸ d τὸν μέγιστο ἀριθμὸ κορυφῶν κάθε ὑπερακμῆς. Ἐὰν ἀπὸ τὸν προηγούμενο ὁρισμὸ τοῦ p-Φραγμενο Συνολο Αφησ βγῇ ἡ παράμετρος, τότε ἔχουμε τὸ d-Φραγμενο Συνολο Αφησ τῆς κλασσικῆς πολυπλοκότητας.

Ἐδῶ φαίνεται ἡ σημασία τῆς παραμέτρου γιὰ τὸ συγκεκριμένο πρόβλημα. Ἐὰν ἡ παράμετρος ἦταν ἡ $\kappa(G,k) = k$, τότε ὁ μέγιστος ἀριθμὸς κορυφῶν μιᾶς ὑπερακμῆς θὰ ἦταν $|V(G)|$, ὅμως, ὅπως θὰ δοῦμε παρακάτω, δὲν θὰ μπορούσαμε νὰ φράξουμε τὸν χρόνο ὥστε τὸ πρόβλημα νὰ ἀνήκη στὴν κλάση **FPT**. Ἡ λογικὴ καὶ ἐδῶ εἶναι παρόμοια μὲ αὐτὴν τοῦ καλύμματος κορυφῶν· κάποια κορυφὴ u, κάθε ὑπερακμῆς, θὰ ἀνήκη στὸ σύνολο ἀφῆς, ἔτσι ὅλες οἱ ὑπερακμὲς στὴν γειτονιὰ τῆς u ἅπτονται (καλύπτονται) τῆς u καὶ δὲν μᾶς ἀπασχολοῦν πλέον. Ἔτσι πρέπει νὰ βρεθῇ ἐὰν τὸ ὑπεργράφημα $G_u = (V(G) - \{u\}, \{e \in E(G) \mid u \notin e\})$ ἔχῃ ἕνα σύνολο ἀφῆς μεγέθους $k-1$ καὶ συνεχίζουμε ἀναδρομικὰ γιὰ τὸ G_u. Ἐπειδὴ ἡ παραπάνω ὑπόθεση ἰσχύει γιὰ ὅλες τὶς κορυφὲς τῆς e γίνεται προφανὲς ὅτι σὲ κάθε βῆμα τῆς ἀναδρομῆς θὰ ἔχουμε d τέτοια ἐρωτήματα καὶ τελικὰ σχηματίζεται ἕνα δένδρο μὲ d^k φύλλα. Ἐδῶ στὸ βῆμα 5, ὁ βρόχος ὑλοποιεῖ ἕναν διαζευκτικὸ τύπο μεταβλητοῦ μεγέθους μὲ τὸ πολὺ d ὅρους, πρᾶγμα τὸ ὁποῖο θὰ γινόταν ἀλγοριθμικὰ εὐκολότερα, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων στὸν τύπο ἦταν μία σταθερὰ d[2] καὶ ὁ συμβολισμὸς τῶν κορυφῶν μποροῦσε νὰ εἶναι σταθερός. Παρομοίως θέτουμε $n = |V(G)| + |E(G)|$ καὶ προχωροῦμε στὸ θεώρημα.

Θεώρημα 2.2: Τὸ p-Φραγμενο Συνολο Αφησ ἀνήκει στὴν κλάση **FPT**.

Ἀπόδειξη: Ὁ παρακάτω ἀλγόριθμος algBHS λύει τὸ p-Φραγμενο Συνολο Αφησ. Ἐδῶ ἡ ἀπόδειξη εἶναι παρόμοια μὲ αὐτὴν τοῦ προηγουμένου θεωρήματος μόνο ποῦ διαφέρει στὸ βῆμα 5, ὅπου ἡ συνάρτηση algBHSf καλεῖται τὸ

[2] Βλέπε τὸν ἀλγόριθμο algVC γιὰ τὸ κάλυμμα κορυφῶν, ὅπου ὁ ἀριθμὸς τῶν κορυφῶν εἶναι ἡ σταθερὰ δύο.

πολὺ d φορὲς καὶ διακόπτει τὸν βρόχο καὶ ἐπιστρέφει μόνο ἐὰν κάποια κλήση τῆς algBHSf ἐπιστρέψη τιμὴ $TRUE$.

Ὀρθότητα τοῦ ἀλγορίθμου: Γίνεται προφανές, ὅτι ἐὰν τὸ ὑπεργράφημα G δὲν ἔχη σύνολο ἀφῆς τότε κανένας συνδυασμὸς k κορυφῶν δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι σύνολο ἀφῆς. Ἔστω ὅτι τὸ ὑπεργράφημα G ἔχει σύνολο ἀφῆς μεγέθους μικροτέρου ἢ ἴσου τοῦ k, τότε ὁποιαδήποτε ὑπερακμὴ καὶ νὰ πάρουμε, σίγουρα τοὐλάχιστον μία ἐκ τῶν κορυφῶν της, ἂς ὑποθέσουμε ἡ u, θὰ ἀνήκη στὸ σύνολο ἀφῆς καὶ συνεχίζοντας ἀναδρομικὰ μὲ τὸ G_u, τελικὰ θὰ ἔχουμε μία ἀκολουθία ἀπὸ τὸ πολὺ k κορυφές, οἱ ὁποίες θὰ εἶναι τὸ ζητούμενο σύνολο ἀφῆς τοῦ G καὶ θὰ ἔχη ἀπομείνει ἕνα γράφημα σκόνη ἀπὸ τὸ G, ὅπου καὶ θὰ τερματίση ὁ ἀλγόριθμος.

Εἶναι προφανές, ὅτι τὸ βάθος τῆς ἀναδρομῆς εἶναι τὸ πολὺ k καὶ ὅτι στὸ βῆμα 5 ἡ algBHSf καλεῖται τὸ πολὺ d φορές (ἐδῶ λοιπὸν φαίνεται ἡ σημασία τῆς παραμέτρου), ἄρα ὁ παραπάνω ἀλγόριθμος ἔχει τὴν ἑξῆς ἀναδρομή:

$$T(k, d, n) = dT(k-1, d, n-1) + O(n)$$

ἡ ὁποῖα δίνει τὸν χρόνο τοῦ ἀλγορίθμου ποὺ εἶναι $O\left(d^k n\right)$. ⊣

Ἀλγόριθμος algBHS

algBHSf(G, k)
// $G = (V, E)$ ὑπεργράφημα, $k \geq 0$

1. Ἐὰν $|V(G)| \leq k$ τότε ἐπίστρεψε $TRUE$
2. Ἐὰν $|E(G)| = 0$ τότε ἐπίστρεψε $TRUE$
3. Ἐὰν $k = 0$ τότε ἐπίστρεψε $FALSE$
4. Πάρε αὐθαίρετα μία ὑπερακμὴ $e \in E(G)$
5. Γιὰ κάθε κορυφὴ $u \in e$ (βρόχος ποὺ ἐκτελεῖται τὸ πολὺ d φορές)
   (α′) $G_u = (V(G) - \{u\}, \{e \in E(G) \mid u \notin e\})$.
   (β′) Ἐὰν algBHSf($G_u, k-1$) $==$ $TRUE$ τότε ἐπίστρεψε $TRUE$
6. Ἐπίστρεψε $FALSE$

Ἂς ξαναθυμηθοῦμε τὸν ὁρισμὸ ἀπὸ τὴν εἰσαγωγή, ἑνὸς ἄλλου παρομοίου προβλήματος, τοῦ p-Σύνολο Κυριαρχίας (p-Dominating Set)[3]:

[3] Ὅπως ἀναφέρθηκε πάλι στὴν εἰσαγωγή, ἐὰν ἡ εἴσοδος περιορισθῆ σὲ ἐπίπεδα γραφήματα

p-Σύνολο Κυριαρχίας (p-Dominating Set)

Εἴσοδος : Ἕνα γράφημα G καὶ $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος : $\kappa(G, k) = k$.
Ἐρώτηση : Ὑπάρχει σύνολο κυριαρχίας μεγέθους μικροτέρου ἢ ἴσου k;

Σύνολο κυριαρχίας ἑνὸς γραφήματος G εἶναι ἕνα ὑποσύνολο S τοῦ $V(G)$ τέτοιο ὥστε: $\forall u \in (V(G) - S) \, \exists v \in S$ μὲ $\{u, v\} \in E(G)$, δηλαδὴ κάθε κορυφὴ ἐκτὸς συνόλου κυριαρχίας συνδέεται μὲ μία ἀκμὴ μὲ κάποια κορυφὴ τοῦ συνόλου κυριαρχίας.
Γιὰ τὸ παραπάνω πρόβλημα δὲν ἔχει εὑρεθῆ ἀλγόριθμος μέχρι σήμερα ποὺ νὰ τὸ κατατάσση στὴν κλάση **FPT**. Ἂς ἀλλάξουμε λίγο τὴν παραμετροποίηση καὶ τότε μπορεῖ νὰ μπῆ στὴν κλάση **FPT**.
Ἔτσι ἔχουμε τὸ ἑξῆς πρόβλημα : p-Φραγμενο Συνολο Κυριαρχιας

p-Φραγμενο Συνολο Κυριαρχιας (p-deg-Dominating Set)

Εἴσοδος : Ἕνα γράφημα G καὶ $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος : $\kappa(G, k) = k + \Delta(G)$.
Ἐρώτηση : Ὑπάρχει σύνολο κυριαρχίας μεγέθους μικροτέρου ἢ ἴσου k;

Στὸ ἑπόμενο λῆμμα, ἡ ἀναγωγὴ εἶναι ἡ γνωστὴ ἀναγωγὴ κατὰ Cook τῆς κλασσικῆς πολυπλοκότητας, ἡ ὁποία ὅμως διατηρεῖ τὴν παράμετρο ἀμετάβλητη, λόγω αὐτῆς της τῆς ἰδιότητας, εἶναι καὶ fpt-ἀναγωγὴ γιὰ τὴν παραμετρικὴ πολυπλοκότητα.
Ἂν καὶ ἡ fpt-ἀναγωγὴ θὰ ὁρισθῆ στὸ ἀμέσως ἑπόμενο τμῆμα τοῦ παρόντος κεφαλαίου, δίνεται ἐδῶ μία ἀναγωγή, ἡ ὁποία εἶναι καὶ fpt, γιὰ νὰ γίνη εὐκολότερα κατανοητὸς ὁ ὁρισμὸς τῆς fpt-ἀναγωγῆς, ὅταν δοθῆ.
Ἡ fpt-ἀναγωγὴ γιὰ τὴν παραμετρικὴ πολυπλοκότητα, ὅπως θὰ δειχθῆ στὸ λῆμμα 2.2, εἶναι ἀντίστοιχη μὲ τὴν ἀναγωγὴ κατὰ Cook τῆς κλασσικῆς πολυπλοκότητας. Ἡ βασικὴ ἰδέα τῆς ἀναγωγῆς παραμένει, δηλαδὴ ὅταν ἕνα πρόβλημα ἀνάγεται σὲ ἕνα ἄλλο, ὁ βαθμὸς δυσκολίας του εἶναι τὸ πολὺ ὅσο τοῦ προβλήματος στὸ ὁποῖο ἀνάχθηκε.

Λῆμμα 2.1: Τὸ p-Φραγμενο Συνολο Κυριαρχιας ἀνήκει στὴν κλάση **FPT**.

Ἀπόδειξη: Ὑπάρχει fpt-ἀναγωγὴ ἀπὸ αὐτὸ τὸ πρόβλημα στὸ p-Φραγμενο Συνολο Αφης. Φτιάχνουμε ἕνα ὑπεργράφημα H_G μὲ τὶς ἴδιες κορυφὲς τοῦ

ἔχουμε τὸ p-Επιπεδο Συνολο Κυριαρχιας (p-Planar Dominating Set), τὸ ὁποῖο ἀνήκει στὴν κλάση **FPT**.

G. Γιὰ κάθε κορυφὴ u τοῦ G βάζουμε (ἀντιστοιχοῦμε) μία ὑπερακμὴ τὴν e_u στὸ H_G, ἡ ὁποία περιέχει ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ G ποὺ συνδέονται μὲ ἀκμὲς μὲ τὴν u, δηλαδὴ τὴν γειτονιὰ $N_G(u)$ τῆς u καὶ τὴν ἴδια τὴν u. Ἐὰν κατὰ τὴν διάρκεια τῆς διαδικασίας μία ὑπερακμὴ e_v μιᾶς κορυφῆς v, ἡ ὁποῖα πρόκειται νὰ μπῆ, ὑπάρχη ἤδη π.χ. πλῆρες γράφημα $G = K_n$, τότε γιὰ αὐτὴν τὴν κορυφὴ v δὲν βάζουμε (ἀντιστοιχοῦμε) καμμία ὑπερακμή.
Πρέπει νὰ ὑπολογισθῆ καὶ ἡ παράμετρος $\kappa'(H_G, k')$ τοῦ συνόλου ἀφῆς. Μία κορυφὴ u τοῦ H_G δὲν μπορεῖ νὰ ἀνήκη σὲ πάνω ἀπὸ $\Delta(G) + 1$ ὑπερακμές, γιατὶ μία εἶναι ἡ δική της ὑπερακμὴ καὶ οἱ ἄλλες τὸ πολὺ $\Delta(G)$ ὑπερακμές, ἀντιστοιχοῦν στὶς κορυφὲς μὲ τὶς ὁποῖες ἑνώνεται μὲ ἀκμὲς στὸ G ἡ u. Ἄρα $d = \Delta(G) + 1$ καὶ $\kappa'(H_G, k') = k' + d$ καὶ ἀπὸ τοὺς ὁρισμοὺς τῶν δύο προβλημάτων, προκύπτει ἰσότητα στὰ $k = k'$. Μιὰ σημαντικὴ παρατήρηση εἶναι, ὅτι ἡ νέα παράμετρος φράσσεται μὲ κάποιον τρόπο, ἀπὸ τὴν παλαιά (ἐδῶ ὑπάρχει ἰσότητα), δηλαδὴ $\kappa'(H_G, k) = \kappa(G, k) + 1$.
Λύεται τὸ πρόβλημα καὶ τὸ σύνολο ἀφῆς S μεγέθους k, γιὰ τὸ ὑπεργράφημα H_G, θὰ δειχθῆ ὅτι εἶναι καὶ σύνολο κυριαρχίας τοῦ G. Ἔστω u τυχαία κορυφὴ τοῦ G, ἐὰν αὐτὴ ἀνήκη στὸ σύνολο ἀφῆς S τοῦ H_G, τότε ἀνήκει καὶ στὸ σύνολο κυριαρχίας τοῦ G· ἐὰν δὲν ἀνήκη, τότε ἔχει μία δική της ὑπερακμὴ e_u στὸ H_G καὶ αὐτὴ ἡ ὑπερακμὴ ἔχει κάποια κορυφή της v στὸ σύνολο ἀφῆς S, ἄρα στὸ G ὑπάρχει ἡ ἀκμὴ $\{u, v\}$. Τέλος ἐὰν δὲν ἔχη δική της ὑπερακμή, σημαίνει ὅτι ἔχει μὲ κάποια ἄλλη κορυφή, τὴν v_u τὴν ἴδια ὑπερακμὴ καὶ στὸ γράφημα G σημαίνει ὅτι μὲ ὅποιες κορυφὲς ἑνώνεται μὲ ἀκμὲς ἡ u μὲ τὶς ἴδιες ἀκριβῶς ἑνώνεται καὶ ἡ v_u, ἄρα ὑπάρχει κορυφὴ $w \in S$ καὶ ἀκμὴ $\{v_u, w\}$ καὶ συνεπῶς καὶ ἡ ἀκμὴ $\{u, w\}$.
Ἀντιστρόφως μὲ παρομοίους συλλογισμούς, κάθε σύνολο κυριαρχίας τοῦ G εἶναι καὶ σύνολο ἀφῆς τοῦ H_G. $\dashv$

Σημαντικὴ παρατήρηση: Ἐὰν στὸν ὁρισμὸ τῆς κλάσεως **FPT**, τὸ ἐπί $(\cdot)$ γίνη σύν $(+)$, δηλαδὴ ἐὰν ἕνα παραμετροποιημένο πρόβλημα λύεται σὲ χρόνο $f(\kappa(x)) + p(|x|)$, τότε ὁρίζεται ἄλλη κλάση διαφορετικὴ ἀπὸ τὴν **FPT**;
Ἡ ἀπάντηση εἶναι ὄχι! Γιὰ κάθε $a, b \geq 0$ ἰσχύει ἡ ἀνισότητα $ab \leq a^2 + b^2$, διότι $0 \leq (a - b)^2 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2$. Ἐὰν τὸ πρόβλημα λύεται σὲ χρόνο $f'(\kappa(x)) \cdot p'(|x|)$ τότε λύεται καὶ σὲ χρόνο $f'(\kappa(x))^2 + p'(|x|)^2$.
Ἀντιστρόφως, ἐὰν τὸ πρόβλημα λύεται σὲ χρόνο $f'(\kappa(x)) + p'(|x|)$, δὲν νοεῖται πρόβλημα νὰ λύεται σὲ ἀρνητικὸ χρόνο, ἄρα τὸ ἄθροισμα εἶναι θετικό, ἀφοῦ οἱ f', p' πρέπει νὰ ἔχουν καὶ ἄλλες ἐπιπλέον ἰδιότητες[4]. Οἱ δύο ὅροι μπορεῖ νὰ ὑποτεθῆ ὅτι εἶναι μεγαλύτεροι ἢ ἴσοι τοῦ μηδενός, διότι τελικὰ καθῶς τὸ

[4]Οἱ συναρτήσεις αὐτὲς πρέπει νὰ εἶναι κατάλληλες (proper), δηλαδὴ νὰ εἶναι ἀναδρομικές, αὔξουσες, νὰ μὴν ἱκανοποιοῦν τὸ **Gap Theorem** κ.λπ. περισσότερα στὸν Παπαδημητρίου [53].

μέγεθος τῆς εἰσόδου $|x|$ τείνει στὸ ἄπειρο, ἐὰν κάποιος ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους συνεχίζη νὰ εἶναι ἀρνητικός, ἀντικαθίσταται ἀπὸ κάποιον ἀντίστοιχο θετικό (ἢ μὲ τὸ μηδέν, δηλαδὴ ἀπαλείφεται χωρὶς συνέπειες), διότι προφανῶς τὸ πρόβλημα λύεται καὶ σὲ περισσότερο χρόνο, ἄρα

$$f'(\kappa(x)) + p'(|x|) + f'(\kappa(x)) \cdot p'(|x|) + 1$$

καὶ κάνοντας τὶς πράξεις λαμβάνουμε

$$[f'(\kappa(x)) + 1] \cdot [p'(|x|) + 1]$$

ποὺ ἐμπίπτει στὸν ὁρισμὸ τῆς κλάσεως **FPT**, θέτοντας $f(\kappa(x)) = f'(\kappa(x)) + 1$ καὶ $p(|x|)) = p'(|x|) + 1$.
Σχόλιο: Γιὰ τυπικοὺς λόγους ἀναφέρεται, ὅτι πάντα μποροῦμε νὰ βροῦμε κατάλληλο πολυώνυμο καὶ ὑπολογίσιμη συνάρτηση. Ἐὰν τό ἄθροισμα εἶναι θετικό, θὰ πρέπη τοὐλάχιστον ἕνας ἐκ τῶν δύο ὅρων του νὰ εἶναι θετικός. Ἐπειδὴ τὸ p' εἶναι πολυώνυμο, σημαίνει ὅτι καθῶς τὸ μέγεθος $|x|$ τείνει στὸ ἄπειρο ἐπικρατεῖ τελικὰ ὁ μεγιστοβάθμιος ὅρος, ἄρα πάντα ὑπάρχει τρόπος νὰ βρεθῆ βάσει τοῦ p', ἕνα ἄλλο πολυώνυμο p'', ποὺ νὰ ἱκανοποιῆ τὰ παραπάνω. Γιὰ τὴν f' ποὺ εἶναι ὑπολογίσιμη, ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἀνήκει στὶς ὑπολογίσιμες συναρτήσεις καὶ λαμβάνεται ἡ $\|f'\|$.

2.3 fpt-Ἀναγωγές

Ἡ ἀναγωγὴ εἶναι ἕνας σημαντικότατος τρόπος ἐπιλύσεως προβλημάτων ἀλλὰ καὶ κατατάξεώς των σὲ κλάσεις. Αὐτὸ ἔγινε προφανὲς στὸ προηγούμενο λῆμμα, ὅπου μία ἀναγωγὴ ἔλυσε ἕνα νέο πρόβλημα καὶ ταυτοχρόνως τὸ κατέταξε στὴν κλάση **FPT**. Ἂς ὁρίσουμε λοιπὸν αὐστηρὰ τὴν ἀναγωγὴ τὴν ὁποία κάναμε στὸ προηγούμενο λῆμμα.

Ὁρισμός 2.7: *fpt-ἀναγωγή* ($\leq^{fpt}$). Ἔστωσαν (L, κ) καὶ (L', κ') παραμετροποιημένα προβλήματα πάνω στὰ ἀλφάβητα Σ καὶ Σ' ἀντιστοίχως.
Μία συνάρτηση $R : \Sigma^* \to (\Sigma')^*$ (ὄχι κατ' ἀνάγκη 1 - 1 ἢ ἐπί), εἶναι μία fpt-ἀναγωγὴ ἀπὸ τὸ πρόβλημα (L, κ) στὸ (L', κ'), ἐὰν ἰσχύουν τὰ κάτωθι:

1. $\forall x \in \Sigma^*$ ἔχουμε $x \in L \Leftrightarrow R(x) \in L'$ ἢ μὲ ἄλλα λόγια $x \in L \Rightarrow R(x) \in L'$ καὶ $x \notin L \Rightarrow R(x) \notin L'$.

2. Ἡ συνάρτηση R εἶναι ὑπολογίσιμη ἀπὸ ἕναν fpt-ἀλγόριθμο ὡς πρὸς τὸ κ καὶ τὸ $|x|$, δηλαδὴ ὑπολογίζεται σὲ $f(\kappa(x)) \cdot p(|x|)$ βήματα μὲ f ὑπολογίσιμη συνάρτηση καὶ p πολυώνυμο.

3. Ὑπάρχει ὑπολογίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ τέτοια ὥστε $\forall x \in \Sigma^* \Rightarrow \kappa'(R(x)) \leq g(\kappa(x))$

Ἄς δόσουμε καὶ μερικοὺς συμβολισμοὺς ἀκόμα γιὰ τὶς fpt-ἀναγωγές:

Ὁρισμός 2.8: $\leq^{fpt}$, $\equiv^{fpt}$ *καὶ* $[\ldots]^{fpt}$

1. Γιὰ συντομία, συμβολίζουμε τὴν fpt-ἀναγωγὴ τοῦ (L, κ) στὸ (L', κ') ὡς $(L, \kappa) \leq^{fpt} (L', \kappa')$

2. Ἔστω (L, κ) καὶ (L', κ') παραμετροποιημένα προβλήματα, λέμε ὅτι αὐτὰ εἶναι ἰσοδύναμα ὡς πρὸς τὴν fpt-ἀναγωγὴ καὶ τὸ συμβολίζουμε ὡς $(L, \kappa) \equiv^{fpt} (L', \kappa')$, ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν $(L, \kappa) \leq^{fpt} (L', \kappa')$ καὶ $(L, \kappa) \geq^{fpt} (L', \kappa')$ (οὐσιαστικὰ τὰ δύο προβλήματα εἶναι ὑπολογιστικῶς ἰσοδύναμα ὡς πρὸς τὶς fpt-ἀναγωγές).

3. Ἔστω (L, κ) παραμετροποιημένο προβλήμα, τότε μὲ $[(L, \kappa)]^{fpt}$ συμβολίζουμε τὴν κλάση ὅλων τῶν παραμετροποιημένων προβλημάτων ποὺ ἀνάγονται σὲ αὐτό, δηλαδή: $[(L, \kappa)]^{fpt} = \left\{(L', \kappa') \mid (L', \kappa') \leq^{fpt} (L, \kappa)\right\}$ (οὐσιαστικὰ τὰ πιὸ εὔκολα ἢ τὸ ἴδιο δύσκολα μὲ αὐτὸ ὑπολογιστικῶς προβλήματα ἀπὸ τὸ (L, κ) ὡς πρὸς τὶς fpt-ἀναγωγές).

2.3.1 Ἡ κλάση FPT καὶ οἱ fpt-ἀναγωγές

Ἄς δοῦμε λοιπὸν μερικὲς βασικὲς προτάσεις γιὰ τὶς fpt-ἀναγωγές, καθῶς καὶ πῶς σχετίζονται μὲ τὴν κλάση **FPT**. Ἡ fpt-ἀναγωγὴ χρησιμοποιεῖται λόγω τῶν ἰδιοτήτων της, πολὺ στὴν παραμετρικὴ πολυπλοκότητα καὶ στὰ ἑπόμενα κεφάλαια θὰ μελετηθοῦν αὐτὲς οἱ ἀναγωγὲς περαιτέρω.

Λῆμμα 2.2: Ἡ κλάση **FPT** εἶναι κλειστὴ ὡς πρὸς fpt-ἀναγωγές, δηλαδὴ ἐὰν $(L, \kappa) \leq^{fpt} (L', \kappa')$ καὶ $(L', \kappa') \in \mathbf{FPT}$ τότε $(L, \kappa) \in \mathbf{FPT}$.

Ἀπόδειξη: Τὸ πρόβλημα (L', κ') μὲ εἴσοδο x', ἐπιλύεται ἀπὸ ἀλγόριθμο σὲ $f'(\kappa'(x')) \cdot p'(|x'|)$ βήματα, διότι ἀνήκει στὴν κλάση **FPT**.
Ἡ συνάρτηση R, ἀπὸ τὸ x, ὑπολογίζει τὸ ἀντίστοιχο $x' = R(x)$ σὲ $f_R(\kappa(x)) \cdot p_R(|x|)$ βήματα, ἀφοῦ ἡ R εἶναι fpt-ἀναγωγή. Ἄρα τὸ μέγεθος τοῦ x' περιορίζεται σὲ $|x'| = |R(x)| \leq f_R(\kappa(x)) \cdot p_R(|x|)$ (1).
Ἄρα τὸ πρόβλημα (L, κ) ἐπιλύεται ἀπὸ ἀλγόριθμο σὲ

$$f_R(\kappa(x)) \cdot p_R(|x|) + f'(\kappa'(x')) \cdot p'(|x'|) \; =$$

$$f_R(\kappa(x)) \cdot p_R(|x|) + f'(\kappa'(R(x))) \cdot p'(|R(x)|)$$

βήματα.
Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς fpt-ἀναγωγῆς ἡ $\kappa'(R(x))$ φράσσεται ἀπὸ τὴν $g(\kappa(x))$ γιὰ κάποια g ὑπολογίσιμη, πρᾶγμα ποὺ σημαίνει ὅτι ἡ $f'(\kappa'(R(x)))$ μπορεῖ νὰ ἀντικατασταθῆ ἀπὸ κάτι μεγαλύτερο τὸ $f'(g(\kappa(x)))$, ἄρα τὸ πρόβλημα ἐπιλύεται σίγουρα καὶ σὲ

$$f_R(\kappa(x)) \cdot p_R(|x|) + f'(g(\kappa(x))) \cdot p'(|R(x)|)$$

βήματα, ἂς εἶναι περισσότερα. Ἀντικαθιστώντας τὸ $|R(x)|$ ἀπὸ τὴν (1), στὸν προηγούμενο τύπο λαμβάνουμε:

$$f_R(\kappa(x)) \cdot p_R(|x|) + f'(g(\kappa(x))) \cdot p'\left[f_R(\kappa(x)) \cdot p_R(|x|)\right]$$

ἐπειδὴ ἡ σύνθεση πολυωνύμων εἶναι πάντα πολυώνυμο, κάνοντας πράξεις στὰ p' βαθμοῦ $n_{p'} \geq 0$ καὶ p_R βαθμοῦ $n_{p_R} \geq 0$, λαμβάνουμε ἕνα πολυώνυμο

$$p''(|x|) = \sum_{i=0}^{n_{p''}} a_i \cdot |x|^i$$

τοῦ $|x|$ βαθμοῦ $n_{p''} = n_{p'} + n_{p_R}$, μὲ συντελεστὲς τῶν μονονύμων $a_i \cdot |x|^i$ νὰ εἶναι τῆς μορφῆς $a_i = a'_i \cdot f_R(\kappa(x))^{m_i}$ ὅπου τὸ a'_i ἀνήκει στὸ $\mathbb{Z}$ καὶ $n_{p'} \geq m_i \geq 0$. Κάνοντας τὶς ἀντικαταστάσεις ἔχουμε:

$$f_R(\kappa(x)) \cdot p_R(|x|) + f'(g(\kappa(x))) \cdot p''(|x|) \qquad =$$

$$f_R(\kappa(x)) \cdot p_R(|x|) + f'(g(\kappa(x))) \cdot \sum_{i=0}^{n_{p''}} a'_i \cdot f_R(\kappa(x))^{m_i} \cdot |x|^i$$

ἀπὸ ἐδῶ καὶ πέρα γίνεται προφανές, ὅτι τὸ πρόβλημα (L, κ) ἀνήκει στὴν κλάση **FPT**. $\dashv$

2.3.2 Ἄλλες κλάσεις καὶ οἱ fpt-ἀναγωγές

Ἔστω $\mathbf{C}$ κλάση παραμετροποιημένων προβλημάτων (L, κ) τότε ὁρίζουμε τὰ ἑξῆς:
Ὁρισμός 2.9: $\mathbf{C}$-*δύσκολο καὶ* $\mathbf{C}$-*πλῆρες*

1. Τὸ (L, κ) εἶναι $\mathbf{C}$-*δύσκολο* ὡς πρὸς τὶς fpt-ἀναγωγές, ἐὰν κάθε παραμετροποιημένο πρόβλημα τῆς κλάσεως $\mathbf{C}$ ἀνάγεται σὲ αὐτό, δηλαδή: $\forall (L', \kappa') \in \mathbf{C} : (L', \kappa') \leq^{fpt} (L, \kappa)$.
Σχόλιο: $\mathbf{C} \subseteq [(L, \kappa)]^{fpt}$.

2. Τὸ (L,κ) εἶναι **C**-*πλῆρες* ὡς πρὸς τὶς fpt-ἀναγωγές, ἐὰν ἀνήκη στὴν κλάση **C** καὶ κάθε παραμετροποιημένο πρόβλημα τῆς κλάσεως **C** ἀνάγεται σὲ αὐτό, δηλαδή: $(L,\kappa) \in \mathbf{C} \wedge \forall (L',\kappa') \in \mathbf{C} : (L',\kappa') \leq^{fpt} (L,\kappa)$.
   Σχόλιο: $\mathbf{C} = [(L,\kappa)]^{fpt}$.

Ἄς δοῦμε δύο προβλήματα ἀπὸ τὴν κλασσικὴ πολυπλοκότητα, γιὰ τὰ ὁποῖα οἱ ἀναγωγὲς ποὺ ἀποδεικνύουν τὴν ἰσοδυναμία τους, ἔχουν μεταφερθῆ αὐτούσιες ἀπὸ τὴν κλασσικὴ στὴν παραμετρικὴ πολυπλοκότητα.
Δοθέντος γραφήματος G, ὑπάρχει πλῆρες ἐναγόμενο ὑπογράφημα K_i (κλίκα) μὲ τοὐλάχιστον k κορυφές $(i \geq k)$;

p-Κλικα (p-Clique)
Εἴσοδος : Ἕνα γράφημα G καὶ $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος : $\kappa(G,k) = k$.
Ἐρώτηση : Ὑπάρχει πλῆρες ἐναγόμενο ὑπογράφημα K_i τοῦ G, μὲ $i \geq k$;

Ὑπενθυμίζεται ὅτι ἕνα σύνολο κορυφῶν $S \subseteq V(G)$ ἑνὸς γραφήματος G, εἶναι ἀνεξάρτητο (εὐσταθές), ἐὰν ὅλες οἱ κορυφὲς τοῦ S δὲν ἑνώνωνται ἀνὰ δύο μεταξύ τους μὲ ἀκμὲς στὸ G, ἔτσι ὁρίζεται τὸ ἑξῆς πρόβλημα: Δοθέντος ἑνὸς γραφήματος G ὑπάρχει ἀνεξάρτητο σύνολο μεγέθους τοὐλάχιστον k στὸ G;

p-Ανεξαρτητο Συνολο (p-Independent Set)
Εἴσοδος : Ἕνα γράφημα G καὶ $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος : $\kappa(G,k) = k$.
Ἐρώτηση : Ὑπάρχει ἀνεξάρτητο σύνολο $S \subseteq V(G)$ τέτοιο ὥστε $\lvert S\rvert \geq k$;

Ἐὰν ἡ εἴσοδος τοῦ προβλήματος p-Ανεξαρτητο Συνολο περιορισθῆ σὲ ἐπίπεδα γραφήματα, ἔχουμε τὸ p-Επιπεδο Ανεξαρτητο Συνολο (p-Planar Independent Set). Ὅταν προσπαθήσουμε νὰ κατατάξουμε τὸ p-Ανεξαρτητο Συνολο σὲ κάποια κλάση τῆς παραμετρικῆς πολυπλοκότητας, ἕνα καλὸ στοιχεῖο εἶναι ὅτι τὸ p-Επιπεδο Ανεξαρτητο Συνολο ἀνήκει στὴν κλάση **FPT**. Χρειαζόμαστε τὸν ἑξῆς ὁρισμό:

Ὁρισμός 2.10: *Συμπλήρωμα γραφήματος G.* Μὲ $\overline{G}$ συμβολίζεται τὸ ἑξῆς γράφημα: $\overline{G} = (V(G), \{\{x,y\} \mid x \neq y \wedge x,y \in V(G)\} - E(G))$. Δηλαδὴ συμπλήρωμα γραφήματος G εἶναι ἕνα γράφημα $\overline{G}$ μὲ τὶς ἴδιες κορυφὲς τοῦ G καὶ ἀκμές: ὅλες τὶς ἀκμὲς οἱ ὁποῖες λείπουν γιὰ νὰ γίνη τὸ G πλῆρες γράφημα. Ἐὰν $n = \lvert V(G)\rvert$ τότε τὸ ἀντίστοιχο πλῆρες γράφημα εἶναι τὸ K_n.

Πρόταση 2.1: p-Κλικα $\equiv^{fpt}$ p-Ανεξαρτητο Συνολο

Ἀπόδειξη: Παρατηροῦμε ὅτι ἐὰν ἔχουμε ἕνα πλῆρες γράφημα K_n τότε τὸ $\overline{K_n}$ εἶναι ἕνα γράφημα χωρὶς ἀκμὲς (σκόνη), ἄρα ἐὰν ἕνα γράφημα G ἔχη ὡς ὑ-πογράφημα ἕνα πλῆρες γράφημα K_n τότε στὸ $\overline{G}$ οἱ ἀντίστοιχες κορυφὲς δὲν ἑνώνονται μὲ καμμία ἀκμὴ μεταξύ τους, συνεπῶς εἶναι ἕνα ἀνεξάρτητο σύνολο μεγέθους n. Ἔτσι μία πιθανὴ fpt-ἀναγωγή, ἀπὸ τὸ p-Κλικα (παράμετρος κ μὲ τιμὴ k) στὸ p-Ανεξαρτητο Συνολο (παράμετρος κ'), θὰ ἦταν: Βρὲς τὸ $\overline{G}$ καὶ δὲς ἐὰν ἔχη ἀνεξάρτητο σύνολο μεγέθους μεγαλυτέρου ἢ ἴσου τοῦ k. Τὰ δύο ἑπόμενα λήμματα ὁλοκληρώνουν τὴν ἀπόδειξη.

Λῆμμα 2.3: p-Κλικα $\leq^{fpt}$ p-Ανεξαρτητο Συνολο

Ἀπόδειξη: Ἄς φτιάξουμε λοιπὸν τὴν ἑξῆς ἀναγωγή R, ἀπὸ τὸν χῶρο ὅλων τῶν πεπερασμένων γραφημάτων (θεωροῦμε ὅτι δύο ἰσόμορφα γραφήματα ταυτί-ζονται) στὸν ἑαυτό του (δὲν μᾶς ἐνδιαφέρει νὰ εἶναι 1 - 1 ἢ ἐπί, ἀλλὰ μόνο συνάρτηση):

$$R(G) = \overline{G}, \quad G \text{ γράφημα}$$

Ἔτσι λοιπὸν ὅπως ὁρίσθηκε ἡ R εἶναι καὶ 1 - 1, διότι κάθε γράφημα G ἔχει μοναδικὸ συμπλήρωμα τὸ γράφημα $\overline{G}$ καὶ ἐὰν πάρουμε πάλι τὸ συμπλήρωμά του $\overline{\overline{G}} = R\left(\overline{G}\right)$, μᾶς δίνει τὸ γράφημα G ἀπὸ τὸ ὁποῖο προῆλθε.
Ἡ παράμετρος διατηρεῖται ἡ ἴδια, δηλαδὴ ἐὰν $\kappa(G,k) = k$ τότε $\kappa'\left(\overline{G},k\right) = k$.
Ἄρα ὡς g τοῦ ὁρισμοῦ τῆς fpt-ἀναγωγῆς, λαμβάνουμε ὅτι πιὸ ἁπλό: τὴν ταυ-τοτικὴ συνάρτηση $g(x) = x$.
Προφανῶς γιὰ κάθε γράφημα G, κάθε πλῆρες ὑπογράφημα του ἔχει ἕνα ἀν-τίστοιχο ἀνεξάρτητο σύνολο ἴσου μεγέθους στὸ $\overline{G}$. Ἐὰν δὲν ἔχη πλῆρες ὑπογράφημα μὲ k κορυφὲς στὸ G, τότε προφανῶς δὲν ὑπάρχει ἀντίστοιχο ἀνεξάρτητο σύνολο ἴσου μεγέθους στὸ $\overline{G}$.
Ἡ κατασκευὴ τοῦ $\overline{G}$ ἀπὸ τὸ G, ὡς γνωστὸν ἀπὸ τὴν κλασσικὴ πολυπλοκότητα, γίνεται σὲ πολυωνυμικὸ χρόνο ὡς πρὸς τὸν ἀριθμὸ τῶν κορυφῶν του, ἄρα ὁ ἀλγόριθμος ὑπολογισμοῦ τῆς R εἶναι **FPT**.
Ἐπειδὴ τὰ μεγέθη τοῦ πλήρους γραφήματος καὶ τοῦ ἀνεξαρτήτου συνόλου εἶναι ἴσα, τετριμμένα ἔχουμε $\kappa(G,k) = \kappa'(R(G),k) = \kappa'\left(\overline{G},k\right) = k$. $\dashv$

Λῆμμα 2.4: p-Ανεξαρτητο Συνολο $\leq^{fpt}$ p-Κλικα

Ἀπόδειξη: Παρομοίως, μὲ τὴν ἴδια ἀναγωγὴ R τοῦ προηγουμένου λήμματος. $\dashv$

Ἄς συμβολίσουμε μὲ $\leq^{p}$ τὴν ἀναγωγὴ κατὰ Cook καὶ μὲ $\equiv^{p}$ τὴν ἰσοδυναμία ἀντιστοίχως.

Πρόταση 2.2: Οἱ κάτωθι κλασσικές ἀναγωγὲς κατὰ Cook δὲν εἶναι fpt-ἀναγωγές.

1. Ανεξαρτητο Συνολο $\leq^p$ Καλυμμα Κορυφων
2. Καλυμμα Κορυφων $\leq^p$ Ανεξαρτητο Συνολο

Ἀπόδειξη: Στὴν (1) χρησιμοποιοῦμε, ὡς γνωστόν, τὴν ταυτοτικὴ ἀναγωγή: $R(G) = G$ καὶ ρωτᾶμε ὅταν τὸ μέγεθος τοῦ ἀνεξαρτήτου συνόλου εἶναι τοὐλάχιστον k, ἐὰν ὑπάρχη κάλυμμα κορυφῶν μεγέθους μικροτέρου ἢ ἴσου τοῦ $|V(G)| - k$. Στὰ ἀντίστοιχα παραμετροποιημένα προβλήματα ἡ ἀντίστοιχη παράμετρος γιὰ τὸ p-Καλυμμα Κορυφων εἶναι ἡ $\kappa(G, k) = |V(G)| - k$, αὐτὴ ὅμως δὲν φράσσεται ἀπὸ καμμία συνάρτηση τοῦ k γιατὶ περιέχει τὸν ἀριθμὸ τῶν κορυφῶν τοῦ γραφήματος G.
Παρομοίως καὶ γιὰ τὸ (2).$\dashv$

Γιὰ συντομία καὶ εὐκολία στὴν διατύπωση τῶν προβλημάτων καὶ ὅπου εἶναι εὔκολα κατανοητὸ ἀπὸ τὰ συμφραζόμενα, ἀντὶ π.χ. γιὰ παράμετρο κ μὲ $\kappa(G, k) = k$ θὰ λέμε μὲ παράμετρο k, ἢ καὶ γιὰ πιὸ περίπλοκες συναρτήσεις π.χ. $\kappa(G, k) = k + d$ θὰ λέμε $k + d$.
Ἄς δοῦμε καὶ ἄλλα δύο **FPT** ἰσοδύναμα προβλήματα:

Πρόταση 2.3: p-Συνολο Αφης $\equiv^{fpt}$ p-Συνολο Κυριαρχιας

Ἀπόδειξη: Τὰ δύο κατωτέρω λήμματα ἀποδεικνύουν αὐτὴν τὴν πρόταση.

Λῆμμα 2.5: p-Συνολο Αφης $\leq^{fpt}$ p-Συνολο Κυριαρχιας

Ἀπόδειξη: Ἔστω ὑπεργράφημα G μὲ παράμετρο k, θὰ φτιάξουμε ἕνα γράφημα H ἀπὸ τὸ G ὡς ἑξῆς:
Γιὰ κάθε ὑπερακμὴ $e \in G$ μὲ $|e|$ ἀριθμὸ κορυφῶν:

1. Φτιάχνουμε μὲ τὶς ἴδιες κορυφὲς ἕνα πλῆρες γράφημα τὸ $K_{|e|}$.
2. Βάζουμε μία νέα κορυφή, τὴν u_e, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ στὴν ὑπερακμὴ e καὶ τὴν ἑνώνουμε μὲ ἀκμὲς μὲ ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ $K_{|e|}$.

Ἐὰν μία κορυφὴ v ἀνήκη σὲ μία ἢ περισσότερες ὑπερακμές, τότε θὰ ἀνήκη σὲ περισσότερα ἀπὸ ἕνα πλήρη γραφήματα, ἄρα τὸ H ἔχει $|V(H)| = |V(G)| + |E(G)|$ κορυφές.
Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ παραπάνω κατασκευὴ γίνεται σὲ πολυωνυμικὸ χρόνο ὡς

πρὸς τὸ ἄθροισμα $|V(G)| + |E(G)|$. Ἡ παράμετρος παραμένει ὡς ἔχει, δηλαδὴ k.
Λύουμε τὸ p-Σύνολο Κυριαρχίας γιὰ τὸ γράφημα H μὲ παράμετρο k. Ἔστω λοιπὸν ὅτι ὑπάρχει ἕνα σύνολο κυριαρχίας S μὲ μέγεθος $|S|$, ἐὰν κάποιες κορυφὲς στὸ S εἶναι νέες κορυφὲς τύπου u_e, τότε κάθε μία εἶναι εὔκολα ἀνταλλάξιμη μὲ μία κορυφὴ τοῦ ἀντιστοίχου πλήρους γραφήματος $K_{|e|}$, ἀφοῦ κάθε κορυφὴ w τοῦ $K_{|e|}$ κυριαρχεῖ τοὐλάχιστον στὶς ἴδιες κορυφὲς ποὺ κυριαρχεῖ ἡ ἀντίστοιχη u_e, συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν ἑαυτῶν τους u_e καὶ w.
Τὸ σύνολο S τελικὰ περιλαμβάνει μόνο κορυφὲς τοῦ G καὶ εἶναι ἕνα σύνολο ἀφῆς τοῦ G, διότι ἔστω e' ὑπερακμὴ τοῦ G ἡ ὁποία δὲν ἔχει καμμία κορυφὴ στὸ S, ὅμως ἡ ἀντίστοιχη κορυφὴ $u_{e'}$ θὰ πρέπη νὰ κυριαρχῆται ἀπὸ κάποια κορυφὴ στὸ S καὶ οἱ μόνες κορυφὲς μὲ τὶς ὁποῖες ἔχει ἀκμές, εἶναι αὐτὲς τοῦ πλήρους γραφήματος $K_{|e'|}$ στὸ H, ἑπομένως κάποια κορυφὴ τοῦ $K_{|e'|}$ ἀνήκει στὸ S. Ἄτοπο.
Ἀντιστρόφως κάθε σύνολο ἀφῆς τοῦ G εἶναι καὶ σύνολο κυριαρχίας τοῦ H, διότι ἔστω $v \notin S$ κορυφὴ τοῦ H ἡ ὁποία δὲν κυριαρχεῖται ἀπὸ τὸ S, δηλαδὴ δὲν ἑνώνεται μέ ἀκμὴ μὲ κάποια κορυφὴ τοῦ S. Ἐὰν ἡ v εἶναι τοῦ τύπου u_e, σημαίνει ὅτι καμμία κορυφὴ τοῦ ἀντίστοιχου $K_{|e|}$ δὲν εἶναι στὸ S, ἄρα ἡ ὑπερακμὴ e δὲν ἔχει κορυφὴ στὸ S. Ἄτοπο. Παρομοίως καταλήγουμε σὲ ἄτοπο ἐὰν ἡ v ἀνήκη σὲ κάποιο πλῆρες γράφημα $K_{|e|}$.$\dashv$

Λῆμμα 2.6: p-Σύνολο Κυριαρχίας $\leq^{fpt}$ p-Σύνολο Αφης

Ἀπόδειξη: Ἡ ἀπόδειξη εἶναι παρόμοια μὲ αὐτὴν τοῦ λήμματος 2.1, μόνο ποῦ ἡ παράμετρος παραμένει k γιὰ τὸ σύνολο ἀφῆς, ἀφοῦ τὸ σύνολο κυριαρχίας ἔχει ἴδιο μέγεθος μὲ τὸ σύνολο ἀφῆς. $\dashv$

Κλείνοντας αὐτὸ τὸ κεφάλαιο γίνεται προφανὴς ἡ σημασία τῆς fpt-ἀναγωγῆς, γιατὶ καὶ γιὰ τὰ δύο προβλήματα p-Σύνολο Αφης καὶ p-Σύνολο Κυριαρχίας, δὲν ὑπάρχει ἀλγόριθμος μέχρι σήμερα, ποὺ νὰ τὰ κατατάσση στὴν κλάση **FPT**· ἐὰν βρεθῆ μόνο γιὰ τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δύο, τότε καὶ τὰ δύο εἰσέρχονται στὴν κλάση **FPT**.

2.4 Ἀναφορές, Σχόλια

Τὸ Καλυμμα Κορυφων ἔχει παίξει ἕναν σπουδαῖο ρόλο στὴν παραμετρικὴ πολυπλοκότητα καὶ στὴν συνδυαστικὴ βελτιστοποίηση, ὅπως βλέπουμε ἀπὸ τὸ ἄρθρο τῶν Crescenzi καὶ Kann [24]. Ἦταν ἕνα ἀπὸ τὰ πρωτοκαταταχθέντα **NP**-πλήρη προβλήματα, περισσότερα μπορεῖ νὰ δῆ κάποιος στὸ [40] τῶν Garey καὶ Johnson. Οἱ Downey καὶ Fellows στὸ βιβλίο [29] δίνουν μία ἱστορικὴ περιγραφὴ τῆς ἀναπτύξεως τῶν διαφόρων fpt-ἀλγορίθμων γιὰ τὸ Καλυμμα Κορυφων.

Μία γενίκευση τοῦ προβλήματος Καλυμμα Κορυφων, εἶναι τὸ Μερικο Καλυμμα Κορυφων, ὅπου τὸ ἐρώτημα εἶναι, ἐὰν μὲ k κορυφὲς μποροῦν νὰ καλυφθοῦν τοὐλάχιστον t ἀκμές[5]. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ μὲ παράμετρο k δὲν ἀνήκει στὴν κλάση **FPT**, περισσότερα στοὺς Guo καὶ λοιποὺς στὸ [42].

Τὸ Καλυμμα Κορυφων γενικά, λύεται σὲ χρόνο $(1+\epsilon)^k \cdot n^{O(1)}$ μὲ $\epsilon > 0$. Ἕνα ἀνοικτὸ ἐρώτημα, τὸ ὁποῖο ἀφορᾶ καὶ τὴν παραμετρικὴ πολυπλοκότητα, εἶναι ἐὰν ὑπάρχη κάτω φράγμα γιὰ τὸ ϵ.

Τὸ Συνολο Αφης εἶναι μία ἄλλη γενίκευση τοῦ Καλυμμα Κορυφων, διότι κάθε Καλυμμα Κορυφων εἶναι ἕνα 2-Φραγμενο Συνολο Αφης, περισσότερα γιὰ τὸ Φραγμενο Συνολο Αφης στοὺς Niedermeier καὶ Rossmanith [52], μία βελτίωση γίνεται στὸν Fernau [32]. Γιὰ τὴν γενικὴ περίπτωση τοῦ συνόλου ἀφῆς μπορεῖ κάποιος νὰ δῆ στὰ [29], [37] καὶ [51].

Γιὰ τὸ Συνολο Κυριαρχιας, μπορεῖ νὰ δῆ κάποιος περισσότερα στὸ [4] τῶν Alber καὶ λοιπῶν, καθῶς καὶ στὸ [7] τῶν Alber καὶ Niedermeier. Γιὰ τὸ Συνολο Κυριαρχιας σὲ ἐπίπεδα γραφήματα, τὸ ὁποῖο ἀνήκει στὴν κλάση **FPT**, μπορεῖ νὰ δῆ κάποιος περισσότερα στὰ [5], [4], [6] τῶν Alber καὶ λοιπῶν, καθῶς καὶ στὸ [38] τῶν Fomin καὶ Θηλυκοῦ.

Γιὰ τὸ Ανεξαρτητο Συνολο σὲ ἐπίπεδα γραφήματα, τὸ ὁποῖο ἀνήκει στὴν κλάση **FPT**, μπορεῖ νὰ δῆ κάποιος περισσότερα στὰ [26] καὶ [29]. Ὁ Niedermeier σχολιάζει στὸ βιβλίο του [51], τὸν τρόπο ποὺ σχετίζεται τὸ Επιπεδο Ανεξαρτητο Συνολο μὲ τὸ θεώρημα τῶν τεσσάρων χρωμάτων. Οἱ Flum καὶ Grohe δίνουν στὸ βιβλίο τους [37] μία ἀπόδειξη. Ὁ πιὸ γρήγορος γνωστὸς ἀλγόριθμος βρίσκεται στὸ [33] τοῦ Fernau.

Τὸ EPTAS[6] (ἀποτελεσματικοῦ πολυωνυμικοῦ χρόνου προσεγγιστικὸ σχῆμα) εἰσήχθη ἀπὸ τοὺς Cesati καὶ Trevisan στὸ [19]. Ἕνα σχετικὸ θεώρημα[7] εἶναι τῆς Bazgan στὸ [8].

Ἡ βασικὴ ἰδέα γιὰ τὶς fpt-ἀναγωγὲς εἶναι τῶν Downey καὶ Fellows στὸ [27].

[5] Ἐὰν $t = |E|$, τότε ἔχουμε τὸ γνωστὸ Καλυμμα Κορυφων

[6] Ὡς γνωστόν, FPTAS $\subseteq$ EPTAS $\subseteq$ PTAS.

[7] Ἐὰν ἕνα **NP** πρόβλημα βελτιστοποιήσεως O ἔχη ἕναν EPTAS προσεγγιστικὸ ἀλγόριθμο, τότε τὸ ἀντίστοιχο παραμετροποιημένο πρόβλημα p-O ἔχει ἕναν fpt-ἀλγόριθμο.

Κεφάλαιο 3

Ἡ κλάση para-NP

3.1 Εἰσαγωγή

Σὲ αὐτὸ τὸ κεφάλαιο θὰ μελετηθοῦν παραμετρικὰ προβλήματα τὰ ὁποῖα εἶναι ἐγγενῶς δύσκολα, μὲ παράδειγμα τὸ p-Χρωματισμος Κορυφων τὸ ὁποῖο δὲν γνωρίζουμε ἐὰν ἀνήκη στὴν κλάση **FPT**[1]. Ἐδῶ θὰ γίνη ἡ γνωστὴ γενίκευση ποὺ γίνεται καὶ στὴν κλασσικὴ πολυπλοκότητα, δηλαδὴ ὁ αἰτιοκρατικὸς ἀλγόριθμος τῶν $f\left(\kappa\left(x\right)\right) \cdot p\left(|x|\right)$ βημάτων θὰ γίνη ἀναιτιοκρατικὸς μὲ ἴδιο ἀριθμὸ βημάτων. Ἔτσι δημιουργεῖται ἕνα δένδρο πρὸς ἀπεικόνιση τῶν βημάτων τοῦ ἀναιτιοκρατικοῦ ἀλγορίθμου, μὲ βάθος $f\left(\kappa\left(x\right)\right) \cdot p\left(|x|\right)$ ὅπου σὲ κάθε κορυφή του, ἐκτὸς ἀπὸ τὰ φύλλα του, ἔχουμε δύο ἢ περισσότερες ἐπιλογές. Στὰ φύλλα του ἀποφασίζει γιὰ τὸ πρόβλημα μὲ «ναί» ἢ «ὄχι». Ὅταν βρισκόμαστε σὲ μία κορυφὴ αὐτοῦ τοῦ δένδρου, τὸ μοναδικὸ μονοπάτι ἀπὸ τὴν ρίζα μέχρι τὴν κορυφὴ αὐτή, μᾶς δίνει τὶς ἐπιλογὲς ποὺ ἔχουμε κάνει σὲ κάθε προηγουμένη κορυφή (βῆμα) τοῦ δένδρου (ἀλγορίθμου). Ὡς ἀναιτιοκρατικὸς ἀλγόριθμος, νοεῖται ὅλο τὸ δένδρο καὶ σὰν βῆμα του ὅλες οἱ κορυφὲς οἱ ὁποῖες βρίσκονται στὸ ἴδιο βάθος. Ἕνα μονοπάτι ἀπὸ τὴν ρίζα μέχρι ἕνα φύλλο αὐτοῦ τοῦ δένδρου, εἶναι μέρος τῶν ὑπολογισμῶν τοῦ ἀναιτιοκρατικοῦ ἀλγορίθμου.

Ἐξ ὁρισμοῦ ἕνας ἀναιτιοκρατικὸς ἀλγόριθμος ἐπιλύει ἕνα παραμετροποιημένο πρόβλημα (Q, κ), ἐὰν ὑπάρχη τοὐλάχιστον ἕνα μονοπάτι ἀπὸ τὴν ρίζα τοῦ δένδρου μέχρι κάποιο φύλλο του, ποὺ νὰ ἀποφασίζη σωστά.
Παρατήρηση: Κάθε αἰτιοκρατικὸς ἀλγόριθμος εἶναι ἀναιτιοκρατικὸς μὲ μία ἐπιλογὴ σὲ κάθε βῆμα.

Ὁρισμός 3.11: *Ἡ κλάση* **para-NP**. Γιὰ ἕνα παραμετροποιημένο πρόβλημα (Q, κ), μὲ ἀλφάβητο Σ, λέμε ὅτι ἀνήκει στὴν κλάση **para-NP**, ἐὰν ὑπάρχη

[1] Βεβαίως, ἡ πληθώρα τῶν ἐρευνητῶν πιστεύει πὼς δὲν ἀνήκει στὴν κλάση **FPT**, διότι πιστεύουν ὅτι στὴν κλασσικὴ πολυπλοκότητα $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

ἀναιτιοκρατικός (μὴ ντετερμινιστικός) ἀλγόριθμος $\mathcal{A}$, ὁ ὁποῖος ἀποφασίζει γιὰ κάθε $x \in \Sigma^*$, ἐὰν $x \in Q$ σὲ $f(\kappa(x)) \cdot p(|x|)$ ἀναιτιοκρατικὰ βήματα, ὅπου κ παραμετροποίηση τοῦ x, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ εἶναι ὑπολογίσιμη συνάρτηση καὶ $p \in \mathbb{N}_0[X]$ εἶναι πολυώνυμο.

Ἀπὸ τὸν προηγούμενο ὁρισμὸ γίνεται προφανές, ὅτι γιὰ τὶς δύο κλάσεις ἰσχύει **FPT** $\subseteq$ **para-NP**.

Ἐὰν ἕνα πρόβλημα Q, μὲ ἀλφάβητο Σ_Q, ἀνήκη στὴν κλάση **NP**, τότε λύεται ἀπὸ ἕναν ἀναιτιοκρατικὸ ἀλγόριθμο $\mathcal{A}_Q$ σὲ πολυωνυμικὸ ἀριθμὸ βημάτων $p_Q(|x|)$ μὲ $x \in (\Sigma_Q)^*$. Γιὰ κάθε παραμετροποίηση κ_Q τοῦ Q παρατηροῦμε ὅτι πάλι λύεται ἀπὸ τὸν $\mathcal{A}_Q$, ἀγνοώντας ἁπλῶς τὴν παράμετρο. Ἔτσι τὸ παραμετροποιημένο πρόβλημα (Q, κ_Q) ἀνήκει στὴν κλάση **para-NP**, διότι ἐὰν πάρουμε τὴν σταθερὴ συνάρτηση $c(k) = 1$ μὲ $k \in \mathbb{N}$ καὶ θέτοντας $f_Q = c$, τότε λύεται ἀπὸ τὸν $\mathcal{A}_Q$ σὲ $c(\kappa_Q(x)) \cdot p_Q(|x|)$ βήματα.
Ἡ κλάση **para-NP** εἶναι γιὰ τὴν παραμετρικὴ πολυπλοκότητα ἕνα διαισθητικὸ ἀντίστοιχο τῆς κλάσεως **NP** τῆς κλασσικῆς πολυπλοκότητας.

Ὁρισμός 3.12: *Τετριμμένου, Στρώσεως καὶ* κ_{one}. Ἔστω παραμετροποιημένο πρόβλημα (Q, κ) μὲ ἀλφάβητο Σ, λέμε ὅτι:

1. Τὸ (Q, κ) εἶναι τετριμμένο ἐὰν $Q = \emptyset$ ἢ $Q = \Sigma^*$.

2. Ἡ ℓ-οστὴ στρώση, μὲ $\ell \in \mathbb{N}$, τοῦ (Q, κ) εἶναι τὸ πρόβλημα $(Q, \kappa)_\ell := \{x \in Q \mid \kappa(x) = \ell\}$.
   Παρατήρηση: Τὸ $(Q, \kappa)_\ell$ δὲν εἶναι πλέον παραμετροποιημένο.

3. Ἔστω πρόβλημα Q, μὲ ἀλφάβητο Σ. Ὁρίζουμε τὸ τετριμμένα παραμετροποιημένο πρόβλημα (Q, κ_{one}) μὲ τὴν τετριμμένη παραμετροποίηση κ_{one}, ὅπου $\forall x \in \Sigma^*$ ἔχουμε $\kappa_{one}(x) = 1$.

3.2 Διάφορα προβλήματα τῆς κλάσεως para-NP

Θὰ ἀναφέρουμε μερικὰ προβλήματα τῆς κλάσεως **para-NP**, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμως πολὺ γνωστὰ ἀπὸ τὴν κλασσικὴ πολυπλοκότητα καὶ βοηθοῦν νὰ γίνη κατανοητὴ ἡ νέα κλάση **para-NP**.

p-Lit Sat

Ἔστω $SAT(\Sigma)$ (γιὰ συντομία SAT ἀφοῦ τὸ ἀλφάβητο δὲν παίζει τελικὰ ρόλο) τὸ σύνολο ὅλων τῶν ἱκανοποιησίμων συζευκτικῶν προτασιακῶν τύπων (propositional forms) κωδικοποιημένων σὲ ἕνα ἀλφάβητο Σ. Μία λογικὴ μεταβλητὴ x καθῶς καὶ ἡ ἄρνησή της $\neg x$ ὀνομάζονται ἐγγράμματα, ἂς ὁρίσουμε τὴν ἑξῆς παραμετροποίηση κ :

$$\kappa(\phi) = \begin{cases} \text{Ἀριθμὸς ἐγγραμμάτων στὸν } \phi & \text{ἂν ὁ } \phi \text{ εἶναι μία ἔγκυρη κωδικοποίη-} \\ & \text{ση συζευκτικοῦ προτασιακοῦ τύπου} \\ -1 & \text{Διαφορετικά} \end{cases}$$

Στὶς λέξεις Σ^* τοῦ ἀλφαβήτου Σ, προφανῶς περιέχονται καὶ ἄλλες λέξεις ποὺ δὲν εἶναι συζευκτικοὶ προτασιακοὶ τύποι, ἔτσι ἡ κ γιὰ νὰ εἶναι ἔγκυρη παραμετροποίηση, ἀφοῦ ὡς εἴσοδο τοῦ προβλήματος ἔχουμε κάποιον τύπο (ἢ λέξη), ὁρίζεται σὲ ὅλο τὸ Σ^* παραπάνω, δηλαδή: $\kappa(\phi) : \Sigma^* \to \mathbb{Z}$. Ἐπειδὴ γιὰ κάθε $x \in \Sigma^*$ ἀποφασίζεται σὲ πολυωνυμικὸ χρόνο ἐὰν $x \in SAT(\Sigma)$, ὁ περιορισμὸς τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῆς κ στὸ $SAT(\Sigma)$ ἢ στὸ σύνολο ὅλων τῶν ἐγκύρων προτασιακῶν τύπων καὶ κατὰ συνέπεια τῆς εἰσόδου, δὲν ἀλλάζει τὴν δυσκολία τοῦ προβλήματος, ἔτσι γιὰ τὴν κ ἔχουμε $\kappa(\phi) : SAT(\Sigma) \to \mathbb{N}$.

p-Lit Sat

Εἴσοδος : Ἕνας προτασιακὸς τύπος ϕ.
Παράμετρος : κ ὅπως ὁρίσθηκε παραπάνω (ἀριθμὸς ἐγγραμμάτων τοῦ ϕ).
Ἐρώτηση : Εἶναι ὁ ϕ ἱκανοποιήσιμος;

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι **para-NP**-πλῆρες, ἀλλὰ καὶ αὐτό, ὅπως θὰ δοῦμε παρακάτω, δὲν παρουσιάζει ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον ἀπὸ τὴν σκοπιὰ τῆς παραμετρικῆς πολυπλοκότητας.

p-Χρωματισμος Κορυφων

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχει ἤδη διατυπωθῆ καὶ θὰ τὸ μελετήσουμε στὸ ἑπόμενο τμῆμα. Ἐκεῖ θὰ δειχθῆ ὅτι εἶναι **para-NP**-πλῆρες.

p-Δυσκολη Γραμμικη Παραταξη (p-Edge Average Min Linear Arrangement)

Δοθέντος ἑνὸς γραφήματος G, μποροῦμε νὰ βροῦμε μία γραμμικὴ διάταξη σ τῶν κορυφῶν του, τέτοια ὥστε ἐὰν σὲ κάθε ἀκμὴ $\{v, u\}$ τοῦ G ἀντιστοιχηθῆ βάρος $|\sigma(v) - \sigma(u)|$, αὐτὸ νὰ εἶναι μικρότερο ἢ ἴσο τοῦ k ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ τῶν κορυφῶν τοῦ G;

p-ΔΥΣΚΟΛΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΡΑΤΑΞΗ (p-EDGE AVERAGE MIN LINEAR ARRANGEMENT)

Εἴσοδος : Ἕνα γράφημα G καὶ $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος : $\kappa(G,k) = k$.
Ἐρώτηση : Ὑπάρχει μία 1 - 1 συνάρτηση $\sigma : V(G) \to \{1, 2, \ldots, |V(G)|\}$ τέτοια ὥστε
$$\sum_{\{v,u\} \in E(G)} |\sigma(v) - \sigma(u)| \leq k \cdot |V(G)|$$

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι **para-NP**-πλῆρες καὶ κάθε k-οστὴ στρώση του μὲ $k \geq 2$ εἶναι **NP**-πλήρης.

3.3 Θεωρήματα γιὰ τὴν κλάση para-NP

Ἐδῶ θὰ μελετήσουμε ἕνα βασικὸ θεώρημα γιὰ τὴν κλάση **para-NP**. Τὸ ὁποῖο θὰ διατυπωθῆ στὸ τέλος αὐτοῦ τοῦ τμήματος.

Ὁρισμός 3.13: *Προεργασία ἐπὶ τῆς παραμέτρου, Εἶναι τελικά.* Ἔστω (Q, κ) ἕνα παραμετροποιημένο πρόβλημα μὲ ἀλφάβητο Σ.

1. Τὸ (Q, κ) εἶναι στὴν κλάση **NP** (ἢ σὲ ὅποια ἄλλη κλάση θέλουμε) μετὰ ἀπὸ μία προεργασία ἐπὶ τῆς παραμέτρου, ἐὰν ὑπάρχουν ἕνα ἀλφάβητο Π, μία ὑπολογίσιμη συνάρτηση $\pi : \mathbb{N} \to \Pi^*$ καὶ ἕνα πρόβλημα $X \subseteq \Sigma^* \times \Pi^*$ τέτοιο ὥστε $X \in$ **NP** (ἢ σὲ ὅποια ἄλλη κλάση θέλουμε) καὶ γιὰ ὅλα τὰ x τοῦ Q ἔχουμε:
$$x \in Q \iff (x, \pi(\kappa(x))) \in X$$

2. Τὸ (Q, κ) εἶναι τελικὰ στὴν κλάση **NP** (ἢ σὲ ὅποια ἄλλη κλάση θέλουμε) ἐὰν ὑπάρχουν μία ὑπολογίσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ καὶ ἕνας ἀναιτιοκρατικὸς ἀλγόριθμος $\mathcal{A}$ πολυωνυμικοῦ χρόνου (ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς κλάσεως **NP**), ὁ ὁποῖος μὲ εἴσοδο $x \in \Sigma^*$ καὶ μὲ $|x| \geq h(\kappa(x))$ ἀποφασίζει σωστὰ ἐὰν $x \in Q$. Ἡ συμπεριφορὰ τοῦ $\mathcal{A}$ μὲ εἴσοδο $x \in \Sigma^*$ ὅπου $|x| < h(\kappa(x))$ εἶναι αὐθαίρετη.

Πρόταση 3.4: Ἔστω (Q, κ) ἕνα μὴ τετριμμένο παραμετροποιημένο πρόβλημα μὲ ἀλφάβητο Σ. Τότε τὰ ἑπόμενα εἶναι ἰσοδύναμα:

1. Τὸ (Q, κ) ἀνήκει στὴν κλάση **para-NP**.

2. Τὸ (Q, κ) ἀνήκει στὴν κλάση **NP** μετὰ ἀπὸ μία προεργασία ἐπὶ τῆς παραμέτρου.

3. Τὸ Q εἶναι ἀποφάνσιμο καὶ τὸ (Q, κ) ἀνήκει τελικὰ στὴν κλάση **NP**.

Ἀπόδειξη: Ἔστω Σ τὸ ἀλφάβητο τοῦ προβλήματος (Q, κ).
Γιὰ τὴν συνεπαγωγὴ (1) $\Rightarrow$ (2) ἔχουμε: ἔστω $\mathcal{A}_Q$ ἕνας ἀλγόριθμος ποὺ λύει τὸ (Q, κ) σὲ ἀναιτιοκρατικὸ χρόνο $f(\kappa(x)) \cdot p(|x|)$ γιὰ κάποια ὑπολογίσιμη συνάρτηση f καὶ πολυώνυμο $p(X)$. Ἔστω τὸ ἀλφάβητο $\Pi = \{1, \triangleleft\}$ καὶ ἡ συνάρτησις $\pi : \mathbb{N} \to \Pi^*$ μὲ $\pi(k) := k \triangleleft f(k)$ μὲ τὰ k καὶ $f(k)$, λόγω τῆς ἐξομοιώσεως τῶν $f(k)$ βημάτων[2], ἀπαραιτήτως στὸ ἑναδικό (unary) σύστημα. Λόγω τοῦ ἑναδικοῦ συστήματος ἔχουμε $k = |k|$ καὶ $f(k) = |f(k)|$ [3].
Ἔστω ὁ ἑξῆς ἀναιτιοκρατικὸς ἀλγόριθμος $\mathcal{A}_X$: δεδομένου ἑνὸς σημείου $(x, y) \in \Sigma^* \times \Pi^*$, δὲς κατὰ πόσον $y = k \triangleleft u$ γιὰ κάποια $k, u \in \{1\}^*$ μὲ $k = \kappa(x)$, ἐὰν δὲν εἶναι ἔτσι, ἀπέρριψε τὸ σημεῖο. Ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος εἶναι $O(|y| + p_\kappa(|x|))$ μὲ p_κ τὸ πολυώνυμο ὑπολογισμοῦ τῆς κ.
Ἐὰν ἐντὸς $|u|$ βημάτων ὑπολογισθῆ ἡ $f(k)$, μὲ συνάρτηση ὑπολογισμοῦ της τὴν ὑπολογίσιμη h_f καὶ ἐὰν $u \neq f(k)$, ἀπέρριψε τὴν εἴσοδο[4].
Παρατήρηση: Οὐσιαστικὰ ἀπορρίπτεται ἡ πληθώρα τῶν u μὲ $|u| \geq h_f(|\kappa(x)|)$.
Ἐξομοίωσε τὸν $\mathcal{A}_Q$ γιὰ $u \cdot p(|x|)$ βήματα[5], ἐὰν ὁ $\mathcal{A}_Q$ ἀποδεχθῆ ἐντὸς $u \cdot p(|x|)$ βημάτων, ἀποδέξου, ἀλλιῶς ἀπέρριψε. Ὁ χρόνος ἐδῶ εἶναι $O(|u| \cdot p(|x|))$ [6].
Ἔστω X τὸ σύνολο ὅλων τῶν εἰσόδων (σημείων) ποὺ ἀποδέχεται ὁ $\mathcal{A}_X$ τότε ἔχουμε:

$$\begin{aligned} x \in Q &\iff \mathcal{A}_X \text{ ἀποδέχεται τὸ } (x, \kappa(x) \triangleleft f(\kappa(x))) \\ &\iff (x, \pi(\kappa(x))) \in X \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Ὁ $\mathcal{A}_X$ ἀποδέχεται καὶ ἄλλα σημεῖα ἐκτὸς τῶν $(x, \kappa(x) \triangleleft f(\kappa(x)))$, ἀλλὰ ἡ ἀνωτέρω διπλὴ συνεπαγωγὴ δὲν παύει νὰ εἶναι ἀληθής.
Παρατήρηση: Ἡ εὕρεσις τοῦ σημείου $(x, \pi(\kappa(x)))$ ἀπὸ τὴν π καὶ τὸ x δὲν γίνεται σὲ πολυωνυμικὸ χρόνο, ἀλλὰ σὲ χρόνο $\Omega(p_\kappa(|x|) + h_f(|\kappa(x)|))$ μὲ h_f ὑπολογίσιμη, ποὺ δὲν εἶναι πολυωνυμικός, ἀλλὰ αὐτὸ δὲν ἀφορᾶ τὸν $\mathcal{A}_X$, διότι

[2] Διότι μέρος τῆς εἰσόδου εἶναι καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν βημάτων ποὺ θὰ ἐξομοιωθοῦν.

[3] Στὸ δυαδικὸ σύστημα ἀντιστοίχως εἶναι $k \approx 2^{|k|}$ καὶ $f(k) \approx 2^{|f(k)|}$.

[4] Τὸ βῆμα αὐτὸ μπορεῖ νὰ ἀποφευχθῆ, ἀλλὰ μειώνει πολὺ τὸν ἀριθμὸ τῶν σημείων ποὺ εἶναι ἀποδεκτὰ ἀπὸ τὸν $\mathcal{A}_X$, χωρὶς σημαντικὴ ἐπιβάρυνση τῶν βημάτων του.

[5] Ἡ ἐξομοίωση τῶν $u \cdot p(|x|)$ βημάτων τοῦ $\mathcal{A}_Q$ γίνεται σὲ πολυωνυμικὸ ἀριθμὸ βημάτων $p'(u \cdot p(|x|))$ ὡς πρὸς τὰ ἐξομοιούμενα βήματα, μὲ p' πολυώνυμο. Λόγω τοῦ ἑναδικοῦ ἔχουμε καὶ ὡς πρὸς τὴν εἴσοδο, διότι $p'(u \cdot p(|x|)) = p'(|u| \cdot p(|x|))$. Στὴν καλύτερη περίπτωση ἐξομοιώσεως ὅπου ὁ πρὸς ἐξομοίωση ἀλγόριθμος ἐνσωματώνεται, τὸ p' εἶναι ἡ ταυτοτικὴ συνάρτηση $p'(x) = x$.

[6] Ἐπειδὴ ἡ σύνθεση τῶν πολυωνύμων εἶναι πολυώνυμο, γιὰ εὐκολία παραλείπεται τὸ πολυώνυμο p'.

τὸ σημεῖο $(x, \pi(\kappa(x)))$ θεωρεῖται δεδομένο στὴν εἴσοδο τοῦ $\mathcal{A}_X$.
Συνεπῶς, ὁ $\mathcal{A}_X$ εἶναι πολυωνυμικοῦ χρόνου ὡς πρὸς τὴν εἴσοδό του, ποὺ μέρος της εἶναι στὸ ἑναδικὸ σύστημα, λόγω τῆς ἐξομοιώσεως ποὺ γίνεται.

Γιὰ τὴν συνεπαγωγὴ (2) $\Rightarrow$ (3) ἔχουμε: Ἔστω τὸ (Q, κ) εἶναι στὸ **NP** μετὰ ἀπὸ μία προεργασία ἐπὶ τῆς παραμέτρου. Ἄρα ὑπάρχουν ἀλφάβητο Π, ὑπολογίσιμη συνάρτηση $\pi : \mathbb{N} \to \Pi^*$, ἕνα σύνολο $X \subseteq \Sigma^* \times \Pi^*$ καὶ ἕνας ἀλγόριθμος $\mathcal{A}_X$ ἀναιτιοκρατικοῦ πολυωνυμικοῦ χρόνου $p_X(|x| + |y|)$ μὲ $(x, y) \in \Sigma^* \times \Pi^*$. Ἡ παρακάτω ἰσοδυναμία δείχνει ὅτι τὸ Q εἶναι ἀποφάνσιμο[7]:

$$x \in Q \Longleftrightarrow (x, \pi(\kappa(x))) \in X$$

Παρατήρηση: Ἐδῶ πιὰ δὲν ἰσχύει ὁ περιορισμὸς τῆς εἰσόδου νὰ εἶναι στὸ ἑναδικό, ἁπλῶς στὸν παραπάνω τύπο ὑπολογίζεται ἡ π, διότι πλέον θέλουμε νὰ κατασκευάσουμε παρακάτω, ἕναν ἀλγόριθμο ποὺ νὰ ἐξαρτᾶται μόνο ἀπὸ τὸ μέγεθος τοῦ x.
Ἔστω $\mathcal{A}_\pi$ ἕνας ἀλγόριθμος, ποὺ ὑπολογίζει τὴν π καὶ $h_\pi(|k|)$ ὁ χρόνος ποὺ χρειάζεται γιὰ νὰ δώση ἀποτέλεσμα μὲ εἴσοδο k. Ἡ συνάρτηση h_π εἶναι ὑπολογίσιμη. Θὰ δειχθῆ ὅτι ὑπάρχει ἀλγόριθμος $\mathcal{A}_h$, ποὺ ἀποδεικνύει ὅτι τὸ (Q, κ) εἶναι τελικὰ στὴν κλάση **NP**.
Ἔστω $x \in \Sigma^*$, ὁ ἀλγόριθμος $\mathcal{A}_h$ ὑπολογίζει τὸ $k = \kappa(x)$ μὲ ἐξομοίωση, ἡ ὁποία γίνεται σὲ αἰτιοκρατικὰ πολυωνυμικὰ βήματα $p_\kappa(|x|)$ [8] ὡς πρὸς τὸ $|x|$ καὶ μετὰ ἐξομοιώνει $|x|$ βήματα[9] ἀπὸ τὸν ὑπολογισμὸ τῆς $\pi(k)$ ἀπὸ τὸν $\mathcal{A}_\pi$. Ἐὰν ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ $\mathcal{A}_\pi$ δὲν σταματᾶ ἐντὸς $|x|$ βημάτων[10] ἢ $|x| < h_\pi(k)$, τότε ὁ $\mathcal{A}_h$ δὲν ἀποδέχεται τὸ x, ἀλλιῶς βρίσκει τὸ σημεῖο $(x, \pi(\kappa(x)))$ καὶ ἐξομοιώνει τὸν $\mathcal{A}_X$ γιὰ νὰ διαπιστώση κατὰ πόσον $(x, \pi(\kappa(x))) \in X$. Μέχρι ἐδῶ, ὁ $\mathcal{A}_h$ θέλει χρόνο $p_\kappa(|x|) + |x| \approx p_\kappa(|x|)$ γιὰ νὰ ἀποφασίση ἐὰν μπορῆ νὰ ὑπολογίση τὴν h_π.
Μετὰ χρειάζεται ἀναιτιοκρατικὸ χρόνο $O(p_X(|x|))$ [11] γιὰ νὰ ἐξομοιώση τὸν $\mathcal{A}_X$ καὶ νὰ ἀπαντήση. Ἑπομένως ὁ $\mathcal{A}_h$ εἶναι χρόνου τῆς τάξεως τοῦ $\mathcal{A}_X$, ἀφοῦ εἶναι οὐσιαστικὰ εἶναι ὁ $\mathcal{A}_X$ λίγο ἀλλαγμένος ὡς πρὸς τὴν εἴσοδό του, γιὰ νὰ

[7] Ἀποφάνσιμο εἶναι ἕνα πρόβλημα ὅταν γιὰ κάθε εἴσοδό του, πάντα λαμβάνεται ἀπάντηση ναὶ ἢ ὄχι, χωρὶς νὰ ὑπάρχη περιορισμὸς στὸν χρόνο (βήματα) ποὺ χρειάζεται γιὰ νὰ δοθῆ ἀπάντηση. Προφανῶς ὁ ἀλγόριθμος ποὺ ἐπιλύει τὸ πρόβλημα πάντα τερματίζει καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν βημάτων του δίνεται ἀπὸ μία ὑπολογίσιμη (ἀναδρομική) συνάρτιση.

[8] Κανονικὰ λόγω τῆς ἐξομοιώσεως ὁ χρόνος εἶναι $p'(p_\kappa(|x|))$, μὲ p' πολυώνυμο. Ἐπειδὴ ἡ σύνθεση πολυωνύμων εἶναι πολυώνυμο, παραλείπεται τὸ p' καὶ θεωρεῖται ὅτι τὸ p_κ περιέχει καὶ τὸν χρόνο τῆς ἐξομοιώσεως.

[9] Ὅπως καὶ στὴν προηγουμένη ὑποσημείωση γιὰ τὴν ἐξομοίωση, τὰ πολυώνυμα τοῦ χρόνου ἐξομοιώσεως ἀπὸ ἐδῶ καὶ πέρα θὰ παραλείπονται χωρὶς νὰ ἀναφέρεται τὸ γεγονός.

[10] Οὐσιαστικὰ $|x| < h_\pi(|k|) \leq h_\pi(k)$ καὶ ὁ $\mathcal{A}_\pi$ δὲν προλαβαίνει νὰ τελειώση.

[11] Ὁ χρόνος εἶναι $O(p_X(|x| + |\pi(\kappa(x))|))$, ἀλλὰ ἐπειδὴ $|\pi(\kappa(x))| \leq |x|$ ἔχουμε $O(p_X(|x| + |x|)) = O(p_X(|x|))$.

ὑπολογίση, ἐὰν εἶναι δυνατὸν τὸ σημεῖο $(x, \pi(\kappa(x)))$. Ἔτσι γιὰ κάθε $x \in \Sigma^*$ ἔχουμε:

$$[x \in Q \text{ καὶ } |x| \geq h_\pi(\kappa(x))] \Longleftrightarrow \mathcal{A}_h \text{ ἀποδέχεται τὸ } x$$

Ἑπομένως, ἐὰν ὁ $\mathcal{A}_h$ ἀποδέχεται τὸ x, τότε $x \in Q$. Ἔτσι ὁ $\mathcal{A}_h$ δὲν ἐξαρτᾶται παρὰ μόνον ἀπὸ τὸ μέγεθος τοῦ x, ποὺ εἶναι φυσικὰ τὸ ζητούμενο.

Γιὰ τὴν συνεπαγωγὴ (3) $\Rightarrow$ (1) ἔχουμε: Ἔστω $\mathcal{A}'_Q$ ἕνας ἀλγόριθμος, ποὺ ἀποφαίνεται ἐὰν $x \in Q$, h μία ὑπολογίσιμη συνάρτηση καὶ $\mathcal{A}_h$ ἀναιτιοκρατικὸς ἀλγόριθμος πολυωνυμικοῦ χρόνου $p_{\mathcal{A}_h}(|x|)$, ποὺ ἀποφαίνεται ἐὰν $x \in Q$ ὅταν $|x| \geq h(\kappa(x))$.
Προσοχή: Στὸν $\mathcal{A}_h$ ὑπολογίζεται ἡ h μόνο γιὰ $|x|$ βήματα.
Θὰ δειχθῆ ὅτι ὑπάρχει ἀλγόριθμος $\mathcal{A}_Q$, ποὺ λύει τὸ (Q, κ) σὲ ἀναιτιοκρατικὸ χρόνο $f(\kappa(x)) \cdot p(|x|)$ γιὰ κάποια ὑπολογίσιμη συνάρτηση f καὶ πολυώνυμο $p(X)$. Ἐὰν $|x| < h(\kappa(x))$ τότε ὁ $\mathcal{A}_Q$ ἐξομοιώνει τὸν $\mathcal{A}'_Q$ καὶ ἀποφαίνεται ἐὰν $x \in Q$, προφανῶς ὁ χρόνος ποὺ θὰ χρειασθῆ ὁ $\mathcal{A}'_Q$ φράσσεται ἀπὸ κάποιον ὅρο τοῦ $h(\kappa(x))$, δηλαδὴ ἐὰν ὁ ἀλγόριθμος $\mathcal{A}'_Q$ εἶναι χρόνου $f'(|x|)$ τότε χρειάζεται τὸ πολὺ χρόνος $f'(h(\kappa(x)))$. Ἐὰν $|x| \geq h(\kappa(x))$ τότε ὁ $\mathcal{A}_Q$ ἐξομοιώνει τὸν $\mathcal{A}_h$ καὶ ἀποφαίνεται ἐὰν $x \in Q$ σὲ ἀναιτιοκρατικὸ πολυωνυμικὸ χρόνο ὡς πρὸς τὸ μῆκος τῆς εἰσόδου του $|x|$. Ἄρα τὸ (Q, κ) ἀνήκει στὴν κλάση **para-NP** μὲ συνολικὸ ἀναιτιοκρατικὸ χρόνο $f'(h(\kappa(x))) + p_{\mathcal{A}_h}(|x|)$. $\dashv$

Τώρα θὰ διατυπώσουμε τὸ βασικὸ θεώρημα, τὸ ὁποῖο χρειάζεται στὴν ἀπόδειξή του τὴν προηγουμένη πρόταση.

Θεώρημα 3.3: Ἔστω (Q, κ) ἕνα μὴ τετριμμένο παραμετροποιημένο πρόβλημα στὴν κλάση **para-NP**. Τότε τὰ ἑπόμενα εἶναι ἰσοδύναμα:

1. (Q, κ) εἶναι **para-NP**-πλῆρες μὲ fpt-ἀναγωγές.

2. Ἡ ἕνωση πεπερασμένου ἀριθμοῦ στρώσεων στὸ πλῆθος, γιὰ σταθερὲς τιμὲς τῆς παραμέτρου τοῦ (Q, κ) εἶναι **NP**-πλῆρες. Δηλαδὴ ὑπάρχουν $\ell, m_1, \cdots, m_\ell \in N$ τέτοια ὥστε, τὸ

$$(Q, \kappa)_{m_1} \cup \cdots \cup (Q, \kappa)_{m_\ell}$$

   νὰ εἶναι **NP**-πλῆρες μὲ ἀναγωγὲς πολυωνυμικοῦ χρόνου κατὰ Cook.

Ἀπόδειξη: Ἔστω Σ τὸ ἀλφάβητο τοῦ προβλήματος (Q, κ).
Γιὰ τὴν συνεπαγωγὴ (1) $\Rightarrow$ (2) ἔχουμε: Ἔστω τὸ (Q, κ) εἶναι **para-NP**-πλῆρες, ἄρα ὑπάρχει ἀναιτιοκρατικὸς ἀλγόριθμος ποὺ τὸ ὑπολογίζει σὲ $f_Q(\kappa(x)) \cdot p_Q(|x|)$ βήματα. Ἔστω $Q' \subseteq (\Sigma')^*$ ἕνα **NP**-πλῆρες πρόβλημα, βάζουμε μία τετριμμένη παραμετροποίηση κ_{one}, γιὰ κάθε $x' \in (\Sigma')^*$ ἔχουμε $\kappa_{one}(x') =$

1, εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ πρόβλημα (Q', κ_{one}) ἀνήκει στὴν κλάση **para-NP**. Ἄρα ὑπάρχει fpt-ἀναγωγὴ $R : (\Sigma')^* \to \Sigma^*$ ἀπὸ τὸ (Q', κ_{one}) στὸ (Q, κ) μὲ τὰ κατάλληλα f_R, p_R, g_R. Γιὰ κάθε λοιπὸν $x' \in (\Sigma')^*$, ἔχουμε ὅτι ἡ τιμὴ $R(x')$ ὑπολογίζεται σὲ χρόνο $f_R(\kappa_{one}(x')) \cdot p_R(|x'|) = f_R(1) \cdot p_R(|x'|)$, μὲ $\kappa(R(x')) \leq g_R(\kappa_{one}(x')) = g_R(1) = m_g$. Ἄρα ὑπάρχει πολυωνυμικὴ ἀναγωγὴ τοῦ Q' σὲ ἕνα πεπερασμένο ἀριθμὸ στρώσεων $(Q, \kappa)_{\kappa(R(x'))}$ μὲ $\kappa(R(x')) \leq m_g$, δηλαδὴ τὸ πρόβλημα

$$(Q, \kappa)_1 \cup \cdots \cup (Q, \kappa)_{m_g}$$

εἶναι **NP**-πλῆρες, διότι ἀνήκει στὴν κλάση **NP** ἀφοῦ χρειάζεται $\sum_{i=1}^{m_g} f_Q(i) \cdot p_Q(|x|)$ ἀναιτιοκρατικὰ βήματα γιὰ νὰ λυθῆ καὶ ἕνα **NP**-πλῆρες πρόβλημα ἀνάγεται σὲ αὐτὸ μὲ ἀναγωγὴ πολυωνυμικοῦ χρόνου.

Γιὰ τὴν συνεπαγωγὴ (2) $\Rightarrow$ (1) ἔχουμε: Ἔστω ὅτι τὸ $(Q, \kappa)_{m_1} \cup \cdots \cup (Q, \kappa)_{m_\ell}$ εἶναι **NP**-πλῆρες. Ἔστω (Q', κ') ἕνα τυχαῖο πρόβλημα τῆς κλάσεως **para-NP** μὲ ἀλφάβητο Σ'. Θὰ δειχθῆ ὅτι $(Q', \kappa') \leq^{fpt} (Q, \kappa)$. Βάσει τῆς προηγουμένης προτάσεως τὸ (Q', κ') εἶναι στὴν κλάση **NP** μετὰ ἀπὸ μία προεργασία ἐπὶ τῆς παραμέτρου, δηλαδὴ ὑπάρχει μία ὑπολογίσιμη συνάρτηση $\pi : \mathbb{N} \to \Pi^*$ καὶ ἕνα $X \in$ **NP** τέτοια ὥστε γιὰ κάθε $x \in (\Sigma')^*$ ἔχουμε:

$$x \in Q' \Longleftrightarrow (x, \pi(\kappa'(x))) \in X$$

Ἀφοῦ τὸ $(Q, \kappa)_{m_1} \cup \cdots \cup (Q, \kappa)_{m_\ell}$ εἶναι **NP**-πλῆρες, ὑπάρχει μία ἀναγωγὴ R πολυωνυμικοῦ χρόνου ἀπὸ τὸ X στὸ $(Q, \kappa)_{m_1} \cup \cdots \cup (Q, \kappa)_{m_\ell}$ μὲ $R : (\Sigma')^* \times \Pi^* \to \Sigma^*$, ἔτσι ὥστε γιὰ κάθε $(x, y) \in (\Sigma')^* \times \Pi^*$ νὰ ἔχουμε:

$$(x, y) \in X \Longleftrightarrow R(x, y) \in (Q, \kappa)_{m_1} \cup \cdots \cup (Q, \kappa)_{m_\ell}$$

Ὑπάρχει λοιπὸν σίγουρα ἕνα $x_0 \in \Sigma^* - Q$, ἀφοῦ τὸ (Q, κ) εἶναι μὴ τετριμμένο. Θὰ ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ ἀπεικόνιση $S : (\Sigma')^* \to \Sigma^*$, ὁριζομένη ἀπὸ τὸν τύπο:

$$S(x) := \begin{cases} R(x, \pi(\kappa'(x))), & \text{ἐὰν } \kappa(R(x, \pi(\kappa'(x)))) \in \{m_1, \cdots, m_\ell\} \\ x_0 & \text{ἀλλιῶς} \end{cases}$$

εἶναι μία fpt-ἀναγωγὴ ἀπὸ τὸ (Q', κ') στὸ (Q, κ). Πράγματι, διαπιστώνεται εὔκολα ὅτι

$$\begin{aligned} x \in Q' &\Longleftrightarrow (x, \pi(\kappa'(x))) \in X \\ &\Longleftrightarrow R(x, \pi(\kappa'(x))) \in (Q, \kappa)_{m_1} \cup \cdots \cup (Q, \kappa)_{m_\ell} \\ &\Longleftrightarrow S(x) \in Q \end{aligned}$$

Ἡ συνάρτηση S εἶναι fpt-ἀναγωγή, ἀφοῦ:
Στὸ πρῶτο μέρος ὑπολογίζεται ἡ π καὶ μετὰ βρίσκουμε τὸ σημεῖο $(x, \pi(\kappa'(x)))$

σὲ χρόνο $p_{\kappa'}(|x|)+f_\pi(|\kappa'(x)|) \le p_{\kappa'}(|x|)+f_\pi(\kappa'(x))$, φυσικὰ τὸ $p_{\kappa'}[X]$ εἶναι πολυώνυμο καὶ ἡ f_π ὑπολογίσιμη[12].
Ἡ R εἶναι πολυωνυμικοῦ χρόνου ὡς πρὸς τὴν εἴσοδο, δηλαδὴ χρειάζεται τὸ πολὺ $p_R(|x|+|\pi(\kappa'(x))|)$ βήματα, ὅπου τὸ $p_R[X]$ εἶναι πολυώνυμο. Τὸ $\pi(\kappa'(x))$ ὑπολογίζεται ἐντὸς $f_\pi(\kappa'(x))$ βημάτων, ἄρα $|\pi(\kappa'(x))| \le f_\pi(\kappa'(x))$ [13]. Συνεπῶς $p_R(|x|+|\pi(\kappa'(x))|) \le p_R(|x|+f_\pi(\kappa'(x)))$.
Ἡ S χρειάζεται ἐπιπλέον χρόνο $p_\kappa(|R(x,\pi(\kappa'(x)))|)$ γιὰ τὴν εὕρεση τῆς παραμέτρου κ, ὅπου τὸ $p_\kappa[X]$ εἶναι πολυώνυμο. Ἡ $R(x,\pi(\kappa'(x)))$ ὑπολογίζεται ἐντὸς $p_R(|x|+f_\pi(\kappa'(x)))$ βημάτων, ἄρα $p_\kappa(|R(x,\pi(\kappa'(x)))|) \le p_\kappa(p_R(|x|+f_\pi(\kappa'(x))))$.
Ἑπομένως ὁ συνολικὸς χρόνος εἶναι

$$p_{\kappa'}(|x|)+f_\pi(\kappa'(x))+p_R(|x|+f_\pi(\kappa'(x)))+p_\kappa(p_R(|x|+f_\pi(\kappa'(x))))$$

Ἐὰν πρὸς στιγμήν, θεωρήσουμε τὸ $f_\pi(\kappa'(x))$ ὡς σταθερά, ἐπειδὴ ἡ σύνθεση πολυωνύμων εἶναι πάντα πολυώνυμο, κάνοντας πράξεις στὰ $p_{\kappa'}$ βαθμοῦ $n_{p_{\kappa'}} \ge 0$, p_κ βαθμοῦ $n_{p_\kappa} \ge 0$ καὶ p_R βαθμοῦ $n_{p_R} \ge 0$, λαμβάνουμε ἕνα πολυώνυμο $p''(|x|)$ βαθμοῦ $n_{p''} = \max\left\{n_{p_{\kappa'}}, n_{p_\kappa}+n_{p_R}\right\}$, μὲ συντελεστὲς τῶν μονονύμων $a_i \cdot |x|^i$ νὰ εἶναι τῆς μορφῆς $a_i = a_i' \cdot f_\pi(\kappa'(x))^{m_i}$, ὅπου τὸ a_i' ἀνήκει στὸ $\mathbb{Z}$ καὶ $n_{p_\kappa}+n_{p_R} \ge m_i \ge 0$. Ὁ συνολικὸς χρόνος γίνεται

$$p_{\kappa'}(|x|)+f_\pi(\kappa'(x))+\sum_{i=0}^{n_{p_\kappa}+n_{p_R}} a_i \cdot |x|^i$$

Ἡ $\kappa(S(x))$ φράσσεται ἀπὸ μία σταθερὴ συνάρτηση, διότι οἱ στρώσεις ποὺ ἀνάγεται τὸ x εἶναι πεπερασμένες, ἑπομένως $\kappa(S(x)) \in \{m_1,\cdots,m_\ell,\kappa(x_0)\}$ ἄρα $\kappa(S(x)) \le \max\{m_1,\cdots,m_\ell,\kappa(x_0)\}$. Ἀπὸ ἐδῶ καὶ πέρα γίνεται προφανές, ὅτι ἡ ἀναγωγὴ S εἶναι fpt.
Ἄρα γιὰ κάθε πρόβλημα (Q',κ') τῆς κλάσεως **para-NP** ἔχουμε $(Q',\kappa') \le^{fpt} (Q,\kappa)$, δηλαδὴ τὸ (Q,κ) εἶναι **para-NP**-πλῆρες. $\dashv$

Συνεπῶς μὲ μία fpt-ἀναγωγὴ εἶναι δυνατόν, ἕνα πρόβλημα τῆς κλάσεως **para-NP** νὰ ἀναχθῇ σὲ πεπερασμένο ἀριθμὸ στρώσεων ἑνὸς **para-NP**-πλήρους προβλήματος.
Ἐντελῶς διαισθητικά, ἡ S ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ξεχωριστά, κατὰ κάποιον τρόπο,

[12] Σὲ ὅλα τὰ «λογικὰ» ὑπολογιστικὰ μοντέλα, θεωροῦμε ὅτι τὸ μέγεθος τῆς κωδικοποιήσεως τῆς εἰσόδου εἶναι μικρότερο ἀπὸ αὐτὸ ποὺ κωδικοποιεῖ, ἄρα $|\kappa'(x)| \le \kappa'(x)$.

[13] Πάλι σὲ ὅλα τὰ «λογικὰ» ὑπολογιστικὰ μοντέλα, τὸ μέγεθος τῆς ἐξόδου ἑνὸς προβλήματος, πάντα εἶναι μικρότερο ἢ ἴσο, ἀπὸ τὰ βήματα ποὺ χρειάζονται γιὰ τὴν ἐπίλυση τοῦ προβλήματος. Δὲν ἔχουμε π.χ. μηχανὴ Turing ποὺ σὲ ἕνα βῆμα νὰ διαβάζῃ ἢ νὰ γράφῃ σὲ πολλὲς ταινίες, ἀλλὰ σὲ κάθε ἕνα βῆμα διαβάζει ἢ γράφει μόνο μία, ἀπὸ τὶς πολλὲς ταινίες ποὺ ἔχει.

μέρη. Τὸ πρῶτο μέρος, ποὺ εἶναι ἡ προεργασία ἐπὶ τῆς παραμέτρου, συμπιέζει τὸ x, ὥστε νὰ μποροῦν ὅλες οἱ στρώσεις τοῦ (Q', κ') νὰ ἀναχθοῦν σὲ πεπερασμένες, τὸ πλῆθος, στρώσεις τοῦ (Q, κ) καὶ τὸ δεύτερο μέρος, ποὺ ὑπολογίζει ποὺ πάει τὸ συμπιεσμένο x καὶ σὲ ποιὰ στρώση θὰ ἐνταχθῇ.

Πόρισμα 3.1: Τὸ p-Χρωματισμος Κορυφων εἶναι **para-NP**-πλῆρες.

Ἀπόδειξη: Ἡ 3-στρώση τοῦ προβλήματος εἶναι τὸ γνωστὸ **NP**-πλῆρες πρόβλημα 3-χρωματισμοῦ γραφημάτων. ⊣

Πόρισμα 3.2: Ἐὰν $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ τότε τὰ προβλήματα p-Καλυμμα Κορυφων, p-Ανεξαρτητο Συνολο, p-Κλικα, p-Συνολο Κυριαρχιας, p-Συνολο Αφης κ.λπ. παρόμοια προβλήματα, δὲν εἶναι **para-NP**-πλήρη.

Ἀπόδειξη: Ἐὰν κάποιο ἀπὸ αὐτὰ ἦταν **para-NP**-πλῆρες, τότε κάποια στρώση του θὰ ἦταν **NP**-πλήρης. Ὅμως ὅλες οἱ στρώσεις αὐτῶν τῶν προβλημάτων ἀνῆκουν στὸ **P** καὶ συνεπῶς ἡ ἕνωση πεπερασμένου ἀριθμοῦ στρώσεων εἶναι πάλι στὸ **P**. ⊣

Πόρισμα 3.3: Ἐὰν $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ τότε $\mathbf{FPT} \subset$ **para-NP**

Ἀπόδειξη: Εἶναι γνωστό, ὅτι $\mathbf{FPT} \subseteq$ **para-NP**. Τὸ p-Καλυμμα Κορυφων γνωρίζουμε ὅτι ἀνήκει στὴν **FPT** καὶ ἀπὸ τὸ προηγούμενο πόρισμα δὲν εἶναι **para-NP**-πλῆρες, ἄρα δὲν ὑπάρχει ἡ fpt-ἀναγωγὴ p-Χρωματισμος Κορυφων $\not\leq^{fpt}$ p-Καλυμμα Κορυφων, ἄρα τὸ p-Χρωματισμος Κορυφων $\notin$ **FPT**. ⊣

3.4 Ἀναφορές, Σχόλια

Ἡ κλάση **para-NP** καὶ γενικότερα, ἡ ἔννοια τῆς κλάσεως **para-C** γιὰ ὁποιαδήποτε κλάση **C** τῆς κλασσικῆς πολυπλοκότητας εἰσήχθη ἀπὸ τοὺς Flum καὶ Grohe στὸ [35]. Τὸ θεώρημα 3.3 εἶναι πάλι ἀπὸ τὸ προηγούμενο ἄρθρο [35].

Τὸ πρόβλημα Χρωματισμος Κορυφων συναντᾶται στὴν ἀγγλικὴ βιβλιογραφία καὶ ὡς Graph Cologing. Τὸ 3-Χρωματισμος Κορυφων εἶναι **NP**-πλῆρες, περισσότερα στὰ [60], [56], [41] καὶ [57], καθῶς καὶ στὸ βιβλίο [40]. Ὁ Cai στὸ [12] μελέτησε τὸ Χρωματισμος Κορυφων ἀπὸ μιὰ ἄλλη σκοπιά.

Τὸ πρόβλημα p-Δυσκολη Γραμμικη Παραταξη μελετήθηκε ἀπὸ τοὺς Serna καὶ Θηλυκὸ στὸ [58]. Γιὰ τὸ πρόβλημα αὐτό, μπορεῖ νὰ δῇ κάποιος περισσότερα στὸ πρὸς δημοσίευση ἄρθρο [43], τὸ ὁποῖο βρίσκεται στὴν ἱστοσελίδα

`http://arxiv.org/abs/cs.DS/0511030`

Κεφάλαιο 4

Ἡ κλάση XP

4.1 Εἰσαγωγή

Μία ἀκόμη βασικὴ κλάση γιὰ τὴν παραμετρικὴ πολυπλοκότητα εἶναι ἡ κλάση **XP**. Ἐδῶ ὁ ὁρισμὸς δὲν θὰ γίνῃ μὲ χρήση ἀναιτιοκρατικῶν ἀλγορίθμων, ἀλλὰ μὲ τὴν βοήθεια τῆς κλάσεως **P** τῆς κλασσικῆς πολυπλοκότητας. Ἂς δοῦμε λοιπὸν τὸν πρῶτο ὁρισμό:

Ὁρισμός 4.14: *Ἡ μὴ ὁμοιόμορφη κλάση* $\mathbf{XP}_{nu}$. Περιλαμβάνει ὅλα τὰ προβλήματα (Q, κ) μὲ ἀλφάβητο Σ γιὰ τὰ ὁποῖα κάθε στρώση τους βρίσκεται στὸ **P** τῆς κλασσικῆς πολυπλοκότητας.

$$\mathbf{XP}_{nu} = \{(Q, \kappa) \mid \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow (Q, \kappa)_i \in \mathbf{P}\}$$

Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς περιλαμβάνει καὶ μὴ ἀποφάνσιμα προβλήματα. Αὐτὸ γίνεται διότι, ἐὰν ἡ εἴσοδος ἀνήκῃ στὴν γλῶσσα Q τοῦ προβλήματος, τότε ἐξ ὁρισμοῦ ἡ καταφατικὴ ἀπάντηση δίδεται σὲ πολυωνυμικὸ χρόνο. Ἐὰν ἡ εἴσοδος[1] δὲν ἀνήκῃ στὴν γλῶσσα Q τοῦ προβλήματος, ὁ προηγούμενος ὁρισμὸς δὲν ὁρίζει τὶ πρέπει νὰ γίνεται. Ἄρα εἶναι δυνατὸν ἕνας ἀλγόριθμος ποὺ ἐπιλύει ἕνα πρόβλημα τῆς κλάσεως $\mathbf{XP}_{nu}$, ὅταν ἡ εἴσοδός του δὲν ἀνήκῃ στὴν γλῶσσα Q, νὰ μὴν τερματίζῃ. Ἕνα τέτοιο πρόβλημα, θὰ μποροῦσε κάλιστα νὰ ἔχῃ ἀφετηρία τὸ πρόβλημα τοῦ τερματισμοῦ (Halting Problem).
Ἂς δοῦμε πῶς εἶναι κάποιο ἀπὸ αὐτά. Ἔστωσαν ἀλφάβητο $I = \{1\}$ καὶ γλῶσσα $L_I \subset \{1\}^*$, ὅπου τὸ L_I εἶναι ἄπειρο ἀριθμήσιμο ὑποσύνολο μὲ μέλη θετικοὺς ἀριθμοὺς μεγαλυτέρους ἢ ἴσους τοῦ μηδενός, στὸ ἑναδικὸ σύστημα[2], μὲ παρα-

[1] Προφανῶς, ὑπάρχουν προβλήματα μὲ ἄπειρες (ἀριθμήσιμες ἢ μή) τέτοιες εἰσόδους. Ἐὰν ἦταν πεπερασμένες θὰ ἐνσωματώνωνταν κατ' εὐθείαν στὸν ἀλγόριθμο.

[2] Συνεπῶς $u = |u|$, ἐνῶ στὸ δυαδικὸ ἔχουμε $u \approx 2^{|u|}$. Γιὰ τὴν ἀκρίβεια, ἰσχύει $u \geq |u| \geq \Omega(u)$ καὶ $O(u) \geq 2^{|u|} \geq u$ ἀντιστοίχως.

μετροποίηση $\kappa(u) = |u|$, πιὸ συγκεκριμένα ἡ γλῶσσα L_I εἶναι

$$L_I = \{u \mid u \in \{1\}^* \wedge \exists p \in \mathbb{N}_0[X] \wedge \varphi_{\kappa(u)}(u) \downarrow \text{ σὲ βήματα } \leq p(u)\}$$

τὸ p εἶναι πολυώνυμο μὲ ἀκεραίους συντελεστὲς καὶ ἡ $\varphi_{\kappa(u)} \equiv \varphi_{|u|}$ εἶναι ἀναδρομικὴ συνάρτηση ὡς πρὸς κάποια ἀπαρίθμηση Gödel ὅλων τῶν ἀναδρομικῶν συναρτήσεων. Προφανῶς, στὸ σύνολο L_I δὲν εἶναι κατ' αὔξουσα σειρὰ οἱ ἀριθμοὶ στὸ ἑναδικὸ σύστημα. Ἔτσι, οὐσιαστικὰ γιὰ νὰ δοῦμε, ἐὰν κάποιο u ἀνήκη ἢ ὄχι στὸ L_I, πρέπει νὰ τὸ ψάξουμε ὅλο καὶ φυσικά, ἐὰν δὲν ὑπάρχη τὸ u στὸ L_I τότε τὸ ψάξιμο δὲν σταματᾶ, ἢ νὰ ἐξετασθῆ ἐὰν ἡ $\varphi_{\kappa(u)}(u)$ συγκλίνη, προφανῶς ἐὰν ἡ $\varphi_{\kappa(u)}(u)$ ἀποκλίνη δὲν λαμβάνουμε ποτὲ ἀπάντηση. Ἐδῶ χρειάζεται ἐξομοίωση ἀπὸ κάποια ἄλλη μηχανὴ Turing (καθολική). Ἡ ἐξομοίωση γίνεται σὲ πολυωνυμικὸ ἀριθμὸ βημάτων ὡς πρὸς τὰ βήματα ποὺ ἐξομοιώνονται, δηλαδὴ γιὰ ἐξομοίωση τῶν u' βημάτων χρειάζεται χρόνος $p'(u')$ μὲ p' πολυώνυμο. Λόγω τοῦ ἑναδικοῦ συστήματος, ἡ ἐξομοίωση γίνεται σὲ πολυωνυμικὸ χρόνο καὶ ὡς πρὸς τὴν εἴσοδο[3] καὶ ἔτσι ὁ χρόνος ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος (L_I, κ) περιορίζεται πολυωνυμικά.
Γίνεται προφανές, ὅτι ἐὰν ἡ $\varphi_{\kappa(u)}(u)$ συγκλίνη ($\downarrow$) ἐντὸς u' βημάτων, τότε ἔχουμε ἀπάντηση ναί, διότι ἡ στρώση $(L_I, \kappa)_{\kappa(u)}$ περιέχει ἀκριβῶς ἕνα[4] u καὶ μποροῦμε νὰ βροῦμε πολυώνυμο $p(x) = \alpha \cdot x^\beta$ μὲ $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, ὥστε ὁ ὑπολογισμὸς[5] τῆς $\varphi_{\kappa(u)}(u)$ νὰ τελειώνη σὲ λιγότερα ἀπὸ $u' \leq \alpha \cdot u^\beta$ βήματα, ἔτσι ἡ συγκεκριμένη στρώση εἶναι στὸ $\mathbf{P}$ καὶ εἶναι ἀποφάνσιμη.
Ἐὰν ἀποκλίνη ($\nearrow$) δὲν ἔχουμε ἀπάντηση, ἀφοῦ γιὰ νὰ βροῦμε τὸ πολυώνυμο[6] $p(x) = \alpha \cdot x^\beta$ μὲ $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, πρέπει νὰ εἶναι γνωστὸ ἐὰν ἡ $\varphi_{\kappa(u)}(u)$ συγκλίνη ἢ ὄχι. Τὸ παράδειγμα αὐτὸ ἐμπνεύσθηκε ἀπὸ τὸ γνωστὸ σύνολο K.

Ὁ παραπάνω ὁρισμὸς δὲν εἶναι καλός, διότι περιέχει μὴ ἀποφάνσιμα προβλήματα. Ἔτσι ἂς τὸν ἀλλάξουμε λίγο.

Ὁρισμός 4.15: *Ἡ ὁμοιόμορφη κλάση* **XP**. Περιλαμβάνει ὅλα τὰ προβλήματα (Q, κ) μὲ ἀλφάβητο Σ, τὰ ὁποῖα ἐπιλύονται ἀπὸ ἕναν ἀλγόριθμο σὲ

$$O\left(|x|^{f(\kappa(x))}\right)$$

βήματα, ὅπου f ὑπολογίσιμη (ἀναδρομική) συνάρτηση.

[3] Διότι ἀπὸ τὰ προηγούμενα συνεπάγεται $p'(u') = p'(|u'|)$.
[4] Πολὺ βασικὴ παρατήρηση, διότι κάθε στρώση περιέχει πεπερασμένο ἀριθμὸ μελῶν.
[5] Ὁ ὑπολογισμὸς γίνεται μὲ ἐξομοίωση, ὅπως ἐλέχθη παραπάνω. Ἐπειδὴ κάθε στρώση ἔχει ἕνα μέλος καὶ ὄχι ἄπειρα ἀριθμήσιμα μέλη, τέτοιο πολυώνυμο ὑπάρχει.
[6] Ἐὰν ἀποκλίνη, τὰ α, β γίνονται αὐθαίρετα μεγάλα.

Ἐδῶ ὁ ὁρισμὸς αὐτός, περιέχει τὴν ἔννοια «γιὰ κάθε» μὲ διαφορετικὸ τρόπο καὶ ἔτσι ὅλα τὰ προβλήματα εἶναι ἀποφάνσιμα. Σὲ αὐτὸ τὸ κεφάλαιο θὰ μελετήσουμε μόνο τὴν ὁμοιόμορφη κλάση **XP**.
Εἶναι προφανές, ὅτι **FPT** $\subseteq$ **XP** διότι $f\left(\kappa\left(x\right)\right) \cdot p\left(|x|\right) \leq p\left(|x|\right)^{f(\kappa(x))}$. Ἐπίσης κατὰ μία ἔννοια ἡ ὁμοιόμορφη κλάση **XP** εἶναι γιὰ τὴν παραμετρικὴ πολυπλοκότητα ὅτι ἡ κλάση **EXP** γιὰ τὴν κλασσική.

4.2 XP-πλήρη προβλήματα

Ἂς δοῦμε μερικὰ πλήρη προβλήματα αὐτῆς τῆς κλάσεως.

p-Exp-Dtm-Halt

Ἐδῶ θὰ ὁρίσουμε ἕνα πρόβλημα τεχνικά, ἁπλῶς παρατηρώντας τὸν ὁρισμὸ τῆς κλάσεως **XP**. Ἔστω λοιπὸν μία αἰτιοκρατικὴ μηχανὴ Turing $\mathbb{M}$, πάντα μποροῦμε νὰ ἐρωτήσουμε ἐὰν μὲ εἴσοδο x σταματᾶ μετὰ ἀπὸ ἕναν ἀριθμὸ βημάτων y. Αὐτὸ γίνεται μὲ ἐξομοίωση αὐτῆς τῆς μηχανῆς $\mathbb{M}$ ἀπὸ μία ἄλλη αἰτιοκρατικὴ μηχανὴ Turing (καθολική), ἡ ὁποία ἐξομοιώνει κάθε ἄλλη αἰτιοκρατικὴ μηχανὴ Turing, γιὰ y βήματα. Ἐδῶ ἡ ἐξομοίωση γίνεται βῆμα-βῆμα, πρᾶγμα τὸ ὁποῖο εἶναι πολὺ διαφορετικὸ ἀπὸ τὴν ἐξομοίωση μιᾶς μηχανῆς μέχρι αὐτὴ νὰ τερματίση. Ὁ ἀριθμὸς τῶν βημάτων ἐδῶ γιὰ τεχνικοὺς λόγους ὁρίζεται σὲ $|x|^k$.

p-Exp-Dtm-Halt

Εἴσοδος : Μία αἰτιοκρατικὴ μηχανὴ Turing $\mathbb{M}$, ἡ εἴσοδός της x καὶ $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος : $\kappa\left(\mathbb{M}, x, k\right) = k$.
Ἐρώτηση : Τερματίζει ἡ $\mathbb{M}$ ἐντὸς $|x|^k$ βημάτων;

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι **XP**-πλῆρες, διότι ὁποιοδήποτε πρόβλημα (L', κ') τῆς κλάσεως **XP**, ποὺ λύεται σὲ χρόνο $|x'|^{f'(\kappa'(x'))}$ μὲ εἴσοδο x' καὶ παράμετρο $\kappa'\left(x'\right)$, τὸ ἐξομοιώνει θέτοντας $x = x'$ καὶ $k = f'\left(\kappa'\left(x'\right)\right)$ καὶ βρίσκει τὴν λύση του. Ἑπομένως, ὁ συνολικὸς χρόνος εἶναι $p\left(|x|^k\right)$ μὲ p πολυώνυμο[7]. Τὸ μέγεθος τῆς εἰσόδου τοῦ p-Exp-Dtm-Halt εἶναι $\|\mathbb{M}\| + |x| + |k|$.

[7] Ὅπως ἔχει ἀναφερθῆ, ἡ ἐξομοίωση γίνεται σὲ πολυωνυμικὸ χρόνο ὡς πρὸς τὸν ἀριθμὸ τῶν βημάτων.

p-Παιγνιδι της Γατας με το Ποντικι

Ἂς δοῦμε αὐτὸ τὸ **XP**-πλῆρες πρόβλημα ἀπὸ τὴν θεωρία παιγνίων.

p-Παιγνιδι της Γατας με το Ποντικι
Εἴσοδος : $G = (V, E, \gamma, P, \tau)$ καὶ $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος : $\kappa\,(G, k) = k$.
Ἐρώτηση : Ἐὰν $\lvert P \rvert = k$, ἔχει ὁ πρῶτος παίκτης στρατηγικὴ νίκης;

Ἂς δοῦμε τὶ εἶναι τὸ $G = (V, E, \gamma, P, \tau)$. Τὸ (V, E) εἶναι ἕνα γράφημα, ὅπου ὁ παίκτης Γ (γάτα) ἔχει τοποθετήσει τὸ πιόνι (πεσσό) του στὸ $\gamma \in V$, ὁ παίκτης Π (ποντίκι) ἔχει τοποθετήσει τὰ $\lvert P \rvert$ πιόνια (πεσσούς) του στὸ ὑποσύνολο κορυφῶν $P \subset V$ καὶ τὸ τυρὶ βρίσκεται στὸ $\tau \in V$. Ὁ παίκτης Γ κερδίζει ὅταν τοποθετήση τὸ πιόνι του πάνω σὲ ἕνα πιόνι τοῦ Π, ὁ παίκτης Π κερδίζει ὅταν τοποθετήση ἕνα ἀπὸ τὰ πιόνια του στὸ τ, ἔστω καὶ ἐὰν πάνω του βρίσκεται τὸ πιόνι τοῦ Γ. Οἱ παῖκτες παίζουν ἐναλλάξ, κινούμενοι πάνω στὸ γράφημα, μετακινώντας κάθε φορὰ ἕνα πιόνι σὲ μία γειτονική του κορυφή, τὴν πρώτη κίνηση κάνει πάντα ὁ Γ. Δύο πιόνια τοῦ Π δὲν μπορεῖ νὰ βρίσκονται στὴν ἴδια κορυφή. Ἡ στρατηγικὴ νίκης εἶναι ἕνας τρόπος ποὺ θὰ παίξη ἕνας παίκτης ὥστε νὰ νικήση ἀνεξαρτήτως τοῦ τὶ θὰ κάνη ὁ ἄλλος παίκτης.

4.3 Θεωρήματα γιὰ τὴν κλάση XP

Θὰ μελετηθοῦν, μέσω τοῦ προβλήματος p-Exp-Dtm-Halt, μερικὲς προτάσεις γιὰ τὶς σχέσεις τῶν κλάσεων τῆς παραμετρικῆς καὶ κλασσικῆς πολυπλοκότητας.

Πρόταση 4.5: Τὸ p-Exp-Dtm-Halt εἶναι **XP**-πλῆρες.

Ἀπόδειξη: Ἔστω $(C', \kappa') \in \mathbf{XP}$. Παρατηροῦμε ὅτι τὸ πρόβλημα αὐτὸ λύεται σὲ χρόνο $\lvert x' \rvert^{f'(\kappa'(x'))}$ μὲ εἴσοδο x' καὶ παράμετρο $\kappa'\,(x')$. Ἔστω $\mathbb{A}$ ἡ αἰτιοκρατικὴ μηχανὴ Turing ποὺ τὸ ἐπιλύει. Θέτουμε στὴν εἴσοδο τοῦ p-Exp-Dtm-Halt, $\mathbb{M} = \mathbb{A}$, $x = x'$ καὶ $k = f'\,(\kappa'\,(x'))$ καὶ ἐπιλύουμε τὸ πρόβλημα. Χρειάζεται χρόνος $\lVert \mathbb{A} \rVert + \lvert x' \rvert$ γιὰ τὴν ἀντιγραφὴ τῶν $\mathbb{A}$ καὶ x' στὴν εἴσοδο τοῦ p-Exp-Dtm-Halt, μετὰ χρειάζεται χρόνος $p_{\kappa'}\,(\lvert x' \rvert)$ γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ $k' = \kappa'\,(x')$ μὲ $p_{\kappa'}$ πολυώνυμο, μετὰ χρειάζεται χρόνος $h_{f'}\,(\lvert k' \rvert) \leq h_{f'}\,(\kappa'\,(x'))$ [8] μὲ $h_{f'}$ ὑπολογίσιμη, γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ $f'\,(k')$ καὶ τέλος σὲ χρόνο $\lvert f'\,(k') \rvert \leq h_{f'}\,(\lvert k' \rvert)$ ἀντιγράφεται τὸ $f'\,(k')$ στὴν εἴσοδο τοῦ p-Exp-Dtm-Halt. Ἡ $\mathbb{A}$ σταματᾶ

[8] Σὲ ὅποιο σύστημα καὶ νὰ γράφεται τὸ k π.χ. ἑναδικό, δυαδικό, δεκαδικό, προφανῶς $\lvert k' \rvert \leq k' = \kappa'\,(x')$.

ἐντὸς $|x'|^{f'(\kappa'(x'))}$ βημάτων[9], στὴν ἐξομοίωση τὸ p-Exp-Dtm-Halt, πάλι σταματᾶ ἀκριβῶς στὸν ἴδιο ἀριθμὸ ἐξομοιουμένων βημάτων καὶ ὡς ἔξοδο[10] δίνει τὴν ἔξοδο τῆς ἐξομοιουμένης $\mathbb{A}$, ἡ ὁποία εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἴδια μὲ τὴν ἔξοδο τῆς $\mathbb{A}$. Ἡ παράμετρος k τῆς εἰσόδου τοῦ p-Exp-Dtm-Halt μετὰ τὴν ἀναγωγὴ αὐτή, φράσσεται ἐκ κατασκευῆς ἀπὸ τὸ $f'(\kappa'(x'))$. Ἄρα τὸ p-Exp-Dtm-Halt εἶναι **XP** δύσκολο.

Τὸ p-Exp-Dtm-Halt ἀνήκει στὴν κλάση **XP**, διότι τὰ $|x|^k$ βήματα ἐξομοιώνονται σὲ πολυωνυμικὸ χρόνο $p\left(|x|^k\right)$ μὲ p πολυώνυμο βαθμοῦ n_p [11], συνεπῶς τερματίζει ἐντὸς $O\left(|x|^{n_p \cdot k}\right)$ βημάτων καὶ θέτοντας $f(\kappa(\mathbb{M}, x, k)) = n_p \cdot \kappa(\mathbb{M}, x, k)$, ἔχουμε $O\left(|x|^{n_p \cdot k}\right) \leq O\left((\|\mathbb{M}\| + |x| + |k|)^{f(\kappa(\mathbb{M},x,k))}\right)$. ⊣

Πρόταση 4.6: **FPT** $\subset$ **XP**

Ἀπόδειξη: Εἶναι προφανὲς ὅτι **FPT** $\subseteq$ **XP**, διότι προφανῶς $f(\kappa(x)) \cdot p(|x|) \leq (p(|x|))^{f(\kappa(x))}$. Ἔστω ὅτι τὸ p-Exp-Dtm-Halt $\in$ **FPT**, τότε λύεται σὲ χρόνο $f(\kappa(x)) \cdot p(|x|)$, ὅπου τὸ p εἶναι βαθμοῦ c, ἄρα τὸ p-Exp-Dtm-Halt ἀνήκει στὸ **TIME**$(|x|^c)$.

Κάθε πρόβλημα λοιπὸν τοῦ **TIME** $\left(|x|^{c+1}\right)$ ἐξομοιώνεται ἀπὸ τὴν $c+1$ στρώση τοῦ p-Exp-Dtm-Halt, ποὺ ἀνήκει καὶ στὸ **TIME** $(|x|^c)$. Ἄρα **TIME** $\left(|x|^{c+1}\right)$ $\subseteq$ **TIME** $(|x|^c)$. Αὐτὸ ὅμως ἀντιβαίνει στὸ θεώρημα τῆς χρονικῆς ἱεραρχίας (Παπαδημητρίου [53]), ἄρα p-Exp-Dtm-Halt $\notin$ **FPT**. ⊣

Πρόταση 4.7: Ἐὰν **XP** $\subseteq$ **para-NP** τότε **P** $\neq$ **NP**

Ἀπόδειξη: Παρατηροῦμε ὅτι τὸ πρόβλημα p-Exp-Dtm-Halt ποὺ εἶναι **XP**-πλῆρες, εἶναι καὶ **P**-δύσκολο, ἀφοῦ λύει ὁποιοδήποτε πρόβλημα τοῦ **P** μὲ ἐξομοίωση.

Ἐφόσον **XP** $\subseteq$ **para-NP**, τότε λύεται σὲ ἀναιτιοκρατικὸ χρόνο $O(f(k(x)) \cdot p(|x|))$ ὅπου τὸ p εἶναι βαθμοῦ c, ἄρα τὸ p-Exp-Dtm-Halt ἀνήκει στὴν κλά-

---

[9] Ἀπὸ τὴν προηγουμένη ἀναγωγή, τὰ ἐξομοιούμενα βήματα εἶναι $|x|^k = |x'|^{f'(\kappa'(x'))}$.

[10] Γιὰ τυπικοὺς λόγους καὶ ὄχι οὐσιαστικούς, θὰ μποροῦσε νὰ γίνη τὸ ἑξῆς: Στὴν ἀναγωγὴ ἐνσωματώνεται μία σταθερὴ μηχανὴ Turing $\mathbb{T}$, μὲ δύο καταστάσεις t_1, t_2 καὶ μεταβάσεις $t_1 \to t_2$ καὶ $t_2 \to t_1$, ἔτσι κατασκευάζεται ἕνας ἀτέρμων βρόχος. Κατασκευάζεται μία νέα γιὰ τὴν ἀναγωγή, μηχανὴ Turing ἡ $\mathbb{A}'$: ἐξομοίωσε τὴν $\mathbb{A}$, ἐὰν ἡ $\mathbb{A}$ δώση στὴν ἔξοδο ναὶ τερμάτισε, ἀλλιῶς ἐξομοίωσε τὴν $\mathbb{T}$. Τὸ μέγεθος τῆς $\mathbb{A}'$ εἶναι $O(\|\mathbb{A}\|)$, διότι $\|\mathbb{A}'\| = \|\mathbb{A}\| + m + \|\mathbb{T}\|$ ὅπου τὸ m σταθερό, εἶναι τὸ μέγεθος τῶν λοιπῶν ἐντολῶν. Ἡ $\mathbb{A}'$ ἀναγκάζει τὸ p-Exp-Dtm-Halt νὰ δίνη πάντα τὴν ἴδια ἔξοδο μὲ τὴν $\mathbb{A}$. Τὸ p-Exp-Dtm-Halt ἐξομοιώνει τὴν $\mathbb{A}'$ μὲ εἴσοδο x γιὰ $|x|^{O(k)}$ βήματα. Ὁ ἐκθέτης $O(k)$ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ὑλοποίηση τῆς $\mathbb{A}'$.

[11] Ἀπὸ τὶς γνωστὲς ἰδιότητες τῆς συναρτήσεως O, ἔχουμε ὅτι $p(n) = O(n^{n_p})$, ἄρα $p\left(|x|^k\right) = O\left(|x|^{n_p \cdot k}\right)$.

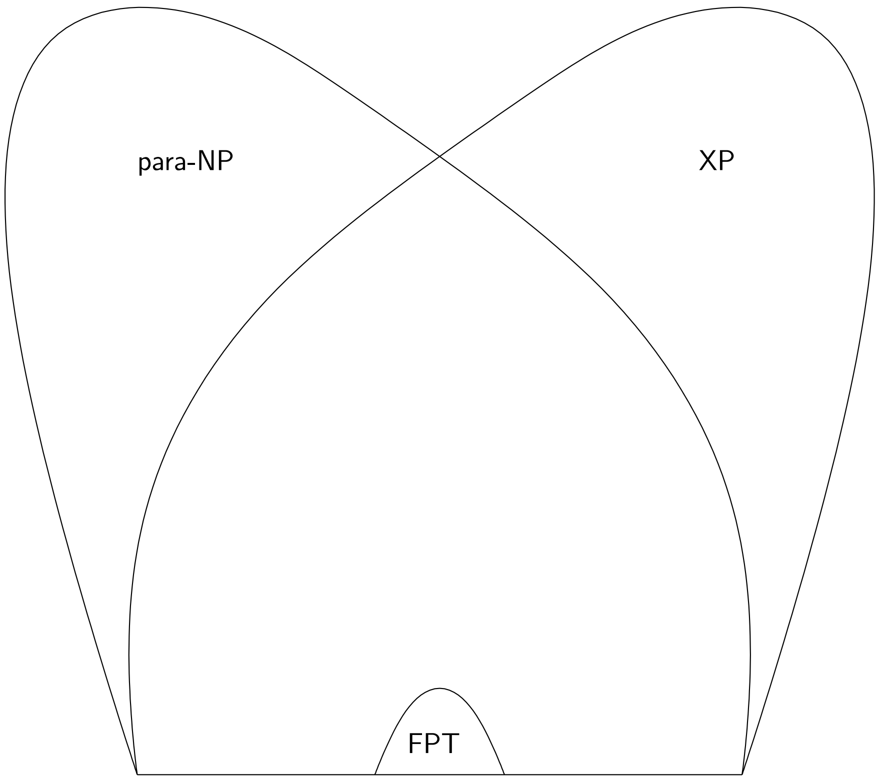
ση $\mathbf{NTIME}\left(|x|^{c}\right)$.
Ἔστω $\mathbf{P}=\mathbf{NP}$. Τὸ p-Exp-Dtm-Halt εἶναι κατὰ συνέπεια καὶ **NP**-δύσκολο καὶ ἀνήκει στὴν κλάση **NP**, ἀφοῦ λύεται σὲ χρόνο $\mathbf{NTIME}\left(|x|^{c}\right)$, ἄρα εἶναι **NP**-πλῆρες (καὶ φυσικὰ **P**-πλῆρες, ἄρα ἀνήκει στὴν κλάση $\mathbf{TIME}\left(|x|^{c'}\right)$).
Ὁποιοδήποτε λοιπὸν πρόβλημα τῆς κλάσεως **NP** π.χ. ἕνα ποὺ ἀνήκει στὴν κλάση $\mathbf{NTIME}\left(|x|^{c+1}\right)$ καὶ ἀφοῦ $\mathbf{P}=\mathbf{NP}$ θὰ λύεται μὲ ἐξομοίωση ἀπὸ τὸ p-Exp-Dtm-Halt σὲ ἀναιτιοκρατικὸ χρόνο $O\left(f\left(k\left(x\right)\right)p\left(|x|\right)\right)$ ἄρα $\mathbf{NTIME}\left(|x|^{c+1}\right)\subseteq\mathbf{NTIME}\left(|x|^{c}\right)$. Αὐτὸ ὅμως ἀντιβαίνει στὸ θεώρημα τῆς χρονικῆς ἱεραρχίας ἄρα $\mathbf{P}\neq\mathbf{NP}$. $\dashv$

4.4 Ἀναφορές, Σχόλια

Ἡ κλάση **XP** σχετίζεται μὲ τὴν κλάση **P** τῆς κλασσικῆς πολυπλοκότητας, αὐτὸ γίνεται φανερὸ καὶ ἀπὸ τὸν ὁρισμό της. Ἡ κλάση **XP** καὶ γενικότερα, ἡ ἔννοια τῆς κλάσεως **XC** γιὰ ὁποιαδήποτε κλάση **C** τῆς κλασσικῆς πολυπλοκότητας εἰσήχθη ἀπὸ τοὺς Downey καὶ Fellows στὸ [29], γιὰ περαιτέρω μελέτη μπορεῖ κάποιος νὰ ἀνατρέξῃ καὶ στὸ [35]. Περισσότερα **XP**-πλήρη προβλήματα στὰ [29] καὶ [25].

Μεγάλη προσοχὴ ὥστε νὰ κατανοηθῆ σωστά, θέλει τὸ παράδειγμα μετὰ τὸν ὁρισμὸ 4.14, μὲ τὸ πρόβλημα (L_I,κ), γιὰ τὴν μὴ ὁμοιόμορφη κλάση $\mathbf{XP}_{nu}$.

Γιὰ τὸ Παιγνιδι της Γατας με το Ποντικι μπορεῖ νὰ δῆ κάποιος στὸ [29]. Γιὰ τὴν **XP**-πληρότητα τοῦ προβλήματος μὲ ἀναγωγὲς ἀπὸ ἄλλα παίγνια μπορεῖ νὰ δῆ κάποιος στὰ [45] καὶ [3].



Οἱ κλάσεις **FPT, para-NP** καὶ **XP**

Κεφάλαιο 5

Ἄλλες κλάσεις

5.1 Εἰσαγωγή

Ἐδῶ θὰ μελετηθοῦν οἱ κλάσεις $\mathbf{W}[P]$, $\mathbf{W}[SAT]$ καὶ οἱ ἱεραρχίες τῶν $\mathbf{W}[t]$ καὶ $\mathbf{A}[t]$ μὲ $t \geq 1$. Ἐδῶ πάλι θὰ χρειασθοῦμε μία ἀναιτιοκρατικὴ μηχανὴ Turing, ὅμως θὰ κάνουμε κάτι τὸ ὁποῖο ἡ κλασσικὴ πολυπλοκότητα δὲν τὸ ἔχει ἀξιοποιήσει. Θὰ εἰσάγουμε τὴν ἔννοια τῆς κ-περιορισμένης μηχανῆς Turing.

Ὁρισμός 5.16: *κ-περιορισμένη μηχανὴ Turing.* Ἔστω Σ ἀλφάβητο καὶ $\kappa : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ μία παραμετροποίηση καὶ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ὑπολογίσιμες (ἀναδρομικές) συναρτήσεις καὶ $p \in \mathbb{N}_0[X]$ πολυώνυμο. Ἔστω ἀναιτιοκρατικὴ $\mathbb{M}$ μηχανὴ Turing μὲ εἴσοδο x, ἡ ὁποία τερματίζει σὲ $f(\kappa(x)) \cdot p(|x|)$ βήματα. Ἐὰν ἀπὸ αὐτὰ ὄχι περισσότερα ἀπὸ $h(\kappa(x)) \cdot \lceil \log |x| \rceil$ εἶναι ἀναιτιοκρατικά, τότε ἡ $\mathbb{M}$ λέγεται κ-περιορισμένη.

Συνήθως θέτουμε $n = |x|$ καὶ παραλείπουμε στὸν λογάριθμο τὸ ἀκέραιο μέρος σὺν 1, ἀφοῦ δὲν νοεῖται κλάσμα βήματος καὶ τὰ ἀναιτιοκρατικὰ βήματα γράφονται $h(\kappa(x)) \cdot \log n$. Οὐσιαστικά, σὲ μία ἀναιτιοκρατικὴ μηχανὴ Turing περιορίζουμε τὰ ἀναιτιοκρατικά της βήματα μὲ ἐκθετικὸ ρυθμό, ὡς πρὸς τὸ μῆκος τῆς εἰσόδου, χρησιμοποιώντας τὸν λογάριθμο τοῦ μήκους της.

Γιὰ τὴν ἱεραρχία $\mathbf{A}[t]$, θὰ χρειασθοῦν κάποιες γνώσεις μαθηματικῆς λογικῆς, τὶ εἶναι δομή, τιμὴ ἀληθείας ἑνὸς προτασιακοῦ τύπου σὲ μιὰ δομή, καθῶς καὶ τῆς θεωρίας ἀναδρομῆς καὶ συγκεκριμένα ἡ ἀριθμητικὴ ἱεραρχία ($\Sigma_i, i > 0$).

5.2 Ἡ κλάση $\mathbf{W}[P]$

Στὴν κλάση **para-NP** ἐπιτρέπεται ὅλα τὰ βήματα μιᾶς μηχανῆς Turing νὰ εἶναι ἀναιτιοκρατικά. Τί γίνεται ὅμως ἐὰν περιορισθῆ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀναιτιοκρατικῶν βημάτων; Βάσει τῶν κ-περιορισμένων μηχανῶν Turing τὰ ἀναιτιοκρατικὰ βήματα περιορίζονται καὶ μέσα στὴν κλάση **para-NP** δημιουργεῖται μία ἱεραρχία νέων κλάσεων. Ἂς ὁρίσουμε τὴν πρώτη κλάση, ποὺ βρίσκεται στὴν κορυφὴ αὐτῆς τῆς ἱεραρχίας.

Ὁρισμός 5.17: *Ἡ κλάση* $\mathbf{W}[P]$ περιλαμβάνει ὅλα τὰ παραμετροποιημένα προβλήματα (Q, κ), τὰ ὁποῖα ἀποφασίζονται ἀπὸ μία κ-περιορισμένη μηχανὴ Turing.

Ἡ πληρότητα τῶν κατωτέρω προβλημάτων δὲν ἀποδεικνύεται εὔκολα, ὑπάρχουν ὅμως ἀποδείξεις στὴν βιβλιογραφία.

5.2.1 W[P]-πλήρη προβλήματα

p-WSat(CIRC)

Τὰ λογικὰ κυκλώματα ὁρίζονται ὡς συνήθως, δηλαδὴ ὡς ἀκυκλικὰ κατευθυνόμενα γραφήματα, ὅπου κορυφὲς μὲ βαθμὸ εἰσόδου μηδὲν εἶναι λογικὲς σταθερές (πύλες μὲ τιμὴ 0 ἢ 1) ἢ μὲ ἄλλα λόγια ἡ εἴσοδος τοῦ κυκλώματος, κορυφὲς μὲ βαθμὸ εἰσόδου 1 εἶναι κορυφὲς λογικῶν πυλῶν ἀρνήσεως ($\neg$) καὶ κορυφὲς μὲ βαθμὸ εἰσόδου μεγαλυτέρου τοῦ ἑνὸς εἶναι κορυφὲς λογικῶν πυλῶν συζεύξεως ($\wedge$) ἢ διαζεύξεως ($\vee$) κ.λπ. Μὲ CIRC συμβολίζεται τὸ σύνολο ὅλων τῶν λογικῶν κυκλωμάτων. Ἕνα κύκλωμα $\mathcal{C}$ μὲ n εἰσόδους ὁρίζει μὲ φυσικὸ τρόπο μία Boolean συνάρτηση $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Ἡ τιμὴ ἐξόδου τοῦ κυκλώματος $\mathcal{C}$ μὲ εἴσοδο x συμβολίζεται μὲ $\mathcal{C}(x)$.
Τὸ βάρος μιᾶς λέξεως $x = x_1 x_2 \ldots x_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ εἶναι τὸ $\sum_{i=1}^{n} x_i$, δηλαδὴ πόσα x_i εἶναι 1.

Ὁρισμός 5.18: *k-ἱκανοποιήσιμο κύκλωμα.* Ἕνα κύκλωμα $\mathcal{C}$ εἶναι k-ἱκανοποιήσιμο ἀπὸ τὴν εἴσοδο (λέξη) x, ἐὰν $\mathcal{C}(x) = 1$ καὶ τὸ βάρος τῆς λέξεως x εἶναι k.

p-WSat(CIRC)

Εἴσοδος : Ἕνα κύκλωμα $\mathcal{C}$ καὶ $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος : $\kappa(\mathcal{C}, k) = k$.
Ἐρώτηση : Εἶναι τὸ $\mathcal{C}$ k-ἱκανοποιήσιμο;

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι $\mathbf{W}[P]$-πλῆρες. Ἐδῶ λοιπὸν κρίνεται σκόπιμο νὰ δοθῆ ἕνας ἐναλλακτικὸς ὁρισμὸς τῆς κλάσεως $\mathbf{W}[P]$ [1].

[1] Στὴν κλάση προβλημάτων p-WSat(·), ὅπως θὰ δοῦμε στὸ p-WSat(PROP) παρακά-

Ὁρισμός 5.19: *Ἡ κλάση* $\boldsymbol{W}[P]$. Ἐναλλακτικὸς ὁρισμός:

$$\mathbf{W}[P] = [\text{p-WSAT(CIRC)}]^{fpt}$$

p-WSAT(CIRC$^+$)

Ἕνα κύκλωμα ὀνομάζεται μονότονο ἐὰν δὲν περιέχη πύλες ἀρνήσεως ($\neg$). Μὲ CIRC$^+$ ὁρίζουμε τὸ γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ CIRC τοῦ ὁποίου τὰ κυκλώματα εἶναι μονότονα. Ἔτσι ἔχουμε τὴν ἑξῆς ἐκδοχὴ τοῦ p-WSAT($\cdot$) στὸ CIRC$^+$:

p-WSAT(CIRC$^+$)
Εἴσοδος : Ἕνα μονότονο κύκλωμα $\mathcal{C}$ καὶ $k \in \mathbb{N}$. *Παράμετρος :* $\kappa(\mathcal{C}, k) = k$. *Ἐρώτηση :* Εἶναι τὸ $\mathcal{C}$ k-ἱκανοποιήσιμο;

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι $\mathbf{W}[P]$-πλῆρες.

p-Μεγιστη Κοινη Υπακολουθια **(p-LCS)**

Ἔστω ἀλφάβητο Σ, μὲ $\bar{a} \in \Sigma^*$ συμβολίζεται ἡ λέξη $\bar{a} = a_1 a_2 \ldots a_n$. Ἡ λέξη $\bar{b} = b_1 b_2 \ldots b_s$ εἶναι ὑπακολουθία τῆς $\bar{a}$, ἐὰν $\bar{b} = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_s}$ μὲ $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leq n$, δηλαδὴ ὅλα τὰ γράμματα τῆς $\bar{b}$ ὑπάρχουν στὴν $\bar{a}$, ἀκολουθώντας τὴν σειρὰ ποὺ ἔχουν στὴν $\bar{b}$, ἀλλὰ ὄχι κατ' ἀνάγκη συνεχόμενα π.χ. ἐὰν $\bar{a} = abcftgawbb$, τότε ἡ $\bar{b} = acfgwb$, $\bar{c} = cftgawb$ εἶναι ὑπακολουθίες τῆς $\bar{a}$ ἡ $\bar{d} = tfg$ δὲν εἶναι. Ὁρίζουμε $\bar{a} \oplus \bar{b} = a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_s$.

p-Μεγιστη Κοινη Υπακολουθια (p-LCS)
Εἴσοδος : Ἔστω οἱ λέξεις $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m \in \Sigma^*$ καὶ $k \in \mathbb{N}$. *Παράμετρος :* $\kappa(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m, k) = k$. *Ἐρώτηση :* Ὑπάρχει λέξη $\bar{b} \in \Sigma^*$ μήκους k, ποὺ νὰ εἶναι κοινὴ ὑπακολουθία ὅλων τῶν $\bar{a}_i$, μὲ $i = 1, 2, \ldots, m$;

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἀνήκει στὴν κλάση $\mathbf{W}[P]$, διότι χρειάζονται $k \cdot \log n$ ἀναιτιοκρατικὰ βήματα γιὰ νὰ ἐπιλεχθοῦν k γράμματα ἀπὸ ἕνα μέρος τῆς εἰσόδου[2] μεγέθους $n = |\bar{a}_1 \oplus \bar{a}_2 \oplus \ldots \oplus \bar{a}_m| + |k|$. Μετά, μὲ τὸ πολὺ πολυωνυμικὸ ἀριθμὸ

τω, πάντα ἐννοεῖται ὅτι τὸ κύκλωμα $\mathcal{C}$ τῆς εἰσόδου ἀνήκει στὸ σύνολο ποὺ εἶναι παράμετρος στὸ p-WSAT($\cdot$), ἐδῶ ἔχουμε τὸ σύνολο CIRC.

[2] Τὰ k γράμματα θὰ παρθοῦν ἀπὸ τὴν πρώτη λέξη τῆς εἰσόδου, διότι εἶναι κοινὴ ὑπακολουθία ὅλων τῶν λέξεων. Ἐὰν ἡ πρώτη λέξη ἔχη λιγότερα ἀπὸ k γράμματα, τότε προφανῶς ἡ ἀπάντηση εἶναι ὄχι.

αἰτιοκρατικῶν βήματων φαίνεται, ἐὰν τὰ k γράμματα εἶναι κοινὴ ὑπακολουθία ὅλων τῶν λέξεων τῆς εἰσόδου.
Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι $\mathbf{W}[2]$-δύσκολο.

p-Bounded-Ntm-Halt

Καὶ ἐδῶ πάλι, ὅπως στὸ p-Exp-Dtm-Halt, ἡ ἀναιτιοκρατικὴ μηχανὴ Turing $\mathbb{M}$ ἐξομοιώνεται ἀπὸ μία ἄλλη ἀναιτιοκρατικὴ μηχανὴ Turing (καθολική), ἡ ὁποία ἐξομοιώνει κάθε ἄλλη ἀναιτιοκρατικὴ μηχανὴ Turing. Ἡ ἐξομοίωση γίνεται σὲ πολυωνυμικὸ ἀριθμὸ βημάτων ὡς πρὸς τὸν ἀριθμὸ τῶν βημάτων τῆς $\mathbb{M}$, ποὺ πρόκειται νὰ ἐξομοιωθοῦν καὶ ὄχι ὡς πρὸς τὴν εἴσοδο τῆς ἐξομοιουμένης μηχανῆς Turing $\mathbb{M}$ ἢ τὸ μέγεθός της $\|\mathbb{M}\|$.
Παρατήρηση: Ἡ ἐξομοίωση γίνεται βῆμα-βῆμα, πρᾶγμα τὸ ὁποῖο εἶναι πολὺ διαφορετικὸ ἀπὸ τὴν ἐξομοίωση μιᾶς μηχανῆς Turing μέχρι αὐτὴ νὰ τερματίση. Ἡ ἐξομοίωση βῆμα-βῆμα ἀπαιτεῖ σὲ κάθε ἐξομοιούμενο βῆμα τῆς $\mathbb{M}$, νὰ κρατοῦνται διάφορες πληροφορίες, ἐνῶ στὴν δεύτερη περίπτωση, ἀπαραίτητο εἶναι μόνο ἡ γνώση τῆς ἐξομοιουμένης μηχανῆς $\mathbb{M}$.

p-Bounded-Ntm-Halt

Εἴσοδος : Μία ἀναιτιοκρατικὴ μηχανὴ Turing $\mathbb{M}$, ἕνας ἀριθμὸς $n \in \mathbb{N}$ στὸ ἑναδικὸ σύστημα καὶ $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος : $\kappa(\mathbb{M}, n, k) = k$.
Ἐρώτηση : Τερματίζει ἡ $\mathbb{M}$ μὲ εἴσοδο τὴν κενὴ λέξη μετὰ ἀπὸ τὸ πολὺ n βήματα, κάνοντας τὸ πολὺ k ἀναιτιοκρατικὰ βήματα;

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι $\mathbf{W}[P]$-πλῆρες. Ἐπειδὴ τὸ n εἶναι στὸ ἑναδικό, ἔχουμε $|n| = n$, ἐνῶ γιὰ τὸ k ἔχουμε $|k| \approx \log k$. Ἔτσι γιὰ τὰ n βήματα ποὺ θὰ ἐξομοιώσουμε τὴν $\mathbb{M}$, θὰ χρειασθοῦμε $O(p(n))$ βήματα[3] μὲ p πολυώνυμο, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πολὺ $O(k)$ ἀναιτιοκρατικά[4].

p-Κατωφλικο Συνολο Εναρξεως (p-Threshold Starting Set)

Ἔστω ἕνα διατεταγμένο γράφημα D τοῦ ὁποίου οἱ ἀκμὲς εἶναι κατευθυνόμενες. Κατωφλικὸ σύνολο ἐνάρξεως εἶναι κάθε ὑποσύνολο $S \subseteq V(D)$, τέτοιο ὥστε, νὰ ὑπάρχη διατεταγμένο μονοπάτι πρὸς ὁποιαδήποτε κορυφὴ τοῦ $V(D) - S$

[3] Ἐπειδὴ τὸ n εἶναι στὸ ἑναδικό, ἔχουμε $p(n) = p(|n|)$ καὶ $p(|n|) \leq p(\|\mathbb{M}\| + |n| + |k|)$. Ἔτσι ὅσο μεγάλο καὶ ἐὰν εἶναι τὸ n, ἡ ἐξομοίωση γίνεται σὲ πολυωνυμικὸ ἀριθμὸ βημάτων ὡς πρὸς τὴν εἴσοδο, μέρος τῆς ὁποίας εἶναι τὸ n στὸ ἑναδικό.

[4] Ἐπειδὴ τὰ $O(k)$ ἀναιτιοκρατικὰ βήματα, θεωρητικά, θὰ πρέπη νὰ ἔχουν πρόσβαση σὲ ὅλη τὴν εἴσοδο, ἡ συνάρτηση τῶν ἀναιτιοκρατικῶν βημάτων εἶναι ἡ $h(\kappa(\mathbb{M}, n, k)) \cdot \log(\|\mathbb{M}\| + |n| + |k|) \geq h(k) \cdot \log|n| = O(k) \cdot \log n$.

ἀπὸ τὸ S. Οὐσιαστικὰ ψάχνουμε ἕνα ἐλάχιστο σύνολο κορυφῶν, ἀπὸ τὸ ὁποῖο πᾶμε σὲ ὁποιαδήποτε ἄλλη κορυφὴ τοῦ γραφήματος, μὲ κάποιο κατευθυνόμενο μονοπάτι ἀνεξαρτήτως τοῦ μήκους του.

p-Κατωφλικο Συνολο Εναρξεως (p-Threshold Starting Set)
Εἴσοδος : Ἕνα γράφημα D μὲ κατευθυνόμενες ἀκμὲς καὶ $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος : $\kappa(D, k) = k$.
Ἐρώτηση : Ἔχει τὸ D κατωφλικὸ σύνολο ἐνάρξεως μεγέθους $\leq k$;

Ἐὰν ἔχουμε k πεσσούς (πιόνια), μποροῦν νὰ τοποθετηθοῦν σὲ κάποιες k κορυφὲς τοῦ D καὶ ξεκινώντας ἀπὸ αὐτὲς τὶς k κορυφές, ἔτσι ὥστε ὅταν σὲ μία κορυφὴ ὑπάρχη ἤδη πεσσός, βάζοντας ἐπιπλέον πεσσοὺς σὲ κάθε γειτονικὴ κορυφή της πρὸς τὴν ὁποία κατευθύνεται μία ἀκμή, νὰ τοποθετηθοῦν πεσσοὶ σὲ ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ D;
Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι $\mathbf{W}[P]$-πλῆρες.

p-Διαγραφη Γραμμικων Ανισοτητων (p-Linear Inequality Deletion)

Ἔστω ἕνα σύστημα $\mathcal{S}$ γραμμικῶν ἀνισοτήτων μὲ $n_{\mathcal{S}}$ ἀνισότητες καὶ $m_{\mathcal{S}}$ μεταβλητές. Τὸ $\mathcal{S}$ γιὰ εὐκολία θὰ ἔχη ἀκεραίους συντελεστές, ἀφοῦ ὁποιοδήποτε σύστημα ἀνισοτήτων μὲ ρητοὺς συντελεστὲς ἀνάγεται σὲ ἕνα μὲ ἀκεραίους. Ποιὸς εἶναι ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς ἀνισοτήτων ποὺ πρέπει νὰ διαγραφῆ ἀπὸ τὸ $\mathcal{S}$, ὥστε τὸ νέο σύστημα $\mathcal{S}'$ ποὺ θὰ προκύψη νὰ ἔχη λύση;
Παρατήρηση: Ἐὰν τὸ $\mathcal{S}$ ἔχη λύση, ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς ἀνισοτήτων πρὸς διαγραφὴ εἶναι μηδέν.
Σὲ παραμετροποιημένη μορφὴ γίνεται:

p-Διαγραφη Γραμμικων Ανισοτητων (p-Linear Inequality Deletion)
Εἴσοδος : Ἕνα σύστημα $\mathcal{S}$ γραμμικῶν ἀνισοτήτων καὶ $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος : $\kappa(\mathcal{S}, k) = k$.
Ἐρώτηση : Εἶναι δυνατὸν νὰ διαγραφοῦν τὸ πολὺ k ὁποιεσδήποτε ἀνισότητες τοῦ $\mathcal{S}$, ὥστε τὸ $\mathcal{S}$ νὰ καταστῆ ἐπιλύσιμο;

Προφανῶς σὲ μία k περιορισμένη μηχανὴ Turing, χρειαζόμαστε $k \cdot \log|\mathcal{S}|$ βήματα γιὰ νὰ βροῦμε k ἀνισότητες πρὸς διαγραφή. Μετὰ μὲ αἰτιοκρατικὸ τρόπο ἐπιλύουμε τὸ σύστημα ποὺ προέκυψε.
Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι $\mathbf{W}[P]$-πλῆρες.

5.2.2 Θεωρήματα γιὰ τὴν κλάση $\mathbf{W}[P]$

Εὔκολα ἀπὸ τοὺς ὁρισμοὺς τῶν κλάσεων **FPT**, **para-NP**, **XP** καὶ $\mathbf{W}[P]$ ἔχουμε τὸ ἑπόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 5.4: $\mathbf{FPT} \subseteq \mathbf{W}[P] \subseteq$ **para-NP**, $\mathbf{W}[P] \subseteq \mathbf{XP}$ ἑπομένως $\mathbf{W}[P] \subseteq$ **para-NP** $\cap$ **XP**

Ἀπόδειξη: Γιὰ τὴν δεύτερη σχέση $\mathbf{W}[P] \subseteq \mathbf{XP}$. Τὰ $h(\kappa(x)) \cdot \log n$ ἀναιτιοκρατικὰ βήματα ἐξομοιώνονται ἀπὸ $2^{O(h(\kappa(x))\cdot\log n)} = n^{O(h(\kappa(x)))}$ αἰτιοκρατικὰ βήματα. ⊣

Πρόταση 5.8: Τὸ p-Bounded-Ntm-Halt εἶναι $\mathbf{W}[P]$-πλῆρες.

Ἀπόδειξη: Ἔστω $(C', \kappa') \in \mathbf{W}[P]$. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ μὲ εἴσοδο x', λύεται ἀπὸ τὴν ἀναιτιοκρατικὴ μηχανὴ Turing $\mathbb{A}$ σὲ $f'(\kappa'(x')) \cdot p'(|x'|)$ βήματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πολὺ $h'(\kappa'(x')) \cdot \lceil \log |x'| \rceil$ εἶναι ἀναιτιοκρατικά. Θέτουμε στὴν εἴσοδο τοῦ p-Bounded-Ntm-Halt, $\mathbb{M} = \mathbb{A}'$ ὅπου ἡ $\mathbb{A}'$ περιέχει μία καθολικὴ μηχανὴ Turing $\mathbb{A}''$, τὴν $\mathbb{A}$ καὶ τὴν εἴσοδό της x' καὶ τὴν ἐξομοιώνει[5] γιὰ $n' = f'(\kappa'(x')) \cdot p'(|x'|)$ βήματα, κάνοντας $p_{\mathbb{A}'}(n') = O(n')$ βήματα[6] μὲ $p_{\mathbb{A}'}$ πολυώνυμο βαθμοῦ 1, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πολὺ $O(k')$ ἀναιτιοκρατικὰ[7] μὲ $k' = h'(\kappa'(x')) \cdot \lceil \log |x'| \rceil$. Ἡ $\mathbb{A}'$, ἐὰν ἡ ἔξοδος τῆς ἐξομοιουμένης $\mathbb{A}$ εἶναι ΝΑΙ, τότε τερματίζει, ἀλλιῶς ὄχι. Τὸ p-Bounded-Ntm-Halt θὰ ἐξομοιώση τὴν $\mathbb{A}'$ γιὰ $n = O(n') = O(f'(\kappa'(x')) \cdot p'(|x'|))$ βήματα ἐκ τῶν ὁποίων $k = O(k') = O(h'(\kappa'(x')) \cdot \lceil \log |x'| \rceil)$ ἀναιτιοκρατικά. Τὸ μέγεθος τῆς $\mathbb{A}'$ εἶναι $O(\|\mathbb{A}\| + |x'|)$ διότι $\|\mathbb{A}'\| = \|\mathbb{A}\| + |x'| + m, m \in \mathbb{N}$, μὲ m σταθερὸ[8] γι' αὐτὴν

---

[5] Ἡ $\mathbb{A}$, ἐξ ὑποθέσεως, πάντα τερματίζει, διότι τὸ πρόβλημα ποὺ ἐπιλύει, ἀνήκει στὴν κλάση $\mathbf{W}[P]$. Ἡ ἐξομοίωση τῆς $\mathbb{A}$ ἀπὸ τὴν καθολικὴ μηχανὴ Turing $\mathbb{A}''$ τῆς $\mathbb{A}'$, δὲν γίνεται βῆμα-βῆμα, ἀλλὰ ἡ $\mathbb{A}''$ περιμένει νὰ τελειώση ἡ $\mathbb{A}$ καὶ ἀναλόγως τοῦ τί θὰ βρῆ στὴν ἔξοδο τῆς $\mathbb{A}$, ἀποστέλλει στὴν $\mathbb{A}'$ γιὰ νὰ κάνη τὸ ἑπόμενό της βῆμα. Εἶναι σημαντικὸ νὰ κατανοηθῆ, ὅτι ὁ τρόπος ἐξομοιώσεως τῆς $\mathbb{A}$ εἶναι μέρος τῆς ἀποδείξεως τῆς πληρότητας τοῦ p-Bounded-Ntm-Halt. Συνεπῶς αὐτὴ ἡ fpt-ἀναγωγὴ ἰσχύει ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν ἡ $\mathbb{A}$ ἀνήκη στὴν κλάση $\mathbf{W}[P]$.

[6] Τὸ $p_{\mathbb{A}'}$ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ὑλοποίηση, λόγω τοῦ τρόπου κατασκευῆς τῆς $\mathbb{A}'$ ἐπιτυγχάνεται ἡ καλύτερη περίπτωση σὲ χρόνο $O(n')$. Ἐδῶ ἐξομοιώνονται οἱ κλασσικὲς μηχανὲς Turing μὲ μία ταινία, ἀπὸ κλασσικὲς μηχανὲς Turing μὲ μία ταινία. Γιὰ ἄλλα ὑπολογιστικὰ μοντέλα π.χ. μηχανὲς Turing μὲ πολλὲς ταινίες, πρέπει νὰ ἐξομοιωθοῦν πρῶτα ἀπὸ μία κλασσικὴ μηχανὴ Turing μὲ μία ταινία, ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦν τὸν ὁρισμὸ καὶ μετὰ νὰ τὰ λύση τὸ p-Bounded-Ntm-Halt.

[7] Ὁ ἀριθμὸς τῶν αἰτιοκρατικῶν καὶ ἀναιτιοκρατικῶν βημάτων προκύπτει εὔκολα, διότι ἡ $\mathbb{A}''$ εἶναι καθολικὴ μηχανὴ Turing καὶ ἐξομοιώνει χωρὶς περιορισμούς.

[8] Γιὰ τυπικοὺς λόγους καὶ ὄχι οὐσιαστικούς, θὰ μποροῦσε ἡ $\mathbb{A}'$ νὰ εἶναι ὡς ἑξῆς: Κατασκευάζεται μία σταθερὴ μηχανὴ Turing $\mathbb{T}$, μὲ δύο καταστάσεις t_1, t_2 καὶ μεταβάσεις $t_1 \to t_2$

τὴν fpt-ἀναγωγή.
Χρειάζεται χρόνος $\|\mathbb{A}\| + |x'|$ γιὰ τὴν ἀντιγραφὴ τῶν $\mathbb{A}$ καὶ x' κατὰ τὴν κατασκευὴ τῆς $\mathbb{A}'$. Χρειάζεται χρόνος $p_{\kappa'}(|x'|)$ γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ $k'' = \kappa'(x')$ μὲ $p_{\kappa'}$ πολυώνυμο, μετὰ χρειάζεται χρόνος $h_{f'}(|k''|) \leq h_{f'}(\kappa'(x'))$ [9] μὲ $h_{f'}$ ὑπολογίσιμη, γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ $f'(k'') = f'(\kappa'(x'))$. Γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ γινομένου $n' = f'(\kappa'(x')) \cdot p'(|x'|)$, γίνεται ἡ μετατροπὴ τοῦ $f'(k'')$ στὸ ἑναδικὸ σὲ χρόνο τὸ πολὺ $2^{O(|f'(k'')|)} \leq f'(k'')^{O(1)}$ [10]. Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ $p'(|x'|)$ γίνεται σὲ χρόνο $p_{p'}(|x'|)$ μὲ $p_{p'}$ πολυώνυμο καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ σὲ χρόνο $p''\left(|x'|, f'(k'')^{O(1)}\right)$ [11] μὲ p'' πολυώνυμο[12]. Παρομοίως γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ $h'(\kappa'(x'))$ χρειάζεται χρόνος $h_{h'}(|k''|) \leq h_{h'}(\kappa'(x'))$ μὲ $h_{h'}$ ὑπολογίσιμη.
Τὸ $O(n')$, στὸ ἑναδικό, ἀντιγράφεται σὲ χρόνο $p''\left(|x'|, f'(k'')^{O(1)}\right)$ στὴν εἴσοδο τοῦ p-Bounded-Ntm-Halt, παρομοίως καὶ τὸ $O(h'(\kappa'(x')))$ [13], ποὺ δὲν εἶναι στὸ ἑναδικό. Ἔχοντας θέσει στὴν εἴσοδο τοῦ p-Bounded-Ntm-Halt $\mathbb{M} = \mathbb{A}'$, $n = O(n')$ καὶ $k = O(h'(\kappa'(x')))$, λύουμε τὸ πρόβλημα. Ἡ παράμετρος κ τοῦ p-Bounded-Ntm-Halt προφανῶς φράσσεται ἀπὸ τὴν $O(h'(\kappa'(x')))$. Ἄρα ἡ ἀναγωγὴ εἶναι fpt.
Ἐὰν ἡ $\mathbb{A}$ ἔχη ἔξοδο ΝΑΙ, τότε ἡ $\mathbb{A}'$ τερματίζει ἐντὸς n βημάτων. Τὸ p-Bounded-Ntm-Halt ἀναγνωρίζει ὅτι τερμάτισε ἡ $\mathbb{A}'$ ἐντὸς n βημάτων καὶ ὡς ἔξοδο δίνει ΝΑΙ. Ἐὰν ἡ $\mathbb{A}$ ἔχη ἔξοδο ΟΧΙ, τότε ἡ $\mathbb{A}'$ δὲν τερματίζει ἐντὸς n βημάτων. Τὸ p-Bounded-Ntm-Halt ἀναγνωρίζει ὅτι δὲν τερμάτισε ἡ $\mathbb{A}'$ ἐντὸς n βημάτων καὶ ὡς ἔξοδο δίνει ΟΧΙ.
Τὰ ἀναιτιοκρατικὰ βήματα τοῦ p-Bounded-Ntm-Halt εἶναι $k \cdot \lceil \log x \rceil$, ὅπου $x = (\mathbb{A}', n, k)$ ἡ εἴσοδός του. Ὁ παράγοντας $\lceil \log x \rceil$ δίνει τὴν δυνατότητα στὸ p-Bounded-Ntm-Halt νὰ κάνη τὰ ἴδια ἢ περισσότερα ἀναιτιοκρατικὰ βήματα

καὶ $t_2 \to t_1$, ἔτσι δημιουργεῖται ἕνας ἀτέρμων βρόχος. Ἡ καθολικὴ μηχανὴ Turing $\mathbb{A}''$ ἐξομοιώνει τὴν $\mathbb{A}$ μὲ εἴσοδο x', ἐὰν ἡ $\mathbb{A}$ δώση στὴν ἔξοδο ΝΑΙ, ἡ $\mathbb{A}'$ τερματίζει, ἀλλιῶς ἐξομοιώνει τὴν $\mathbb{T}$. Τὸ p-Bounded-Ntm-Halt ἐξομοιώνει τὴν $\mathbb{A}'$ γιὰ n βήματα. Τὸ m εἶναι τὸ μῆκος τῶν $\mathbb{A}'', \mathbb{T}$ καὶ τῶν λοιπῶν ἐντολῶν τῆς $\mathbb{A}'$, ποὺ εἶναι ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὴν $\mathbb{A}$ καὶ τὴν εἴσοδό της.

[9] Σὲ ὅποιο σύστημα καὶ νὰ γράφεται τὸ k'' π.χ. ἑναδικό, δυαδικό, δεκαδικό, προφανῶς $|k''| \leq k'' = \kappa'(x')$.

[10] Ἡ μετατροπὴ ἑνὸς ἀριθμοῦ m ἀπὸ τὸ δυαδικὸ στὸ ἑναδικό, γίνεται σὲ χρόνο $O\left(|m| \cdot 2^{|m|}\right)$ ἀπὸ τὸ δεκαδικὸ στὸ ἑναδικό σὲ χρόνο $O\left(|m| \cdot 10^{|m|}\right) = O\left(|m| \cdot 2^{\log_2 10 \cdot |m|}\right)$ καὶ γενικότερα, $|m| \cdot 2^{O(|m|)} = |m| \cdot m^{O(1)} = m^{O(1)}$. Γι' αὐτό, γίνεται καὶ ἡ χρήση τοῦ O στὸν ἐκθέτη.

[11] Ἐδῶ τὸ ὑπολογίσιμο κομμάτι δίνει τὴν δυνατότητα νὰ «τεντωθῆ» ὁ χρόνος ὅσο μᾶς χρειάζεται. Ἔτσι τοποθετεῖται τὸ $f'(k'')$, ποὺ εἶναι στὸ ἑναδικό, $p'(|x'|)$ φορὲς δίπλα δίπλα καὶ τὸ $|x'|$ δὲν ἀνεβαίνει στὸν ἐκθέτη.

[12] Ἀπὸ προηγουμένη ὑποσημείωση συνάγεται ὅτι ὁ χρόνος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, θὰ μποροῦσε νὰ εἶναι $p''\left(|x'|, f'(k'')^{O(1)}\right) = p'(|x'|) \cdot f'(k'')^{O(1)}$.

[13] Δὲν ἀντιγράφεται τὸ $O(k')$, διότι περιέχει τὸν παράγοντα $\lceil \log |x'| \rceil$ καὶ τὸ k δὲν θὰ ἐφράσσετο ἀπὸ μία ὑπολογίσιμη συνάρτηση μόνο τοῦ $\kappa'(x')$.

ἀπὸ τὴν $\mathbb{A}'$, ἡ ὁποία ἐξομοιώνει πλήρως τὴν $\mathbb{A}$. Ἄρα τὸ p-BOUNDED-NTM-HALT εἶναι $\mathbf{W}[P]$-δύσκολο.
Τὸ p-BOUNDED-NTM-HALT ἀνήκει στὴν κλάση $\mathbf{W}[P]$, διότι τὰ n βήματα ἐξομοιώνονται σὲ πολυωνυμικὸ χρόνο $p(n) = p(|n|)$ [14] μὲ p πολυώνυμο, θέτοντας $f(\kappa(\mathbb{M}, n, k)) = 1$ καὶ $h(\kappa(\mathbb{M}, n, k)) = \kappa(\mathbb{M}, n, k)$ [15], τὸ p-BOUNDED-NTM-HALT τερματίζει ἐντὸς $p(n) \leq f(\kappa(\mathbb{M}, n, k)) \cdot p(\|\mathbb{M}\| + |n| + |k|)$ βημάτων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πολὺ $k = \kappa(\mathbb{M}, n, k) \leq h(\kappa(\mathbb{M}, n, k)) \cdot \lceil \log(\|\mathbb{M}\| + |n| + |k|) \rceil$ εἶναι ἀναιτιοκρατικά. $\dashv$

5.3 Ἡ κλάση $\mathbf{W}[SAT]$

Ἂν καὶ στὴν κλασσικὴ πολυπλοκότητα ἡ κλάση ὅλων τῶν κυκλωμάτων εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν κλάση ὅλων τῶν προτασιακῶν τύπων ὡς πρὸς ἀναγωγὲς κατὰ Cook, στὴν παραμετρικὴ πολυπλοκότητα δὲν συμβαίνει τὸ ἴδιο μὲ τὶς fpt-ἀναγωγές. Εἶναι εὔκολο στὴν κλασσικὴ πολυπλοκότητα, ὅταν ἔχουμε ἕνα προτασιακὸ τύπο νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἀντίστοιχο κύκλωμα, ἀλλὰ τὸ ἀντίστροφο ὄχι, ὅπως θὰ δοῦμε παρακάτω αὐτὸ μεταφέρεται αὐτούσιο στὴν παραμετρικὴ πολυπλοκότητα.

Τὸ πρόβλημα p-WSAT(PROP)

Ἂς ὁρίσουμε τὸ βασικὸ πρόβλημα p-WSAT(PROP). Μὲ PROP συμβολίζουμε τὸ σύνολο ὅλων τῶν προτασιακῶν τύπων.

Ὁρισμός 5.20: *k-ἱκανοποιήσιμος προτασιακὸς τύπος.* Ἕνας τύπος εἶναι k-ἱκανοποιήσιμος, ἐὰν γιὰ νὰ πάρῃ τὴν λογικὴ τιμὴ $TRUE$ χρειάζεται ἀκριβῶς k λογικὲς μεταβλητὲς ἀπὸ τὶς n, νὰ ἔχουν τὴν τιμὴ $TRUE$ καὶ οἱ ὑπόλοιπες $n-k$ τὴν τιμὴ $FALSE$, ἔτσι ὁρίζεται ὅτι τὸ βάρος τῶν n λογικῶν μεταβλητῶν εἶναι k.

p-WSAT(PROP)

Εἴσοδος : Ἕνας προτασιακὸς τύπος P καὶ $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος : $\kappa(P, k) = k$.
Ἐρώτηση : Εἶναι ὁ P k-ἱκανοποιήσιμος;

Τὸ p-WSAT($\cdot$) ἐκτὸς ἀπὸ τὸ PROP, δέχεται καὶ ἄλλα ὑποσύνολα τοῦ PROP ἢ σύνολα κυκλωμάτων. Ἀναλόγως μὲ τὸ σύνολο, ἡ δυσκολία τοῦ προβλήματος

[14] Τὸ n εἶναι στὸ ἑναδικὸ σύστημα, ἄρα $n = |n|$.
[15] Ἡ f εἶναι σταθερὴ συνάρτηση μὲ $f(x) = 1$ καὶ ἡ h ἡ ταυτοτικὴ συνάρτηση μὲ $h(x) = x$.

ποικίλλει, γι'αὐτὸ ὁρίζονται, ὅπως ϑὰ δοῦμε παρακάτω, μία ποικιλία προβλημάτων, ἁπλὰ ἀλλάζοντας τὸ σύνολο ἀπὸ ὅπου λαμβάνεται ἡ εἴσοδος (προτασιακὸς τύπος ἢ κύκλωμα) τοῦ p-WSAT(·). Ἔτσι ἀναλόγως τοῦ συνόλου S, τὸ p-WSAT(S) κατατάσσεται κάθε φορὰ καὶ σὲ ἄλλη κλάση.
Ἕνα ἀκόμη πολὺ βασικὸ σημεῖο εἶναι, ὅτι ἀκριβῶς k μεταβλητὲς πρέπει νὰ ἔχουν τιμὴ $TRUE$ καὶ ὅλες οἱ ὑπόλοιπες τιμὴ $FALSE$, χωρὶς αὐτὸ πολλὰ προβλήματα ϑὰ ἄλλαζαν κλάση.

5.3.1 Ὁρισμὸς τῆς W[SAT] βάσει τοῦ p-WSAT(PROP)

Ὁρισμός 5.21: *Ἡ κλάση* **W**[SAT]. Ὁρίζουμε

$$\mathbf{W}\,[SAT] = [\text{p-WSAT(PROP)}]^{fpt}$$

Παρατηροῦμε ὅπως σχολιάσαμε προηγουμένως, ὅτι p-WSAT(PROP) $\leq^{fpt}$ p-WSAT(CIRC), διότι ἐὰν ἔχουμε ἕναν προτασιακὸ τύπο P εἶναι εὔκολο νὰ κατασκευασϑῆ ἕνα κύκλωμα $\mathcal{C}_P$ καὶ ἐπιπλέον νὰ διατηρῆται ἡ παράμετρος τοῦ βάρους ἴδια καὶ γιὰ τὸν προτασιακὸ τύπο P καὶ γιὰ τὸ κύκλωμα $\mathcal{C}_P$, ἄρα ὑπάρχει fpt-ἀλγόριϑμος, ἀλλὰ γιὰ τὸ ἀντίϑετο, δὲν ἔχει βρεϑῆ μέχρι τώρα fpt-ἀλγόριϑμος ποὺ νὰ τὸ κάνη. Ἔτσι συμπεραίνεται ὅτι $\mathbf{W}\,[SAT] \subseteq \mathbf{W}\,[P]$.

5.3.2 W[SAT]-πλήρη προβλήματα

Ἐδῶ, ἐκτὸς ἀπὸ τὸ p-WSAT(PROP), δὲν ὑπάρχουν ἄλλα γνωστὰ πλήρη παραμετρικὰ προβλήματα, διότι ὁ ὁρισμὸς αὐτῆς τῆς κλάσεως, οὐσιαστικὰ περιλαμβάνει ὅλα τὰ προβλήματα ἱκανοποιήσεως προτασιακῶν τύπων καὶ εἶναι τεχνικὸς σὲ μεγάλο βαϑμό. Ἔτσι εἶναι πολὺ δύσκολο, νὰ βρεϑοῦν προβλήματα τὰ ὁποῖα νὰ εἶναι ἰσοδύναμα κάτω ἀπὸ fpt-ἀναγωγὲς μὲ τὸ p-WSAT(PROP). Ἂς δοῦμε ἕνα πλῆρες πρόβλημα γιὰ αὐτὴν τὴν κλάση, παρόμοιο μὲ τὸ p-WSAT(PROP).
Ἔστω Φ ἕνα σύνολο πρωτοβαϑμίων τύπων καὶ $\mathcal{D}$ μία δομὴ ἑρμηνείας τῶν πρωτοβαϑμίων τύπων τοῦ Φ. Διαισϑητικά, ἀντὶ οἱ μεταβλητὲς ἑνὸς πρωτοβαϑμίου τύπου νὰ λαμβάνουν τιμὴ $TRUE, FALSE$, λαμβάνουν τιμὲς ἀπὸ τὴν δομὴ $\mathcal{D}$ καὶ τὰ διάφορα μὴ λογικὰ σύμβολα τοῦ τύπου ἔχουν ἀντίστοιχα σύμβολα στὴν δομὴ $\mathcal{D}$ π.χ. γιὰ σύνολα τὸ ἀνήκειν $\in$, γιὰ συστήματα ἀριϑμητικῆς Peano τὰ 0, ἑπόμενος $'$, σὺν $+$, ἐπὶ $\cdot$ κ.λπ. Ἔστω φ πρωτοβάϑμιος τύπος τοῦ συνόλου Φ, ἱκανοποιεῖται ὁ φ στὴν δομὴ $\mathcal{D}$;

p-VAR-MC(Φ)
Εἴσοδος : Ἔστω $\mathcal{D}$ δομὴ καὶ $\varphi \in \Phi$.
Παράμετρος : $\kappa(\mathcal{D}, \varphi) = k$ ἀριθμὸς μεταβλητῶν τῆς φ.
Ἐρώτηση : Ἱκανοποιεῖται ὁ φ στὴν δομὴ $\mathcal{D}$, $\varphi(\mathcal{D}) \neq \emptyset$;

Ἐὰν γιὰ σύνολο πρωτοβαθμίων τύπων πάρουμε τὸ Σ_1, τὸ γνωστὸ σύνολο τύπων τῆς ἀριθμητικῆς ἱεραρχίας, τότε ἔχουμε τὸ πρόβλημα p-VAR-MC(Σ_1). Τὸ p-VAR-MC(Σ_1) εἶναι $\mathbf{W}[SAT]$-πλῆρες. Ἡ παραμετροποίηση εἶναι βασικὸς λόγος ποὺ αὐτὸ τὸ πρόβλημα εἶναι $\mathbf{W}[SAT]$-πλῆρες, ὅπως θὰ δοῦμε γιὰ ἄλλη παραμετροποίηση αὐτὸ μπορεῖ νὰ μὴν ἰσχύη.

5.3.3 Θεωρήματα γιὰ τὴν κλάση $\mathbf{W}[SAT]$

Πόρισμα 5.5: $\mathbf{W}[SAT] \subseteq \mathbf{W}[P]$

Ἀπόδειξη: p-WSAT(PROP) $\leq^{fpt}$ p-WSAT(CIRC). Θὰ γίνη μία σκιαγράφηση τῆς ἀναγωγῆς, καθῶς ἡ ἀναγωγὴ αὐτὴ προέρχεται ἀπὸ τὴν κλασσικὴ πολυπλοκότητα. Γιὰ τὸν προτασιακὸ τύπο[16], γίνεται μία πύλη ἐξόδου στὸ κύκλωμα, μὲ εἰσόδους ὅσους ὅρους ἔχει ὁ προτασιακὸς τύπος. Ἀναδρομικά, γιὰ κάθε ὅρο τοῦ προτασιακοῦ τύπου γίνεται ὅτι καὶ γιὰ τὸν προτασιακὸ τύπο, ἐφόσον κάθε ὅρος εἶναι αὐτοτελῶς προτασιακὸς τύπος. Ἐὰν ὁ ὅρος εἶναι μία μεταβλητή, τότε θεωρεῖται ὡς εἴσοδος τοῦ κυκλώματος. Ἀπὸ τὴν προηγουμένη ἀναγωγή, γίνεται προφανὲς ὅτι καὶ τὸ κύκλωμα εἶναι k-ἱκανοποιήσιμο ὅπως καὶ ὁ προτασιακὸς τύπος. $\dashv$

Ἡ ἀντίστροφη ἀναγωγὴ p-WSAT(CIRC) $\leq^{fpt}$ p-WSAT(PROP) δὲν εἶναι γνωστὸ ἐὰν ὑπάρχη[17]. Ἡ ἀντίστοιχη κατὰ Cook-ἀναγωγὴ στὴν κλασσικὴ πολυπλοκότητα, δὲν διατηρεῖ τὴν παράμετρο, διότι σὲ κάθε πύλη τοῦ κυκλώματος ἀντιστοιχεῖ καὶ μία νέα προτασιακὴ μεταβλητή[18]. Συνεπῶς, ἂν καὶ οἱ προτασιακοὶ τύποι εἶναι ἰσοδύναμοι μὲ τὰ κυκλώματα στὴν κλασσικὴ πολυπλοκότητα, στὴν παραμετρικὴ πολυπλοκότητα δὲν ἔχει δειχθῆ τίποτε ἀκόμη.

[16] Θεωρεῖται ὅτι οἱ προτασιακοὶ τύποι περιέχουν μόνο τὰ σύμβολα $\neg$, $\wedge$ καὶ $\vee$. Συνεπῶς στὸ κύκλωμα ὑπάρχουν πύλες ἀρνήσεως, συζευκτικὲς καὶ διαζευκτικές.

[17] Ἡ ἀναγωγὴ αὐτή, ἐὰν γίνη μὲ τρόπο παρόμοιο μὲ αὐτὸν τοῦ προηγουμένου πορίσματος, δηλαδὴ ὅτι ἐγένετο γιὰ τοὺς τύπους, νὰ γίνεται τώρα γιὰ τὶς πύλες τοῦ κυκλώματος, μπορεῖ νὰ δημιουργήση προτασιακοὺς τύπους ἐκθετικοῦ μεγέθους ὡς πρὸς τὸ μέγεθος τοῦ κυκλώματος.

[18] Ἔτσι τὸ μέγεθος τοῦ προτασιακοῦ τύπου διατηρεῖται τὸ πολὺ πολυωνυμικὰ μεγαλύτερο ὡς πρὸς τὸ μέγεθος τοῦ κυκλώματος.

5.4 Ἡ ἱεραρχία $\mathbf{W}[t]$

Ἐδῶ θὰ ὁρίσουμε πρῶτα κάποια συγκεκριμένα ὑποσύνολα τοῦ PROP καὶ βάσει αὐτῶν θὰ ὁρισθῆ ἡ παραπάνω ἱεραρχία. Δυστυχῶς καὶ σὲ αὐτὰ τὰ ὑποσύνολα ἰσχύουν οἱ ἴδιες περίπου δυσκολίες μεταφορᾶς τῆς παραμέτρου, διότι στὴν κλασσικὴ πολυπλοκότητα οἱ ἀναγωγὲς εἶναι περίπλοκες καὶ δὲν διατηρεῖται ἡ παράμετρος καὶ αὐτὸ μεταβιβάζεται καὶ στὴν παραμετρικὴ πολυπλοκότητα.
Γιὰ τὴν ἱεραρχία $\mathbf{W}[t]$ μὲ $t \geq 1$ θὰ χρειασθοῦμε μερικοὺς ὁρισμοὺς πρῶτα. Ὑπενθυμίζεται ὅτι ἐὰν ἡ x εἶναι λογικὴ μεταβλητή, τότε ἡ x καὶ ἡ $\neg x$ λέγονται ἐγγράμματα.

Ὁρισμός 5.22: *Σύνολο συζευκτικῶν* $\Gamma_{0,d}$ *καὶ σύνολο διαζευκτικῶν* $\Delta_{0,d}$ *προτασιακῶν ὅρων* γιὰ $t = 0$ (βάση τοῦ ἀναδρομικοῦ ὁρισμοῦ). Γιὰ κάθε $d \geq 1$ μὲ $d \in \mathbb{N}$ ἔχουμε:

1. $\Gamma_{0,d} = \{\lambda_1 \wedge \lambda_2 \wedge \ldots \wedge \lambda_c \mid 1 \leq c \leq d$ καὶ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_c$ ἐγγράμματα$\}$.
2. $\Delta_{0,d} = \{\lambda_1 \vee \lambda_2 \vee \ldots \vee \lambda_c \mid 1 \leq c \leq d$ καὶ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_c$ ἐγγράμματα$\}$.

Παρατήρηση: Προφανῶς $\Gamma_{0,d} \subset \Gamma_{0,d+1}$, $\Delta_{0,d} \subset \Delta_{0,d+1}$ καὶ $\Gamma_{0,1} \subset \Delta_{0,d}$.

Ὁρισμός 5.23: *Σύνολο συζευκτικῶν* $\Gamma_{t+1,d}$ *καὶ σύνολο διαζευκτικῶν* $\Delta_{t+1,d}$ *προτασιακῶν τύπων* γιὰ $t \geq 0$ μὲ $t \in \mathbb{N}$ (κύριο σῶμα τοῦ ἀναδρομικοῦ ὁρισμοῦ). Τὸ $I \neq \emptyset$ εἶναι ἕνα πεπερασμένο μὴ κενὸ σύνολο δεικτῶν, ἄρα εἶναι 1 - 1 καὶ ἐπὶ μὲ τὸ $\{1, 2, \ldots, |I|\} \subset \mathbb{N}$. Γιὰ κάθε $t \geq 0$ ἔχουμε:

1. $\Gamma_{t+1,d} = \left\{\bigwedge_{i \in I} \delta_i \mid \text{ γιὰ κάθε } I \text{ μὲ } |I| \leq d \text{ καὶ } \forall i \in I, \delta_i \in \Delta_{t,d}\right\}$.
2. $\Delta_{t+1,d} = \left\{\bigvee_{i \in I} \gamma_i \mid \text{ γιὰ κάθε } I \text{ μὲ } |I| \leq d \text{ καὶ } \forall i \in I, \gamma_i \in \Gamma_{t,d}\right\}$.

Παρατήρηση: $\Gamma_{t,d} \subset \Delta_{t+1,d}$, $\Gamma_{t+1,d} \subset \Gamma_{t+1,d+1}$, $\Delta_{t+1,d} \subset \Delta_{t+1,d+1}$
καὶ $\Delta_{t,d} \subset \Gamma_{t+1,d}$.

5.4.1 Τὸ σύνολο προβλημάτων p-WSAT($\Gamma_{t,d}$)

Ἄς ὁρίσουμε τὸ βασικὸ πρόβλημα p-WSAT($\Gamma_{t,d}$) γιὰ κάθε $t \in \mathbb{N}$, καὶ $d \geq 1$.

p-WSAT($\Gamma_{t,d}$)
Εἴσοδος : Ἕνας προτασιακὸς τύπος $P \in \Gamma_{t,d}$ καὶ $k \in \mathbb{N}$. *Παράμετρος :* $\kappa(P, k) = k$. *Ἐρώτηση :* Εἶναι ὁ P k-ἱκανοποιήσιμος;

5.4.2 Ὁρισμὸς τῶν $\mathbf{W}[t]$ βάσει τοῦ p-WSAT($\Gamma_{t,d}$)

Ὁρισμός 5.24: *Ἡ ἱεραρχία* $\mathbf{W}[t]$ μὲ $t \geq 1$. Γιὰ κάθε $t \geq 1$ ὁρίζουμε τὴν κλάση $\mathbf{W}[t] = [\{\text{p-WSAT}(\Gamma_{t,d}) \mid d \geq 1\}]^{fpt}$

Ἀπὸ τὸν τρόπο ποὺ ὁρίσθηκαν τὰ σύνολα $\Gamma_{t,d}$ μὲ $t \geq 0, d \geq 1$, ἀντιστοιχοῦν καὶ σὲ σύνολα μὲ ἀντίστοιχα κυκλώματα, ἀφοῦ γιὰ κάθε προτασιακὸ τύπο $\mathcal{P}$ μέσω fpt-ἀναγωγῶν, ἔχουμε καὶ ἕνα ἀντίστοιχο κύκλωμα $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$. Ἔτσι γιὰ κάθε ὅρο τοῦ τύπου $\mathcal{P} \in \Gamma_{t,d}$, ἔχουμε στὸ κύκλωμα μία πύλη (θύρα) μὲ d τὸ πολὺ εἰσόδους, ἄρα περισσότερες ἀπὸ 2 εἰσόδους, ἂς ποῦμε λοιπὸν αὐτὲς τὶς πύλες μεγάλες καὶ ὅσες πύλες ἔχουν τὸ πολὺ 2 εἰσόδους μικρές.

Ὁρισμός 5.25: *Βάθος ἑνὸς κυκλώματος* $\mathcal{C}$, καλοῦμε τὴν μέγιστη ἀπόσταση μεταξὺ μιᾶς εἰσόδου του καὶ τῆς ἐξόδου του.

Ὁρισμός 5.26: *Weft ἑνὸς κυκλώματος* $\mathcal{C}$, καλοῦμε τὸν μέγιστο ἀριθμὸ μεγάλων πυλῶν (θυρῶν) σὲ ἕνα μονοπάτι μεταξὺ μιᾶς εἰσόδου του καὶ τῆς ἐξόδου του.

Προφανῶς Βάθος($\mathcal{C}$) $\geq$ Weft($\mathcal{C}$). Ἔτσι ὁρίζουμε τὰ ἑξῆς σύνολα κυκλωμάτων:

Ὁρισμός 5.27: *Σύνολο κυκλωμάτων* $C_{t,d}$ μὲ βάθος d καὶ Weft t ὅπου $d \geq t \geq 0$ μὲ $d, t \in \mathbb{N}$:

$$C_{t,d} = \{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ κύκλωμα μὲ βάθος } \leq d \text{ καὶ Weft } \leq t\}$$

Παρατήρηση: Σχετικὰ εὔκολα ἀποδεικνύεται μὲ τὴν γνωστὴ fpt-ἀναγωγὴ τοῦ πορίσματος 5.5, ὅτι $\Gamma_{t,d} \cup \Delta_{t,d} \subseteq C_{t,t+d}$.
Ἔτσι γιὰ κάθε $t \geq 0$ ἔχουμε τὸ πρόβλημα p-WSAT($C_{t,d}$) μὲ $d \geq t$. Γιὰ κάθε t ἔχουμε ἕνα σύνολο προβλημάτων τὸ $\{\text{p-WSAT}(C_{t,d}) \mid d \geq t\}$ καὶ ἐναλλακτικὰ ὁρίζουμε:

Ὁρισμός 5.28: *Ἡ ἱεραρχία* $\mathbf{W}[t]$ μὲ $t \geq 1$. Γιὰ κάθε $t \geq 1$ ὁρίζουμε τὴν κλάση $\mathbf{W}[t] = [\{\text{p-WSAT}(C_{t,d}) \mid d \geq t\}]^{fpt}$

Οἱ δύο προηγούμενοι ὁρισμοὶ γιὰ τὴν ἱεραρχία $\mathbf{W}[t]$ εἶναι ἰσοδύναμοι. Λόγω τοῦ τρόπου κατασκευῆς τῶν κυκλωμάτων τῶν συνόλων $C_{t,d}$, εἶναι δυνατὸν νὰ βρεθοῦν τὰ ἀντίστοιχα σύνολα Δ_{t+1,d_1} μὲ $d \leq d_1$ καὶ Γ_{t,d_2} μὲ $d_1 \leq d_2$ πρωτοβαθμίων τύπων μὲ fpt-ἀναγωγές.

5.4.3 Πλήρη προβλήματα γιὰ τὴν ἱεραρχία $\mathbf{W}[t]$

Ἐδῶ ϑὰ μελετηϑοῦν μόνο οἱ δύο πρῶτες κλάσεις $\mathbf{W}[1]$ καὶ $\mathbf{W}[2]$ τῆς ἱεραρχίας, διότι περιλαμβάνονται ἀρκετὰ προβλήματα τῆς κλασσικῆς πολυπλοκότητας σὲ αὐτές. Θὰ χρειασϑῆ ὁ ἑπόμενος ὁρισμός.

Ὁρισμός 5.29: $G[S]$. Μὲ $G[S]$ συμβολίζεται τὸ ἐναγόμενο ὑπογράφημα τοῦ G, τὸ ὁποῖο περιλαμβάνει ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ $S \subseteq V(G)$. Προφανῶς μαζί τους ἀφαιροῦνται καὶ ὅλες οἱ ἀκμὲς τοῦ G, ποὺ περιέχουν τοὐλάχιστον μία κορυφὴ ἀπὸ τὸ $V(G) - S$. Δηλαδή

$$G[S] = (S, \{\{v,u\} \mid S \subseteq V(G) \wedge v,u \in S \wedge \{v,u\} \in E(G)\})$$

$\mathbf{W}[1]$-πλήρη προβλήματα

Τὸ πιὸ ἁπλὸ πλῆρες πρόβλημα στὴν κλάση $\mathbf{W}[1]$ εἶναι τὸ p-WSat($\Gamma_{1,2}$).

Πολλὰ προβλήματα εἶναι $\mathbf{W}[1]$-πλήρη. Τὰ ἤδη γνωστὰ p-Κλικα καὶ p-Ανεξαρτητο Συνολο εἶναι $\mathbf{W}[1]$-πλήρη.

Ἀπὸ τὸ πρόβλημα Μεγιστη Κοινη Υπακολουθια, ἐκτὸς τοῦ p-LCS, μὲ ἄλλη παραμετροποίηση ἔχουμε τὸ p-m-LCS.

p-m-LCS
Εἴσοδος : Ἔστω οἱ λέξεις $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m \in \Sigma^*$ καὶ $k \in \mathbb{N}$. *Παράμετρος :* $\kappa(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m, k) = k + m$. *Ἐρώτηση :* Ὑπάρχει λέξη $\bar{b} \in \Sigma^*$ μήκους k ποὺ νὰ εἶναι κοινὴ ὑπακολουϑία ὅλων τῶν $\bar{a}_i$ μὲ $i = 1, 2, \ldots, m$;

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι $\mathbf{W}[1]$-πλῆρες.

Τὸ ἑπόμενο πρόβλημα εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ p-Ανεξαρτητο Συνολο.

p-Πακεταρισμα Συνολων (p-Set Packing)
Εἴσοδος : Μία πεπερασμένη οἰκογένεια πεπερασμένων συνόλων S_1, $S_2, \ldots, S_r$ καὶ $k \in \mathbb{N}$. *Παράμετρος :* $\kappa(S_1, S_2, \ldots, S_r, k) = k$. *Ἐρώτηση :* Ὑπάρχουν τοὐλάχιστον k σύνολα, ξένα μεταξύ τους, δηλαδὴ ὑπάρχει $I \subseteq \{1, 2, \ldots, r\}$ μὲ $\lvert I \rvert \geq k$ ὥστε $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow S_i \cap S_j = \emptyset$;

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι $\mathbf{W}[1]$-πλῆρες.

Στὸ ἑπόμενο πρόβλημα ἡ $\mathbb{M}$ δὲν ἔχει εἴσοδο. Εἶναι πολὺ εὔκολο ἀπὸ μία μηχανὴ Turing $\mathbb{M}'$ μὲ εἴσοδο x', νὰ δημιουργηθῇ μία ἄλλη $\mathbb{M}$, ἡ ὁποία νὰ ἐξομοιώνη τὴν $\mathbb{M}'$ μὲ τὴν εἴσοδό της x' ἐνσωματωμένη[19], γι' αὐτὸ μερικὲς φορὲς στὴν βιβλιογραφία, τὸ πρόβλημα ἐμφανίζεται λίγο παραλλαγμένο μὲ εἴσοδο x γιὰ τὴν μηχανὴ $\mathbb{M}$.

p-Short-NSTM-Halt
Εἴσοδος : Μία ἀναιτιοκρατικὴ μηχανὴ Turing $\mathbb{M}$ μὲ μία ταινία καὶ $k \in \mathbb{N}$. *Παράμετρος :* $\kappa(\mathbb{M}, k) = k$. *Ἐρώτηση :* Τερματίζει ἡ $\mathbb{M}$ μὲ εἴσοδο τὴν κενὴ λέξη μετὰ ἀπὸ τὸ πολὺ k βήματα;

Ἡ ἐξομοίωση τῶν βημάτων γίνεται σὲ πολυωνυμικὸ χρόνο $p(k)$ μὲ p πολυώνυμο, ὡς πρὸς τὴν παράμετρο k. Ὁ ἀριθμὸς τῶν βημάτων εἶναι ὑπολογίσιμη μὴ πολυωνυμικὴ συνάρτηση $p\left(2^{O(|k|)}\right)$ [20] ὡς πρὸς τὸ μέγεθος $|k|$ τῆς παραμέτρου. Αὐτὸ ὅμως δὲν ἐπηρεάζει τὸ πρόβλημα, διότι τὰ ἐξομοιούμενα βήματα ἐξαρτῶνται ἀποκλειστικὰ ἀπὸ τὴν παράμετρο k, δηλαδὴ τὰ ἐξομοιούμενα βήματα εἶναι $p(\kappa(\mathbb{M}, k))$. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι $\mathbf{W}[1]$-πλῆρες.

$\mathbf{W}[2]$-πλήρη προβλήματα

Παρομοίως καὶ ἐδῶ, στὴν κλάση $\mathbf{W}[2]$, ἕνα ἁπλὸ πλῆρες πρόβλημα εἶναι τὸ p-WSat($\Gamma_{2,1}$).

Ἀρκετὰ προβλήματα εἶναι $\mathbf{W}[2]$-πλήρη. Τὰ ἤδη γνωστὰ p-Σύνολο Κυριαρχίας καὶ p-Σύνολο Αφης εἶναι $\mathbf{W}[2]$-πλήρη.

Ἂς δοῦμε μερικὰ ἀκόμη.
Τὸ ἑπόμενο πρόβλημα εἶναι τεχνικό, ὅπως τὸ p-Short-NSTM-Halt καὶ βασίζεται στὸν ὁρισμὸ τῆς κλάσεως $\mathbf{W}[2]$.

---

[19] Ἡ $\mathbb{M}$ ἐξαρτᾶται ἀπὸ δύο παράγοντες, τὴν $\mathbb{M}'$ καὶ τὴν εἴσοδό της x'. Ἐὰν ἀλλάξη κάτι ἀπὸ αὐτὰ τὰ δύο, δημιουργεῖται κάθε φορὰ ἄλλη $\mathbb{M}$.

[20] Τὸ O στὸν ἐκθέτη χρειάζεται, διότι δὲν εἶναι γνωστὸ σὲ ποιὸ σύστημα εἶναι τὸ k π.χ. δυαδικό, πενταδικό, δεκαδικὸ κ.λπ.

p-Short-NTM-Halt
Εἴσοδος : Μία ἀναιτιοκρατική μηχανή Turing $\mathbb{M}$ μὲ μία ἢ περισσότερες ταινίες $t \geq 1$, καὶ $k \in \mathbb{N}$. *Παράμετρος :* $\kappa\,(\mathbb{M}, k) = k$. *Ἐρώτηση :* Τερματίζει ἡ $\mathbb{M}$ μὲ εἴσοδο τὴν κενὴ λέξη μετὰ ἀπὸ τὸ πολὺ k βήματα;

Καὶ ἐδῶ ἰσχύουν οἱ ἴδιες παρατηρήσεις, ποὺ ἔγιναν στὸ p-Short-NSTM-Halt. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι **W**[2]-πλῆρες. Ἐὰν στὸ Short-NTM-Halt ἀλλαχθῆ ἡ παράμετρος στὸ ἄθροισμα τῶν βημάτων καὶ τῶν ταινιῶν $k + t$, τότε τὸ πρόβλημα εἶναι **W**[1]-πλῆρες.

Ἂς δοῦμε τὸ γνωστὸ **NP**-πλῆρες πρόβλημα Δενδρο Steiner. Ἔστω ἕνα γράφημα G καὶ ἕνα ὑποσύνολο $R \subseteq V\,(G)$, τὸ σύνολο R περιέχει ὅλες τὶς ἀπαιτούμενες κορυφές, οἱ ὁποῖες πρέπει νὰ περιέχονται σὲ ἕνα συνεκτικὸ δένδρο, τὸ ὁποῖο νὰ εἶναι ὑπογράφημα τοῦ G. Ὅλες οἱ ὑπόλοιπες $V\,(G) - R$ κορυφές, ὀνομάζονται Steiner. Ὑπάρχει ὑποσύνολο $S \subseteq V\,(G) - R$ μεγέθους μικροτέρου ἢ ἴσου τοῦ k, ὥστε τὸ $R \cup S$ νὰ εἶναι οἱ κορυφὲς ἑνὸς συνεκτικοῦ δένδρου, τὸ ὁποῖο εἶναι ὑπογράφημα τοῦ G [21];
Ἐὰν $R = V\,(G)$, τότε τὸ πρόβλημα ἀνάγεται στὸ Minimum Spanning Tree. Ἐὰν $|R| = 2$, τότε τὸ πρόβλημα ἀνάγεται στὸ Shortest Path.
Παρατήρηση: Ἐὰν ἕνα συνεκτικὸ δένδρο περιέχῃ μόνο τὶς κορυφὲς τοῦ R, δὲν χρειάζεται νὰ γίνῃ τίποτε, ἐὰν δὲν εἶναι συνεκτικό, τότε πρέπει νὰ μποῦν στὸ δένδρο τὸ πολὺ k κορυφὲς Steiner, ὥστε τὸ δένδρο νὰ καταστῆ συνεκτικό. Εἶναι δύσκολο νὰ βρεθοῦν, ἐὰν ὑπάρχουν, αὐτὲς οἱ κορυφές, διότι χρειάζεται νὰ ἐρευνηθοῦν ὅλοι οἱ συνδυασμοὶ τῶν ὑπολοίπων κορυφῶν ἀνὰ k, δηλαδὴ $\binom{|V(G)|-|R|}{k}$ συνδυασμοί[22].

p-Δενδρο Steiner (p-Steiner Tree)
Εἴσοδος : Ἕνα γράφημα G καὶ ἕνα ὑποσύνολο R τοῦ $V\,(G)$ καὶ $k \in \mathbb{N}$. *Παράμετρος :* $\kappa\,(G, R, k) = k$. *Ἐρώτηση :* Ὑπάρχει ἕνα ὑποσύνολο S τοῦ $V\,(G) - R$ μὲ $|S| \leq k$ καὶ τὸ $G\,[R \cup S]$ νὰ εἶναι συνεκτικό;

[21] Τὸ Δενδρο Steiner ὁρίζεται καὶ σὲ γραφήματα, τῶν ὁποίων οἱ ἀκμὲς ἔχουν βάρος, τότε ψάχνουμε τὸ δένδρο μὲ τὸ ἐλάχιστο βάρος. Ἐδῶ θεωρεῖται, ὅτι ὅλες οἱ ἀκμὲς ἔχουν βάρος 1.
[22] Ἐφόσον $R \subseteq V\,(G)$, τότε $|V\,(G) - R| = |V\,(G)| - |R|$.

Ἐὰν τὸ $G[R \cup S]$ εἶναι συνεκτικό, τότε πολὺ εὔκολα βρίσκεται ἕνα ὑπογράφημά του ποὺ εἶναι συνεκτικὸ δένδρο, γι' αὐτὸ μερικὲς φορές, γιὰ εὐκολία στὴν διατύπωση βρίσκουμε τὸ ἀντίστοιχο συνεκτικὸ ὑπογράφημα. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι $\mathbf{W}[2]$-πλῆρες.
Ἐὰν στὸ Δενδρο Steiner, ὡς παράμετρος θεωρηθῆ τὸ $|R|$, τότε τὸ πρόβλημα ἀνήκει στὴν κλάση **FPT** καὶ ἐπιλύεται σὲ χρόνο $O\left(3^m \cdot n + 2^m \cdot n^2 + n^3\right)$ ἀπὸ τὸν ἀλγόριθμο τῶν Dreyfous-Wagner μὲ $n = |V(G)|$ καὶ $m = |R|$.

5.4.4 Θεωρήματα γιὰ τὴν ἱεραρχία $\mathbf{W}[t]$

Γιὰ ὅλα τὰ ἐπίπεδα τῆς ἱεραρχίας $\mathbf{W}[t]$, θὰ πρέπη νὰ ἀναφερθῆ τὸ ἑπόμενο θεώρημα, ἀπόδειξη τοῦ ὁποίου ὑπάρχει στὴν βιβλιογραφία.

Ὁρισμός 5.30: $\Gamma^+_{t,d}$, $\Gamma^-_{t,d}$

1. Μὲ $\Gamma^+_{t,d}$ συμβολίζουμε τὸ γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ $\Gamma_{t,d}$, τοῦ ὁποίου οἱ τύποι δὲν περιέχουν ἀρνήσεις ($\neg$).
2. Μὲ $\Gamma^-_{t,d}$ συμβολίζουμε τὸ γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ $\Gamma_{t,d}$, τοῦ ὁποίου οἱ τύποι ἐμπρὸς ἀπὸ κάθε προτασιακὴ μεταβλητὴ ἔχουν ἄρνηση ($\neg$), χωρὶς ὅμως κάποιος ἄλλος ὅρος νὰ ἔχη ἄρνηση, δηλαδὴ ἡ ἄρνηση ἐμφανίζεται μόνο ἐμπρὸς ἀπὸ κάθε προτασιακὴ μεταβλητὴ τοῦ τύπου.

Θεώρημα 5.4: Γιὰ κάθε $t \geq 1$ τὰ ἑπόμενα προβλήματα εἶναι $\mathbf{W}[t]$-πλήρη μὲ fpt-ἀναγωγές:

1. Τὸ p-WSat $\left(\Gamma^-_{t,2}\right)$, ἐὰν $t = 1$.
2. Τὸ p-WSat $\left(\Gamma^-_{t,1}\right)$, ἐὰν t περιττός καὶ $t > 1$.
3. Τὸ p-WSat $\left(\Gamma^+_{t,1}\right)$, ἐὰν t ἄρτιος.
4. Τὸ p-WSat $(\Delta_{t+1,d})$ γιὰ κάθε $d \geq 1$.

Ἀπὸ τὸ προηγούμενο θεώρημα ἔχουμε τὰ ἑξῆς πόρισματα:

Πόρισμα 5.6: Γιὰ κάθε $t > 0$ ἔχουμε $\mathbf{W}[t] \subseteq \mathbf{W}[t+1]$.

Πόρισμα 5.7: Γιὰ κάθε $t > 0$ ἔχουμε $\mathbf{W}[t] \subseteq \mathbf{W}[SAT]$.

Πρόταση 5.9: Τὸ πρόβλημα p-Ανεξαρτητο Συνολο εἶναι $\mathbf{W}[1]$-πλῆρες.

Ἀπόδειξη: Τὰ δύο ἑπόμενα λήμματα.

Λῆμμα 5.7: p-ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\leq^{fpt}$ p-WSAT$\left(\Gamma_{1,2}^{-}\right)$.

Ἀπόδειξη: Ἔστω τὸ γράφημα G ἔχει ἕνα ἀνεξάρτητο σύνολο μεγέθους k. Παρατηροῦμε ὅτι σὲ κάθε ἀκμή, ὑπάρχει πάντα τοὐλαχιστον μία κορυφή, ποὺ δὲν ἀνήκει στὸ ἀνεξάρτητο σύνολο. Γιὰ τὴν ἀναγωγή, σὲ κάθε κορυφὴ v_i μὲ $i \in 1, 2, \cdots, |V(G)|$, τοῦ γραφήματος G, ἀντιστοιχοῦμε μία λογικὴ μεταβλητὴ X_i καὶ σὲ κάθε ἀκμὴ $\{i, j\}$, τὸν ὅρο $\overline{X_i} \vee \overline{X_j} \equiv \neg X_i \vee \neg X_j$. Ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν ἡ κορυφὴ v_i ἀνήκη στὸ ἀνεξάρτητο σύνολο, τότε ἡ ἀντίστοιχη μεταβλητὴ X_i λαμβάνει τιμὴ $TRUE$, ἀλλιῶς λαμβάνει τιμὴ $FALSE$. Ὁ παρακάτω προτασιακὸς τύπος

$$P = \bigwedge_{\{v_i, v_j\} \in E(G)} \left(\overline{X_i} \vee \overline{X_j}\right)$$

ἀνήκει στὸ $\Gamma_{1,2}^{-}$, καὶ εἶναι σίγουρα k-ἱκανοποιήσιμος.
Ἀντιστρόφως, ἐὰν ὁ P εἶναι k-ἱκανοποιήσιμος, τότε δύο ὁποιεσδήποτε κορυφές, ποὺ ἀντιστοιχοῦν σὲ δύο ἀπὸ τὶς k μεταβλητὲς τοῦ P, ποὺ λαμβάνουν τιμὴ $TRUE$, ἀποκλείεται νὰ βρίσκονται στὴν ἴδια ἀκμή, διότι ὁ ἀντίστοιχος ὅρος θὰ εἶχε τιμὴ $FALSE$.
Ὁ χρόνος κατασκευῆς τοῦ P εἶναι $O(|V(G)| + |E(G)|)$ καὶ ἡ παράμετρος k παραμένει ἀμετάβλητη. Συνεπῶς, ἡ ἀναγωγὴ εἶναι fpt, ἄρα p-ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\in$ **W**[1]. $\dashv$

Λῆμμα 5.8: p-WSAT$\left(\Gamma_{1,2}^{-}\right)$ $\leq^{fpt}$ p-ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ.

Ἀπόδειξη: Σὲ κάθε προτασιακὸ τύπο $P \in \Gamma_{1,2}^{-}$, τοῦ προβλήματος p-WSAT$\left(\Gamma_{1,2}^{-}\right)$ εὔκολα ἀντιστοιχεῖται ἕνα γράφημα G_P, ὡς ἑξῆς: Σὲ κάθε λογικὴ μεταβλητὴ X_i ἀντιστοιχεῖται μία κορυφὴ v_i, γιὰ κάθε ὅρο $\left(\overline{X_i} \vee \overline{X_j}\right)$, βάζουμε μία ἀκμὴ $\{v_i, v_j\}$ στὸ γράφημα G. Συνεχίζουμε μὲ παρομοίους συλλογισμούς, ὅπως στὸ προηγούμενο λῆμμα καὶ τελικὰ ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ p-ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ εἶναι **W**[1]-δύσκολο. $\dashv$

Πόρισμα 5.8: Τὸ πρόβλημα p-ΚΛΙΚΑ εἶναι **W**[1]-πλῆρες.

Ἀπόδειξη: Ἐὰν καὶ μόνο ἐὰν τὸ γράφημα G ἔχη πλῆρες γράφημα (κλίκα) μεγέθους k, τὸ δυϊκὸ γράφημα $\overline{G}$ ἔχει ἀνεξάρτητο σύνολο ἰδίου μεγέθους. $\dashv$

Πρόταση 5.10: p-ΠΑΚΕΤΑΡΙΣΜΑ ΣΥΝΟΛΩΝ $\equiv^{fpt}$ p-ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ

Ἀπόδειξη: Θὰ γίνη μία σκιαγράφηση τῶν ἀναγωγῶν. Δημιουργεῖται ἕνα γράφημα G μὲ $|S_1| + |S_2| + \ldots + |S_r|$ κορυφές. Ὡς κορυφὲς τοῦ G λαμβάνονται τὰ μέλη τῶν συνόλων, διακεκριμένα πλέον. Οἱ κορυφὲς ποὺ προέρχονται ἀπὸ τὰ ἴδια σύνολα $S_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, γίνονται πλήρη ὑπογραφήματα (κλίκες) τοῦ G. Ὡς ἀκμὲς τοῦ G λαμβάνονται ἐπιπλέον οἱ $\left\{v_{n,S_i}, v_{m,S_j}\right\}$, μεταξὺ δύο κορυφῶν v_{n,S_i}, v_{m,S_j} μὲ $i \neq j,\ i, j \leq r$ καὶ $n \leq |S_i|\,,\ m \leq |S_j|$, ποὺ ἀντιστοιχοῦν σὲ ἴδια μέλη μεταξὺ τῶν συνόλων S_i, S_j. Ἡ ἀναγωγὴ αὐτὴ χρειάζεται χρόνο $O\left((|S_1| + |S_2| + \ldots + |S_r|)^2\right)$.
Ἀντιστρόφως, γιὰ κάθε κορυφὴ v τοῦ γραφήματος G, δημιουργεῖται ἕνα σύνολο S_v μὲ μέλη τὶς ἀκμὲς ποὺ περιέχουν τὴν κορυφὴ v. Ἐδῶ ἡ ἀναγωγὴ αὐτὴ χρειάζεται χρόνο $O\left(|V| + |E|\right)$. ⊣

Πρόταση 5.11: Τὸ πρόβλημα p-Σύνολο Κυριαρχίας εἶναι $\mathbf{W}[2]$-πλῆρες.

Ἀπόδειξη: Τὰ δύο ἑπόμενα λήμματα.

Λῆμμα 5.9: p-Σύνολο Κυριαρχίας $\leq^{fpt}$ p-WSat$\left(\Gamma^+_{2,1}\right)$.

Ἀπόδειξη: Ἔστω τὸ γράφημα G ἔχει ἕνα σύνολο κυριαρχίας μεγέθους k. Παρατηροῦμε ὅτι γιὰ κάθε κορυφή, ἡ ἴδια ἢ μία ἀπὸ τὴν γειτονιά[23] της ἀνήκει στὸ σύνολο κυριαρχίας. Ἂς δοῦμε τώρα τὴν ἀναγωγή. Σὲ κάθε κορυφὴ v_i μὲ $i \in 1, 2, \cdots, |V(G)|$, τοῦ γραφήματος G, ἀντιστοιχεῖται μία λογικὴ μεταβλητὴ X_i. Γιὰ τὴν γειτονιὰ κάθε κορυφῆς v_i, δημιουργεῖται ἕνας διαζευκτικὸς ὅρος, ποὺ περιέχει ὅλες τὶς μεταβλητὲς ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς κορυφὲς τοῦ συνόλου $N[v_i]$. Τέλος παίρνουμε τὴν σύζευξη ὅλων αὐτῶν τῶν ὅρων. Ὁ βαθμὸς κάθε κορυφῆς φράσσεται ἀπὸ τὸ $|V(G)| - 1$, ἔτσι αὐτὴ ἡ ἀναγωγὴ μᾶς ὁδηγεῖ στὸ $\Gamma^+_{2,1}$ καὶ ὄχι στὸ $\Gamma^+_{1,n}$ μὲ $n = |V(G)| - 1$, ἀφοῦ τὸ n ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν εἴσοδο. Ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν ἡ κορυφὴ v_i ἀνήκη στὸ σύνολο κυριαρχίας, τότε ἡ ἀντίστοιχη μεταβλητὴ X_i λαμβάνει τιμὴ $TRUE$, ἀλλιῶς λαμβάνει τιμὴ $FALSE$. Ὁ παρακάτω προτασιακὸς τύπος

$$P = \bigwedge_{v_i \in V(G)} \left(\bigvee_{v_j \in N[v_i]} X_j \right)$$

ἀνήκει στὸ $\Gamma^+_{2,1}$ καὶ εἶναι σίγουρα k-ἱκανοποιήσιμος.
Ἀντιστρόφως, ἐὰν ὁ P εἶναι k-ἱκανοποιήσιμος, τότε ὅλοι οἱ $|V(G)|$ ὅροι του, θὰ ἔχουν τοὐλάχιστον μία μεταβλητὴ μὲ τιμὴ $TRUE$. Οἱ ἀντίστοιχες k κορυφὲς τοῦ G εἶναι ἕνα σύνολο κυριαρχίας, διότι τοὐλάχιστον μία ἀπὸ αὐτές τὶς

[23] Μὲ $N_G[v]$ συμβολίζεται τὸ σύνολο $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Ὅταν τὸ γράφημα G ἐννοεῖται ἀπὸ τὰ συμφραζόμενα, ὁ δείκτης $_G$ στὸ N_G παραλείπεται.

k κορυφές, βρίσκεται στὴν γειτονιὰ κάθε κορυφῆς τοῦ G, ἢ ἡ ἴδια ἀνήκει στὸ σύνολο κυριαρχίας.
Ὁ χρόνος κατασκευῆς τοῦ P εἶναι $O\left(|V(G)|^2\right)$ καὶ ἡ παράμετρος k παραμένει ἀμετάβλητη. Συνεπῶς, ἡ ἀναγωγὴ εἶναι fpt, ἄρα p-Σύνολο Κυριαρχίας $\in$ $\mathbf{W}[2]$. $\dashv$

Λῆμμα 5.10: p-WSat$\left(\Gamma^{+}_{2,1}\right) \leq^{fpt}$ p-Σύνολο Κυριαρχίας.

Ἀπόδειξη: Ἡ ἀναγωγὴ εἶναι ἡ ἑξῆς:

1. Οἱ μεταβλητὲς τοῦ τύπου γίνονται κορυφὲς τοῦ γραφήματος.

2. Οἱ κορυφές, τῶν ὁποίων οἱ ἀντίστοιχες μεταβλητές εἶναι σὲ ἕναν ὅρο τοῦ τύπου, γίνονται πλῆρες γράφημα (κλίκα).

Παρατήρηση: Σὲ ἕνα πλῆρες γράφημα, ὁποιαδήποτε κορυφή του εἶναι σύνολο κυριαρχίας, ἐν ἀντιθέσει, τὸ κάλυμμα κορυφῶν περιέχει ὅλες τὶς κορυφές του πλὴν μιᾶς.
Αὐτὸ τὸ λῆμμα ἀποδεικνύεται μὲ συλλογισμοὺς παρομοίους μὲ τοῦ προηγουμένου λήμματος. $\dashv$

5.5 Ἡ ἱεραρχία $\mathbf{A}[t]$

Ἐδῶ θὰ δοθῆ μόνο ὁ ὁρισμὸς τῆς ἱεραρχίας $\mathbf{A}[t]$ μὲ $t \leq 1$

Τὸ πρόβλημα p-MC

Ἐδῶ ὅπως καὶ στὸ πρόβλημα p-var-MC ἔχουμε τὰ ἴδια δεδομένα, ὅμως ἀλλάζει ἡ παραμετροποίηση. Ἔστω Φ ἕνα σύνολο πρωτοβαθμίων τύπων καὶ $\mathcal{D}$ μία δομὴ ἑρμηνείας τῶν πρωτοβαθμίων τύπων τοῦ Φ. Ὁρίζεται τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

p-MC(Φ)
Εἴσοδος : Ἔστω $\mathcal{D}$ δομὴ καὶ $\varphi \in \Phi$.
Παράμετρος : $\kappa(\mathcal{D}, \varphi) = \lvert\varphi\rvert$ τὸ μῆκος τοῦ φ.
Ἐρώτηση : Ἱκανοποιεῖται ὁ φ στὴν δομὴ $\mathcal{D}$, $\varphi(\mathcal{D}) \neq \emptyset$;

Ἱκανοποιεῖται ὁ τύπος φ τοῦ συνόλου Φ, στὴν δομὴ $\mathcal{D}$;
Τὸ πρόβλημα αὐτό, εἶναι ἕνα τεχνικὸ πρόβλημα τὸ ὁποῖο ὁρίζεται σὲ κάποιο σύνολο τύπων, ὅμως ἀναλόγως τοῦ συνόλου Φ ποὺ θὰ χρησιμοποιηθῆ, ἀλλάζει πολὺ ὁ βαθμὸς δυσκολίας τοῦ προβλήματος.

5.5.1 Ὁρισμὸς τῶν $\mathbf{A}[t]$ βάσει τοῦ p-MC

Ἐδῶ χρειαζόμαστε τὴν ἀριθμητικὴ ἱεραρχία Σ_t μὲ $t \geq 1$ ἀπὸ τὴν θεωρία τῆς ἀναδρομῆς. Ὑπενθυμίζεται ὅτι κάθε πρωτοβάθμιος τύπος $\mathcal{T}$, ποὺ ἀνήκει στὸ σύνολο Σ_k εἶναι τῆς μορφῆς $\exists x_1 \forall x_2 \ldots Q x_k \mathcal{P}$ ὅπου τὰ σύμβολα $\exists, \forall$ ἐναλλάσσονται k φορές, ἀρχίζοντας πάντα ἀπὸ τὸ $\exists$, τὸ Q συμβολίζει τὸ $\exists$ ἐὰν ὁ k εἶναι περιττός, ἢ τὸ $\forall$ ἐὰν ὁ k εἶναι ἄρτιος καὶ ὁ $\mathcal{P}$ εἶναι προτασιακὸς τύπος. Ἡ δεσμευμένη μεταβλητὴ x_i μὲ $1 \leq i \leq k$, δὲν εἶναι ὑποχρεωτικὸ νὰ ἐμφανίζεται στὸν προτασιακὸ τύπο $\mathcal{P}$ [24]. Ὡς γνωστόν, πολλὰ συνεχόμενα ὅμοια σύμβολα $\exists$ ἢ $\forall$ κωδικοποιοῦνται[25] σὲ ἕνα $\exists$ ἢ $\forall$ ἀντιστοίχως. Ἰσχύει ὅτι $\Sigma_i \subset \Sigma_j, \forall i, j$ μὲ $0 < i < j$.

Ὁρισμός 5.31: *Ἡ ἱεραρχία $\boldsymbol{A}[t]$ μὲ $t \geq 1$.* Γιὰ κάθε $t \geq 1$ ὁρίζουμε τὴν κλάση $\mathbf{A}[t] = [\text{p-MC}(\Sigma_t)]^{fpt}$.

Προφανῶς λόγω τοῦ ὁρισμοῦ ἔχουμε $\mathbf{A}[t] \subseteq \mathbf{A}[t+1]$. Τέλος, πρέπει νὰ ποῦμε ὅτι οἱ κλάσεις $\mathbf{W}[1]$ καὶ $\mathbf{A}[1]$ ταυτίζονται καὶ γιὰ κάθε $t \geq 1$ ἔχουμε $\mathbf{W}[t] \subseteq \mathbf{A}[t]$.
Ἡ ἱεραρχία $\mathbf{A}[t]$ εἶναι τὸ ἀνάλογο τῆς πολυωνυμικῆς ἱεραρχίας τῆς κλασσικῆς πολυπλοκότητας.

5.6 Ἀναφορές, Σχόλια

Ἡ κλάση $\mathbf{W}[P]$ εἰσήχθη ἀπὸ τοὺς Downey καὶ Fellows στὸ [27]. Οἱ Abrahamson, Downey καὶ Fellows μελέτησαν τὴν $\mathbf{W}[P]$ στὸ [1]. Ὁ ὁρισμὸς τῆς $\mathbf{W}[P]$ πάρθηκε ἀπὸ τὸ [23].

Ἡ ἰδέα τῆς περιορισμένης ἀναιτιοκρατίας βρίσκεται στοὺς Kintala καὶ Fisher στὸ [46].

Ἡ $\mathbf{W}[P]$-πληρότητα τοῦ p-Bounded-Ntm-Halt ἔχει δειχθῆ καὶ στὰ [13] καὶ [16]. Γιὰ τὴν $\mathbf{W}[P]$-πληρότητα τοῦ προβλήματος p-Διαγραφη Γραμμικων Ανισοτητων μπορεῖ νὰ δῆ κάποιος στὰ [1] καὶ [2]. Μία ἀπόδειξη τῆς $\mathbf{W}[P]$-πληρότητας τοῦ p-WSat(CIRC$^+$) βρίσκεται στὸ [1]. Μία ἀπόδειξη τῆς $\mathbf{W}[P]$-πληρότητας τοῦ p-WSat(CIRC) βρίσκεται στὸ [37]. Μία ἀπόδειξη τῆς $\mathbf{W}[P]$-πληρότητας τοῦ p-Κατωφλικο Συνολο Εναρξεως βρίσκεται στὸ [1]. Γιὰ τὴν p-Μεγιστη Κοινη Υπακολουθια μπορεῖ κάποιος νὰ δῆ περισσότερα στὰ βιβλία [37] καὶ [51]. Ἡ Μεγιστη Κοινη Υπακολουθια μελετήθηκε ἀπὸ τοὺς Bodlaender καὶ λοιποὺς στὸ [11] καὶ ἀπὸ τὸν Pietrzak στὸ [55]. Μία ἀναγωγὴ τοῦ

[24] Ἄρα $\Sigma_i \subseteq \Sigma_j, \forall i, j$ μὲ $0 < i \leq j$.

[25] Ἐὰν τὰ $\exists$ καὶ $\forall$ συναντῶνται ἐναλλάξ, δὲν ὑπάρχει κωδικοποίηση, ποὺ νὰ τὰ συμπτύσση σὲ λιγότερα.

p-Σύνολο Κυριαρχίας στὴν p-Μέγιστη Κοινὴ Υπακολουθία ὑπάρχει στὸ [9].

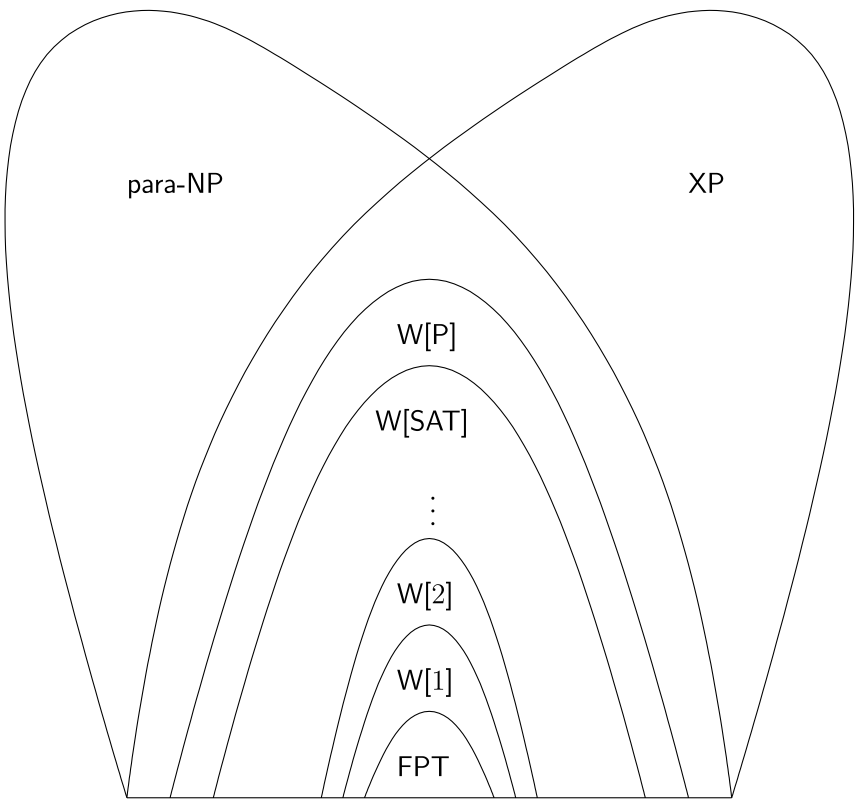
Ἡ κλάση $\mathbf{W}[SAT]$ εἰσήχθη ἀπὸ τοὺς Downey καὶ Fellows στὸ [27]. Ἡ ἀπόδειξη τῆς $\mathbf{W}[SAT]$-πληρότητας τοῦ προβλήματος p-var-MC(Φ) εἶναι τῶν Παπαδημητρίου καὶ Γιαννακάκη καὶ ὑπάρχει στὸ [54].

Ἡ ἱεραρχία $\mathbf{W}[t]$ εἰσήχθη ἀπὸ τοὺς Downey καὶ Fellows στὸ [27]. Ὁ δεύτερος ὁρισμός της μέσω κυκλωμάτων, μελετήθηκε ἀπὸ τοὺς Downey καὶ λοιποὺς στὸ [30]. Τὸ θεώρημα 5.4 ἀποδείχθηκε ἀπὸ τοὺς Downey καὶ Fellows στὸ [27]. Ἡ $\mathbf{W}[1]$-πληρότητα τοῦ p-Short-NSTM-Halt ἔχει δειχθῆ στὸ [15]. Ἡ $\mathbf{W}[1]$-πληρότητα τοῦ p-Κλίκα ἔχει δειχθῆ καὶ στὸ [28]. Ἡ $\mathbf{W}[1]$-πληρότητα τοῦ p-m-LCS ἔχει μελετηθῆ στὰ [9] καὶ [10]. Ἡ $\mathbf{W}[2]$-πληρότητα τοῦ p-Short-NTM-Halt ἔχει δειχθῆ ἀπὸ τοὺς Cesati καὶ Di Ianni στὸ [18]. Στὸ κεφάλαιο 2, ἡ πρόταση 2.3 ἀποδεικνύει τὴν $\mathbf{W}[2]$-πληρότητα τοῦ p-Σύνολο Αφής. Γιὰ τὴν $\mathbf{W}[2]$-πληρότητα τοῦ p-Δένδρο Steiner, περισσότερα στὸ [16] τοῦ Cesati. Γιὰ τὴν ἄλλη παραμετροποίηση, ποὺ τὸ κατατάσσει στὸ $\mathbf{FPT}$, μπορεῖ νὰ βρῆ κάποιος στοιχεῖα στὸ [31] τῶν Dreyfous καὶ Wagner.

Ἡ ἱεραρχία $\mathbf{A}[t]$ εἰσήχθη ἀπὸ τοὺς Flum καὶ Grohe στὸ [34]. Ἡ ἀπόδειξη τοῦ $\mathbf{W}[1] = \mathbf{A}[1]$ ἔγινε ἀπὸ τοὺς Flum καὶ Grohe στὸ [36], ὅμως πρωτομελετήθηκε ἀπὸ τοὺς Downey καὶ λοιποὺς στὸ [30].

Εἶναι γνωστὸ ὅτι $\mathbf{W}[t] \subseteq \mathbf{W}[t+1]$, ἕνα ἀνοικτὸ πρόβλημα εἶναι ἐὰν ὑπάρχη κάποιο t τέτοιο ὥστε $\mathbf{W}[t] \subset \mathbf{W}[t+1]$. Αὐτὸ συνεπάγεται ὅτι $\mathbf{FPT} \neq \mathbf{W}[P]$ καὶ κατ' ἐπέκταση $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

Περίληψη: Κλάσεις παραμετρικῆς πολυπλοκότητας



Οἱ κλάσεις **FPT, para-NP, XP,** $\mathbf{W}[P]$, $\mathbf{W}[SAT]$ καὶ ἡ ἱεραρχία $\mathbf{W}[t]$

Κεφάλαιο 6

Πυρηνοποίηση

6.1 Εἰσαγωγή

Ἐδῶ θὰ μελετηθῆ μία βασικὴ ἰδιότητα τῆς κλάσεως **FPT**. Ἂς δοῦμε τὶ εἶναι ἡ πυρηνοποίηση ἑνὸς παραμετροποιημένου προβλήματος.

Ἂς ἐξετάσουμε καλύτερα τὸ γνωστὸ πρόβλημα p-Καλυμμα Κορυφων. Παρατηροῦμε ὅτι ἐὰν ζητηθῆ ἕνα κάλυμμα κορυφῶν π.χ. μεγέθους 10, θὰ κάνουμε κάποιες ἐνέργειες νὰ δοῦμε μήπως ὑπάρχει εὔκολη ἀπάντηση. Π.χ. κοιτάζουμε ἐὰν τὸ γράφημα εἶναι συνεκτικό, ἐὰν ἔχη κορυφὲς βαθμοῦ 0, τὸ μέγεθος κάθε συνεκτικῆς συνιστῶσας κ.λπ. Συνεχίζοντας λοιπόν, ὅσο τὸ γράφημα μεγαλώνει, ἐμπειρικὰ τόσο πιὸ δύσκολο εἶναι νὰ βρεθῆ κάλυμμα κορυφῶν μεγέθους 10, γιὰ ἕνα γράφημα π.χ. μὲ 10.000 κορυφές, θὰ πρέπη νὰ ἔχη 10 κορυφὲς βαθμοῦ 1.000 ἡ κάθε μία. Παρατηρώντας καλύτερα, βλέπουμε ὅτι ὅταν μία κορυφὴ u ἔχη βαθμὸ μεγαλύτερο τοῦ k τότε αὐτὴ σίγουρα ἀνήκει σὲ κάθε κάλυμμα κορυφῶν μεγέθους τὸ πολὺ k. Αὐτὸ γίνεται διότι ὅλες οἱ ἀκμὲς ποὺ ξεκινοῦν ἀπὸ τὴν u πρέπει νὰ καλυφθοῦν ἀπὸ τὴν u ἢ ἀπὸ ὅλες τὶς γειτονικὲς κορυφές της ποὺ εἶναι περισσότερες ἀπὸ k, ἐὰν λοιπὸν τὸ γράφημα ἔχη περισσότερες ἀπὸ k κορυφὲς βαθμοῦ μεγαλυτέρου τοῦ k, τότε τὸ γράφημα αὐτὸ δὲν ἔχει κάλυμμα μεγέθους k. Μέχρι ἐδῶ ἔχει γίνει μία προεργασία πάνω στὸ γράφημα σὲ πολυωνυμικὸ χρόνο, αὐτὸ τὸ γενονὸς τελικὰ εἶναι πολὺ σπουδαῖο καὶ δὲν ἀγνοεῖται.

Ἔτσι ὁδηγούμεθα σὲ μία βασικὴ ἰδιότητα τῆς κλάσεως **FPT**, τὴν πυρηνοποίηση. Οὐσιαστικὰ μὲ τὴν πυρηνοποίηση κάνουμε μία προεργασία στὸ πρόβλημα σὲ πολυωνυμικὸ χρόνο. Σκοπὸς εἶναι νὰ εὑρεθῆ ἕνα ἰσοδύναμο ὑποσύνολο τῆς γλώσσας του, τὸ ὁποῖο νὰ ἐξαρτᾶται μόνο ἀπὸ τὴν παράμετρο καὶ συνεπῶς νὰ μπορῆ νὰ λυθῆ σὲ χρόνο ἀνεξάρτητο ἀπὸ τὸ μέγεθος τοῦ κυρίου μέρους τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος.

Ὁ ὁρισμὸς τῆς κλάσεως **FPT** βάσει τοῦ τύπου $f(\kappa(x)) \cdot p(|x|)$, μᾶς προἰδεάζει γιὰ κάτι τέτοιο. Ἐὰν βροῦμε μία οἰκογένεια ὑποσυνόλων $S_{\kappa(x)}$ τῆς ἑκάστοτε γλώσσας L, τῆς ὁποίας στὰ σύνολα ἡ παράμετρος $\kappa(x)$ νὰ διατηρῆται σταθερή, τότε ὁ ρυθμὸς αὐξήσεως τοῦ χρόνου γιὰ τὴν ἐπίλυση τοῦ προβλήματος, εἶναι πολυωνυμικὸς ὡς πρὸς τὸ μέγεθος τῆς εἰσόδου. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἀπὸ κάποιο μέγεθος τῆς εἰσόδου καὶ μετά, ἡ λύση τοῦ προβλήματος περιέχεται σὲ κάποιο μικρότερο μέρος της. Στὴν πυρηνοποίηση γίνεται αὐτὸ ἀκριβῶς τὸ πρᾶγμα, ἐπεξεργαζόμεθα ἕνα πρόβλημα τῆς κλάσεως **FPT**, ἀνάγοντας τὴν εἴσοδό του σὲ ἕνα μικρότερο τμῆμα της, ὥστε ἕνας fpt-ἀλγόριθμος νὰ λύνη τὸ πρόβλημα, σὲ αὐτὸ τὸ τμῆμα τῆς ἀρχικῆς εἰσόδου.

6.2 Πυρηνοποίηση

Ὁ ὁρισμὸς τῆς πυρηνοποιήσεως δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ μία ἀναγωγὴ τοῦ προβλήματος στὸν ἑαυτό του. Στὴν πρᾶξι ὅμως, ἔχει ἕνα σημαντικὸ πλεονέκτημα. Ἡ αὐτοαναγωγὴ αὐτή, πάντα ὁδηγεῖ σὲ εἴσοδο, ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἀποκλειστικῶς ἀπὸ τὴν παράμετρο, καθιστώντας ἔτσι πολὺ εὐκολότερη τὴν λύση τοῦ προβλήματος.

Ὁρισμός 6.32: *Πυρηνοποίηση* ἑνὸς προβλήματος (Q, κ) μὲ ἀλφάβητο Σ καλεῖται μία πολυωνυμικὰ ὑπολογίσιμη συνάρτηση $K : \Sigma^* \to \Sigma^*$ τέτοια ὥστε γιὰ κάθε $x \in \Sigma^*$ ἔχουμε

$$x \in Q \iff (K(x) \in Q) \ \wedge \ |K(x)| \leq h(\kappa(x))$$

ὅπου $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ὑπολογίσιμη συνάρτηση.

Τὸ πολυώνυμο K εἶναι οὐσιαστικά, μία κλασσικὴ ἀναγωγὴ τοῦ προβλήματος Q στὸν ἑαυτό του. Ἄρα τὸ μέγεθος τῆς ἐξόδου $|K(x)|$ φράσσεται πολυωνυμικὰ ἀπὸ τὴν εἴσοδο $|x|$, δηλαδὴ $|K(x)| \leq p'_K(|x|)$ μὲ p'_K πολυώνυμο.
Τὸ μέγεθος τῆς ἐξόδου στὸν πυρήνα, φράσσεται ἐξ ὁρισμοῦ, ἀπὸ μία ὑπολογίσιμη συνάρτηση ὡς πρὸς τὴν παράμετρο. Αὐτὸ εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀποφευχθῆ, διότι ἔτσι ἀνεξαρτητοποιεῖται τὸ μέγεθος τῆς ἐξόδου τῆς πυρηνοποιήσεως τοῦ προβλήματος Q, ἀπὸ τὸ μέγεθος τῆς εἰσόδου x τοῦ προβλήματος Q. Πλέον ἡ γνώση τῆς τιμῆς τῆς παραμέτρου, καθορίζει πῶς θὰ λυθῆ τὸ πρόβλημα Q.
Γιὰ ἀρκετὰ προβλήματα μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕνα πολυώνυμο p_h ὥστε $|K(x)| \leq p_h(\kappa(x))$, τότε ἡ πυρηνοποίηση καλεῖται *πολυωνυμική*.

Θεώρημα 6.5: Γιὰ κάθε παραμετροποιημένο πρόβλημα (Q, κ) μὲ ἀλφάβητο Σ τὰ ἑπόμενα εἶναι ἰσοδύναμα:

1. $(Q, \kappa) \in \mathbf{FPT}$

2. Ἡ γλῶσσα Q εἶναι ἀποφάνσιμη καὶ τὸ (Q, κ) ἔχει μία πυρηνοποίηση.

Ἀπόδειξη: Μὲ ϵ συμβολίζεται ἡ κενὴ λέξη, μία λέξη μὲ μῆκος 0, χωρὶς γράμματα.
Γιὰ τὴν συνεπαγωγὴ (1) $\Rightarrow$ (2) ἔχουμε: Ἔστω $\mathcal{A}$ ἀλγόριθμος ποὺ ἐπιλύει τὸ πρόβλημα σὲ χρόνο $f(\kappa(x)) \cdot p(|x|)$ μὲ f ὑπολογίσιμη καὶ p πολυώνυμο. Συνεπῶς ἡ γλῶσσα Q εἶναι ἀποφάνσιμη. Χωρὶς ἀπώλεια τῆς γενικότητος, ὑποθέτουμε ὅτι $\forall n \in \mathbb{N}$ ἔχουμε $p(n) \geq n$ [1]. Ἐὰν $Q = \Sigma^*$ ἢ $Q = \emptyset$ τότε $\forall x \in \Sigma^*$ θέτουμε τετριμμένα $K(x) = \epsilon$, ἀλλιῶς ἐὰν $\emptyset \subset Q \subset \Sigma^*$ τότε ἔστωσαν $x_0 \in Q$ καὶ $x_1 \in \Sigma^* - Q$, σταθερὰ καὶ γνωστὰ ἐκ τῶν προτέρων[2]. Ὁ ἑπόμενος ἀλγόριθμος $\mathcal{A}'$ ὑπολογίζει μία πυρηνοποίηση K τοῦ (Q, κ). Γιὰ κάθε $x \in \Sigma^*$ ὁ $\mathcal{A}'$ ἐξομοιώνει $p(|x|)^2$ βήματα τοῦ $\mathcal{A}$. Ἐὰν ὁ $\mathcal{A}$ ἀποδέχεται τότε ὁ $\mathcal{A}'$ ἐπιστρέφει x_0, ἐὰν δὲν ἀποδέχεται ἐπιστρέφει x_1, τέλος ἐὰν ὁ $\mathcal{A}$ δὲν σταματᾶ, ὁ $\mathcal{A}'$ ἐπιστρέφει τὴν ἀρχικὴ εἴσοδο x. Στὴν τρίτη περίπτωση προφανῶς $|x| \leq p(|x|) \leq f(\kappa(x))$ (1). Προφανῶς $x \in Q$, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν, $K(x) \in Q$. Ὁ $\mathcal{A}'$ ἀπαντᾶ ἐντὸς $p_{\mathcal{A}'}\left(p(|x|)^2\right)$ βημάτων[3] μὲ $p_{\mathcal{A}'}$ πολυώνυμο. Ἡ ἔξοδος τοῦ $\mathcal{A}'$ εἶναι x_0 ἢ x_1 ἢ x, ἄρα $|K(x)| \leq |x_0| + |x_1| + |x|$ καὶ λαμβάνοντας ὑπ' ὄψιν τὴν (1) ἔχουμε $|K(x)| \leq |x_0| + |x_1| + f(\kappa(x))$.

Γιὰ τὴν συνεπαγωγὴ (2) $\Rightarrow$ (1) ἔχουμε: Ἔστω $\mathcal{A}_Q$ ἀλγόριθμος, ὁ ὁποῖος ἀποφαίνεται ἐὰν $x \in Q$ ἐντὸς $f_Q(|x|)$ βημάτων[4] μὲ f_Q ὑπολογίσιμη συνάρτηση. Ἡ πυρηνοποίηση K γιὰ τὴν εἴσοδο $x \in \Sigma^*$ ὑπολογίζεται ἀπὸ τὸν ἀλγόριθμο $\mathcal{A}_K$ ἐντὸς $p_K(|x|)$ βημάτων[5] μὲ p_K πολυώνυμο. Ἔστω $x \in \Sigma^*$, τότε κατασκευάζεται ὁ ἑξῆς ἀλγόριθμος $\mathcal{A}$, ὁ ὁποῖος βασίζεται στὴν πυρηνοποίηση K. Ἐντὸς $p_K(|x|)$ βημάτων ὑπολογίζεται τὸ $K(x)$ καὶ μετὰ ἐντὸς $f_Q(|K(x)|)$ βημάτων ὁ $\mathcal{A}_Q$ ἀποφαίνεται ἐὰν $K(x) \in Q$. Λαμβάνοντας ὑπ' ὄψιν ὅτι $|K(x)| \leq h_K(\kappa(x))$, ἐντὸς $p_K(|x|) + f_Q(h_K(\kappa(x)))$ βημάτων ὁ νέος ἀλγόριθμος $\mathcal{A}$ ἀποφαίνεται ἐὰν $x \in Q$. Προφανῶς, γιὰ κάθε εἴσοδο x, ἔχουμε $f_Q(h_K(\kappa(x))) \geq 2$ καὶ $p_K(|x|) \geq 2$, ἄρα ἕπεται ὅτι $p_K(|x|) + f_Q(h_K(\kappa(x))) \leq f_Q(h_K(\kappa(x))) \cdot p_K(|x|)$. Συνεπῶς $(Q, \kappa) \in \mathbf{FPT}$. $\dashv$

[1] Ἡ ἀνισότητα αὐτὴ εἶναι πολὺ εὔκολο νὰ ἐπιτευχθῆ, διότι κάθε πρόβλημα λύνεται καὶ ἐντὸς περισσοτέρου χρόνου. Ἔτσι πάντα θὰ ὑπάρχη τέτοιο πολυώνυμο.

[2] Προφανῶς, τὰ x_0 καὶ x_1 εἶναι ὅσο πιὸ μικρὰ σὲ μέγεθος γίνεται, ὥστε ὁ ἀρχικὸς ἀλγόριθμος $\mathcal{A}$, νὰ ἀποφαίνεται ἐντὸς ἐλαχίστων βημάτων. Γιὰ κάθε πρόβλημα εἶναι πολὺ εὔκολο νὰ βροῦμε τέτοιες περιπτώσεις, συνήθως τὶς κατασκευάζουμε μελετώντας τὸν ἀλγόριθμο.

[3] Ὁ $\mathcal{A}'$, λόγω ἐξομοιώσεως, χρειάζεται πολυωνυμικὸ ἀριθμὸ βημάτων, ὡς πρὸς τὸν ἀριθμὸ τῶν ἐξομοιουμένων βημάτων. Ἐπειδὴ ἡ σύνθεση πολυωνύμων εἶναι πάντα πολυώνυμο, ὁ $\mathcal{A}'$ χρειάζεται ἐπίσης, πολυωνυμικὸ ἀριθμὸ βημάτων ὡς πρὸς τὴν εἴσοδο τοῦ προβλήματος.

[4] Προφανῶς, γιὰ κάθε εἴσοδο x χρειάζεται τοὐλάχιστον 1 βῆμα γιὰ τὴν κενὴ εἴσοδο, ἕως τοὐλάχιστον $|x|$ βήματα γιὰ νὰ τὴν διαβάση καὶ τοὐλάχιστον 1 βῆμα γιὰ τὴν ἔξοδό του, ἔχουμε $f_Q(|x|) \geq 2$.

[5] Παρομοίως καὶ ἐδῶ, γιὰ κάθε εἴσοδο x ἔχουμε $p_K(|x|) \geq 2$.

Τὸ προηγούμενο θεώρημα ἐπιβεβαιώνει μὲ ἕναν ἄλλο τρόπο, ὅτι ἡ σημαντικὴ παρατήρηση μετὰ τὸ λῆμμα 2.1 τοῦ κεφαλαίου 2, εἶναι σωστή. Ἄρα τὰ προβλήματα ποὺ ἐπιλύονται σὲ χρόνο $f(\kappa(x)) \cdot p(|x|)$ μὲ f ὑπολογίσιμη καὶ p πολυώνυμο, ἐπιλύονται ἐπίσης, σὲ χρόνο $f'(\kappa(x)) + p'(|x|)$ μὲ κάποια ἄλλη ὑπολογίσιμη συνάρτηση f' καὶ πολυώνυμο p'.
Οἱ εἴσοδοι πολλῶν προβλημάτων στὴν παραμετρικὴ πολυπλοκότητα ἀποτελοῦνται ἀπὸ δύο μέρη καὶ ἡ παράμετρος εἶναι τὸ μῆκος τοῦ δευτέρου μέρους. Συνήθως, οἱ fpt-ἀλγόριθμοι ἐπιλύουν αὐτὰ τὰ προβλήματα σὲ δύο βήματα. Πρῶτα κάνουν μία προεργασία στὸ δεύτερο μέρος καὶ μετὰ χρησιμοποιώντας τὸ ἀποτέλεσμα μαζί μὲ τὸ πρῶτο μέρος τῆς εἰσόδου, ἐπιλύουν τὸ πρόβλημα. Ἕνα τέτοιο πρόβλημα εἶναι ἡ ἀποτίμηση ἐρωτημάτων σὲ βάσεις δεδομένων[6]. Τὸ πρῶτο μέρος εἶναι ἡ βάση δεδομένων καὶ τὸ δεύτερο τὸ ἐρώτημα καὶ ἡ παράμετρος τὸ μῆκος τοῦ ἐρωτήματος. Ὁ ἀλγόριθμος βελτιστοποιεῖ τὸ ἐρώτημα, δηλαδὴ τὸ μετατρέπει σὲ ἕνα ἄλλο ἰσοδύναμο ἐρώτημα, τὸ ὁποῖο ὑπολογίζεται πιὸ ἀποτελεσματικὰ καὶ μετὰ τὸ ἀποτιμᾶ (ἐπιστρέφει τὰ δεδομένα). Τὸ ἑπόμενο θεώρημα δεικνύει τὴν σημασία τῆς προεργασίας γιὰ τὰ προβλήματα τῆς κλάσεως **FPT**.

Θεώρημα 6.6: Ἔστω (Q, κ) ἕνα παραμετροποιημένο πρόβλημα μὲ ἀλφάβητο Σ. Τότε τὰ ἑπόμενα εἶναι ἰσοδύναμα:

1. Τὸ (Q, κ) ἀνήκει στὴν κλάση **FPT**.
2. Τὸ (Q, κ) ἀνήκει στὴν κλάση **P** μετὰ ἀπὸ μία προεργασία ἐπὶ τῆς παραμέτρου.
3. Τὸ Q εἶναι ἀποφάνσιμο καὶ τὸ (Q, κ) ἀνήκει τελικὰ στὴν κλάση **P**.

Ἡ ἀπόδειξη αὐτοῦ τοῦ θεωρήματος, εἶναι παρόμοια μὲ αὐτὴ τῆς προτάσεως 3.4 τοῦ κεφαλαίου 3.

6.3 Πυρηνοποιήσεις τοῦ προβλήματος p-Κάλυμμα Κορυφων

Ἕνα σημαντικὸ πρόβλημα εἶναι τὸ p-Καλυμμα Κορυφων. Λόγω τῆς σχετικῆς εὐκολίας του ἔχει μελετηθῆ ἀρκετά. Ὑπάρχουν γι' αὐτὸ μερικοὶ σημαντικοὶ

[6] Ἂν καὶ τὸ συγκεκριμένο πρόβλημα εἰκάζεται ὅτι δὲν εἶναι στὸ FPT, δεικνύει μὲ εὔκολο τρόπο τὴν ἰδέα τῆς προεργασίας ἐπὶ τῆς παραμέτρου. Στὸ τμῆμα 1.2.2 τοῦ κεφαλαίου 1, ὑπάρχει τὸ σχετικὸ πρόβλημα τῶν συζευκτικῶν ἐρωτημάτων σὲ σχεσιακὲς βάσεις δεδομένων.

πυρῆνες διαφόρων μεγεθῶν. Ἡ μελέτη αὐτοῦ τοῦ προβλήματος βοηθᾶ στὴν μάθηση τεχνικῶν γιὰ τὴν κατασκευὴ πυρήνων καὶ σὲ ἄλλα προβλήματα τῆς κλάσεως **FPT**.

6.3.1 Ἡ πυρηνοποιήση Buss

Λῆμμα 6.11: Δεδομένου ἑνὸς γραφήματος G, κάθε κάλυμμα κορυφῶν του μεγέθους k, περιέχει ὅλες τὶς κορυφὲς βαθμοῦ μεγαλυτέρου τοῦ k.

Ἀπόδειξη: Ἔστω μία κορυφὴ v, βαθμοῦ τοὐλάχιστον $k+1$. Γιὰ νὰ καλυφθοῦν οἱ τοὐλάχιστον $k+1$ ἀκμές της, χρειάζεται νὰ μποῦν στὸ κάλυμμα κορυφῶν, οἱ τοὐλάχιστον $k+1$ γειτονικὲς κορυφὲς τῆς v ἢ ἡ ἴδια ἡ v. Ἐπειδὴ τὸ κάλυμμα κορυφῶν τοῦ G ἔχει μέγεθος k, συνάγεται ὅτι ἡ v ἀνήκει στὸ κάλυμμα κορυφῶν. ⊣

Λῆμμα 6.12: Δεδομένου ἑνὸς γραφήματος G μέγιστου βαθμοῦ k, ἐὰν ἔχη πάνω ἀπὸ k^2 ἀκμές, δηλαδὴ $E(G) > k^2$, τότε δὲν ἔχει κάλυμμα κορυφῶν μεγέθους k.

Ἀπόδειξη: Ἔστω μία κορυφὴ v βαθμοῦ τὸ πολὺ k. Ἡ κορυφὴ v μπορεῖ νὰ καλύψη τὸ πολὺ k ἀκμές. Ἄρα k κορυφὲς μποροῦν νὰ καλύψουν τὸ πολὺ k^2 ἀκμές. ⊣

Αὐτὰ τὰ λήμματα, μᾶς δίνουν ἕναν τρόπο κατασκευῆς πυρήνα γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ καλύμματος κορυφῶν ἑνὸς γραφήματος. Ἔτσι ὁ ἀλγόριθμος algVC τοῦ κεφαλαίου 2 τοῦ τμήματος 2.2.1, θὰ χρησιμοποιῆται μόνο γιὰ μικρὰ γραφήματα.
Τὸ πλῆρες γράφημα (κλίκα) K_2 ἔχει κάλυμμα κορυφῶν μεγέθους 1, ἄρα ἡ ἔξοδος ΝΑΙ θὰ εἶναι τὸ $(K_2, 1)$.
Τὸ πλῆρες γράφημα K_3 ἔχει κάλυμμα κορυφῶν μεγέθους 2, ἀλλὰ ὄχι 1, ἄρα ἡ ἔξοδος ΟΧΙ θὰ εἶναι τὸ $(K_3, 1)$.
Ἐὰν τὸ γράφημα ἔχη κορυφὴ βαθμοῦ $k+1$, τότε αὐτὴ θὰ ἀνήκη στὸ κάλυμμα κορυφῶν μεγέθους k.
Ἐὰν τὸ γράφημα εἶναι βαθμοῦ k καὶ ἔχει περισσότερες ἀπὸ k^2 ἀκμές, τότε ἡ ἀπάντηση εἶναι ὄχι.
Ἐὰν τὸ γράφημα εἶναι βαθμοῦ k καὶ ἔχη τὸ πολὺ k^2 ἀκμές, καλεῖται ἡ algVCf γιὰ νὰ ἀπαντήση.
Ἄς δοῦμε τὸν πυρήνα τοῦ Buss, ὥστε νὰ γίνη κατανοητή ἡ τεχνικὴ τῆς αὐτοαναγωγῆς μὲ τὴν χρήση πυρήνα.

Πρόταση 6.12: Τὸ p-Καλυμμα Κορυφων ἔχει πυρήνα μεγέθους k^2.

Ἀπόδειξη: Ὁ ἑπόμενος ἀλγόριθμος εἶναι ὁ πυρήνας Buss. Στὸ βῆμα 3.(α′)

χρειάζεται χρόνος τοὐλάχιστον $O(|V(G)|) + O(|E(G)|)$, διότι ἀφαιρεῖται ἡ v καὶ μετὰ ψάχνεται τὸ γράφημα ὡς πρὸς τὶς ἀκμὲς καὶ τὶς κορυφές, γιὰ νὰ κατασκευασθῆ τὸ $G - v$ [7].
Τὸ βάθος τῆς ἀναδρομῆς εἶναι τὸ πολὺ k, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ βῆμα 3.(γ′). Ἑπομένως ὁ συνολικὸς χρόνος εἶναι $O(k \cdot (|V(G)| + |E(G)|))$.
Τὸ μέγεθος τοῦ πυρήνα εἶναι k^2, διότι ἀπὸ αὐτὸ τὸν ἀριθμὸ τῶν ἀκμῶν καὶ κάτω, ὁ πυρήνας ἔχει ὡς ἔξοδο ἕνα γράφημα μὲ τὸ πολὺ $2 \cdot k^2$ κορυφές, γιὰ τὸ ὁποῖο πρέπει νὰ λυθῆ τὸ πρόβλημα. ⊣

Πυρήνας Buss.

Bussf(G, k)
// $G = (V, E)$ γράφημα, $k \geq 0$

1. Ἐὰν $|E(G)| = 0$ τότε
   ἐπίστρεψε $(K_2, 1)$ // Ἔξοδος ΝΑΙ
2. Ἐὰν $k = 0 \wedge |E(G)| > 0$ τότε
   ἐπίστρεψε $(K_3, 1)$ // Ἔξοδος ΟΧΙ
3. Ἐὰν ὑπάρχη κορυφὴ v βαθμοῦ μεγαλυτέρου τοῦ k
   (α′) Κατασκεύασε τὸ γράφημα $G - v$
   (β′) Κατασκεύασε τὸ γράφημα G', ἀφαιρώντας ὅλες τὶς κορυφὲς βαθμοῦ 0 ἀπὸ τὸ $G - v$
   (γ′) Ἐπίστρεψε Bussf$(G', k - 1)$
4. Ἐὰν $|E(G)| > k^2$
   (α′) Ἐπίστρεψε $(K_3, 1)$ // Ἔξοδος ΟΧΙ
5. Ἐπίστρεψε (G, k) // Ἔξοδος γιὰ κλήση τῆς algVCf

6.3.2 Ἡ πυρηνοποιήση Nemhauser Trotter

Ἐδῶ ἡ προσέγγιση θὰ εἶναι πολὺ διαφορετική, πάλι ὅμως χρειαζόμαστε τὶς ἐξόδους ΝΑΙ, ΟΧΙ γιὰ τὸν πυρήνα. Οἱ ἔξοδοι ΝΑΙ, ΟΧΙ θὰ εἶναι ἴδιες μὲ αὐτὲς τῆς πυρηνοποιήσεως τοῦ Buss. Ἄς διατυπώσουμε τὸ βασικὸ θεώρημα τῶν

[7] Πάντα στὸ O λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν τὸ βῆμα μὲ τὸν μεγαλύτερο χρόνο, διότι τὰ ὑπόλοιπα βήματα ἐνσωματώνονται, χωρὶς ρητὴ ἀναφορὰ σὲ αὐτὴν τὴν πρᾶξι. Π.χ. στὸ βῆμα 3.(β′) χρειάζεται χρόνος $O(|V(G)|)$, ἀλλὰ αὐτὸς ὁ χρόνος ἔχει ἐνσωματωθῆ στὸ O τοῦ βήματος 3.(α′), αὐξάνοντας τὸν σταθερὸ παράγοντα στὸ O.

Nemhauser Trotter.

Θεώρημα 6.7: Ὑπάρχει πυρηνοποίηση τοῦ p-Καλυμμα Κορυφων, τέτοια ὥστε, γιὰ κάθε εἴσοδο (G, k) νὰ δίνη ἐντὸς πολυωνυμικοῦ χρόνου, μία ἔξοδο ΟΧΙ ἢ μία ἔξοδο (G', k'), μὲ $k' \leq k$ καὶ $|V(G')| \leq 2 \cdot k'$.

Ἡ ἀξία αὐτῆς τῆς πυρηνοποιήσεως ἔγκειται στὸν περιορισμὸ $|V(G')| \leq 2 \cdot k'$, διότι μειώνει πάρα πολὺ τὸν ἀριθμὸ τῶν κορυφῶν τοῦ γραφήματος τῆς ἐξόδου, μὲ ἀποτέλεσμα νὰ ἔχουμε ἀπάντηση ΟΧΙ κατ' εὐθείαν, μὲ ἁπλὴ καταμέτρηση τῶν κορυφῶν γιὰ ὅλα τὰ γραφήματα G' μὲ πάνω ἀπὸ $2 \cdot k'$ κορυφές. Αὐτὴ ἡ πολυωνυμικὴ πυρηνοποίηση, ἐπιτυγχάνεται μὲ τὴν βοήθεια τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Γιὰ τὴν ἀπόδειξη αὐτοῦ τοῦ θεωρήματος χρειαζόμαστε τὰ ἑπόμενα δύο λήμματα. Πρὶν ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ λήμματα, θὰ δοθῆ μία ἐλάχιστη περίληψη, τὶ περίπου εἶναι ὁ γραμμικὸς προγραμματισμός.

Γραμμικὸς προγραμματισμός

Ὁ γραμμικὸς προγραμματισμὸς ἐλαχιστοποιεῖ (ἢ μεγιστοποιεῖ) ἕνα ἄθροισμα ὑπὸ δεδομένων συνθηκῶν. Οἱ συνθῆκες αὐτὲς εἶναι ἀνισώσεις καὶ ἐξισώσεις τῶν ὁποίων οἱ μεταβλητὲς εἶναι βαθμοῦ ἕνα. Ἐὰν ψάχνουμε τὴν λύση ἑνὸς γραμμικοῦ συστήματος στὸ $\mathbb{R}$ ἔχουμε γραμμικὸ προγραμματισμό, ἐὰν τὴν ψάχνουμε στὸ $\mathbb{Z}$ ἔχουμε ἀκέραιο γραμμικὸ προγραμματισμό. Ὁ γραμμικὸς προγραμματισμὸς ἀνήκει στὴν κλάση **P** τῆς κλασσικῆς πολυπλοκότητας, ὅμως ὁ ἀκέραιος γραμμικὸς προγραμματισμὸς ἀνήκει στὴν κλάση **NP**.

Ἐδῶ πληροφοριακὰ καὶ μόνον θὰ ἀναφερθῆ ἕνα σημαντικὸ πρόβλημα:

p-Γραμμικος Ακεραιος Προγραμματισμος (p-Integer Programming ἢ p-Integer Linear Programming Feasibility)

Εἴσοδος : Ἕνας πίνακας $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ καὶ ἕνα διάνυσμα $\vec{b} \in \mathbb{Z}^m$.
Παράμετρος : $\kappa\left(A, \vec{b}\right) = n$.
Ἐρώτηση : Ὑπάρχει διάνυσμα $\vec{x} \in \mathbb{N}_0^n$ τέτοιο ὥστε $A \cdot \vec{x} \leq \vec{b}$;

Μὲ $\mathbb{N}_0$ συμβολίζεται τὸ σύνολο τῶν μὴ ἀρνητικῶν ἀκεραίων[8], δηλαδὴ τὸ $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ χρησιμοποιεῖται σὲ ἀρκετὲς ἀποδείξεις, γιὰ νὰ δειχθῆ ὅτι κάποια ἄλλα προβλήματα ἀνήκουν στὴν κλάση **FPT**, διότι ἀπαντᾶ ἐὰν ἕνα πρόβλημα ἀκεραίου γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἔχη λύση, ὄχι κατ' ἀνάγκη βέλτιστη,

[8] Εἶναι λίγο συγκεχυμένο στὴν βιβλιογραφία, διότι μερικὲς φορὲς ταυτίζονται οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ $\mathbb{N}$ μὲ τοὺς μὴ ἀρνητικοὺς ἀκεραίους $\mathbb{N}_0$, ἀναλόγως τοῦ τί θεωρεῖται τὸ 0 (μηδέν), φυσικὸς ἢ ὄχι.

στοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς.

Θεώρημα 6.8: Ὁ p-Γραμμικος Ακεραιος Προγραμματισμος ἀνήκει στὴν κλάση **FPT**.

Ἡ ἀπόδειξη αὐτοῦ τοῦ θεωρήματος ἀπαιτεῖ γνώσεις ἀπὸ τὴν ἀλγοριθμικὴ θεωρία ἀριθμῶν καὶ δὲν εἶναι ἁπλή.

Γιὰ τὸ p-Καλυμμα Κορυφων χρειαζόμαστε τὸν ἀκέραιο γραμμικὸ προγραμματισμό, βάζοντας τιμὴ 1 σὲ κάθε κορυφὴ τοῦ καλύμματος καὶ τιμὴ 0 σὲ κάθε κορυφὴ ἐκτὸς καλύμματος. Συνεπῶς, γιὰ κάθε ἀκμὴ θὰ πρέπη τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων μεταβλητῶν τῶν κορυφῶν της, νὰ εἶναι μεγαλύτερο ἢ ἴσο τοῦ ἑνός. Λόγω τῆς φύσεως τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, ὁ ὁποῖος ἐλαχιστοποιεῖ (ἢ μεγιστοποιεῖ) ἕνα ἄθροισμα, ποὺ στὴν συγκεκριμένη περίπτωση εἶναι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μεταβητῶν ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς κορυφὲς τοῦ γραφήματος, βρίσκεται πάντοτε τὸ ἐλάχιστο κάλυμμα κορυφῶν.

Ἀκέραιος γραμμικὸς προγραμματισμὸς γιὰ τὸ p-Καλυμμα Κορυφων

Ἔστω G τὸ γράφημα γιὰ τὸ ὁποῖο ἐρωτᾶται ἐὰν ἔχη κάλυμμα κορυφῶν μεγέθους k. Ὅπως εἴπαμε παραπάνω, χρειάζεται νὰ βρεθῆ τὸ ἐλάχιστο κάλυμμα κορυφῶν καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερο ἢ ἴσο τοῦ k, ἡ ἀπάντηση θὰ εἶναι ναί, ἀλλιῶς ἡ ἀπάντηση θὰ εἶναι ὄχι.
Ἂς δοῦμε τὸ πρόβλημα $\mathcal{L}(G)$ στὸν γραμμικὸ προγραμματισμό.

Γραμμικὸ σύστημα $\mathcal{L}(G)$

$$\text{Νὰ ἐλαχιστοποιηθῆ τὸ } \sum_{v \in V(G)} x_v$$

Δεδομένων τῶν συνθηκῶν:

$$x_v + x_u \geq 1 \text{ γιὰ κάθε ἀκμὴ } \{v, u\} \in E(G)$$

$$x_v \geq 0 \text{ γιὰ κάθε κορυφὴ } v \in V(G)$$

Ἐπειδὴ ἔχουμε ἕνα πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως, παρατηροῦμε ὅτι γιὰ κάθε βέλτιστη λύση τοῦ συστήματος $\mathcal{L}(G)$ στὸν γραμμικὸ προγραμματισμό, ἀκέραιο ἢ ὄχι, ἔχουμε $x_v \in [0, 1]$ γιὰ κάθε κορυφὴ $v \in V(G)$. Γιὰ εὐκολία, ὅπως θὰ δοῦμε παρακάτω, προσθέτουμε καὶ τὴν ἀνισότητα

$$x_v \leq 1 \text{ γιὰ κάθε κορυφὴ } v \in V(G)$$

ἔτσι ἔχουμε τὸ $\mathcal{L}'(G)$. Κανονικὰ δὲν χρειάζεται ὁ περιορισμὸς $x_v \leq 1$. Γιὰ τὴν ἀποφυγὴ ἀποδείξεως[9] αὐτοῦ τοῦ γεγονότος, τελικῶς μπαίνει αὐτὸς ὁ περιορισμὸς $x_v \leq 1$ στὸ σύστημα $\mathcal{L}(G)$ καὶ ἔχουμε τὸ $\mathcal{L}'(G)$.
Στὸν γραμμικὸ προγραμματισμό, ἔχουμε $x_v \in \mathbb{R}$ γιὰ κάθε κορυφὴ $v \in V(G)$, ἐνῶ στὸν ἀκέραιο, $x_v \in \mathbb{Z}$ γιὰ κάθε κορυφὴ $v \in V(G)$.
Μία λύση $(x_v) \in \mathbb{R}^{|V(G)|}$ τοῦ παραπάνω συστήματος $\mathcal{L}(G)$ στὸν γραμμικὸ προγραμματισμό, καλεῖται ἡμιακεραία, ἐὰν $x_v \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ γιὰ κάθε κορυφὴ $v \in V(G)$.

Λῆμμα 6.13: Γιὰ κάθε γράφημα G τὸ σύστημα $\mathcal{L}(G)$ (ἢ γιὰ εὐκολία τὸ $\mathcal{L}'(G)$) ἔχει ἡμιακέραια λύση.

Ἡ βασικὴ ἰδέα εἶναι, ἐὰν μποροῦμε νὰ μετασχηματίσουμε εὔκολα, δηλαδὴ σὲ πολυωνυμικὸ χρόνο, μία τυχαία λύση τοῦ γραμμικοῦ συστήματος σὲ ἡμιακέραια. Αὐτὸ μπορεῖ νὰ γίνῃ σταδιακά, βρίσκοντας κάθε φορὰ μία λύση μὲ περισσοτέρους ἡμιακεραίους καὶ σταματώντας ὅταν ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τῆς λύσεως εἶναι ἡμιακέραιοι.

Ἀπόδειξη: Ἔστω μία βέλτιστη λύση $(x_v)_{v \in V(G)} \in \mathbb{R}^{|V(G)|}$ τοῦ συστήματος $\mathcal{L}(G)$, ποὺ δὲν εἶναι ἀκέραια ἢ ἡμιακέραια.
Ἂς προσπαθήσουμε νὰ μετασχηματίσουμε τὴν λύση $(x_v)_{v \in V(G)}$ σὲ μία ἄλλη λύση $(z_v)_{v \in V(G)}$ τοῦ $\mathcal{L}(G)$, ἔτσι ὥστε

1. $\sum_{v \in V(G)} x_v = \sum_{v \in V(G)} z_v$

2. Ἡ $(z_v)_{v \in V(G)}$ νὰ ἔχῃ περισσοτέρους ἡμιακεραίους ἀπὸ τὴν $(x_v)_{v \in V(G)}$

Στὸ (1.) παραπάνω, βάζουμε ἰσότητα καὶ ὄχι ἀνισότητα, διότι ἐὰν μπῆ ἀνισότητα, τότε μία ἐκ τῶν δύο λύσεων δὲν εἶναι βέλτιστη.
Ἐὰν αὐτὸ ἐπιτευχθῆ ἐντὸς πολυωνυμικοῦ χρόνου, τότε κάνοντας αὐτὸ τὸ πολὺ $|V(G)|$ φορές, ἔχουμε βρεῖ μία ἡμιακέραια λύση τοῦ $\mathcal{L}(G)$. Ἔστω

$$\epsilon = \min\left\{|x_v|, \left|x_v - \frac{1}{2}\right|, |x_v - 1| \mid x_v \notin \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}\right\}$$

Προφανῶς, ἐὰν ἡ λύση εἶναι ἡμιακέραια τὸ ϵ δὲν ὁρίζεται, διότι οὐσιαστικὰ δὲν ἔχουμε νὰ ἀποδείξουμε τίποτα. Βάσει αὐτοῦ τοῦ ϵ, θὰ ὁρισθοῦν οἱ $(x'_v)_{v \in V(G)}$

[9] Σκελετὸς ἀποδείξεως μὲ εἰς ἄτοπον ἀπαγωγή: Ἔστω $(x_v)_{v \in V(G)} \in \mathbb{R}^{|V(G)|}$ μία βέλτιστη λύση τοῦ $\mathcal{L}(G)$, ποὺ ἐλαχιστοποιεῖ τὸ $\sum_{v \in V(G)} x_v$. Ἔστω, γιὰ τοὐλάχιστον ἕνα $x_{v'}$, ἰσχύει $x_{v'} > 1$. Θέτουμε $x_{v'} = 1$, τότε τὸ $\sum_{v \in V(G)} x_v$ γίνεται ἀκόμη πιὸ μικρὸ καὶ εὔκολα μετὰ ἀποδεικνύεται, ὅτι σὲ κάθε ἀνίσωση ποὺ ἀπαντᾶται τὸ $x_{v'}$, αὐτὴ ἰσχύει. Ἄτοπο.

καὶ $(x''_v)_{v \in V(G)}$, ὡς ἑξῆς:

$$x'_v = \begin{cases} x_v + \epsilon & \text{ἐὰν } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v - \epsilon & \text{ἐὰν } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{ἀλλιῶς} \end{cases} \quad \text{καί} \quad x''_v = \begin{cases} x_v - \epsilon & \text{ἐὰν } 0 < x_v < \frac{1}{2} \\ x_v + \epsilon & \text{ἐὰν } \frac{1}{2} < x_v < 1 \\ x_v & \text{ἀλλιῶς} \end{cases}$$

Θὰ δειχθῇ ὅτι οἱ $(x'_v)_{v \in V(G)}$ καὶ $(x''_v)_{v \in V(G)}$, εἶναι λύσεις τοῦ $\mathcal{L}(G)$ $(\mathcal{L}'(G))$, μετὰ θὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι καὶ βέλτιστες λύσεις.
Ἂς δοῦμε τί ἰσχύει γιὰ τὶς συνθῆκες (ἀνισώσεις) τοῦ $\mathcal{L}(G)$. Γιὰ τὴν πρώτη ὑποψήφια λύση $(x'_v)_{v \in V(G)}$ καὶ γιὰ κάθε ἀκμὴ $\{v, u\}$ τοῦ G, ἔχουμε:
Ἐὰν $x_v \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, τότε $x'_v = x_v$. Ἐὰν $x_v = 0$, τότε $x'_u = x_u = 1$ καὶ συνεπῶς

$$x_v + x_u = x'_v + x'_u = 1$$

Ἐὰν $x_v = 1$, τότε ὅτι καὶ νὰ εἶναι τὸ x_u ἔχουμε

$$x'_v + x'_u \geq 1$$

Ἐὰν $x_v = \frac{1}{2}$, τότε $x_u \geq \frac{1}{2}$ καὶ συνεπῶς $x'_u = 1$ ἢ $x'_u = \frac{1}{2}$ ἢ $x'_u = x_u - \epsilon$. Ἐπειδὴ τὸ ϵ εἶναι τὸ ἐλάχιστο ποὺ μποροῦμε νὰ πάρουμε, προφανῶς $x_u - \epsilon \geq \frac{1}{2}$ στὴν τρίτη περίπτωση, ἄρα

$$x_v + x_u \geq x'_v + x'_u \geq 1$$

Ἐὰν $0 < x_v < \frac{1}{2}$, τότε $x_u > \frac{1}{2}$ (παρομοίως ἀποδεικνύεται καὶ ἡ περίπτωση ποὺ $1 > x_v > \frac{1}{2}$), ἄρα $x'_v = x_v + \epsilon$ καὶ $x'_u = x_u - \epsilon$ ἢ $x'_u = 1$ (ἐὰν $x'_u = 1$, τότε στὸν παρακάτω τύπο δὲν χρειάζεται τὸ $-\,\epsilon$) καὶ συνεπῶς

$$x'_v + x'_u = x_v + \epsilon + x_u - \epsilon \geq x_v + x_u \geq 1$$

Προφανῶς $x'_v \geq 0$ γιὰ κάθε $v \in V(G)$. Ἄρα ἡ $(x'_v)_{v \in V(G)}$ εἶναι λύση τοῦ $\mathcal{L}(G)$ $(\mathcal{L}'(G))$.
Παρομοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ ἡ $(x''_v)_{v \in V(G)}$ εἶναι λύση τοῦ $\mathcal{L}(G)$ $(\mathcal{L}'(G))$.
Γιὰ τὰ ἀθροίσματα τῶν δύο λύσεων πρὸς ἐλαχιστοποίηση, παρατηροῦμε ὅτι

$$\sum_{v \in V(G)} x'_v + \sum_{v \in V(G)} x''_v = 2 \cdot \sum_{v \in V(G)} x_v$$

ἐὰν $\sum_{v \in V(G)} x'_v \neq \sum_{v \in V(G)} x''_v$, τότε ἕνα ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ ἀθροίσματα θὰ ἦταν μικρότερο ἀπὸ τὸ $\sum_{v \in V(G)} x_v$, ἑπομένως ἡ λύση $(x_v)_{v \in V(G)}$ δὲν θὰ εἶχε τὸ ἐλάχιστο ἄθροισμα, ἄτοπο. Ἄρα

$$\sum_{v \in V(G)} x'_v = \sum_{v \in V(G)} x''_v = \sum_{v \in V(G)} x_v$$

Παρατηροῦμε ὅτι μία ἐκ τῶν δύο λύσεων ἔχει σίγουρα περισσοτέρους ἡμιακεραίους ἀπὸ τὴν $(x_v)_{v\in V(G)}$. Αὐτὸ συμβαίνει ἀπὸ τὸν τρόπο ὁρισμοῦ τοῦ ϵ ὡς ἀπόλυτος τιμή, ἔτσι ἐὰν προστεθῆ ἢ ἀφαιρεθῆ ἀπὸ τὸ x_v ἀπὸ τὸ ὁποῖο προῆλθε, θὰ δώση 0 ἢ 1/2 ἢ 1.
Διαλέγουμε ἀπὸ τὶς δύο λύσεις $(x'_v)_{v\in V(G)}$ καὶ $(x''_v)_{v\in V(G)}$, αὐτὴν ποὺ ἔχει τοὺς περισσοτέρους ἡμιακεραίους καὶ ἐπαναλαμβάνοντας τὴν ἴδια διαδικασία τὸ πολὺ $|V(G)|$ φορές, κατασκευάζεται μία λύση $(z_v)_{v\in V(G)}$, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀποκλειστικὰ ἀπὸ ἡμιακεραίους. $\dashv$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ προηγουμένη ἀπόδειξη εἶναι κατασκευαστική. Θέτοντας $n = |V(G)|$, χρειάζεται χρόνος $O(n)$ γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ ϵ καὶ χρόνος $O(n)$ γιὰ τὴν εὕρεση τῶν $(x'_v)_{v\in V(G)}$ καὶ $(x''_v)_{v\in V(G)}$, δεδομένου ὅτι γιὰ εὐκολία, ὅλες οἱ πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς[10] γίνονται σὲ χρόνο $O(1)$, δηλαδὴ σὲ σταθερὸ ἀριθμὸ βημάτων. Ὑπολογίζεται πρῶτα ἡ $(x'_v)_{v\in V(G)}$ καὶ ἐὰν ἔχῃ περισσοτέρους ἡμιακεραίους ἀπὸ τὴν $(x_v)_{v\in V(G)}$, τότε δὲν ὑπολογίζεται ἡ $(x''_v)_{v\in V(G)}$[11]. Ὅλα τὰ προηγούμενα βήματα πρέπει νὰ γίνουν, ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὸ τέλος τῆς ἀποδείξεως τοῦ προηγουμένου λήμματος, τὸ πολὺ n φορές. Ἄρα ὁ συνολικὸς χρόνος εἶναι $O(n^2)$.

Λῆμμα 6.14: Ἔστω $(x_v)_{v\in V(G)}$ μία βέλτιστη ἡμιακέραια λύση τοῦ συστήματος $\mathcal{L}(G)$ (ἢ γιὰ εὐκολία τοῦ $\mathcal{L}'(G)$). Ὁρίζεται μία διαμερίση τοῦ συνόλου $V(G)$ σὲ τρία ὑποσύνολά του, ἕνα γιὰ κάθε $r \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, ὡς ἑξῆς $V_r = \{v \mid v \in V(G) \land x_v = r\}$ καὶ μὲ G_r συμβολίζεται τὸ ἐναγόμενο ὑπογράφημα $G[V_r]$. Τότε

1. $\mathrm{vc}\Big(G_{\frac{1}{2}}\Big) \geq \Big|V_{\frac{1}{2}}\Big|/2$
2. $\mathrm{vc}(G) = \mathrm{vc}\left(G_{\frac{1}{2}}\right) + |V_1|$

Μὲ vc συμβολίζεται γιὰ κάθε γράφημα H, τὸ $\mathrm{vc}(H) = \min\{|S| \mid S$ κάλυμμα κορυφῶν τοῦ $H\}$, δηλαδὴ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν κορυφῶν τοῦ ἐλαχίστου, ὡς πρὸς τὸν πληθικὸ ἀριθμό, καλύμματος. Ἑπομένως, ἕνα γράφημα H μπορεῖ νὰ ἔχῃ δύο καλύμματα, τέτοια ὥστε $\mathrm{vc}(H) = |S_1| = |S_2|$ καὶ $S_1 \neq S_2$.

Ἀπόδειξη: Ἐὰν τὸ σύνολο $S \subseteq V(G)$ εἶναι κάλυμμα κορυφῶν τοῦ G, τότε

[10] Πρόσθεση, ἀφαίρεση, πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεση. Στὴν πραγματικότητα ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἡ πιὸ δύσκολη πρᾶξι καὶ γίνεται σὲ χρόνο $O(x \cdot \ln x \cdot \ln\ln x)$.

[11] Ἐκ τῶν πραγμάτων, ἡ μία λύση ἔχει σίγουρα περισσοτέρους ἡμιακεραίους· ἡ πιθανότητα νὰ βρεθοῦν στὴν ἄλλη λύση περισσότεροι ἡμιακέραιοι εἶναι ἐλάχιστη, λόγω τοῦ τρόπου ὁρισμοῦ τοῦ ϵ. Ἑπομένως, ὁ ἀλγόριθμος δὲν ὑπολογίζει καθόλου τὴν δεύτερη λύση καὶ κερδίζει χρόνο, κατ' οὐσίαν μειώνει τὸν σταθερὸ παράγοντα τοῦ O.

τὰ $S_r = S \cap V_r$ εἶναι καλύμματα κορυφῶν τῶν G_r γιὰ κάθε $r \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.
Αὐτὸ συμβαίνει, διότι γιὰ κάθε $r_1, r_2 \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, οἱ ἀκμὲς μεταξὺ τῶν κορυφῶν τῶν δύο συνόλων V_{r_1} καὶ V_{r_2} τοῦ G, στὰ ἐναγόμενα γραφήματα G_{r_1} καὶ G_{r_2} δὲν ὑφίστανται καὶ δὲν τίθεται θέμα πῶς θὰ καλυφθοῦν. Οἱ ἀκμὲς μεταξύ τῶν κορυφῶν τοῦ ἑκάστοτε G_r γιὰ κάθε $r \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ καλύπτονται ἀπὸ τὸ ἑκάστοτε S_r, διότι καὶ οἱ δύο κορυφὲς τῶν ἀκμῶν βρίσκονται ἐντὸς τοῦ ἑκάστοτε V_r καὶ ἐφόσον τὸ S εἶναι κάλυμμα, κάποια ἀπὸ τὶς δύο κορυφὲς θὰ ἀνήκη στὸ S καὶ προφανῶς θὰ ἀνήκη καὶ στὴν τομή του μὲ τὸ ἑκάστοτε V_r.
Ἐὰν τὸ S' εἶναι κάλυμμα κορυφῶν τοῦ $G_{\frac{1}{2}}$, τότε τὸ $S' \cup V_1$ εἶναι κάλυμμα κορυφῶν τοῦ G. Προφανῶς $S' \cap V_1 = \emptyset$.
Αὐτὸ συμβαίνει, λόγω τῆς ἀνισότητος $x_v + x_u \geq 1$ γιὰ κάθε ἀκμὴ $\{v, u\}$ στὸ G. Κάθε ἀκμὴ ποὺ ἔχει μία κορυφὴ στὸ V_0, ἔχει ἀναγκαστικὰ τὴν ἄλλη της κορυφὴ στὸ V_1 καὶ δὲν ὑφίσταται καμμιὰ ἀκμή, πάλι λόγω τῆς $x_v + x_u \geq 1$, μεταξὺ τῶν δύο συνόλων $V_{\frac{1}{2}}$ καὶ V_0, τέλος ὅλες οἱ ἀκμὲς μεταξὺ τῶν συνόλων V_1 καὶ $V_{\frac{1}{2}}$ καλύπτονται ἀπὸ τὶς κορυφὲς τοῦ V_1. Δεδομένου ὅτι $|S'| \geq \mathrm{vc}\left(G_{\frac{1}{2}}\right)$, ἔχουμε $|S'| + |V_1| \geq \mathrm{vc}\left(G_{\frac{1}{2}}\right) + |V_1| \geq \mathrm{vc}\,(G)$.
Ἐὰν $\mathrm{vc}\,(G) < \sum_{v \in V(G)} x_v$, τότε βάζοντας τιμὴ 1 στὶς μεταβλητὲς x_v τῶν ἀντιστοίχων κορυφῶν v τοῦ καλύμματος καὶ στὶς ὑπόλοιπες μεταβλητὲς τιμὴ 0, παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἡμιακέραια λύση δὲν εἶναι βέλτιστη. Ἄτοπο.
Συνδυάζοντας τὰ παραπάνω ἔχουμε

$$\mathrm{vc}\left(G_{\frac{1}{2}}\right) + |V_1| \geq \mathrm{vc}\,(G) \geq \sum_{v \in V(G)} x_v = \frac{1}{2} \cdot \left|V_{\frac{1}{2}}\right| + |V_1| \quad (1)$$

διότι ὅλες οἱ κορυφὲς τοῦ $V_{\frac{1}{2}}$ ἔχουν τιμὴ $1/2$ [12] καὶ τῶν V_0, V_1 ἀντιστοίχως 0 καὶ 1. Κάνοντας πράξεις ἔχουμε τὸ (1.) τοῦ λήμματος

$$\mathrm{vc}\left(G_{\frac{1}{2}}\right) \geq \frac{1}{2} \cdot \left|V_{\frac{1}{2}}\right|$$

Γιὰ τὴν ἀπόδειξη τοῦ (2.) τοῦ λήμματος, παρατηροῦμε ἀπὸ τὰ προηγούμενα, ὅτι $\mathrm{vc}\left(G_{\frac{1}{2}}\right) + |V_1| \geq \mathrm{vc}\,(G)$. Ἔστω $S \subseteq V\,(G)$ ἕνα κάλυμμα τοῦ G μὲ τὸν ἐλάχιστο ἀριθμὸ κορυφῶν $\mathrm{vc}(G)$. Γιὰ τὸ S ὁρίζεται $S_r = S \cap V_r$ γιὰ κάθε $r \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Θὰ ὁρισθῆ μία νέα ὑποψήφια λύση $(x'_v)_{v \in V(G)}$, γιὰ τὸ σύστημα $\mathcal{L}\,(G)$ $(\mathcal{L}'\,(G))$, χρησιμοποιώντας τὴν διαμέριση V_r τῆς $(x_v)_{v \in V(G)}$ μὲ $r \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, ἡ ὁποία θὰ

[12] Συνεπῶς, ἔχουμε $\left|V_{\frac{1}{2}}\right|$ τὸ πλῆθος φορές, τὴν τιμὴ $1/2$.

εἶναι ἡμιακέραια ἐξ ὁρισμοῦ, ὡς ἑξῆς:

$$x'_v = \begin{cases} 1 & \text{ἐὰν } v \in S_1 & \text{ἄρα } x_v = x'_v \\ \frac{1}{2} & \text{ἐὰν } v \in V_1 - S_1 & \text{ἄρα } x_v > x'_v \\ & \text{ἢ } v \in V_{\frac{1}{2}} & \text{ἄρα } x_v = x'_v \\ & \text{ἢ } v \in S_0 & \text{ἄρα } x_v < x'_v \\ 0 & \text{ἀλλιῶς, δηλαδὴ στὸ } V_0 - S_0 & \text{ἄρα } x_v = x'_v \end{cases}$$

Ἡ $(x'_v)_{v\in V(G)}$ εἶναι λύση τοῦ $\mathcal{L}(G)$, διότι γιὰ κάθε ἀκμὴ $\{v,u\}$ τοῦ G ἔχουμε τρεῖς περιπτώσεις:

1. Ἐὰν ἡ μία κορυφή της ἀνήκη στὸ S_1,

2. ἐὰν ἡ μία κορυφή της ἀνήκη στὸ $V_1 - S_1 \cup V_{\frac{1}{2}} \cup S_0$ καὶ τέλος

3. ἐὰν ἡ μία κορυφή της ἀνήκη στὸ $V_0 - S_0$.

Ἡ πρώτη περίπτωση εἶναι εὔκολη, στὴν δεύτερη περίπτωση, ὅπου καὶ νὰ ἀνήκη ἡ μία κορυφὴ τῆς ἀκμῆς, ἐκτὸς βεβαίως τοῦ $V_1 - S_1$ ποὺ θὰ ἀποδειχθῆ στὴν τρίτη περίπτωση, εἶναι πάλι εὔκολο. Στὴν τρίτη περίπτωση, ἔστω ἡ $v \in V_0 - S_0$, τότε ἡ κορυφὴ u δὲν μπορεῖ νὰ ἀνήκη στὰ $V_{\frac{1}{2}}$ καὶ V_0, διότι ἡ $(x_v)_{v\in V(G)}$ εἶναι λύση, ἄρα θὰ ἀνήκη στὸ V_1, δηλαδὴ στὸ S_1 ἢ στὸ $V_1 - S_1$. Τὸ S εἶναι κάλυμμα τοῦ G[13], ἄρα ἡ u θὰ ἀνήκη καὶ στὸ S, ἄρα καὶ στὸ S_1. Γίνεται φανερὸ στὴν δεύτερη περίπτωση μὲ εἰς ἄτοπον ἀπαγωγή, ὅτι ἐὰν $v \in V_1 - S_1$ τότε $u \notin V_0 - S_0$.
Σὲ ὅλες τὶς προηγούμενες περιπτώσεις ἱκανοποιεῖται ἡ ἀνισότητα $x'_v + x'_u \geq 1$. Τέλος, εἶναι προφανές, ὅτι ἱκανοποιεῖται ἐξ ὁρισμοῦ, ἡ ἀνισότητα $x'_v \geq 0$ γιὰ ὅλα τὰ x'_v. Ἄρα ἡ $(x'_v)_{v\in V(G)}$ εἶναι ἡμιακέραια λύση τοῦ $\mathcal{L}(G)$.
Ἔτσι ἔχουμε ὅτι $\sum_{v\in V(G)} x'_v \geq \sum_{v\in V(G)} x_v$, ἀλλιῶς ὅπως δείξαμε παραπάνω καταλήγουμε σὲ ἄτοπο. Γιὰ τὸ $\sum_{v\in V(G)} x'_v$, ὁμαδοποιώντας καταλλήλως τὴν ἡμιακέραια λύση $(x'_v)_{v\in V(G)}$, ἔχουμε

$$\sum_{v\in V(G)} x'_v = |S_1| + \frac{1}{2}\cdot|V_1 - S_1| + \frac{1}{2}\cdot\left|V_{\frac{1}{2}}\right| + \frac{1}{2}\cdot|S_0|$$

Ἐπειδὴ $|V_1 - S_1| = |V_1| - |S_1|$, κάνοντας πράξεις στὸν προηγούμενο τύπο ἔχουμε

$$\sum_{v\in V(G)} x'_v = \frac{1}{2}\cdot|S_1| + \frac{1}{2}\cdot|V_1| + \frac{1}{2}\cdot\left|V_{\frac{1}{2}}\right| + \frac{1}{2}\cdot|S_0|$$

[13] Συνεπῶς τὸ S καλύπτει καὶ τὴν ἀκμὴ $\{v,u\}$ καὶ $v \notin S$.

Συνδυάζοντας τὴν προηγουμένη ἐξίσωση μὲ τὴν (1) καὶ κάνοντας πράξεις ἔχουμε

$$\begin{array}{c} \frac{1}{2}\cdot|S_1|+\frac{1}{2}\cdot|V_1|+\frac{1}{2}\cdot\left|V_{\frac{1}{2}}\right|+\frac{1}{2}\cdot|S_0| = \\ \sum_{v\in V(G)} x'_v \geq \sum_{v\in V(G)} x_v = \frac{1}{2}\cdot\left|V_{\frac{1}{2}}\right|+|V_1| \quad \Rightarrow \\ |S_1|+|S_0| \geq |V_1| \qquad\qquad (2) \end{array}$$

Λαμβάνοντας ὑπ' ὄψιν ὅτι τὰ S_r μὲ $r \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ εἶναι διαμέριση τοῦ S, ὅτι $\mathrm{vc}\left(G_{\frac{1}{2}}\right) \leq \left|S_{\frac{1}{2}}\right|$ καὶ τέλος τὴν (2) ἔχουμε

$$\mathrm{vc}\left(G_{\frac{1}{2}}\right)+|V_1| \leq \left|S_{\frac{1}{2}}\right|+|V_1| \leq \left|S_{\frac{1}{2}}\right|+|S_1|+|S_0| = |S| = \mathrm{vc}\,(G)$$

Συνδυάζοντας τὸν προηγούμενο τύπο πάλι μὲ τὴν (1), ἔχουμε

$$\mathrm{vc}\left(G_{\frac{1}{2}}\right)+|V_1| = \mathrm{vc}\,(G)$$

καὶ τὸ (2.) τοῦ λήμματος ἀποδείχθηκε. ⊣

Συνεπῶς, δοθείσης μιᾶς ἡμιακαιρέας λύσεως, ἐὰν $k-|V_1| < n'/2$ μὲ $n' = \left|V_{\frac{1}{2}}\right|$, τότε σὲ χρόνο $O\,(n')$ ἔχουμε ἀπάντηση ΟΧΙ, ἀλλιῶς πρέπει νὰ λυθῆ τὸ πρόβλημα μὲ εἴσοδο τὸ $G_{\frac{1}{2}}$ καὶ παράμετρο τὸ $k-|V_1|$, ἀφοῦ ἤδη οἱ κορυφὲς τοῦ V_1 ἀνήκουν στὸ κάλυμμα κορυφῶν τοῦ G.

Ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος 6.7 τῶν Nemhauser Trotter: Ἔστω $n = |V\,(G)|$ ὁ ἀριθμὸς τῶν κορυφῶν καὶ $m = |E\,(G)|$ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκμῶν τοῦ G. Τὸ σύστημα $\mathcal{L}\,(G)$ κατασκευάζεται σὲ πολυωνυμικὸ χρόνο, διότι περιέχει ἀκριβῶς n μεταβλητὲς καὶ $n+m$ ἀνισώσεις μὲ 2 μεταβλητὲς τὸ πολὺ ἢ κάθε μία, καθῶς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν n μεταβλητῶν. Ἄρα τὸ μῆκος του L, εἶναι $L = |\mathcal{L}\,(G)| = O\,(n+m)$.
Λύνουμε τὸ $\mathcal{L}\,(G)$ σὲ πολυωνυμικὸ χρόνο[14], ἢ γιὰ εὐκολία μὲ τὴν μέθοδο Simplex[15] καὶ μὲ τὸ λῆμμα 6.13 μετατρέπουμε τὴν λύση σὲ ἡμιακέραια μὲ $O\,(n^2)$

[14] Γενικῶς, θεωρεῖται ὅτι τοὐλάχιστον ἕνας ἀριθμὸς ἔχει μῆκος τὸ πολὺ $O\,(L)$, δηλαδὴ ὅσο καὶ ἕνα κλάσμα τοῦ μήκους L τοῦ συστήματος $\mathcal{L}\,(G)$ καὶ γιὰ εὐκολία, θεωρεῖται ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ ἔχουν μῆκος τὸ πολὺ $O\,(L)$ καὶ ὅτι ὅλες οἱ πράξεις εἶναι πολλαπλασιασμοί. Εἰδικῶς ἐδῶ, στὸ $\mathcal{L}\,(G)$ ὅλοι οἱ συντελεστὲς εἶναι 0 ἢ 1 καί, στὶς πράξεις ἐὰν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι δεκαδικός, τότε κρατοῦνται τὸ πολὺ $O\,(L)$ δεκαδικὰ ψηφία (σημαντικὰ ψηφία). Ὁ ἐλλειψοειδὴς ἀλγόριθμος χρειάζεται $O\left(n^6 L\right)$ πράξεις, ἐνῶ ὁ ἀλγόριθμος τοῦ Karmarkar (1984), χρειάζεται $O\left(n^{3,5} L\right)$ πράξεις, συνεπῶς χρόνος τὸ πολὺ $O\left(n^{3,5} L^2 \ln L \ln\ln L\right)$.

[15] Ἐφόσον ὁ γραμμικὸς προγραμματισμὸς ἀνήκει στὸ **P**, ἡ ἀπόδειξη εἶναι πλήρης. Ἡ μέθοδος Simplex, ἂν καὶ ἐκθετικοῦ χρόνου, δίνει στὴν πρᾶξι πολὺ καλὰ ἀποτελέσματα ὡς πρὸς τὸν χρόνο, στὸν γραμμικὸ προγραμματισμό. Λόγω αὐτῆς της τῆς ἐπιτυχίας, καθιερώθηκε ὡς ἡ πρώτη εὐρέως διαδεδομένη μέθοδος καὶ γι' αὐτό, ὑπάρχει πληθώρα ἑτοίμων προγραμμάτων.

πράξεις[16].
Ἀπὸ τὸ λῆμμα 6.14, οἱ κορυφὲς τοῦ V_1 ἀνήκουν στὸ κάλυμμα κορυφῶν τοῦ G, ἄρα χρειάζεται νὰ βρεθῇ ἕνα κάλυμμα κορυφῶν μεγέθους $k-|V_1|$ τοῦ $G_{\frac{1}{2}}$. Ἐὰν $k-|V_1| < \left|V_{\frac{1}{2}}\right|/2$, τότε δὲν ὑπάρχει κάλυμμα κορυφῶν μεγέθους $k-|V_1|$, διότι τὸ λῆμμα 6.14 ἀποκλείει τὴν ὕπαρξη καλύμματος κορυφῶν τοῦ $G_{\frac{1}{2}}$ μὲ λιγότερες κορυφὲς ἀπὸ $\left|V_{\frac{1}{2}}\right|/2$.
Θέτοντας $k' = k - |V_1|$ καὶ $G' = G_{\frac{1}{2}}$, ἐὰν $k' \geq |V(G')|/2$, ἡ ἔξοδος εἶναι ἡ (G', k'), ἀλλιῶς σὲ κάθε ἄλλη περίπτωση ἡ ἔξοδος εἶναι ΟΧΙ. $\dashv$

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος τῶν Nemhauser Trotter, εἶναι προφανῶς κατασκευαστικὴ καὶ δίνει τὸν ζητούμενο ἀλγόριθμο γιὰ τὴν κατασκευὴ τοῦ πυρήνα. Ἔστωσαν ὅπως παραπάνω, γιὰ τὴν εἴσοδο (G, k) καὶ τὸ σύστημα $\mathcal{L}(G)$ τὰ $n = |V(G)|$ καὶ $m = |E(G)|$, τὸ μῆκος τοῦ συστήματος εἶναι $L = |\mathcal{L}(G)|$ καὶ ἀπὸ τὰ προηγούμενα ὑποθέτουμε ὅτι τὸ μῆκος κάθε τιμῆς x_v μὲ $v \in V(G)$ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος εἶναι τὸ πολὺ $O(L)$.
Ἄς σκιαγραφήσουμε τὸν ἀλγόριθμο.

1. Φτιάξε τὸ γραμμικὸ σύστημα $\mathcal{L}(G)$. Χρόνος καὶ μῆκος $O(n+m)$
2. Λύσε τὸ $\mathcal{L}(G)$. Χρόνος τοὐλάχιστον $O(n^{3,5}L^2 \ln L \ln\ln L)$.
3. Μετέτρεψε τὴν λύση τοῦ $\mathcal{L}(G)$ σὲ ἡμιακέραια. Χρόνος $O(n^2 L \ln L \ln\ln L)$
4. Ἐὰν $k - |V_1| < \left|V_{\frac{1}{2}}\right|/2$, τότε ἐπίστεψε $(K_3, 1)$. Χρόνος $O(n)$
5. Ἐπίστρεψε $\left(G_{\frac{1}{2}}, k - |V_1|\right)$

6.3.3 Σπουδαιότητα τοῦ p-Καλυμμα Κορυφων

Δόθηκαν δύο καλῶς μελετημένες, στὴν διεθνῆ βιβλιογραφία, πυρηνοποιήσεις τοῦ p-Καλυμμα Κορυφων, διότι εἶναι ἕνα σημαντικὸ πρόβλημα τῆς παραμετρικῆς πολυπλοκότητας. Εἶναι σίγουρο, ὅτι οἱ τεχνικὲς ποὺ χρησιμοποιήθηκαν στὸ p-Καλυμμα Κορυφων, ἐφαρμόζονται σὲ πολλὰ ἀκόμη προβλήματα αὐτούσιες ἢ λίγο παραλλαγμένες.
Τέλος πρέπει νὰ ποῦμε, ὅτι οἱ δύο προηγούμενες πυρηνοποιήσεις τοῦ p-Καλυμμα Κορυφων, προφανῶς μποροῦν νὰ συνδυασθοῦν ὅσες φορὲς χρειασθῇ σὲ κάποια ὑλοποίηση τοῦ προβλήματος.

[16]Στὴν χειρότερη περίπτωση, ἐὰν x εἶναι τὸ μῆκος στὸ δυαδικὸ καὶ τῶν δύο ἀριθμῶν μαζί, τότε χρειάζεται χρόνος $O(x \cdot \ln x \cdot \ln\ln x)$ γιὰ κάθε πρᾶξι, διότι ὁ πολλαπλασιασμὸς χρειάζεται τὸν περισσότερο χρόνο ἀπὸ ὅλες τὶς πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς.

6.4 Πυρηνοποιήσεις ἄλλων προβλημάτων

Ἂς μελετηθοῦν ἀκόμη μερικές, σχετικὰ ἁπλὲς πυρηνοποιήσεις προβλημάτων γιὰ ἐξοικείωση. Ἡ βασικὴ τεχνικὴ εἶναι πῶς ψάχνοντας τὸ πρόβλημα, προσπαθοῦμε νὰ ἀπομονώσουμε κάποιο βασικὸ χαρακτηριστικὸ τῆς λύσεως καὶ νὰ τὸ ἐκφράσουμε ὡς ὑπολογίσιμη (ἀναδρομική) συνάρτηση μόνο τῆς παραμέτρου. Ἔτσι, ὅταν ἡ εἴσοδος τοῦ προβλήματος ἔχη αὐτὸ τὸ χαρακτηριστικὸ μεγαλύτερο ἀπὸ ἕνα ὅριο, τὸ ὁποῖο ἐκφράζεται πάλι ὡς ὑπολογίσιμη συνάρτηση τῆς παραμέτρου, τότε ἡ ἀπάντηση εἶναι κατ' εὐθείαν ναὶ ἢ ὄχι. Ἐὰν ἡ εἴσοδος τοῦ προβλήματος ἔχη αὐτὸ τὸ χαρακτηριστικὸ μικρότερο ἀπὸ τὸ προηγούμενο ὅριο, τότε γιὰ νὰ ἀπαντήσουμε λύνουμε τὸ πρόβλημα. Ἡ εἴσοδος εἶναι πλέον οὐσιαστικὰ περιορισμένη ὡς πρὸς τὸ μέγεθος, ἀπὸ μία ὑπολογίσιμη συνάρτηση τῆς παραμέτρου. Στὰ κατωτέρω παραδείγματα ἡ πυρηνοποίηση ὁδηγεῖ σὲ πυρῆνες πολυωνυμικοῦ μεγέθους.

6.4.1 p-Φραγμενο Ανεξαρτητο Συνολο

Μέχρι τώρα δὲν ἔχει ἀποδειχθῆ, ἐὰν τὸ p-Ανεξαρτητο Συνολο ἀνήκη στὴν κλάση **FPT**. Ἐὰν ὅμως ἀλλαχθῆ ἡ παράμετρος, τότε μπορεῖ νὰ μπῆ στὴν κλάση **FPT**.

p-Φραγμενο Ανεξαρτητο Συνολο (p-deg-Independent Set)
Εἴσοδος : Ἕνα γράφημα G καὶ $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος : $\kappa(G,k) = k + \Delta(G)$.
Ἐρώτηση : Ὑπάρχει ἀνεξάρτητο σύνολο $S \subseteq V(G)$ τέτοιο ὥστε $\lvert S\rvert \geq k$;

Ἐδῶ ἡ παράμετρος περιορίζει καὶ τὸν μέγιστο βαθμὸ τοῦ γραφήματος. Παρατηροῦμε ὅτι σὲ ἕνα γράφημα G, ἐὰν μία κορυφὴ ἀνήκη στὸ ἀνεξάρτητο σύνολο S, τότε αὐτομάτως ἀποκλείονται ὅλες οἱ γειτονικές της κορυφές.

Λῆμμα 6.15: Γιὰ κάθε γράφημα G, ἐὰν $|V(G)| \geq (\Delta(G)+1)\cdot(k-1)+1$, τότε ἔχει ἀνεξάρτητο σύνολο μεγέθους τοὐλάχιστον k.

Ἀπόδειξη: Ἐὰν ἡ κορυφὴ v ἀνήκη στὸ ἀνεξάρτητο σύνολο, τότε τὸ πολὺ οἱ $\Delta(G)$ γειτονικές της κορυφὲς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀνήκουν. Θερωροῦμε τὸ ἐναγόμενο ὑπογράφημα G_1 τοῦ G, τὸ ὁποῖο δὲν περιλαμβάνει τὴν v καὶ τὸ πολὺ τὶς $\Delta(G)$ γειτονικές της κορυφές, ἄρα $|V(G)| \leq |V(G_1)| + \Delta(G) + 1$. Τὸ G_1 τὸ πολὺ νὰ εἶναι καὶ αὐτὸ μεγίστου βαθμοῦ $\Delta(G)$. Συνεχίζουμε παρομοίως καὶ μὲ τὸ G_1. Ἐπαναλαμβάνοντας $k-1$ φορὲς τὴν διαδικασία βρίσκουμε $|V(G)| \leq |V(G_{k-1})| + (k-1)\cdot(\Delta(G)+1)$. Πλέον στὸ ἀνεξάρτητο σύνολο βρίσκονται $k-1$ κορυφὲς καὶ χρειάζεται ἀκόμη, μόνο ἄλλη μία, ἄρα $|V(G_{k-1})| \geq 1$, ἀντικαθιστώντας ἔχουμε $|V(G)| \leq (k-1)\cdot(\Delta(G)+1)+1$. Ἑπομένως, ἐὰν $|V(G)| \geq (k-1)\cdot(\Delta(G)+1)+1$, τότε σίγουρα θὰ ὑπάρχη ἀνεξάρτητο σύνολο μεγέθους k. $\dashv$

Τὸ προηγούμενο λῆμμα μᾶς δίνει μία διαδικασία κατασκευῆς πυρήνα. Βρίσκει ἕνα ἄνω φράγμα στὶς κορυφὲς τοῦ γραφήματος G, ἀλλὰ ὄχι ἐλάχιστο. Ἔτσι χρειαζόμαστε τὶς δύο ἐξόδους ΝΑΙ καὶ ΟΧΙ γιὰ τὸν πυρήνα.
Τὸ πλῆρες γράφημα (κλίκα) K_2 ἔχει ἀνεξάρτητο σύνολο μεγέθους 1, ἄρα ἡ ἔξοδος ΝΑΙ θὰ εἶναι τὸ $(K_2, 1)$.
Τὸ πλῆρες γράφημα K_2 δὲν ἔχει ἀνεξάρτητο σύνολο μεγέθους 2, ἄρα ἡ ἔξοδος ΟΧΙ θὰ εἶναι τὸ $(K_2, 2)$. Ἡ ἔξοδος ΟΧΙ δὲν θὰ χρειασθῆ καὶ ὁρίσθηκε μόνο γιὰ τυπικοὺς λόγους.
Τὸ μέγεθος τοῦ πυρήνα αὐτοῦ εἶναι $(k-1)\cdot(\Delta(G)+1)+1$.

Πυρήνας algBlIndSet.

BlIndSetf(G, k)
// $G = (V, E)$ γράφημα, $k \geq 0$

1. Ἐὰν $|V(G)| \geq (k-1)\cdot(\Delta(G)+1)+1$ τότε
   ἐπίστρεψε $(K_2, 1)$ // Ἔξοδος ΝΑΙ, χρόνος $O(|V(G)|)$
2. Ἐπίστρεψε (G, k) // Ἔξοδος γιὰ ὑποχρεωτικὴ εὕρεση τοῦ ἀνεξαρτήτου συνόλου

Ὁ πυρήνας αὐτός, ἂν καὶ πολὺ ἁπλός, δείχνει ὅτι τὸ μέγεθός[17] του, ἐξαρτᾶται ἀποκλειστικὰ ἀπὸ τὴν παράμετρο. Ἐδῶ ἡ παράμετρος εἶναι ἕνα γνωστὸ ἄθροισμα δύο ὅρων, τὸ μέγεθος τοῦ πυρήνα ἐξαρτᾶται ἀπὸ αὐτοὺς τοὺς ὅρους, ἔτσι πληροῦται ὁ ὁρισμὸς τῆς πυρηνοποιήσεως. Σὲ κάθε πυρήνα, τὸ μέγεθός του, εἶναι τὸ χαρακτηριστικὸ ποὺ περιορίζει τὴν εἴσοδο τοῦ προβλήματος ποὺ πρέπει νὰ λυθῆ τελικά.
Σὲ αὐτὸν τὸν πυρήνα φαίνεται καθαρὰ ὁ λόγος, γιὰ τὸν ὁποῖο ἔπρεπε νὰ ἀλλαχθῆ ἡ παραμετροποίηση στὸ p-Ανεξαρτητο Συνολο. Ὁ μέγιστος βαθμὸς $\Delta(G)$ κάθε γραφήματος G, εἶναι $n-1$ μὲ $n = |V(G)|$. Ἔχοντας ὑπ' ὄψιν τὸ προηγούμενο λῆμμα ἀπὸ τὴν θεωρία γραφημάτων, εἶναι πολὺ εὔκολο τεχνικά, τὸ πρόβλημα μὲ αὐτὴν τὴν παραμετροποίηση νὰ μπῆ στὴν κλάση **FPT**. Βεβαίως, αὐτὴ ἡ τεχνικὴ ἀλλαγὴ στὴν παράμετρο ἔχει καὶ πρακτικὴ σημασία, διότι κάποιες κλάσεις γραφημάτων ἔχουν φραγμένο τὸ $\Delta(G)$ π.χ. δυαδικὰ δένδρα, ἐὰν T δυαδικὸ δένδρο, τότε $\Delta(T) = 3$.

[17]Μέγεθος ἑνὸς πυρήνα λέγεται γιὰ συντομία τὸ μέγιστο μέγεθος τῆς ἐξόδου του.

6.4.2 p-Εύκολη Γραμμική Παράταξη

Δοθέντος ἑνὸς γραφήματος G, μποροῦμε νὰ βροῦμε μία γραμμικὴ διάταξη σ τῶν κορυφῶν του, τέτοια ὥστε ἐὰν σὲ κάθε ἀκμὴ $\{v, u\}$ τοῦ G, ἀντιστοιχηθῆ βάρος $|\sigma(v) - \sigma(u)|$ αὐτὸ νὰ εἶναι μικρότερο ἢ ἴσο τοῦ k;

p-Εύκολη Γραμμική Παράταξη (p-Linear Arrangement)

Εἴσοδος : Ἕνα γράφημα G καὶ $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος : $\kappa(G, k) = k$.
Ἐρώτηση : Ὑπάρχει μία 1 - 1 συνάρτηση $\sigma : V(G) \to \{1, 2, \ldots, |V(G)|\}$ τέτοια ὥστε

$$\sum_{\{v,u\} \in E(G)} |\sigma(v) - \sigma(u)| \leq k$$

Παρατήρηση: Τὸ μὴ παραμετροποιημένο πρόβλημα εἶναι **NP**-πλῆρες.

Πρόταση 6.13: Ἡ p-Εύκολη Γραμμική Παράταξη ἀνήκει στὴν κλάση **FPT**.

Ἀπόδειξη: Ἐδῶ παρατηροῦμε, ὅτι γιὰ δύο ὁποιεσδήποτε κορυφὲς v, u, ἔχουμε $|\sigma(v) - \sigma(u)| \geq 1$, ἀλλιῶς ἡ σ δὲν θὰ εἶναι 1 - 1. Ἐπίσης ἡ σ εἶναι καὶ ἐπί. Ἐὰν $|E(G)| > k$, τότε τὸ ἄθροισμα

$$\sum_{\{v,u\} \in E(G)} |\sigma(v) - \sigma(u)|$$

θὰ εἶναι μεγαλύτερο τοῦ k, ἄρα ἡ ἀπάντηση εἶναι ὄχι.
Ἐὰν στὴν εἴσοδο, τὸ γράφημα G ἀναπαρίσταται ὡς πίνακας $n \times n$ μὲ $n = |V(G)|$, τότε χρειάζεται χρόνος $O(n^2)$, γιὰ νὰ βρεθῆ ἐὰν ἔχη πάνω ἀπὸ k ἀκμές. Ἐὰν ὅμως εἶναι λίστα κορυφῶν, χρειάζεται χρόνος $O(n + m)$ μὲ $m = |E(G)|$, διότι ἐξετάζουμε τὸ πολὺ τὶς n κορυφές, καθῶς καὶ ὅλη τὴν λίστα τῶν ἀκμῶν τῆς κάθε κορυφῆς[18], γιὰ νὰ βροῦμε ἐὰν ἔχη τοὐλάχιστον μία νέα ἀκμή.
Ἐὰν τὸ γράφημα ἔχη τὸ πολὺ k ἀκμές, τότε τὸ πολὺ νὰ ἔχη $2 \cdot k$ κορυφές. Ἔτσι παίρνουμε ὅλες τὶς $(2 \cdot k)!$ μεταθέσεις τῶν κορυφῶν ὡς σ καὶ βλέπουμε ἐὰν κάποια ἱκανοποιῆ τὸν πιὸ πάνω τύπο. Στὸν ἑπόμενο ἀλγόριθμο, τὸ βῆμα 1 εἶναι ὁ πυρήνας τοῦ προβλήματος μεγέθους k, διότι οὐσιαστικὰ ἐπιλύεται τὸ πρόβλημα μόνο γιὰ ὅσα γραφήματα ἔχουν τὸ πολὺ k ἀκμές. Στὸ βῆμα 1, τὸ μέγεθος τοῦ γραφήματος περιορίζεται τὸ πολὺ σὲ $2 \cdot k$ κορυφές. Ὁ πυρήνας

[18] Ἡ λίστα κάθε κορυφῆς ἔχει τὸ πολὺ βάθος n, ἀλλὰ συνολικὰ τὸ βάθος γιὰ ὅλες τὶς λίστες τῶν κορυφῶν εἶναι τὸ πολὺ $2m$. Ἡ βελτίωση δὲν εἶναι σημαντική, διότι στὴν χειρότερη περίπτωση, ἐὰν τὸ γράφημα εἶναι πυκνό, ἔχουμε $m = O(n^2)$.

ἔχει ἐνσωματωθῆ κατ' εὐθείαν στὸν ἀλγόριθμο, γιὰ βελτίωση τοῦ σταθεροῦ παράγοντα τοῦ O στὸν συνολικὸ χρόνο ἐκτελέσεως τοῦ ἀλγορίθμου.

Ὁ Ἀλγόριθμος

1. Ἐὰν οἱ ἀκμὲς εἶναι πάνω ἀπὸ k ἡ ἀπάντηση εἶναι ὄχι. Χρόνος $O\left(n^2\right)$.
2. Λύσε τὸ πρόβλημα ποὺ τώρα ἔχει τὸ πολὺ k ἀκμές, παίρνοντας ὅλες τὶς $(2 \cdot k)!$ μεταθέσεις ὡς σ. Ἐὰν κάποια ἱκανοποιῆ τὸν ἀνωτέρω τύπο, ἀπάντησε ναί, ἀλλιῶς ὄχι. Χρόνος τοὐλάχιστον $O\left((2 \cdot k)!\right)$.

Ἄρα ὁ συνολικὸς χρόνος εἶναι $O\left((2 \cdot k)! + n^2\right)$. Συνεπῶς, τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἀνήκει στὴν κλάση **FPT**. $\dashv$

Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξη θὰ ἴσχυε πάλι, ἐὰν στὴν θέση τοῦ k βάζαμε μιὰ ὁποιαδήποτε συνάρτηση $g(k)$ μὲ g ὑπολογίσιμη[19].

Τὸ πρόβλημα p-Δυσκολη Γραμμικη Παραταξη δὲν περιορίζει τὸ ἄθροισμα $\sum_{\{v,u\} \in E(G)} |\sigma(v) - \sigma(u)|$ μὲ μία συνάρτηση τῆς παραμέτρου k, ἀλλὰ μὲ μία συνάρτηση τῆς παραμέτρου k καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κορυφῶν $V(G)$. Ἔτσι ἡ προηγουμένη ἀπόδειξη δὲν μπορεῖ νὰ κατασκευάση πυρήνα γιὰ τὸ p-Δυσκολη Γραμμικη Παραταξη.

6.4.3 p-Σχεδον Μεγιστος Βαθμος Ενα

Δοθέντος ἑνὸς γραφήματος G, μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕνα ὑποσύνολο κορυφῶν S μεγέθους k, τέτοιο ὥστε, ἐὰν ἀπὸ τὸ γράφημα G ἀφαιρέσουμε τὶς κορυφὲς τοῦ S, ὅλες οἱ κορυφὲς τοῦ ἐναγομένου ὑπογραφήματος νὰ ἔχουν βαθμὸ 0 ἢ 1;

p-Σχεδον Μεγιστος Βαθμος Ενα (p-Almost Max Degree One)

Εἴσοδος : Ἕνα γράφημα G καὶ $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος : $\kappa(G, k) = k$.
Ἐρώτηση : Ὑπάρχει ἕνα ὑποσύνολο S τοῦ $V(G)$, μεγέθους μικροτέρου ἢ ἴσου τοῦ k καὶ ὅλες οἱ κορυφὲς τοῦ ἐναγομένου ὑπογραφήματος $G[V(G) - S]$ νὰ ἔχουν βαθμὸ 0 ἢ 1;

Παρατήρηση: Ἐὰν ὑπάρχη ἕνα μονοπάτι μήκους 2, τότε ὑπάρχει καὶ μιὰ κορυφὴ τοὐλάχιστον βαθμοῦ 2. Ἑπομένως, τὸ γράφημα $G[V(G) - S]$ θὰ ἔχη ἀπομονωμένες κορυφὲς βαθμοῦ 0 καὶ μεμονωμένες ἀκμές.

[19] Οἱ ἀκμὲς θὰ ἦταν τὸ πολὺ $g(k)$ καὶ οἱ μεταθέσεις τὸ πολὺ $(2 \cdot g(k))!$, συνεπῶς, τὸ μέγεθος τοῦ πυρήνα εἶναι $g(k)$. Ἐδῶ μπορεῖ νὰ γίνη καὶ fpt-ἀναγωγὴ μὲ τὸ ἴδιο γράφημα G καὶ νέα παράμετρο $k' = g(k)$.

Πρόταση 6.14: Τὸ πρόβλημα p-Σχεδον Μεγιστος Βαθμος Ενα ἀνήκει στὴν κλάση **FPT**.

Ἀπόδειξη: Τὸ πρόβλημα p-Σχεδον Μεγιστος Βαθμος Ενα ἔχει μία ὁμοιότητα μὲ τὸ p-Καλυμμα Κορυφων, δηλαδὴ ἀνὰ δύο ἀκμὲς ποὺ ἔχουν κοινὴ μία κορυφή, κάποια ἀπὸ τὶς τρεῖς κορυφὲς πρέπει νὰ βρίσκεται στὸ S, ἀλλιῶς ὑπάρχει ἕνα μονοπάτι μήκους δύο καὶ τότε σίγουρα ἡ ἀπάντηση θὰ εἶναι ὄχι.
Τὸ γράφημα G ἔχει n κορυφὲς καὶ m ἀκμές. Αὐτὸ συνεπάγεται τὸν ἑξῆς ἀλγόριθμο[20]:

Ἀλγόριθμος algAlmDegrOne

pAlmDegrOnef(G, k)
// $G = (V, E)$ γράφημα, $k \geq 0$ καὶ $n = V(G)$, $m = E(G)$

1. Εἶναι τὸ k ἴσο μὲ μηδέν;
   (α′) Ἐὰν ΟΧΙ, πήγαινε στὸ 2
   (β′) Βρὲς ἐὰν ὑπάρχη κορυφὴ βαθμοῦ 2 (Χρόνος $O(n)$)
   (γ′) Ἐὰν ὑπάρχη, ἐπέστρεψε ΟΧΙ
   (δ′) Ἐπέστρεψε ΝΑΙ
2. Βρὲς δύο διαδοχικὲς ἀκμὲς τὶς $e_1 = \{v, u\}$ καὶ $e_2 = \{u, w\}$ (Χρόνος $O(n)$)
3. Ἐὰν δὲν βρῇς, ἐπέστρεψε ΝΑΙ
4. Φτιάξε τὰ ἐναγόμενα ὑπογραφήματα $G - \{u\}, G - \{v\}, G - \{w\}$ (Χρόνος $O(n + m)$)
5. Ἐπέστρεψε
   pAlmDegrOnef$(G - \{u\}, k - 1) \vee$
   pAlmDegrOnef$(G - \{v\}, k - 1) \vee$
   pAlmDegrOnef$(G - \{w\}, k - 1)$

Εἶναι προφανές, ὅτι ἡ προηγουμένη συνάρτηση φτιάχνει ἕνα δένδρο βάθους k στὸ βῆμα 5, μὲ κάθε γονέα νὰ ἔχη τρεῖς ἀπογόνους. Τὰ φύλλα του εἶναι 3^k

[20] Παρόμοιον μὲ τὸν algVC τοῦ p-Καλυμμα Κορυφων, στὸ θεώρημα 2.1 τοῦ κεφαλαίου 2. Ἀποφεύγονται οἱ λεπτομέρειες στὴν ἀπόδειξη, καθῶς αὐτὴ ἡ ἀπόδειξη εἶναι παρόμοια μὲ αὐτὴν τοῦ θεωρήματος 2.1.

καὶ ὁ μέγιστος χρόνος $O(n+m)$ εἶναι στὸ βῆμα 4, ἄρα ὁ συνολικὸς χρόνος τοῦ ἀλγορίθμου εἶναι $O\left(3^k \cdot (n+m)\right)$. Τὸ γράφημα στὴν εἴσοδο θεωρεῖται ὅτι εἶναι κωδικοποιημένο ὡς λίστα κορυφῶν, ἐὰν εἶναι ὡς πίνακας, οἱ χρόνοι στὰ βήματα 1.(β′) καὶ 2 γίνονται $O(n^2)$, ἄρα συνολικὸς χρόνος $O\left(3^k \cdot n^2\right)$ [21]. ⊣

Γιὰ τὴν δημιουργία πυρήνα χρειάζονται δύο ἔξοδοι, μία τύπου ΝΑΙ καὶ μία τύπου ΟΧΙ, ὅσο τὸ δυνατὸν πιὸ μικρές.
Τὸ πλῆρες γράφημα (κλίκα) K_2 ἔχει σύνολο σχεδὸν βαθμὸς ἕνα μεγέθους 1, ἄρα ἡ ἔξοδος ΝΑΙ θὰ εἶναι τὸ $(K_2, 1)$.
Τὸ πλῆρες γράφημα K_4 ἔχει σύνολο σχεδὸν βαθμὸς ἕνα μεγέθους 2, ἀλλὰ ὄχι 1, ἄρα ἡ ἔξοδος ΟΧΙ θὰ εἶναι τὸ $(K_4, 1)$.

Πρόταση 6.15: Τὸ πρόβλημα p-Σχεδον Μεγιστος Βαθμος Ενα ἔχει πυρήνα.

Ἀπόδειξη: Παρατηροῦμε, ὅτι ἐὰν τὸ γράφημα περιέχη ἕνα πλῆρες γράφημα (κλίκα) K_{k+3} μεγέθους $k+3$, τότε σίγουρα δὲν ἔχει ὑποσύνολο κορυφῶν S μὲ $|S| \leq k$, γιατὶ ὅποιες κορυφὲς καὶ νὰ ἀφαιρεθοῦν, περισσεύει μία κλίκα K_3 μεγέθους τρία. Ἄρα ὅταν ψάχνουμε γιὰ μία λύση στὸ p-Σχεδον Μεγιστος Βαθμος Ενα μεγέθους τὸ πολὺ k, τότε κάθε κορυφὴ βαθμοῦ μεγαλύτερου ἢ ἴσου ἀπὸ $k+2$, θὰ πρέπη νὰ ἀνήκη στὸ σύνολο S, ἀλλιῶς ἔχουμε μία κορυφὴ βαθμοῦ τοὐλάχιστον δύο.
Ἀπὸ ἐδῶ καὶ πέρα, ἀφαιροῦνται ὅλες οἱ κορυφὲς βαθμοῦ μεγαλυτέρου ἢ ἴσου ἀπὸ $k+2$, διότι ἀνήκουν στὸ σύνολο S καὶ θεωρεῖται ὅτι τὸ γράφημα G [22] ἔχει μέγιστο βαθμὸ $k+1$[23].
Τὰ προηγούμενα δίνουν ἕνα μέρος τοῦ ἀλγορίθμου γιὰ τὴν εὕρεση πυρήνα. Κάθε φορὰ ποὺ μπαίνει στὸ S μία κορυφὴ βαθμοῦ μεγαλύτερου ἢ ἴσου ἀπὸ $k+2$, μειώνεται τὸ k κατὰ 1 καὶ ἡ διαδικασία ἐπαναλαμβάνεται μὲ τὸ νέο μειωμένο k, μέχρι τὸ k νὰ γίνη 0 ἢ νὰ μὴν ὑπάρχη κορυφὴ βαθμοῦ μεγαλυτέρου ἢ ἴσου ἀπὸ $k+2$.
Πλέον δὲν φαίνεται εὔκολο νὰ περιορισθοῦν ἄλλο οἱ κορυφές, δὲν εἶναι τοὐλαχιστον ἁπλό. Ἔτσι θὰ γίνη προσπάθεια νὰ περιορισθοῦν οἱ ἀκμές. Γιὰ νὰ γίνη αὐτὸ θὰ ἐξετασθοῦν κάποιες εὔκολες περιπτώσεις (ἢ συνδυασμός τους) καὶ ἀπὸ αὐτές θὰ παρθῆ αὐτὴ ποὺ δίνει τὸν μικρότερο ἀριθμὸ ἀκμῶν. Ἐὰν ἡ προηγουμένη διαδικασία δίνη μὴ συνεκτικὸ γράφημα, τότε θὰ ἐξετασθῆ ἀπὸ ἐδῶ καὶ πέρα ἡ συνεκτικὴ συνιστῶσα μὲ τὶς περισσότερες ἀκμές.

[21] Ἡ βελτίωση δὲν εἶναι σημαντική, διότι τὸ πλῆρες γράφημα K_n ἔχει $n \cdot (n-1)/2 = O\left(n^2\right)$ ἀκμές.

[22] Οὐσιαστικὰ εἶναι τὸ ἐναγόμενο ὑπογράφημα τοῦ G καὶ ἀπὸ τὸ k ἔχει ἀφαιρεθῆ ὁ ἀριθμὸς τῶν κορυφῶν τοῦ G ποὺ ἔχουν μπεῖ στὸ S.

[23] Τὸ G περιέχει μόνο κορυφὲς βαθμοῦ ἴσου ἢ μικροτέρου τοῦ $k+1$.

Παρατηροῦμε ἐπίσης, ὅτι ἐὰν ὑπάρχῃ ἕνα μονοπάτι P_{3k+3} [24] μεταξὺ δύο κορυφῶν, βγάζοντας k κορυφὲς βαθμοῦ 2, βγαίνουν $2k$ ἀκμὲς καὶ περισσεύουν $2k+3$ κορυφὲς καὶ $k+2$ ἀκμές. Μὲ $k+2$ ἀκμές, καλύπτονται ἀκριβῶς $2k+4$ κορυφὲς βαθμοῦ 1, ἐδῶ ἔχουμε ὅμως $2k+3$ κορυφές. Ἄρα κάποια κορυφὴ θὰ ἔχῃ βαθμὸ 2, συνεπῶς ξέρουμε ὅτι τέτοιο γράφημα δὲν ἔχει p-ΣΧΕΔΟΝ ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΒΑΘΜΟΣ ΕΝΑ μεγέθους k.
Ἡ προηγουμένη παράγραφος δείχνει, ὅτι ἐὰν μποροῦμε νὰ βροῦμε $k+1$ ξένα μονοπάτια[25] P_3 [26], τότε δὲν ὑπάρχει στὸ γράφημα ὑποσύνολο S μεγέθους k, ἀφοῦ μὲ k κορυφὲς θὰ πρέπῃ νὰ καλυφθοῦν $k+1$ τριάδες κορυφῶν, ὥστε οἱ ἐναπομείνασες $2k+3$ κορυφὲς νὰ ἔχουν βαθμὸ 1.
Προφανῶς, μία κορυφὴ βαθμοῦ $k+1$ θὰ εἶναι στὸ S αὐτὴ ἢ k ἀπὸ τὶς γειτονικές της κορυφές, μὲ τὶς ὁποῖες ἑνώνεται μὲ μία ἀκμή[27]. Ἔτσι ἐὰν ὑπάρχουν τοὐλάχιστον $k+2$ κορυφὲς βαθμοῦ $k+1$ ποὺ δὲν ἀνῆκουν στὸ ἴδιο πλῆρες γράφημα (κλίκα) K_{k+2}, τότε δὲν ὑπάρχει στὸ γράφημα τὸ ζητούμενο ὑποσύνολο S μεγέθους k. Αὐτὸ ἐξασφαλίζεται, ὅταν τὸ γράφημα ἔχῃ μία τοὐλάχιστον ἀκμὴ παραπάνω ἀπὸ αὐτὲς τοῦ πλήρους γραφήματος K_{k+2} [28].
Ἄρα, ἐὰν ὑπάρχουν πάνω ἀπὸ $O\left(k^2\right)$ [29] ἀκμὲς στὸ γράφημα, ποὺ ὅπως ἔχει εἰπωθῆ, ὑποτίθεται ὅτι εἶναι συνεκτικό, ἴσως δὲν ὑπάρχει λύση μεγέθους k στὸ πρόβλημα p-ΣΧΕΔΟΝ ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΒΑΘΜΟΣ ΕΝΑ. Τὸ γράφημα αὐτό, ποὺ κάθε κορυφὴ ἔχει βαθμὸ μικρότερο ἢ ἴσο τοῦ $k+1$, θὰ προσδιορισθῆ ἀπὸ τὸ μονοπάτι P_{3k+3} καὶ γιὰ εὐκολία στὴν ἀπόδειξη θὰ πάρουμε ἕνα γράφημα μὲ τοὐλάχιστον $15k^2$ ἀκμές. Χωρὶς νὰ εἶναι ἐλάχιστο ἄνω φράγμα εἶναι σίγουρα ἄνω φράγμα[30].
Ἕνα συνεκτικὸ γράφημα μὲ $15k^2$ ἀκμές, ἔχει σίγουρα τοὐλάχιστον $3\cdot(k+1)$ κορυφές, ἀφοῦ μία κλίκα $K_{3\cdot(k+1)}$ ἔχει $\frac{1}{2}\cdot(3k+3)\cdot(3k+2)=\frac{9}{2}\cdot k^2+\frac{15}{2}\cdot k+3$ ἀκμές, ποὺ εἶναι λιγότερες ἀπὸ $15k^2$ ἀκμές.
Ἀφοῦ τὸ γράφημα εἶναι συνεκτικό, βαθμοῦ $k+1$ καὶ ἔχει πάνω ἀπὸ $3\cdot(k+1)$ κορυφές, τότε σίγουρα περιέχει σὰν ὑπογράφημα ἕνα μονοπάτι P_{3k+3}. Βγάζοντας ὁποιεσδήποτε k κορυφὲς ἀπὸ αὐτὸ τὸ μονοπάτι, ὅπως ἐδείχθη προηγουμένως σίγουρα θὰ ὑπάρχῃ μία κορυφὴ βαθμοῦ 2. Ἄρα, θὰ ὑπάρχῃ μία συνεκτικὴ συνιστῶσα μὲ μία κορυφὴ τοὐλάχιστον βαθμοῦ 2 στὸ γράφημα, συνεπῶς τὸ

[24] Τὸ μονοπάτι P_{3k+3} ἔχει μῆκος $3k+2$ καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ $3k+3$ διαφορετικὲς κορυφὲς καὶ $3k+2$ διαφορετικὲς ἀκμές.

[25] Δύο μονοπάτια ἑνὸς γραφήματος, εἶναι ξένα μεταξύ τους, ἐὰν δὲν ἔχουν κοινὲς κορυφές.

[26] Προφανῶς, τὸ P_3 ἔχει μῆκος 2, 3 κορυφὲς καὶ 2 ἀκμές.

[27] Ἄρα γίνεται φανερό, ὅτι ἕνα πλῆρες διμερὲς γράφημα $K_{k+1,k+1}$ δὲν γίνεται νὰ ἔχῃ ὑποσύνολο S μεγέθους k.

[28] Τὸ πλῆρες γράφημα K_{k+2} ἔχει $\frac{1}{2}\cdot(k+1)\cdot(k+2)$ ἀκμές. Ἄρα τὸ ἄνω φράγμα θὰ ἔχῃ μέγεθος τάξεως $O\left(k^2\right)$

[29] Τὸ γράφημα αὐτό, σίγουρα θὰ περιέχῃ περισσότερες ἀκμὲς ἀπὸ τὸ πλῆρες γράφημα K_{k+2}. Ὁ κρυφὸς σταθερὸς παράγοντας πίσω ἀπὸ τὸ O θὰ ὑπολογισθῆ πιὸ κάτω.

[30] Τὸ πλῆρες γράφημα K_{k+2} προσδιορίζει τὸν παράγοντα k^2 καὶ τὸ μονοπάτι P_{3k+3} τὸν παράγοντα 15.

γράφημα αὐτὸ δὲν καλύπτεται μὲ k κορυφές.

Πυρήνας algAlmDegrOneKernel

pAlmDegrOneKernelf(G, k)
// $G = (V, E)$ γράφημα, $k \geq 0$ καὶ $n = V(G)$, $m = E(G)$

1. Βρὲς ἕναν κόμβο u μὲ βαθμὸ $deg(u) \geq k + 2$
2. Ἐὰν ΝΑΙ καὶ k ἴσον μὲ μηδέν, ἐπέστρεψε $(K_4, 1)$
3. Ἐὰν ΟΧΙ, πήγαινε στὸ βῆμα 6
4. Φτιάξε τὸ ἐναγόμενο ὑπογράφημα $G - \{u\}$ (Χρόνος $O(n + m)$)
5. Ἐπέστρεψε pAlmDegrOneKernelf$(G - \{u\}, k - 1)$
6. Ἔχει τὸ γράφημα πάνω ἀπὸ $15k^2$ ἀκμές $(m > 15k^2)$;
7. Ἐὰν ΟΧΙ, ἐπέστρεψε (G, k) // Ἔξοδος γιὰ ὑποχρεωτικὴ λύση τοῦ προβλήματος
8. Ἐπέστρεψε $(K_4, 1)$.

Τὸ μέγεθος τοῦ πυρήνα εἶναι $15k^2$ ἀκμὲς καὶ οἱ κορυφὲς τοῦ γραφήματος εἶναι τὸ πολὺ $30k^2$. Εἶναι προφανές, ὅτι ἡ προηγουμένη συνάρτηση ἐπαναλαμβάνει τὸ βῆμα 5 τὸ πολὺ k φορές, ἐνῶ στὸ βῆμα 1 χρειάζεται χρόνος $O(k \cdot n)$, στὸ βῆμα 4 χρόνος $O(n + m)$ καὶ στὸ βῆμα 6, μόνο μία φορά, χρόνος $O(k^2)$. Ἑπομένως, ὁ συνολικὸς χρόνος τοῦ ἀλγορίθμου εἶναι $O(k^2 \cdot (n + m))$ [31]. Τὸ γράφημα στὴν εἴσοδο θεωρεῖται ὅτι εἶναι κωδικοποιημένο ὡς λίστα κορυφῶν, ἐὰν εἶναι ὡς πίνακας, ὁ χρόνος στὰ βήματα 1 καὶ 4 γίνεται $O(n^2)$, ἄρα ὁ συνολικὸς χρόνος εἶναι $O(k \cdot n^2)$. $\dashv$

6.5 Ἀναφορές, Σχόλια

Ἡ ἔννοια τῆς προεργασίας δυσκόλων προβλημάτων, ὑπάρχει ἀπὸ τὶς ἀρχὲς τῆς ἔρευνας γιὰ τοὺς ἀλγορίθμους καὶ εἶναι σχεδὸν ἀδύνατον νὰ ἀποδοθῆ σὲ κάποιους.

Τὸ θεώρημα 6.5 ἔχει ἀποδειχθῆ ἀπὸ τὸν Niedermeier στὸ [50]. Τὸ θεώρημα 6.6 εἶναι τῶν Flum καὶ Grohe ἀπὸ τὸ [35], βασίζεται σὲ μία ἰδέα τῶν Cai καὶ

[31] Ἀναλυτικὰ ὁ χρόνος εἶναι $O\left(k^2 \cdot n + k \cdot (n + m) + k^2\right)$, γιὰ εὐκολία θεωρεῖται λίγο περισσότερος χρόνος $O\left(k^2 \cdot (n + m)\right)$.

λοιπῶν στὸ [14].

Ἡ πυρηνοποίηση τοῦ Buss ἀποδίδεται στὸν S. Buss καὶ βρίσκεται στὸ βιβλίο [29]. Ἡ ἰδέα τῆς πυρηνοποιήσεως Nemhauser Trotter βρίσκεται στὸ [49], ἐκεῖ ἀναλύθηκε ὁ γραμμικὸς προγραμματισμὸς γιὰ τὸ Καλυμμα Κορυφων. Οἱ Chen καὶ λοιποὶ στὸ [21] παρατήρησαν ὅτι τὸ ἄρθρο [49] δίνει μία πυρηνοποίηση τοῦ p-Καλυμμα Κορυφων.

Ἡ ἀποτίμηση ἐρωτημάτων σὲ βάσεις δεδομένων, ὅπως ἔχει ἀναφερθῆ καὶ ἔχουν δείξει οἱ Παπαδημητρίου καὶ Γιαννακάκης στὸ [54], εἶναι δύσκολο πρόβλημα, εἰκάζεται ὅτι δὲν ἀνήκει στὴν κλάση **FPT**.

Ἡ κεντρικὴ ἰδέα τοῦ θεωρήματος 6.8 ὀφείλεται στὸν Lenstra στὸ [48] καὶ βελτιώθηκε ἀπὸ τὸν Kannan στὸ [44], ἐπίσης σχετικὸ εἶναι τὸ ἄρθρο [47] τοῦ Lagarias.

Ὅλο τὸ τμῆμα 6.4 ἀποτελεῖται ἀπὸ μέρος τῶν ἀσκήσεων καὶ τῶν λύσεών μου, τοῦ μαθήματος Λ05Γ. Παραμετρικη Πολυπλοκοτητα και Αλγοριθμοι τοῦ μΠλ∀, τὸ ὁποῖο δόθηκε ὡς προαιρετικό, τὸ ἐαρινὸ ἑξάμηνο τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ ἔτους 2005-6, μὲ διδάσκοντα τὸν κ. Δημήτριο Μ. Θηλυκό. Τὶς ἀσκήσεις αὐτὲς ἔδωσε καὶ μετὰ τὶς λύσεις ἔλεγξε ὁ διδάσκων. Τὸ Ευκολη Γραμμικη Παραταξη εἶναι **NP**-πλῆρες, περισσότερα στὰ [39] καὶ [33]. Ὁ Fernau στὸ [33] ἀποδεικνύει ὅτι τὸ p-Ευκολη Γραμμικη Παραταξη ἀνήκει στὴν κλάση **FPT**. Τὸ πρόβλημα p-Σχεδον Μεγιστος Βαθμος Ενα ἔχει μελετηθῆ στὸ διδακτορικὸ [59] τοῦ Sloper.

Βιβλιογραφία

[1] Abrahamson, Karl A. and Downey, Rodney G. and Fellows, Michael R., *Fixed-parameter tractability and completeness. IV. On completeness for W[P] and PSPACE analogues*, Ann. Pure Appl. Logic **73** (1995), no. 3, 235–276. MR MR1336643 (96m:68058c)

[2] Abrahamson, Karl R. and Ellis, J. A. and Fellows, Michael R. and Mata, M. E., *On the complexity of fixed parameter problems (extended abstract)*, Proc. 30th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Research Triangle Park, North Carolina, IEEE Computer Society, 30 Oct.–1 Nov. 1989, pp. 210–215.

[3] Adachi, Akeo and Iwata, Shigeki and Kasai, Takumi, *Some combinatorial game problems require $\Omega(n^k)$ time*, J. Assoc. Comput. Mach. **31** (1984), no. 2, 361–376. MR MR819145

[4] Alber, Jochen and Bodlaender, Hans L. and Fernau, Henning and Kloks, Ton and Niedermeier, Rolf, *Fixed parameter algorithms for dominating set and related problems on planar graphs*, Algorithmica **33** (2002), no. 4, 461–493. MR MR1905736 (2003d:05199)

[5] Alber, Jochen and Fan, Hongbing and Fellows, Michael R. and Fernau, Henning and Niedermeier, Rolf and Rosamond, Fran and Stege, Ulrike, *A refined search tree technique for dominating set on planar graphs*, J. Comput. System Sci. **71** (2005), no. 4, 385–405. MR MR2178072 (2006g:05146)

[6] Alber, Jochen and Fernau, Henning and Niedermeier, Rolf, *Parameterized complexity: exponential speed-up for planar graph problems*, J. Algorithms **52** (2004), no. 1, 26–56. MR MR2063971 (2005f:68038)

[7] Alber, Jochen and Niedermeier, Rolf, *Improved tree decomposition based algorithms for domination-like problems*, LATIN 2002: Theoretical informatics (Cancun), Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 2286, Springer, Berlin, 2002, pp. 613–627. MR MR1966154

[8] Bazgan, Cristina, *Schémas d'approximation et complexité paramétrée*, Mémoire de DEA, Université Paris Sud, 1995.

[9] Bodlaender, Hans and Downey, Rodney G. and Fellows, Michael R. and Wareham, Harold T., *The parameterized complexity of sequence alignment and consensus*, Combinatorial pattern matching (Asilomar, CA, 1994), Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 807, Springer, Berlin, 1994, pp. 15–30. MR MR1289199 (95h:68076)

[10] Bodlaender, Hans L. and Downey, Rodney G. and Fellows, Michael R. and Wareham, H. Todd, *The parameterized complexity of sequence alignment and consensus (extended abstract)*, Proc. of the Fourth Conference on Combinatorial Pattern Matching, (CPM'94), 1994.

[11] ______, *The parameterized complexity of the longest common subsequence problem*, Theoret. Comput. Sci. **147** (1995), 31–54.

[12] Cai, Leizhen, *Parameterized complexity of vertex colouring*, Discrete Appl. Math. **127** (2003), no. 3, 415–429. MR MR1976024 (2004m:68087)

[13] Cai, Liming and Chen, Jianer and Downey, Rodney G. and Fellows, Michael R., *On the structure of parameterized problems in NP*, Inform. and Comput. **123** (1995), no. 1, 38–49. MR MR1358966 (97b:68066)

[14] ______, *Advice classes of parameterized tractability*, Ann. Pure Appl. Logic **84** (1997), no. 1, 119–138, Fifth Asian Logic Conference (Singapore, 1993). MR MR1440466 (98b:68055)

[15] ______, *On the parameterized complexity of short computation and factorization*, Arch. Math. Logic **36** (1997), no. 4-5, 321–337, Sacks Symposium (Cambridge, MA, 1993). MR MR1473029 (98m:68085)

[16] Cesati, Marco, *The Turing way to parameterized complexity*, J. Comput. System Sci. **67** (2003), no. 4, 654–685, Special issue on parameterized computation and complexity. MR MR2036506 (2005f:68040)

[17] ______, *Compendium of Parameterized Problems*, September 2006.

[18] Cesati, Marco and Di Ianni, Miriam, *Computation models for parameterized complexity*, Math. Logic Quart. **43** (1997), no. 2, 179–202, Workshop on Computability, Complexity and Logic (Zinnowitz, 1996). MR MR1453899 (98b:68056)

[19] Cesati, Marco and Trevisan, Luca, *On the efficiency of polynomial time approximation schemes*, Inform. Process. Lett. **64** (1997), no. 4, 165–171. MR MR1491286 (98h:68084)

[20] Chandran, L. Sunil and Grandoni, Fabrizio, *Refined memorization for vertex cover*, Information Processing Letters, ISSN 0020-0190 **93** (2005), no. 3, 125–131.

[21] Chen, Jianer and Kanj, Iyad A. and Jia, Weijia, *Vertex cover: further observations and further improvements*, J. Algorithms **41** (2001), no. 2, 280–301. MR MR1869253 (2002h:05149)

[22] Chen, Jianer and Kanj, Iyad A. and Xia, Ge, *Simplicity is Beauty: Improved Upper Bounds for Vertex Cover*, Technical Report, Texas A&M University, April 2005.

[23] Chen, Yijia and Flum, Jörg and Grohe, Martin, *Machine-based methods in parametrized complexity theory*, Theoret. Comput. Sci. **339** (2005), no. 2-3, 167–199. MR MR2142495 (2006c:68054)

[24] Crescenzi, Pierluigi and Kann, Viggo, *How to find the best approximation results–a follow-up to Garey and Johnson*, ACM SIGACT News **29** (1998), no. 4, 90–97.

[25] Demri, S. and Laroussinie, F. and Schnoebelen, P., *A parametric analysis of the state explosion problem in model checking*, STACS 2002, Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 2285, Springer, Berlin, 2002, pp. 620–631. MR MR2050873

[26] Downey, Rodney G. and Fellows, Michael R., *Parameterized computational feasibility*, Feasible Mathematics II (Progress in Computer Science and Applied Logic) (P. Clote, J. Remmel, ed.), Progr. Comput. Sci. Appl. Logic, vol. 13, Birkhäuser Boston, ISBN-13 978-3-7643-3675-2, Boston, MA, December 1994, (Ithaca, NY, 1992), pp. 219–244. MR MR1322277 (96d:68065)

[27] ———, *Fixed-parameter tractability and completeness. I. Basic results*, SIAM J. Comput. **24** (1995), no. 4, 873–921. MR MR1342997 (96m:68058a)

[28] ———, *Fixed-parameter tractability and completeness. II. On completeness for $W[1]$*, Theoret. Comput. Sci. **141** (1995), no. 1-2, 109–131. MR MR1323150 (96m:68058b)

[29] ———, *Parameterized Complexity*, Monographs in Computer Science, Springer – Verlag, ISBN-13 978-0-387-94883-6, New York, November 1998. MR MR1656112 (2001b:68042)

[30] Downey, Rodney G. and Fellows, Michael R. and Regan, Kenneth W., *Descriptive complexity and the W hierarchy*, Proof complexity and feasible arithmetics (Rutgers, NJ, 1996), DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., vol. 39, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 119–134. MR MR1486617 (99a:68072)

[31] Dreyfous, S. E. and Wagner, Robert A., *The Steiner problem in graphs*, Networks **1** (1972), 195–207.

[32] Fernau, Henning, *A top-down approach to search-trees: Improved algorithmics for 3-Hitting Set*, Technical Report ECCC-078, Electronic Colloquium on Computational Complexity, 2004.

[33] ———, *Parameterized algorithms: A graph-theoretic approach*, Habilitationsschrift, (Universität Tübingen, Tübingen, Germany), April 2005.

[34] Flum, Jörg and Grohe, Martin, *Fixed-parameter tractability, definability, and model-checking*, SIAM J. Comput. **31** (2001), no. 1, 113–145 (electronic). MR MR1857392 (2002h:68063)

[35] ———, *Describing parameterized complexity classes*, Inform. and Comput. **187** (2003), no. 2, 291–319. MR MR2019269 (2004m:68082)

[36] ———, *Model-checking problems as a basis for parameterized intractability*, Log. Methods Comput. Sci. **1** (2005), no. 1, 1:2, 36. MR MR2274621 (2007k:68033)

[37] ———, *Parameterized Complexity Theory*, Springer, ISBN-13 978-3-540-29952-3, March 2006.

[38] Fomin, Fedor V. and Thilikos, Dimitrios M., *Dominating sets in planar graphs: branch-width and exponential speed-up*, Proceedings of the Fourteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (Baltimore, MD, 2003) (New York), ACM, 2003, pp. 168–177. MR MR1974916

[39] Garey, M. R. and Johnson, D. S. and Stockmeyer, L., *Some simplified NP-complete graph problems*, Theoret. Comput. Sci. **1** (1976), no. 3, 237–267. MR MR0411240 (53 #14978)

[40] Garey, Michael R. and Johnson, David S., *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness (Series of Books in the Mathematical Sciences)*, W.H.Freeman & Co Ltd, ISBN-13 978-0-716-71045-5, January 1979.

[41] Große, André and Rothe, Jörg and Wechsung, Gerd, *Relating partial and complete solutions and the complexity of computing smallest solutions*, Theoretical computer science (Torino, 2001), Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 2202, Springer, Berlin, 2001, pp. 339–356. MR MR1915423 (2003c:68085)

[42] Guo, Jiong and Niedermeier, Rolf and Wernicke, Sebastian, *Parameterized complexity of generalized vertex cover problems*, Algorithms and data structures, Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 3608, Springer, Berlin, 2005, pp. 36–48. MR MR2200310 (2006i:68034)

[43] Gutin, Gregory and Rafiey, Arash and Szeider, Stefan and Yeo, Anders, *The linear arrangement problem parameterized above guaranteed value*, Theory Comput. Syst. **41** (2007), no. 3, 521–538. MR MR2352546

[44] Kannan, Ravi, *Minkowski's convex body theorem and integer programming*, Math. Oper. Res. **12** (1987), no. 3, 415–440. MR MR906415 (89c:90078)

[45] Kasai, Takumi and Adachi, Akeo and Iwata, Shigeki, *Classes of pebble games and complete problems*, SIAM J. Comput. **8** (1979), no. 4, 574–586. MR MR573848 (82a:68075)

[46] Kintala, Chandra M. R. and Fischer, Patrick C., *Refining nondeterminism in relativized polynomial-time bounded computations*, SIAM J. Comput. **9** (1980), no. 1, 46–53. MR MR557824 (81b:68049)

[47] Lagarias, Jeffrey C., *Point lattices*, Handbook of combinatorics, Volumes I & II, Elsevier, ISBN-13 978-0-444-88002-4, Amsterdam, December 1995, pp. 919–966. MR MR1373675 (96m:11051)

[48] Lenstra, Hendrik W., *Integer programming with a fixed number of variables*, Math. Oper. Res. **8** (1983), no. 4, 538–548. MR MR727410 (86f:90106)

[49] Nemhauser, G. L. and Trotter, Jr., L. E., *Vertex packings: structural properties and algorithms*, Math. Programming **8** (1975), 232–248. MR MR0366738 (51 #2985)

[50] Niedermeier, Rolf, *Invitation to fixed-parameter algorithms*, Habilitation thesis, (Universität Tübingen, Germany), 2002.

[51] ———, *Invitation to Fixed-Parameter Algorithms*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 31, Oxford University Press, ISBN-13 978-0-19-856607-6, Oxford, March 2006. MR MR2223196 (2007b:68006)

[52] Niedermeier, Rolf and Rossmanith, Peter, *An efficient fixed-parameter algorithm for 3-Hitting Set*, J. Discrete Algorithms **1** (2003), no. 1, 89–102, Combinatorial algorithms. MR MR2016477 (2004j:68081)

[53] Papadimitriou, Christos H., *Computational Complexity*, Addison Wesley, ISBN-13 978-0-201-53082-7, November 1993.

[54] Papadimitriou, Christos H. and Yannakakis, Mihalis, *On the complexity of database queries*, J. Comput. System Sci. **58** (1999), no. 3, 407–427, Sixteenth ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART Symposium on Principles of Database Systems (Tucson, AZ, 1997). MR MR1705076 (2001g:68020)

[55] Pietrzak, Krzysztof, *On the parameterized complexity of the fixed alphabet shortest common supersequence and longest common subsequence problems*, J. Comput. System Sci. **67** (2003), no. 4, 757–771, Special issue on parameterized computation and complexity. MR MR2036512 (2004m:68100)

[56] Rothe, Jörg, *Heuristics versus completeness for graph coloring*, Chicago J. Theoret. Comput. Sci. (2000), Article 1, 16 pp. (electronic). MR MR1755649 (2000m:05221)

[57] ———, *Exact complexity of exact-four-colorability*, Inform. Process. Lett. **87** (2003), no. 1, 7–12. MR MR1979853 (2004d:68123)

[58] Serna, Maria and Thilikos, Dimitrios M., *Parameterized complexity for graph layout problems*, Bull. Eur. Assoc. Theor. Comput. Sci. EATCS (2005), no. 86, 41–65. MR MR2163544

[59] Sloper, Christian, *Techniques in parameterized algorithm design*, Ph.D. thesis, The University of Bergen, ISBN-13 978-82-308-0108-6, Norway, 2006.

[60] Stockmeyer, L., *Planar 3-colorability is NP-complete*, SIGACT News **5** (1973), no. 3, 19–25.