**ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ**
**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

# ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ MACDOWELL – SPECKER

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ ΤΖΑΧΡΙΣΤΑ ΓΙΩΡΓΟΥ**

**ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ**
**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
**ΣΤΗ ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**

$\mu \Pi \lambda \forall$

**ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2003**

# ΠΕΡΙΕΧΌΜΕΝΑ

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1** ........ **3**
ΤΟ ΟΡΘΟΔΟΞΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ........ 3
**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2** ........ **6**
ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟΙ ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ ........ 6
§2.1 ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΟΥ PA- ........ 6
§2.2 ΑΡΧΙΚΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΤΕΛΙΚΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ........ 8
**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3** ........ **11**
ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ PA ........ 11
§3.1 ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ........ 11
§3.2 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΝΕΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ........ 15
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ........ 15
**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4** ........ **17**
ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ ΣΤΟ PA ........ 17
**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5** ........ **21**
ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΟΥ PA ........ 21
§5.1 ΥΠΕΡΧΕΙΛΙΣΗ ........ 22
§5.2 ΔΙΑΤΑΚΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΤΗΣ PA ........ 26
**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6** ........ **32**
ΤΟ ΣΧΗΜΑ ΣΥΛΛΟΓΗΣ ........ 32
§6.1 ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΥΛΛΟΓΗΣ ΚΑΙ ΕΠΑΓΩΓΗΣ ........ 32
§6.2 ΟΜΟΤΕΛΙΚΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ........ 37
**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7** ........ **43**
ΠΡΩΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ........ 43
§7.1 ΟΡΙΣΙΜΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ........ 43
§7.2 ΤΕΛΙΚΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ........ 50

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΤΟ ΟΡΘΟΔΟΞΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Στην εργασία μας αυτή θα μελετήσουμε θεωρίες στην πρωτοβάθμια γλώσσα της Αριθμητικής $\mathcal{L}_A = \{+,\ \ , 0, 1, <\}$.

Το λεγόμενο ‘ορθόδοξο μοντέλο’ είναι η $\mathcal{L}_A$-δομή που ορίζεται ως :

$\mathbb{N} = < \mathbb{N}, +^{\mathbb{N}},\ \ ^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}}, <^{\mathbb{N}} >$.

Το αξιωματικό σύστημα της PA αποτελείται από ένα αριθμό βασικών αξιωμάτων μαζί με το αξιωματικό σχήμα επαγωγής.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με μοντέλα της PA μη ισόμορφα προς το $\mathbb{N}$.

Τέτοιες δομές καλούνται ανορθόδοξες (nonstandard).

Πρώτος που έδειξε την ύπαρξη ανορθόδοξων μοντέλων είναι ο Skolem (1934).

**Θεώρημα**

Υπάρχουν ανορθόδοξα μοντέλα της $Th(\mathbb{N}) = \{\varphi \in \mathcal{L}_A / \mathbb{N} \models \varphi\}$.

**Απόδ**

Επεκτείνουμε την γλώσσα $\mathcal{L}_A$ προσθέτοντας ένα νέο σύμβολο σταθεράς c, και θεωρούμε τη θεωρία

$T = Th(\mathbb{N}) \cup \{c > \underline{n} / n \in \mathbb{N}\}$.

Για να δείξουμε ότι η T είναι συνεπές, (από θεώρημα συμπάγειας) αρκεί κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του T να είναι συνεπές.

Έστω πεπερασμένο $T' \subseteq T$.Το T΄ είναι

$T' = \{\varphi_1, \ldots\ldots, \varphi_\kappa\} \cup \{c > \underline{1}, \ldots\ldots c > \underline{n}\}$.

Θα δείξουμε ότι η δομή $<\mathbb{N}, n+1>$ είναι μοντέλο της T΄. Πράγματι, $<\mathbb{N}, n+1> \models \varphi_i$, για $i = 1, \ldots, k$, αφού $\mathbb{N} \models \varphi_i$ και οι δομές $\mathbb{N}$, $<\mathbb{N}, n+1>$ συμφωνούν στην $\mathcal{L}_A$.

Επίσης $<\mathbb{N}, n+1> \models c > \underline{j}$, κάθε $j = 1, \ldots, n$, αφού $\underline{j}^{\mathbb{N}} = j$ (αυτό αποδεικνύεται με επαγωγή στη μεταγλώσσα).

Άρα υπάρχει μοντέλο M για την T.

Αποδεικνύεται ότι $M \restriction \mathcal{L}_A \ncong \mathbb{N}$ και για το λόγο αυτό καλούμε το M ‘ανορθόδοξο’. Επειδή $M \models c > \underline{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το $c^M$ καλείται ‘ανορθόδοξο’ ή ‘άπειρο’ στοιχείο του M. ◻

Με βάση το θεώρημα Löwenheim-Skolem, υπάρχουν ανορθόδοξα μοντέλα της $Th(\mathbb{N})$ με οποιαδήποτε άπειρη πληθικότητα, άρα υπάρχουν πολλά μη ισομορφικά μοντέλα της $Th(\mathbb{N})$.

Για κάθε ανορθόδοξο $M \vDash Th(\mathbb{N})$ η συνάρτηση h: $\mathbb{N} \longrightarrow M$ με $h(n) = (\underline{n}^M)$ είναι στοιχειώδης εμφύτευση (h: $\mathbb{N} \prec M$), δηλαδή για κάθε τύπο $\varphi(\bar{x})$ και $\bar{n} \in \mathbb{N}$ ισχύει $\mathbb{N} \vDash \varphi(\bar{n}) \Leftrightarrow M \vDash \varphi(h(\bar{n}))$ ή ισοδύναμα, για κάθε πρόταση φ της $\mathcal{L}_A$ ισχύει $\mathbb{N} \vDash \varphi$ ανν $M \vDash \varphi$ (επειδή τα ψηφία είναι όροι ορίσιμοι στην $\mathcal{L}_A$).
Συνήθως ταυτίζομε τη δομή $\mathbb{N}$ με την εικόνα της $h(\mathbb{N})$ και έτσι θεωρούμε την $\mathbb{N}$ ως στοιχειώδη υποδομή της $M \vDash Th(\mathbb{N})$.

Η στοιχειώδης εμφύτευση h: $\mathbb{N} \prec M$ έχει μια άλλη σπουδαία ιδιότητα που αφορά την διάταξη <. Συγκεκριμένα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$M \vDash \forall x(x \leq k \longrightarrow (x = \underline{0} \vee x = \underline{1} \vee x = \underline{2} \ldots\ldots \vee x = \underline{k})).$$

Από αυτό έπεται ότι το $\mathbb{N}$ είναι ένα αρχικό τμήμα του M, ή το M είναι μια τελική επέκταση του $\mathbb{N}$ (συμβολικά $\mathbb{N} \subseteq_e M$) δηλαδή

για όλα $n \in \mathbb{N}$ και για όλα τα $\alpha \in M$,

$$M \vDash \alpha \leq \underline{n} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{N}.$$

Ένας από τους κύριους στόχους της μελέτης μας είναι να εξετάσουμε αν υπάρχουν άλλα αρχικά τμήματα I μεταξύ του $\mathbb{N}$ και του M. Η απάντηση είναι 'ναι'.

Η ύπαρξη άπειρων στοιχείων μέσα σε κάθε ανορθόδοξο μοντέλο M το καθιστά ενδιαφέρον, αφού μέσω αυτών μπορούμε να εκφράσουμε και να αποδείξουμε ιδιότητες του $\mathbb{N}$. Ας δούμε ένα παράδειγμα που αφορά τη δυνατότητα κωδικοποίησης συνόλου φυσικών αριθμών.
Έστω $S \subseteq \mathbb{N}$ και $p_0, p_1, p_2, \ldots$ η συνήθης απαρίθμηση των πρώτων αριθμών (στο $\mathbb{N}$). Θα δούμε πως μπορεί να κωδικοποιηθεί το S μέσω ενός απείρου αριθμού.
Θεωρούμε λοιπόν τη γλώσσα $\mathcal{L}_A \cup \{c\}$ και τη θεωρία

$$T = Th(\mathbb{N}) \cup \{c > \underline{n} / n \in \mathbb{N}\}$$
$$\cup \{\forall x \neg(\underline{p}_k \quad x = c) / k \notin S\}$$
$$\cup \{\exists x (\underline{p}_k \quad x = c) / k \in S\}.$$

Έστω T΄ πεπερασμένο υποσύνολο του T. Τότε υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ τ.π

$$T' \subseteq Th(\mathbb{N}) \cup \{c > \underline{n} / n < l\}$$
$$\cup \{\forall x \neg(\underline{p}_k \quad x = c) / k \notin S \ \& \ k < l\}$$
$$\cup \{\exists x (\underline{p}_k \quad x = c) / k \in S \ \& \ k < l\}.$$

Θεωρούμε πρώτο $q \in \mathbb{N}$ με $q > l$ και θέτουμε $r \quad q \quad \underset{k \ S}{\overset{k<l}{}} p_k$.

Τότε, όπως στο επιχείρημα του Skolem, έχουμε ότι η δομή $< \mathbb{N}, r >$ είναι μοντέλο της T΄.
Άρα, λόγω θεωρήματος συμπάγειας, η T έχει μοντέλο, έστω M.
Έπεται ότι υπάρχει $\alpha \in M$ τ.π το α κωδικοποιεί το S στη δομή $M \upharpoonright \mathcal{L}_A$, δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $n \in S \Leftrightarrow M \upharpoonright \mathcal{L}_A \vDash \exists x(\underline{p}_n \quad x = \alpha)$. □

Ως εφαρμογή της μεθόδου κωδικοποίησης που είδαμε, έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.1**
Υπάρχουν ακριβώς $2^{\ 0}$ μη- ισόμορφα αριθμήσιμα μοντέλα του Th(ℕ).
**Απόδ**

Όπως είδαμε πριν, κάθε $S \subseteq \mathbb{N}$ μπορεί να κωδικοποιηθεί σε κάποιο αριθμήσιμο $M \models$ Th(ℕ) και μάλιστα ισχύει ότι αν $S_1 \neq S_2$ και το $S_i$ κωδικοποιείται στο $M_i$, τότε $M_1 \ncong M_2$. Έπειδή υπάρχουν $2^{\ 0}$ υποσύνολα του ℕ, υπάρχουν λοιπόν $2^{\ 0}$ μη ισόμορφα αριθμήσιμα μοντέλα του Th(ℕ).

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟΙ ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε τη θεωρία $PA^-$, που αποτελεί βάση για όλες τις άλλες θεωρίες που θα μελετήσουμε στη συνέχεια. Παρόλο που η θεωρία αυτή είναι πολύ ασθενής σε σύγκριση με την αριθμητική Peano, είναι αρκετά ενδιαφέρουσα αφού είναι '$\Sigma_1$-πλήρης' και κάθε μοντέλο της περιέχει (ισομορφικά) το ορθόδοξο μοντέλο.

## §2.1 ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΟΥ PA-

Τα πρώτα επτά αξιώματα αναφέρονται στα σύμβολα συναρτήσεων + και $\cdot$ και στα σύμβολα σταθερών 0,1.

Ax1: $\forall x, y, z((x + y) + z = x + (y + z))$
Ax2: $\forall x, y(x + y = y + x)$
Ax3: $\forall x, y, z((x \cdot y) \cdot z = x + (y \cdot z))$
Ax4: $\forall x, y(x \cdot y = y \cdot x)$
Ax5: $\forall x, y, z(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$
Ax6: $\forall x((x + 0 = x) \wedge (x \cdot 0 = 0))$
Ax7: $\forall x(x \cdot 1 = x)$.

Στη συνέχεια, έχουμε αξιώματα που εξασφαλίζουν ότι η ερμηνεία του < είναι γραμμική διάταξη.

Ax8: $\forall x, y, z((x < y \wedge y < z) \longrightarrow x < z)$
Ax9: $\forall x\ \neg x < x$
Ax10: $\forall x, y(x < y \vee x = y \vee y < x)$.

Τα επόμενα δύο αξιώματα λέγουν ότι + και $\cdot$ σέβονται τη διάταξη:

Ax11: $\forall x, y, z(x < y \longrightarrow x + z < y + z)$
Ax12: $\forall x, y, z(0 < z \wedge x < y \longrightarrow x \cdot z < y \cdot z)$.

Εάν $x < y$ τότε μπορούμε να αφαιρέσουμε το x από το y:

Ax13: $\forall x, y(x < y \longrightarrow \exists z\ x + z = y)$.

Τα δύο τελευταία αξιώματα δηλώνουν ότι η διάταξη < είναι διακριτή και ότι το σύμβολο 0 αντιπροσωπεύει το ελάχιστο στοιχείο.

Ax14: $0 < 1 \wedge \forall x(x > 0 \longrightarrow x \geq 0)$
Ax15: $\forall x(x \geq 0)$

Το ορθόδοξο μοντέλο $\mathbb{N}$ ικανοποιεί το $PA^-$, καθώς και κάθε μη ορθόδοξο μοντέλο της $Th(\mathbb{N})$ εφόσον τα Ax1- Ax15 είναι πρωτοβάθμια.
Ας δούμε άλλο ένα παράδειγμα μοντέλου της $PA^-$. Θεωρούμε κατ' αρχήν το δακτύλιο $\mathbb{Z}[X]$ των πολυωνύμων με μια μεταβλητή X και συντελεστές από το $\mathbb{Z}$.
Πιο αναλυτικά ορίζω:
$\mathbb{Z}[X] = \{p \in \mathbb{Z}[X]/\ p = \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots\ldots + \alpha_n X^n,\ \alpha_i \in \mathbb{Z}$ και $\alpha_n \neq 0\}$ και $+, \cdot, 0, 1$ ερμηνεύονται με τον προφανή τρόπο.
Ορίζουμε διάταξη στο $\mathbb{Z}[X]$ ως εξής:

i) $\alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots\ldots + \alpha_n X^n > 0$ ανν $\alpha_n > 0$,

ii) $p > q$ ανν $p-q > 0$, για τυχόντα $p,q \in \mathbb{Z}[X]$.

Με $\mathbb{Z}[X]^+$ συμβολίζουμε το 'μη αρνητικό μέρος' του $\mathbb{Z}[X]$, δηλαδή τη δομή με σύμπαν το σύνολο $\{p \in \mathbb{Z}[X]/\ \mathbb{Z}[X] \vDash p \geq 0\}$.
Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $\mathbb{Z}[X]^+ \vDash PA^-$.
Όμως το $\mathbb{Z}[X]^+ \nvDash Th(\mathbb{N})$, δηλαδή υπάρχει $\theta \in Th(\mathbb{N})$ τ.π $\mathbb{Z}[X]^+ \nvDash \theta$.
Πράγματι, έστω θ η πρόταση $\forall x \exists y (y = 2x \vee y = 2x + 1)$ που αληθεύει στο $\mathbb{N}$.

**Ισχυρισμός**

$$\mathbb{Z}[X]^+ \vDash \neg\theta \text{ δηλαδή}$$
$$\mathbb{Z}[X]^+ \vDash \exists x \forall y (y \neq 2x \wedge y \neq 2x + 1)$$

**Απόδ**

Παίρνω ως x το πολυώνυμο X.
Έστω ότι υπάρχει $p \in \mathbb{Z}[X]^+$ τ.π $\mathbb{Z}[X]^+ \vDash X = 2p$.
Τότε θα είχαμε $X = 2(\alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots\ldots + \alpha_n X^n)$, που είναι αδύνατον (αφού $1 \neq 2\alpha_1$, για κάθε $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$). Όμοια δείχνουμε ότι δεν υπάρχει $p \in \mathbb{Z}[X]^+$ τ.π $\mathbb{Z}[X]^+ \vDash X = 2p + 1$. Άρα ισχύει $\mathbb{Z}[X]^+ \vDash \forall y (X \neq 2y \wedge X \neq 2y + 1)$. □

Υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ μοντέλων του $PA^-$ και των διακριτά διατεταγμένων δακτυλίων που θα περιγράψουμε. Υποθέτω $M \vDash PA^-$ και $R = M^2/\sim$, όπου ~ είναι η σχέση ισοδυναμίας που ορίζεται ως

$(\alpha, b) \sim (c, d)$ ανν $\alpha + d = b + c$.

Τώρα συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας του $(\alpha, b)$ με $[\alpha, b]$ και ορίζουμε τα $+, \cdot, <, 0, 1$ στο R με:

$[\alpha, b] + [c, d] = [\alpha + c, b + d]$

$[\alpha, b] \cdot [c, d] = [\alpha c + bd, bc + \alpha d]$

$[\alpha, b] < [c, d]$ ανν $\alpha + d < b + c$.

$0 = [0,0]$, $1 = [1,0]$.

Τότε η $\mathcal{L}_A$-δομή που ορίζεται ικανοποιεί τα Ax1-Ax14 μαζί με το Ax16 $\forall x \exists y (x + y = 0)$, δηλαδή είναι διακριτά διατετ. δακτύλιος.
Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η συνάρτηση $f : M \longrightarrow R$ με $f(\alpha) = [\alpha, 0]$ είναι εμφύτευση της δομής M στην R και ότι η εικόνα της f είναι $R^+ = \{[\alpha, b] \in R/\ [\alpha, b] \geq 0\}$. Δηλαδή, η M μπορεί να ταυτιστεί με το μη αρνητικό μέρος της R.

Αντίστροφα, αν έχουμε ένα διακριτά διατετ. δακτύλιο R, τότε εύκολα δείχνουμε ότι το μη αρνητικό μέρος του $R^+$είναι μοντέλο της θεωρίας $PA^-$, από το οποίο μάλιστα μπορούμε να ανακατασκευάσουμε το δακτύλιο R, σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία.

## §2.2 ΑΡΧΙΚΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΤΕΛΙΚΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

Έστω M και N $\mathcal{L}_A$-δομές με $N \subseteq M$. Λέμε ότι N είναι ένα αρχικό τμήμα του M, ή M είναι μια τελική επέκταση του N και συμβολίζουμε $\mathbf{N \subseteq_e M}$ ανν

$\forall x \in N, \forall y \in M\ (M \vDash y < x \Rightarrow y \in N)$.

N είναι ένα 'γνήσιο αρχικό τμήμα' εάν, επιπλέον, $N \neq M$.

**Θεώρημα 2.2**

Έστω $M \vDash PA^-$. Τότε η απεικόνιση $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow M$ που δίδεται από $n \longrightarrow \underline{n}^M$ είναι μια εμφύτευση των $\mathcal{L}_A$-δομών που στέλνει το $\mathbb{N}$ επί ενός αρχικού τμήματος του M.

Η απόδειξη του θεωρήματος 2.2 εξαρτάται από τα ακόλουθα τέσσερα απλά λήμματα.

**Λήμμα 2.3**

Εάν $n, l, k \in \mathbb{N}$ και $n = l + k$, τότε $PA^- \vdash \underline{n} = \underline{l} + \underline{k}$.

**Λήμμα 2.4**

Εάν $n, l, k \in \mathbb{N}$ και $n = l \cdot k$, τότε $PA^- \vdash \underline{n} = \underline{l} \cdot \underline{k}$.

**Λήμμα 2.5**

Εάν $n, k \in \mathbb{N}$ με $n < k$, τότε $PA^- \vdash \underline{n} < \underline{k}$.

**Λήμμα 2.6**

Για όλα τα $k \in \mathbb{N}$, $PA^- \vdash \forall x(x \leq \underline{k} \longrightarrow x = \underline{0} \vee x = \underline{1} \vee \ldots\ldots\ldots \vee x = \underline{k})$.

Όλα τα παραπάνω λήμματα αποδεικνύονται με επαγωγή στο k.

**Απόδειξη του θεωρήματος 2.2**

Τα λήμματα 2.3, 2.4 και 2.5 δείχνουν ότι η απεικόνιση $n \longrightarrow \underline{n}^M$ σέβεται τις $+$, $\cdot$, $<$. Εφόσον $PA^- \vdash \forall x, y(x < y \longrightarrow x \neq y)$, το λήμμα 2.5 δείχνει ότι η απεικόνιση είναι 1-1. Τελικά το λήμμα 2.6 δείχνει ότι η εικόνα του $N = \{\underline{n}^M / n \in \mathbb{N}\}$ είναι ένα αρχικό τμήμα του M. □

Λόγω του θεωρήματος 2.2 θα θεωρούμε το $\mathbb{N}$ σαν το **ελάχιστο** αρχικό τμήμα κάθε μοντέλου του $PA^-$.

**Ορισμός**

Εάν Γ είναι η κλάση των $\mathcal{L}_A$-formulas και $M \subseteq N$ είναι $\mathcal{L}_A$-δομές, τότε M είναι μια 'Γ-στοιχειώδης υποδομή' του N, $M \prec_\Gamma N$, ανν

για οποιοδήποτε $\bar{a} \in M$ και $\gamma(\bar{x}) \in \Gamma$ ισχύει

$$M \vDash \gamma(\bar{a}) \Leftrightarrow N \vDash \gamma(\bar{a}).$$

Εάν $M \prec_\Gamma N$, τότε οι formulas στο Γ είναι απόλυτες για την επέκταση $M \subseteq N$.

**Θεώρημα 2.7**

Έστω M, N $\mathcal{L}_A$-δομές, με $M \subseteq_e N$. Τότε $M \prec_0 N$.

**Απόδ**

Θα κάνω επαγωγή στην πολυπλοκότητα των $\Delta_0$ formulas.

Η επαγωγική υπόθεση είναι ότι

Για όλα τα $\theta(\bar{x}) \in \Delta_0$ με πολυπλοκότητα $\leq n$ και

για όλα τα $\bar{a} \in M$ έχω

$$M \vDash \theta(\bar{a}) \Leftrightarrow N \vDash \theta(\bar{a}).\ (\text{E.Y})(*)$$

Αυτό είναι αληθές για $n = 0$ εφόσον οι formulas πολυπλοκότητας 0 είναι ατομικές.

Έστω ότι ισχύει η $(*)$, υποθέτω $\theta(\bar{x}) = \theta_1(\bar{x}) \wedge \theta_2(\bar{x})$ είναι πολυπλοκότητας $n + 1$ και $\bar{a} \in M$. Τότε

$$\begin{aligned} & M \vDash \theta(\bar{a}) \\ \Leftrightarrow\ & M \vDash \theta_1(\bar{a}) \text{ και } M \vDash \theta_2(\bar{a}) \\ \Leftrightarrow\ & N \vDash \theta_1(\bar{a}) \text{ και } N \vDash \theta_2(\bar{a}) \text{ από (E.Y)} \\ & N \vDash \theta(\bar{a}) \end{aligned}$$

Ομοίως αποδεικνύουμε για $\neg$.

Τώρα θα εξετάσουμε την περίπτωση του ποσοδείκτη $\forall$.

Εάν $\theta(\bar{x})$ είναι $\forall y < t(\bar{x})\theta_1(\bar{x}, y)$ είναι πολυπλοκότητας $n + 1$ και $\bar{a} \in M$, τότε

$$\begin{aligned} & M \vDash \theta(\bar{a}) \Leftrightarrow \\ & M \vDash \forall b < t(\bar{a})\theta_1(\bar{a}, b) \\ \Leftrightarrow & \text{για όλα τα } b < t(\bar{a}) \text{ στο M, } M \vDash \theta_1(\bar{a}, b). \end{aligned}$$

Εάν $\bar{a} \in M$ τότε $t(\bar{a}) \in M$ εφόσον M είναι κλειστό ως προς $+, \cdot$.

Εφόσον $M \subseteq_e N$, δηλαδή το M είναι αρχικό τμήμα του N, και $M \subseteq N$, τότε

$\{b \in N / N \vDash b < t(\bar{a})\} = \{b \in M / M \vDash b < t(\bar{a})\}$. Άρα $M \vDash \theta(\bar{a})$

$\Leftrightarrow$ για όλα τα $b < t(\bar{a})$ στο N, $M \vDash \theta_1(\bar{a}, b)$

$\Leftrightarrow$ για όλα τα $b < t(\bar{a})$ στο N, $N \vDash \theta_1(\bar{a}, b)$ από E.Y.

$\Leftrightarrow$ $N \vDash \forall b < t(\bar{a})\theta_1(\bar{a}, b)$, δηλαδή $N \vDash \theta(\bar{a})$. □

**Πόρισμα 2.8**

Υποθέτω $M \subseteq_e N$ και $\varphi(\bar{x})$, $\psi(\bar{x})$ είναι $\mathcal{L}_A$-formulas με $\varphi(\bar{x}) \in \Sigma_1$ και $\psi(\bar{x}) \in \Pi_1$. Τότε για κάθε $\bar{a} \in M$

(α) $M \vDash \varphi(\bar{a}) \Rightarrow N \vDash \varphi(\bar{a})$

(β) $N \vDash \psi(\bar{a}) \Rightarrow M \vDash \psi(\bar{a})$.

**Απόδ**

Έστω $\varphi(\bar{x})$ είναι $\exists \bar{y}\theta(\bar{x}, \bar{y})$ με $\theta \in \Delta_0$ και $\bar{a} \in M \models \exists \bar{y}\theta(\bar{a}, \bar{y})$**.** Τότε λόγω ορισμού Tarski έχω $M \models \theta(\bar{a}, \bar{b})$ για κάποιο $\bar{b} \in M$. Τότε $N \models \theta(\bar{a}, \bar{b})$ επειδή $M \prec_0 N$ με $\theta \in \Delta_0$.
Άρα, πάλι από ορισμό Tarski, $N \models \exists \bar{y}\theta(\bar{a}, \bar{y})$, δηλαδή $N \models \varphi(\bar{a})$.
Έστω $\psi(\bar{x})$ είναι $\forall \bar{y}\chi(\bar{x}, \bar{y})$ με $\chi \in \Delta_0$ έχω $N \models \forall \bar{y}\chi(\bar{a}, \bar{y})$ για $\bar{a} \in M$. Τότε για όλα τα $\bar{b} \in N$ $N \models \chi(\bar{a}, \bar{b})$.
Άρα για όλα τα $\bar{b} \in M$ ισχύει $N \models \chi(\bar{a}, \bar{b})$. Επειδή $M \prec_0 N$ με $\theta \in \Delta_0$, έπεται ότι $M \models \chi(\bar{a}, \bar{b})$, για όλα τα $\bar{b} \in M$. Άρα, από ορισμό Tarski $M \models \forall \bar{y}\chi(\bar{a}, \bar{y})$**,** δηλαδή $M \models \psi(\bar{a})$**.** ◻

**Πόρισμα 2.9**

Έστω $\Sigma_1\text{-Th}(\mathbb{N}) = \{\sigma / \sigma \in \Sigma_1, \sigma$ είναι μια $\mathcal{L}_A$-πρόταση και $\mathbb{N} \models \sigma\}$.
Τότε $PA^- \vdash \Sigma_1\text{-Th}(\mathbb{N})$.

**Απόδ**

Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε μοντέλο $M \models PA^-$ ικανοποιεί το $\Sigma_1\text{-Th}(\mathbb{N})$.
Από το θεώρημα 2.2 έχω $\mathbb{N} \subseteq_e M$.
Έτσι εάν $\sigma \in \Sigma_1\text{-Th}(\mathbb{N})$ τότε $\mathbb{N} \models \sigma$ και επομένως από 2.8 έπεται ότι $M \models \sigma$. ◻

Το πόρισμα 2.9 δείχνει ότι το $PA^-$ μπορεί να αποδείξει ένα μεγάλο αριθμό από προτάσεις που αληθεύουν στην ορθόδοξη δομή $\mathbb{N}$.
Όμως είδαμε, το $PA^-$ **δεν** μπορεί να αποδείξει **όλες** τις αληθείς προτάσεις.
Για παράδειγμα, είδαμε ότι

$$\mathbb{Z}[X]^+ \models PA^- + \neg\forall x \exists y \leq x(2y = x \vee 2y + 1 = x).$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ PA

### §3.1 ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με το αξιωματικό σχήμα επαγωγής και εναλλακτικά αξιωματικά σχήματα.
Η Αριθμητική Peano (PA) είναι το σύστημα που παίρνουμε αν στα αξιώματα $PA^-$ προσθέσουμε το αξιωματικό σχήμα επαγωγής, δηλαδή το σχήμα

$\forall \bar{y}\, [\varphi(0, \bar{y}) \wedge \forall x(\varphi(x, \bar{y}) \longrightarrow \varphi(x+1, \bar{y})) \longrightarrow \forall x \varphi(x, \bar{y})]$ (∗).

Αντί για το σχήμα αυτό, μπορούμε να πάρουμε το σχήμα 'επαγωγής μέχρι το z', δηλαδή το σχήμα

$\forall \bar{y}, z(\varphi(0, \bar{y}) \wedge \forall x < z(\varphi(x, \bar{y}) \longrightarrow \varphi(x+1, \bar{y})) \longrightarrow \forall x \leq z\, \varphi(x, \bar{y}))$ **(+)**

για όλες τις $\mathcal{L}_A$-formulas $\varphi(x, \bar{y})$.

**Πρόταση 3.1**
Το σχήμα (∗) είναι ισοδύναμο με το (+), έχοντας ως βάση το $PA^-$.

**Απόδ**
Συμβολίζουμε με $I\Sigma_n$ το σχήμα (∗) και με $I^*\Sigma_n$ το σχήμα (+). Θα δείξουμε πρώτα ότι $I\Sigma_n \vdash I^*\Sigma_n$.
Έστω $M \models I\Sigma_n$, $\varphi(x, \bar{y}) \in \Sigma_n$, $\bar{a}$, $b \in M$ τ.π

$M \models \varphi(0, \bar{a}) \wedge \forall x < b\ (\varphi(x, \bar{a}) \rightarrow \varphi(x+1, \bar{a}))$.

Πρέπει να δείξω $M \models \forall x \leq b\ \varphi(x, \bar{a})$ .

Έστω $\psi(x, \bar{y}, z)$ η παρακάτω $\mathcal{L}_A$ formula $(x \leq z \wedge \varphi(x, \bar{y})) \vee (x > z)$.
Θα κάνω επαγωγή στην $\psi(x, \bar{y}, z)$ δηλαδή θα χρησιμοποιήσω το (∗) για την ψ.
Για $x = 0$. Λόγω της υπόθεσης ισχύει $0 \leq b \wedge \varphi(0, \bar{a})$.
Άρα το $M \models \psi(0, \bar{a}, b)$ ισχύει.
Τώρα θα δείξουμε ότι $M \models \forall x(\psi(x, \bar{a}, b) \longrightarrow \psi(x+1, \bar{a}, b))$.
Έστω λοιπόν ότι $M \models \psi(d, \bar{a}, b)$, δηλαδή ισχύει

$M \models (d \leq b \wedge \varphi(d, \bar{a})) \vee (d > b)$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$M \models (d+1 \leq b \wedge \varphi(d+1, \bar{a})) \vee (d+1 > b)$

Αν $d > b$ τότε $d + 1 > b$ και άρα ισχύει $M \models \psi(d+1, \bar{a}, b)$.
Έστω τώρα $d \leq b$.

Διακρίνω περιπτώσεις

α)

Για $d < b$ έχω $M \vDash \varphi(d, \bar{a})$ . Τότε έχω $M \vDash \varphi(d+1, \bar{a}) \wedge (d + 1 \leq b)$ και άρα ισχύει $M \vDash \psi(d + 1, \bar{a}, b)$.

β)

Για $d = b$ τότε $d + 1 = b + 1 > b$ οπότε πάλι $M \vDash \psi(d + 1, \bar{a}, b)$.

Συνεπώς, με βάση το σχήμα (∗),ισχύει $M \vDash \forall x \psi(x, \bar{a}, b)$, δηλαδή

$$M \vDash \forall x[(x \leq b \wedge \varphi(x, \bar{a})) \vee (x > b)].$$

Άρα παίρνοντας $x = b$, έχουμε $M \vDash \forall x \leq b\ \varphi(x, \bar{a})$, δηλαδή το ζητούμενο.

Θα δείξω τώρα ότι $\mathbf{I^*\Sigma_n \vdash I\Sigma_n}$.

Έστω $M \vDash I^*\Sigma_n$, $\varphi(x, \bar{y}) \in \Sigma_n$, $\bar{a} \in M$ τ.π

$$M \vDash \varphi(0, \bar{a}) \wedge \forall x(\varphi(x, \bar{a}) \rightarrow \varphi(x + 1, \bar{a})).$$

Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει $M \vDash \forall x\ \varphi(x, \bar{a})$, ας πάρουμε λοιπόν $b \in M$ τ.π $M \vDash \neg\varphi(b, \bar{a})$. Τότε $M \vDash \exists x \leq b \neg\varphi(x, \bar{a})$, άρα, με βάση το σχήμα (+), έχουμε

$$M \vDash \neg\ \varphi(0, \bar{a}) \vee \exists x < b(\varphi(x, \bar{a}) \wedge \neg\varphi(x + 1, \bar{a})).$$

Όμως αποκλείεται να ισχύει $M \vDash \neg\ \varphi(0, \bar{a})$, λόγω της υπόθεσης.

Άρα υπάρχει $c < b$ τ.π $M \vDash \varphi(c, \bar{a}) \wedge \neg\ \varphi(c + 1, \bar{a})$.

Όμως πάλι έχουμε αντίφαση με την υπόθεση.

Συνεπώς ισχύει $M \vDash \forall x \varphi(x, \bar{a})$, δηλαδή το ζητούμενο. □

Το επόμενο αποτέλεσμα θα χρησιμοποιηθεί πολύ: δείχνει ότι το PA αποδεικνύει την αρχή του ελαχίστου αριθμού. Εάν $\varphi(x, \bar{y})$ είναι μια $\mathcal{L}_A$-formula, **Lφ** συμβολίζει την πρόταση

$$\forall \bar{y} (\exists x\ \varphi(x, \bar{y}) \longrightarrow \exists z(\varphi(z, \bar{y}) \wedge \forall w < z \neg\ \varphi(w, \bar{y}))).$$

**Πρόταση 3.2**

$PA^- \vdash$Αρχή επαγωγής ⇔ Αρχή ελαχίστου αριθμού.

**Απόδ**

(=>) Έστω $M \vDash PA$ τυχόν μοντέλο, έστω $\bar{a}$, $b \in M$, και έστω $\varphi(x, \bar{y})$ μια $\mathcal{L}_A$-formula τ.π $M \vDash \varphi(b, \bar{a})$ (1).

Υποθέτω το συμπέρασμα της αρχής ελαχίστου αριθμού ότι είναι ψευδές στο M.

Τότε έχω

$$M \vDash \forall z(\varphi(z, \bar{a}) \longrightarrow \exists w < z\ \varphi(w, \bar{a})).$$

Για να φτάσουμε σε αντίφαση, θεωρούμε την formula $\theta(x, \bar{y})$ που ορίζεται ως

$$\forall z(z < x \longrightarrow \neg\varphi(z, \bar{y})).$$

Θα δείξουμε με επαγωγή ότι $M \vDash \forall x \theta(x, \bar{a})$.

Έστω $x = 0$. Επειδή $M \vDash \neg\exists z(z<0)$, έπεται ότι $M \vDash \theta(0, \bar{a})$.

Τώρα υποθέτω για $x \in M$ και $M \models \theta(x, \bar{a})$ δηλαδή

$$M \models \forall z(z < x \longrightarrow \neg\varphi(z, \bar{y}))(\text{E.Y}).$$

Θα δείξω $M \models \theta(x + 1, \bar{a})$.

Έστω λοιπόν $z \in M$, $z < x +1$.

(α) Για $z < x$, ισχύει από (E.Y) ότι $M \models \neg\varphi(z, \bar{a})$.

(β) Για $z = x$

Αν ίσχυε $M \models \varphi(x, \bar{a})$, τότε με βάση την (E.Y), το x θα ήταν ελάχιστο στοιχείο του M που ικανοποιεί τον φ.

Άρα $M \models \neg \varphi(x, \bar{a})$ και συνεπώς $M \models \theta(x + 1, \bar{a})$.

Έτσι

$$M \models \theta(0, \bar{a}) \wedge \forall x(\theta(x, \bar{a}) \longrightarrow \theta(x + 1, \bar{a})).$$

Τώρα από Ιθ στο M έχω $M \models \forall x\ \theta(x, \bar{a})$. Από ορισμό της $\theta(x, \bar{y})$ για $z < x$ έχω $M \models \forall z \neg \varphi(z, \bar{a})$ που αντιφάσκει με το (1).

(<=)

Τώρα θα δείξω το **αντίστροφο** δηλαδή ότι

$PA^- \vdash$ Αρχή ελαχίστου => Αρχή επαγωγής.

**Απόδ**

Έστω ότι δεν ισχύει το ζητούμενο, δηλαδή έχουμε $M \models PA^-$ + Αρχή ελαχίστου, τύπο $\varphi(x, \bar{y})$ και $\bar{a} \in M$ τ.π

$$M \models \varphi(0, \bar{a}) \wedge \forall x(\varphi(x, \bar{a}) \longrightarrow \varphi(x + 1, \bar{a})) \wedge \exists x \neg \varphi(x, \bar{a}).$$

Τότε υπάρχει ελάχιστο x που ικανοποιεί τον $\neg \varphi(x, \bar{a})$ στο M, δηλαδή υπάρχει $b \in M$ τ.π $M \models \neg \varphi(b, \bar{a}) \wedge \forall w<b\ \varphi(w, \bar{a})$.

Προφανώς $b \neq 0$, άρα υπάρχει $c \in M$ τ.π $c +1=b$. Τότε έχουμε $M \models \varphi(c, \bar{a})$, αφού $c < b$, άρα, λόγω της υπόθεσης, θα ισχύει $M \models \varphi(c +1, \bar{a})$, δηλαδή $M \models \varphi(b, \bar{a})$, άτοπο. □

Ένα άλλο σημαντικό επαγωγικό σχήμα είναι η αρχή της πλήρους επαγωγής $T_\varphi$:

$$\forall \bar{y}\, (\forall x(\forall z < x\ \varphi(z, \bar{y}) \longrightarrow \varphi(x, \bar{y})) \longrightarrow \forall x\ \varphi(x, \bar{y})).$$

**Πρόταση 3.3**

$PA^- \vdash$ Αρχή επαγωγής $\Leftrightarrow$ Αρχή πλήρους επαγωγής

**Απόδ**

(=>) Έστω $M \models PA$, $\bar{a} \in M$ και $\varphi(x, \bar{y})$ είναι μια $\mathcal{L}_A$-formula τ.π

$$M \models \forall x(\forall z < x\ \varphi(z , \bar{a}) \longrightarrow \varphi(x , \bar{a}))$$

Υποθέτω ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα της $T_x\varphi$ δηλαδή

$M \models \exists x \neg \varphi(x , \bar{a})$.

Με βάση την Πρόταση 4.2, υπάρχει ελάχιστο τέτοιο x, δηλαδή υπάρχει $b \in M$ τ.π

$$M \models \neg \varphi(b, \bar{a}) \wedge \forall w < b\ \varphi(w, \bar{a}).$$

Λόγω της υπόθεσης όμως, πρέπει $M \models \varphi(b, \bar{a})$, άτοπο.

Επομένως $M \vDash \forall x\ \varphi(x , \bar{a})$.

Τώρα θα δείξω το **αντίστροφο** του 3.3 δηλαδή

$PA^- \vdash$ Αρχή πλήρους επαγωγής => Αρχή επαγωγής

Έστω $M \vDash PA^-$ + Αρχή πλήρους επαγωγής και $\bar{a} \in M$, φ τύπος τ.π

$M \vDash \varphi(0 , \bar{a}) \wedge \forall x(\varphi(x , \bar{a}) \longrightarrow \varphi(x +1 , \bar{a}))$ (1).

Αρκεί να δείξω $M \vDash \forall x\ \varphi(x , \bar{a})$ (2).

Έστω ότι δεν ισχύει το (2), τότε δεν ισχύει η υπόθεση της πλήρους επαγωγής, δηλαδή $M \vDash \exists x(\forall z < x\ \varphi(z , \bar{a}) \wedge \neg\ \varphi(x , \bar{a}))$.

Δηλαδή υπάρχει $b \in M$ τ.π

$M \vDash \forall z < b\ \varphi(z , \bar{a}) \wedge \neg\varphi(b , \bar{a})$.

Προφανώς $b \neq 0$, άρα υπάρχει $c \in M$ τ.π $b = c +1$.

Τότε όμως $M \vDash \varphi(c, \bar{a})$, αφού $c < b$. Συνεπώς $M \vDash \varphi(c + 1, \bar{a})$ με βάση την (1).

Αυτό όμως σημαίνει ότι $M \vDash \varphi(b, \bar{a})$, άτοπο.

Άρα ισχύει το (2) δηλαδή $M \vDash \forall x\ \varphi(x , \bar{a})$. □

## §3.2 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΝΕΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δείξει ότι

$$PA \vdash \forall \bar{x}\, \exists y \varphi(\bar{x}, y) \wedge \forall \bar{x}, y, z(\varphi(\bar{x}, y) \wedge \varphi(\bar{x}, z) \longrightarrow y = z)$$

όπου $\varphi(\bar{x}, y)$ είναι μια $\mathcal{L}_A$-formula με όλες τις ελεύθερες μεταβλητές μεταξύ των $\bar{x}$, y.

Θα μπορούσαμε να προσθέσουμε ένα νέο συναρτησιακό σύμβολο f μαζί με ένα αξίωμα ορισμού

$$\forall \bar{x}\, \varphi(\bar{x}, f(\bar{x})) \qquad (1)$$

στο PA, λαμβάνοντας μια νέα θεωρία σε μια επεκταμένη γλώσσα. Ομοίως, όταν μας δίδεται μια formula $\psi(\bar{x})$ μπορούμε να εισάγουμε ένα νέο σχεσιακό σύμβολο R μαζί με το αξίωμα ορισμού

$$\forall \bar{x}\, (\psi(\bar{x}) \leftrightarrow R(\bar{x})) \qquad (2)$$

Στη συνέχεια θα δούμε πολύ σύντομα ποια σχέση υπάρχει μεταξύ παλιάς και της νέας θεωρίας.

Επειδή ίσως να θέλουμε να επαναλάβουμε τη διαδικασία, εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό: με $\mathcal{L}'_A$ θα συμβολίζουμε μια επέκταση του $\mathcal{L}_A$ με συναρτησιακά και σχεσιακά σύμβολα, και $PA(\mathcal{L}'_A)$ θα συμβολίζουμε την $\mathcal{L}'_A$ θεωρία που αποτελείται από $PA^-$, κατάλληλα αξιώματα ορισμού για τα νέα συναρτησιακά και σχεσιακά σύμβολα (του τύπου (1) ή (2)), και το αξιωματικό σχήμα επαγωγής για όλες τις $\mathcal{L}'_A$-formulas.

Έστω $\mathcal{L}'_A$ και $PA(\mathcal{L}'_A)$ όπως στην τελευταία παράγραφο, και ότι

$$PA(\mathcal{L}'_A) \vdash \forall \bar{x}\, \exists! y \varphi(\bar{x}, y)$$

όπου $\varphi(\bar{x}, y)$ είναι μια $\mathcal{L}'_A$-formula. Έστω f ένα νέο συναρτησιακό σύμβολο (με arity ίσο με k = το μήκος του $\bar{x}$) και $\mathcal{L}''_A$ η γλώσσα $\mathcal{L}'_A \cup \{f\}$.

Είναι δυνατόν να ορίσουμε μια ‘μετάφραση’ των τύπων της $\mathcal{L}''_A$ σε τύπους της $\mathcal{L}'_A$, χρησιμοποιώντας αναδρομή στα σύνολα των όρων και τύπων. Δεν θα δώσουμε λεπτομέρειες, απλά θα αναφέρουμε την ιδέα: κάθε τύπος θ(…..f….) της $\mathcal{L}''_A$ αντικαθίσταται από τον τύπο $\bar{\theta}$: $\exists z(\varphi(\bar{x}, z) \wedge \theta(\ldots..z\ldots..))$, για κατάλληλη μεταβλητή z. Μπορούμε ν’ αποδείξουμε ότι η μετάφραση αυτή είναι ‘σωστή’, δηλαδή ότι για κάθε θ όπως πριν και για κάθε

$$M \vDash PA(\mathcal{L}'_A) + \forall \bar{x}\, \varphi(\bar{x}, f(\bar{x})) \text{ και } \bar{a} \in M:$$

$$M \vDash \theta(\bar{a}) \Leftrightarrow M \upharpoonright \mathcal{L}'_A \vDash \bar{\theta}(\bar{a}).$$

Αντίστοιχα δουλεύουμε για την περίπτωση κατηγορηματικού συμβόλου.

Το ακόλουθο θεώρημα αφορά τη σχέση μεταξύ παλιάς και νέας θεωρίας και θα το εφαρμόζουμε σιωπηρά όπου χρειάζεται στη συνέχεια.

**Θεώρημα 3.4**

Έστω $\mathcal{L}'_A$ και PA($\mathcal{L}'_A$) όπως πριν, έστω M ⊧ PA($\mathcal{L}'_A$) και έστω $\mathcal{L}''_A$ είναι μια επέκταση της $\mathcal{L}'_A$ με το συναρτησιακό σύμβολο f, που αντιστοιχεί στον τύπο φ(x, $\bar{y}$), ή με το κατηγορηματικό R, που αντιστοιχεί στον τύπο ψ($\bar{x}$).
Τότε η μοναδική επέκταση του M που ικανοποιεί το αξίωμα ορισμού για το νέο σύμβολο του $\mathcal{L}''_A$ επίσης ικανοποιεί όλα τα αξιώματα επαγωγής για formulas θ στην $\mathcal{L}''_A$.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ ΣΤΟ PA

Θα αρχίσουμε να αναπτύσσουμε την Θεωρία Αριθμών στο PA .Ένας από τους κύριους στόχους είναι να αποδείξουμε μια έκδοση του Κινέζικου θεωρήματος Υπολοίπων. Αυτό θα μας δώσει την δύναμη να αποδείξουμε το λήμμα του Gödel για τυχαία μοντέλα του PA.
Ένα από τα βασικά θεωρήματα που αποδεικνύονται αφορά την Ευκλείδεια διαίρεση.

**Θεώρημα 4.1**
Έστω $M \models PA$ και $\alpha$ , $b \in M$ με $\alpha \neq 0$ . Τότε υπάρχουν μοναδικά στοιχεία $r, s \in M$ τ.π $M \models b = \alpha s + r \wedge r < \alpha$.

**Ορισμοί**
Οι ακόλουθοι ορισμοί θεωρούνται στο PA ή κάποια επέκτασή του.

(α) $\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$ (το ακέραιο μέρος του x διαιρούμενο από το y) είναι μια συνάρτηση δύο θέσεων.

$$\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor = \begin{Bmatrix} \text{το μοναδικὸ } z \text{ τ.π } zy \leq x < (z+1)y, \text{ εὰν } y \neq 0 \\ 0, \quad \text{εὰν } y = 0 \end{Bmatrix}$$

(b) $\left(\frac{x}{y}\right)$ (το υπόλοιπο της διαίρεσης του x με το y) είναι δοσμένο από

$$\left(\frac{x}{y}\right) = \begin{Bmatrix} \text{το μοναδικὸ } z \ \exists w \leq x(yw + z = x \wedge z < y), \text{ εὰν } y \neq 0 \\ 0, \quad \text{αλλιὼς} \end{Bmatrix}$$

(c) $x|y$ (x διαιρεί το y) είναι μια σχέση δύο θέσεων δοσμένη από

$$x|y \leftrightarrow \exists z \leq y(xz = y) \wedge x \neq 0.$$

Παρατηρώ ότι $\forall x, y(x|y \leftrightarrow x \neq 0 \wedge (y|x) = 0)$. Συνήθως θα γράφουμε $x\nmid y$ στη θέση του $\neg(x|y)$.

(d) $x \equiv y \bmod z$ (x είναι ισότιμο του y modulo z) είναι μια σχέση τριών θέσεων

$$x \equiv y \bmod z \leftrightarrow \left(z \neq 0 \wedge \left(\frac{x}{z}\right) = \left(\frac{y}{z}\right)\right).$$

(e) prime(x) (x είναι ένας πρώτος ) είναι μια εναδική σχέση που ορίζεται.

$$\text{prime}(x) \leftrightarrow (x \geq 2 \wedge \forall y, z(x|(yz) \longrightarrow (x|y \vee x|z))).$$

(f) irred(x) (x είναι ανάγωγος) είναι μια εναδική σχέση που ορίζεται.

$$\text{irred}(x) \leftrightarrow \forall y(y|x \longrightarrow (y = 1 \vee y = x)).$$

(g) $(x, y) = 1$ (x, y είναι coprime) είναι η σχέση

$$(x, y) = 1 \leftrightarrow (x \geq 1 \wedge y \geq 1 \wedge \forall u(u|x \wedge u|y \longrightarrow u = 1)).$$

Ένα άλλο θεώρημα που αποδεικνύεται στο PA είναι το θεώρημα του BEZOUT, δηλαδή το

**Θεώρημα 4.2**

PA ⊢ ∀x, y((x, y) = 1 ⟶ ∃z < y(zx ≡ 1 mody)).

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος 5.2 είναι το ακόλουθο.

**Πόρισμα 4.3**

PA ⊢ ∀x(prime(x) ↔ irred(x)).

Ο στόχος μας είναι να αποδείξουμε το λήμμα του Gödel μέσα στο PA.

Η ιδέα είναι να τυποποιήσουμε την απόδειξη του λήμματος για το ℕ, πράγμα που θα κάνουμε σε μια σειρά από λήμματα. Αρχίζουμε με δύο προκαταρκτικά λήμματα που αναφέρουμε χωρίς απόδειξη.

**Λήμμα 4.4**

PA ⊢ ∀x, y, z((∀i < y((i +1)x + 1, z) = 1 ∧ z ≠ 0)⟶∃w((w, z) = 1 ∧ ∀i < y(x(i +1) +1)|w))

**Λήμμα 4.5**

PA ⊢ ∀x, y∃z(z > x ∧ ∀i, j < y(i ≠ j ⟶ (z(i +1) +1, z(j +1) + 1) = 1)).

Το επόμενο λήμμα αφορά μια ιδιότητα κλειδί, δηλαδή το γεγονός ότι αν έχουμε κωδικοποιήσει μια ακολουθία, τότε μπορούμε να κωδικοποιήσουμε μιαν άλλη, που είναι κατά έναν όρο μακρύτερη.

**Λήμμα 4.6**

PA ⊢ ∀α, m, x, y∃α΄, m΄

$$\left(\forall i < y\left(\frac{a'}{m'(i+1)+1}\right) = \left(\frac{a}{m(i+1)+1}\right) \wedge \left(\frac{a'}{m'(i+1)+1}\right) = x\right).$$

**Απόδ**

Έστω M ⊨ PA με α, m, x, y ∈ M. Με βάση το λήμμα 5.5,υπάρχει m΄ > max(x, m) που ικανοποιεί το

M ⊨ ∀i, j < y(i ≠ j ⟶ (m΄(i +1) +1, m΄(j +1) + 1) = 1)).

Πρώτα θα δείξουμε με επαγωγή ότι

$$M \vDash \forall k \leq y \exists b \forall i < k\left(\left(\frac{b}{m'(i+1)+1}\right) = \left(\frac{\alpha}{m(i+1)+1}\right)\right). \qquad (1)$$

Για k = 0 ισχύει αφού δεν υπάρχει ι < 0.

Υποθέτω ότι ισχύει για k < y, δηλαδή ότι b ∈ M τ.π

$$M \vDash \forall i < k\left(\left(\frac{b}{m'(i+1)+1}\right) = \left(\frac{\alpha}{m(i+1)+1}\right)\right). \qquad (2)$$

Τότε χρησιμοποιώντας το λήμμα 5.4 υπάρχει w ∈ M τ.π

$$M \vDash (w, m'(k + 1) +1) = 1 \wedge \forall i < k((m'(i +1) + 1)|w). \ (3)$$

Από το θεώρημα του Bezout υπάρχει $u < m'(k + 1) + 1$ στο M τ.π

$$M \vDash uw \equiv 1 \bmod m'(k + 1) + 1. \ (4)$$

Έστω τώρα

$$z = \left(\frac{a}{m(k+1)+1}\right) \ (5),\ v = b\, m'(k + 1) + z \ (6) \text{ και}$$

$b' = b + uvw$ (7).

Ισχυριζόμαστε ότι $\forall i < k + 1\left(\left(\frac{b'}{m'(i+1)+1}\right) = \left(\frac{a}{m(i+1)+1}\right)\right)$.

Πράγματι, αν $i < k$ τότε, χρησιμοποιώντας την (7), έχουμε:

$$\left(\frac{b'}{m'(i+1)+1}\right) = \left(\frac{b}{m'(i+1)+1}\right), \text{ αφού } (m'(i + 1) + 1)|w$$

και λόγω (1) έχω

$$= \left(\frac{a}{m(i+1)+1}\right).$$

Τώρα εάν $i = k$, τότε

$b' = b + uvw$ λόγω (7)

$\equiv b + v \bmod m'(k + 1) + 1$ λόγω (4)

$\equiv b + bm'(k +1) + z \bmod m'(k + 1) + 1$, λόγω της (6)

$\equiv b(m'(k + 1) + 1) + z \bmod m'(k + 1) + 1$

$\equiv z \bmod m'(k + 1) + 1$.

Άρα $\left(\frac{b'}{m'(k+1)+1}\right) = z = \left(\frac{a}{m(k+1)+1}\right)$, λόγω της (5).

Συνεπώς ισχύει το ζητούμενο.

Τώρα για να αποδείξουμε το λήμμα κατασκευάζουμε α΄ από το b ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Bezout, αλλά αυτή την φορά στη θέση του z βάζω το x δηλαδή, εάν b ικανοποιεί

$$M \vDash \forall i < y\left(\left(\frac{b}{m'(i+1)+1}\right) = \left(\frac{\alpha}{m(i+1)+1}\right)\right)$$

τότε θέτουμε $\alpha' = b + uvw$, όπου $uw \equiv 1 \bmod m'(y + 1) + 1$ και $v = bm'(y + 1) + x$. Τότε

$$M \vDash \forall i < y\left(\left(\frac{a'}{m'(i+1)+1}\right) = \left(\frac{\alpha}{m(i+1)+1}\right)\right) \wedge \left(\frac{a'}{m'(i+1)+1}\right) = X .$$

Άρα ισχύει το ζητούμενο για το α΄. □

Τώρα έχουμε ό,τι χρειάζεται για να αποδείξουμε το λήμμα του Gődel: μπορούμε να κωδικοποιήσουμε αυθαίρετα πεπερασμένες ακολουθίες $x_0,\ldots,x_{n-1}$ από ένα ζεύγος αριθμών (α, m). Για να μετατρέψουμε αυτό το ζεύγος σε ένα αριθμό χρειαζόμαστε την συνάρτηση ζευγαρώματος

$$\langle x, y\rangle \quad \frac{(x \quad y \quad 1)(x \quad y)}{2} \quad y .$$

**Λήμμα 4.7**
Στο PA αποδεικνύονται τα ακόλουθα:
(α) $\forall z(2|z \vee 2|(z+1))$;
(b) $\forall z \exists x, y(<x, y> = z)$;
(c) $\forall x, y, u, v(<x, y> = <u, v> \longrightarrow x = u \wedge y = v)$.

**Ορισμοί**
Η pairing συνάρτηση επεκτείνεται σε n-αδες (για κάθε ένα $n \in \mathbb{N}$) τοποθετώντας $<x_1, x_2,\ldots\ldots,x_n> = <x_1, <x_2,\ldots,x_n>>$. Ορίζουμε $(x)_i$ να είναι το

$$(x)_i = \left(\frac{a}{m(i+1)+1}\right)$$

όπου α, m είναι οι μοναδικοί αριθμοί που ικανοποιούν το $x = <\alpha, m>$.

**Λήμμα 4.8**
Το PA αποδεικνύει
(α) $\forall x \exists y\ (y)_0 = x$
(b) $\forall x, y, z \exists w(\forall i < z((w)_i = (y)_I \wedge (w)_z = x)$
(c) $\forall x, y\ (x)_y \leq x$.

Χρησιμοποιώντας το τελευταίο λήμμα, μπορούμε να αποδείξουμε με επαγωγή στο n το ακόλουθο.

**Λήμμα 4.9** (Λήμμα του Gődel).
Έστω $M \models PA$ και με $x_0,x_1,\ldots,x_{n-1} \in M$ όπου $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Τότε υπάρχει $u \in M$ τ.π

$$M \models (u)_i = x_i$$

για όλα τα $i < n$; επιπλέον η formula $(u)_y = x$ είναι $\Delta_0$.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

## ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΟΥ PA

Αν και είναι πολύ διδακτικό και χρήσιμο να δούμε πώς η θεωρία αριθμών μπορεί να διατυπωθεί εντός της PA, η μελέτη του PA αρχίζει να γίνεται ενδιαφέρουσα όταν θεωρούμε το τυπικό σύστημα από έξω. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε πρώτα με τα non – standard μοντέλα του PA, και στη συνέχεια με τους διατακτικούς τύπους αυτών των μοντέλων.

Η αρχική μας παρατήρηση είναι ότι γνήσια αρχικά τμήματα πάντα υπάρχουν. Πράγματι έστω $M \vDash PA$ n-std και έστω $\alpha \in M \setminus \mathbb{N}$. Το αρχικό τμήμα $\alpha^{\mathbb{N}}$ ορίζεται να είναι η υποδομή του M με σύμπαν το σύνολο

$$\{b \in M \,/\, M \vDash b < \alpha^n \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N}\}.$$

( Είναι εύκολο να δούμε ότι $\alpha^{\mathbb{N}}$ είναι κλειστό ως προς + ,  ,< . Πράγματι εάν $x , y < \alpha^n$ , τότε $x + y , x \ y < \alpha^n \ \ \alpha^n = \alpha^{2n}$ ).

Είναι προφανές ότι $\alpha^{\mathbb{N}} \subseteq_e M$. Ισχύει μάλιστα κάτι περισσότερο: το $\alpha^{\mathbb{N}}$ είναι το μικρότερο αρχικό τμήμα του M που περιέχει το α.

Ας δούμε ένα επιχείρημα που δείχνει ότι $\alpha^{\mathbb{N}} \nvDash PA$(και κατά συνέπεια, ότι $\alpha^{\mathbb{N}} \neq M$). Έστω λοιπόν ότι $\alpha^{\mathbb{N}} \vDash PA$. Επειδή

$$PA \vdash \forall x \forall y \exists z \exists w[(w)_0 = 1 \wedge \forall i < y((w)_{i+1} = x \ \ (w)_i ) \wedge z = (w)_y]$$

(αποδεικνύεται με επαγωγή στο y), έχουμε ότι υπάρχουν b, c ∈ M τ.π

$$\alpha^{\mathbb{N}} \vDash (c)_0 = 1 \wedge \forall \iota < \alpha \ ((w)_{\iota+1} = \alpha \ \ \ (w)_\iota ) \wedge b = (c)_\alpha .$$

Επειδή η παραπάνω formula είναι $\Delta_0$ , θα ισχύει και

$$M \vDash (c)_0 = 1 \wedge \forall \iota < \alpha \ ((w)_{\iota+1} = \alpha \ \ \ (w)_\iota ) \wedge b = (c)_\alpha \text{ δηλαδή}$$

$M \vDash b = \alpha^\alpha$. Όμως με επαγωγή μπορούμε να δείξουμε ότι $M \vDash \alpha^n \leq (c)_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άρα αφού $\alpha > \mathbb{N}$, ισχύει $M \vDash \alpha^n < b$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού $b \in \alpha^{\mathbb{N}}$.

Από την άλλη πλευρά έχουμε ότι $\alpha^{\mathbb{N}} \vDash I\Delta_0$. Πράγματι, επειδή $\alpha^{\mathbb{N}} \subset_e M$, ισχύει $\alpha^{\mathbb{N}} <_{\Delta_0} M$ και άρα αληθεύουν στην $\alpha^{\mathbb{N}}$ όλες οι $\Pi_1$ προτάσεις που αληθεύουν στο M. Όμως τα αξιώματα της $I\Delta_0$ είναι $\Pi_1$ προτάσεις (αν θεωρήσουμε το σχήμα επαγωγής μέχρι το z), οπότε αληθεύουν όλα στη δομή $\alpha^{\mathbb{N}}$.

Ας κάνουμε άλλη μια προσπάθεια να βρούμε γνήσιο αρχικό τμήμα του M που είναι nonstandard και ικανοποιεί το PA.

Θεωρούμε λοιπόν την υποδομή $\exp_{\mathbb{N}}(\alpha)$ του M με σύμπαν το σύνολο

$$\{b \in M \,/\, M \vDash b < \exp_n(\alpha) \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N} \},$$

όπου η συνάρτηση $\exp_n(\alpha)$ ορίζεται αναδρομικά ως

$$\exp_0(\alpha) = \alpha$$
$$\exp_{n+1}(\alpha) = \alpha^{\exp_n(\alpha)} .$$

Το σύνολο αυτό είναι κλειστό ως προς τις **+,**  . Πράγματι, έστω $b_1$, $b_2 \in \exp_{\mathbb{N}}(\alpha)$, ας πούμε ότι $b_1 < \exp_{n_1}(\alpha)$ , $b_2 < \exp_{n_2}(\alpha)$. Τότε έχω

$$b_1 + b_2 < \exp_{n_1}(\alpha) + \exp_{n_2}(\alpha) \leq 2\exp_{\max(n_1,n_2)}(\alpha) < \exp_{\max(n_1,n_2)+1}(\alpha),$$ άρα $b_1 + b_2 \in \exp_{\mathbb{N}}(\alpha)$.

Τώρα θα δείξω ότι $\exp_{\mathbb{N}}(\alpha)$ **δεν** ικανοποιεί το PA. Έστω λοιπόν ότι $\exp_{\mathbb{N}}(\alpha) \vDash PA$.
Επειδή $PA \vDash \forall x\, \exists y\, (y = \exp_x(x))$, όπου $y = \exp_x(x)$ είναι ο τύπος

$$\exists w[(w)_0 = x \wedge \forall i < x\, ((w)_{i+1} = x^{(w)_i}) \wedge y = (w)_x],$$

υπάρχουν $b, c \in \exp_{\mathbb{N}}(\alpha)$ τ.π

$$\exp_{\mathbb{N}}(\alpha) \vDash (c)_0 = \alpha \wedge \forall i < \alpha\, ((c)_{i+1} = a^{(c)_i}) \wedge b = (c)_\alpha.$$

Επειδή η προηγούμενη formula είναι $\Delta_0$, θα ισχύει και

$$M \vDash (c)_0 = \alpha \wedge \forall i < \alpha\, ((c)_{i+1} = a^{(c)_i}) \wedge b = (c)_\alpha.$$

Όπως πριν, με επαγωγή δείχνουμε ότι $M \vDash \exp_n(\alpha) \leq (c)_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα , αφού $\alpha > \mathbb{N}$, ισχύει $M \vDash \exp_n(\alpha) < b$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού $b \in \exp_{\mathbb{N}}(\alpha)$.
Το συμπέρασμα από τα παραπάνω είναι ότι, πρέπει να γίνουμε πιο έξυπνοι και να κατασκευάσουμε αρχικά τμήματα του M που να ικανοποιούν το PA.
Για να πετύχουμε αυτό, χρειαζόμαστε επιπλέον εργαλεία, το σπουδαιότερο από τα οποία είναι η αρχή της υπερχείλισης.

## §5.1 ΥΠΕΡΧΕΙΛΙΣΗ

Υπενθυμίζουμε τον εξής ορισμό: Αν M nonstandard μοντέλο του PA και I μη κενό υποσύνολο του M λέμε ότι το I είναι 'τομή', αν α) $x < y \in I \Rightarrow x \in I$ και β) το I είναι κλειστό ως προς την συνάρτηση του επομένου $(x + 1)$.
Έστω ότι I είναι μια **γνήσια** τομή του M (δηλ **δεν** είναι ίσο προς το M). Τότε I **δεν** είναι ορίσιμο υποσύνολο του M.
Πράγματι, έστω $\bar{a} \in M$ και $\varphi(x, \bar{a})$ μια $\mathcal{L}_A$ formula τ.π

$$I = \{b \in M \,/\, M \vDash \varphi(x, \bar{a})\}.$$

Τότε $M \vDash \varphi(0, \bar{a}) \wedge \forall x(\varphi(x, \bar{a}) \rightarrow \varphi(x+1, \bar{a}))$, άρα $M \vDash \forall x\, \varphi(x, \bar{a})$ .Όμως αυτό είναι άτοπο διότι I είναι γνήσια τομή.
Το λήμμα υπερχείλισης, που οφείλεται στον Abraham Robinson, ουσιαστικά επαναλαμβάνει το γεγονός αυτό .

**Λήμμα 5.1 (Υπερχείλιση)**

Έστω $M \vDash PA$ είναι n-std και έστω I γνήσια τομή του M.Υποθέτω $\bar{a} \in M$ και $\varphi(x, \bar{a})$ μια $\mathcal{L}_A$ formula τ.π

$$M \vDash \varphi(b, \bar{a}) \text{ για όλα τα } b \in I.$$

Τότε υπάρχει $c > I$ τ.π

$$M \vDash \forall x \leq c\; \varphi(x, \bar{a}).$$

**Απόδ**

Έστω ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει δηλ

$\forall c > I$ στο M ισχύει

$M \vDash \neg \forall x \leq c\ \varphi(x, \bar{a})$ δηλ

$M \vDash \exists x \leq c \neg \varphi(x, \bar{a})$ (*)

Θα δείξω ότι $b \in I$ ανν $M \vDash \forall x < b\ \varphi(x, \bar{a})$.

**(=>)** Έστω $b \in I$ και $x < b$. Επειδή I αρχικό τμήμα έχω ότι $x \in I$, άρα

$M \vDash \varphi(x, \bar{a})$.

(<=) Έστω

$M \vDash \forall x < b\ \varphi(x, \bar{a})$ αλλά $b \notin I$ δηλ $b > I$.

Τότε από (*) υπάρχει d τ.π

$M \vDash d \leq b \wedge \neg \varphi(d, \bar{a})$. Αυτό όμως είναι άτοπο, από υπόθεση.

Άρα $b \in I$.

Άρα ο ισχυρισμός ισχύει .

Συνεπώς

$b \notin I$ ανν $M \vDash \exists x < b \neg\varphi(x, \bar{a})$,

δηλαδή ο τύπος $\exists x < y \neg\varphi(x, \bar{a})$ ορίζει το M-I. Επειδή M-I $\neq \emptyset$, χρησιμοποιώντας την αρχή ελάχιστου, θα υπάρχει ελάχιστο στοιχείο του M-I, που είναι άτοπο, διότι το I είναι τομή. □

Το λήμμα υπερχείλισης χρησιμοποιείται πολύ στην περίπτωση όταν $I = \mathbb{N}$. Τώρα θα παρουσιάσουμε δύο χρήσιμες παραλλαγές του λήμματος.

**Λήμμα 5.2**

Έστω $M \vDash PA$ είναι n-std και I μια γνήσια τομή του M . Υποθέτω ότι $\varphi(x, \bar{a})$ είναι μια $\mathcal{L}_A$ formula, $\bar{a} \in M$ και ότι για όλα τα $x \in I$ υπάρχει $y \in I$ τ.π

$$M \vDash y \geq x \wedge \varphi(y, \bar{a})$$

(δηλ υπάρχουν μη φραγμένα πολλά $y \in I$ που ικανοποιούν τον $\varphi(y, \bar{a})$). Τότε για κάθε ένα $c > I$ στο M υπάρχει $b \in I$ με $I < b < c$ και

$$M \vDash \varphi(b, \bar{a})$$

(δηλ 'υπάρχει αυθαίρετα μικρό $b > I$ που ικανοποιεί $\varphi(b, \bar{a})$') .

**Απόδ**

Θεωρώ την παρακάτω formula $\varphi^*(x, \bar{a}, c)$:

$\exists y(x \leq y < c \wedge \varphi(y, \bar{a}))$ όπου $c \in M$ ένα τυχαίο στοιχείο που ικανοποιεί $c > I$.

Λόγω της υπόθεσης ,ισχύει $M \vDash \varphi^*(x, \bar{a}, c)$ για κάθε $x \in I$. Συνεπώς υπάρχει $d > I$ τ.π $M \vDash \forall x \leq d\ \varphi^*(x, \bar{a}, c)$.

Τότε θα ισχύει $M \vDash \exists y(d \leq y < c \wedge \varphi(y, \bar{a}))$, οπότε υπάρχει $b \in M$ με $I < b < c$ και $M \vDash \varphi(b, \bar{a})$. □

**Λήμμα 5.3 (underspill)**
Έστω $\bar{a} \in M \vDash PA$ , $I \subseteq M$ μια γνήσια τομή και $\varphi(x, \bar{a})$ μια $\mathcal{L}_A$ formula. Τότε
(α) Εάν $M \vDash \varphi(c, \bar{a})$ για κάθε $c > I$ στο M , τότε $M \vDash \forall x \geq b\ \varphi(x, \bar{a})$ για κάποιο $b \in I$ .
(β) Εάν για όλα τα $c > I$ στο M υπάρχει $x > I$ με $M \vDash \varphi(x, \bar{a}) \wedge x < c$ , τότε για όλα τα $b \in I$ υπάρχει $y \in I$ με $M \vDash y \geq b \wedge \varphi(y, \bar{a})$.

**Απόδ**
(α)Έστω ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα , τότε έχω

$M \vDash \exists x \geq b\ \neg\varphi(x , \bar{a})$ για όλα τα $b \in I$ .

Εάν ονομάσω την παραπάνω formula $\varphi^*(b , \bar{a})$ τότε έχω

$M \vDash \varphi^*(b , \bar{a})$, για όλα τα $b \in I$.

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του overspill, οπότε
υπάρχει $c > I$ τ.π

$M \vDash \varphi^*(b, \bar{a})$ δηλ

$M \vDash \exists x \geq c\ \neg\varphi(x, \bar{a})$. Τότε όμως

$\exists d \geq c \quad M \vDash \neg\varphi(x, \bar{a})$, δηλαδή ισχύει η άρνηση της υπόθεσης.

(β) Έστω ότι **δεν** ισχύει το συμπέρασμα , τότε έχω
$\exists b \in I\ \forall y \in I$ με $M \vDash b \leq y \longrightarrow \neg\varphi(y, \bar{a})$.
Ονομάζω την formula $\varphi^*(y, \bar{a}, b)$ και έχω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του overspill.
Άρα υπάρχει $k > I$ τ.π $M \vDash \varphi^*(y, \bar{a} , k)$ δηλ
$\forall y \leq k$ με $M \vDash b \leq y \longrightarrow \neg\varphi(y, \bar{a})$, δηλαδή ισχύει η άρνηση του συμπεράσματος. □

Ας δούμε τώρα μια εφαρμογή της υπερχείλισης.
Έστω $M \vDash PA$ n-std και $\alpha \in M \backslash N$ . Θεωρώ την τομή $a^{1/\mathbb{N}}$ που ορίζεται με σύμπαν το σύνολο

$\{b \in M \,/\, M \vDash b^n < \alpha$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}\}$ .

Θα δείξω ότι το $a^{1/\mathbb{N}}$ είναι κλειστό ως προς + και όμοια για .
Έστω $b_1 , b_2 \in a^{1/\mathbb{N}}$ .Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ από ορισμό έχω $b_1^n < \alpha$ , $b_2^n < \alpha$ .
Θέλω για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει :

$(b_1 + b_2)^n < \alpha$ . Όμως

$(b_1 + b_2)^n < ( \max(b_1 , b_2) + \max(b_1 , b_2))^n = (2\max(b_1 , b_2))^n < (\max(b_1 , b_2))^{2n} < \alpha$ .
Από τον ορισμό έπεται ότι $\mathbb{N} \subseteq_e a^{1/\mathbb{N}} \subseteq_e M$ . (Πράγματι το $a^{1/\mathbb{N}}$ είναι το μεγαλύτερο τμήμα του M που δεν περιέχει το α ). Επειδή προφανώς $\alpha \notin a^{1/\mathbb{N}}$, ισχύει $a^{1/\mathbb{N}} \subset_e M$.

Θα δείξω ότι $a^{1/\mathbb{N}} \neq \mathbb{N}$.

Θεωρώ την formula $\psi(y , \alpha) = \exists x(x \geq y \wedge x^y < \alpha)$ και παρατηρώ ότι

$$M \vDash \psi(n , \alpha) \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \quad .$$

Άρα ισχύει η υπόθεση του overspill, οπότε υπάρχει $c > \mathbb{N}$ τ.π $M \vDash \psi(c , \alpha)$, δηλαδή

$$M \vDash \exists x(x \geq c \wedge x^c < \alpha) .$$

Άρα υπάρχει $d \in M$ τ.π $M \vDash d \geq c \wedge d^c < \alpha$. Επειδή $c > \mathbb{N}$, ισχύει $d > \mathbb{N}$ και άρα το d είναι στοιχείο του $a^{1/\mathbb{N}}$ που δεν είναι φυσικός.

Άρα $\mathbb{N} \subset_e a^{1/\mathbb{N}}$.

Θα δείξω τώρα ότι το $a^{1/\mathbb{N}}$ δεν είναι μοντέλο του PA.

Θεωρούμε γνωστό ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$M \vDash \exists b(b^n \leq \alpha < (b + 1)^n).$$

Άρα ισχύει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$M \vDash \exists x(x^n \leq \alpha < x^x).$$

Από αρχή υπερχείλισης προκύπτει ότι υπάρχει $c > \mathbb{N}$ τ.π

$$M \vDash \exists x(x^c \leq \alpha < x^x),$$

Δηλαδή υπάρχει $b \in M$ τ.π $M \vDash b^c \leq \alpha < b^b$.

Τότε $b \in a^{1/\mathbb{N}}$, από ορισμό του $a^{1/\mathbb{N}}$, ενώ $b^b \notin a^{1/\mathbb{N}}$.

Συνεπώς $a^{1/\mathbb{N}} \nvDash$ PA.

Θα δείξω ότι $a^{1/\mathbb{N}} \neq b^{\mathbb{N}}$ για όλα τα $b \in M$. Για τυχόν $b \in M$ θεωρώ την formula $\psi(x , b , \alpha) = \exists y(b^x < y \wedge y^x < \alpha)$.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $b \in a^{1/\mathbb{N}}$.

Εύκολα δείχνουμε ότι $M \vDash \psi(n, b, \alpha)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (θέτουμε $y = (b +1)^n$ και επαληθεύουμε ότι $M \vDash b^n < y \wedge y^n < \alpha$).

Άρα λόγω αρχής υπερχείλισης υπάρχει $c > \mathbb{N}$ και υπάρχει $d \in M$ με

$$M \vDash b^c < d \wedge d^c < \alpha.$$

Από την πρώτη ανισότητα έχω ότι $d \notin b^{\mathbb{N}}$ και από την δεύτερη ανισότητα έχω ότι $d \in a^{1/\mathbb{N}}$.

Άρα $a^{1/\mathbb{N}} \neq b^{\mathbb{N}}$ για όλα τα $b \in M$.

## §5.2 ΔΙΑΤΑΚΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΤΗΣ PA

Εάν M είναι μια $\mathcal{L}$A –δομή τότε $M \restriction <$ συμβολίζει τον περιορισμό του M προς την γλώσσα {<} δηλ την δομή με το ίδιο σύμπαν όπως η M αλλά με μόνο μια σχέση, δηλ την <. Είναι προφανές ότι εάν $M \models PA^{-}$ το $M \restriction <$ ικανοποιεί την θεωρία $\mathbf{T_{DIS}}$ της διακριτής γραμμικής διάταξης με πρώτο στοιχείο αλλά όχι τελευταίο , που αξιωματικοποιείται από τις κάτωθι προτάσεις :

$T_{DIS}$ 1 : $\forall x\, \neg x < x$
$T_{DIS}$ 2 : $\forall x , y , z(x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$
$T_{DIS}$ 3 : $\forall x , y(x < y \vee y < x \vee x = y)$
$T_{DIS}$ 4 : $\forall x(\exists y(y < x) \rightarrow \exists y(y < x \wedge \forall w(w < x \rightarrow (w < y \vee w = y))))$
$T_{DIS}$ 5 : $\forall x \exists z(x < z \wedge \forall w(x < w \rightarrow z < w \vee z = w))$
$T_{DIS}$ 6 : $\exists z \forall x(z < x \vee x = z)$ .

Από τη θεωρία Μοντέλων ξέρουμε ότι η $T_{DIS}$ είναι μια πλήρης θεωρία δηλ για κάθε πρόταση σ της γλώσσας {<} είτε $T_{DIS} \vdash \sigma$ ή $T_{DIS} \vdash \neg\sigma$. Θα δείξουμε ότι η $T_{DIS}$ έχει $2^{\aleph_0}$ μη ισομορφικά αριθμήσιμα μοντέλα. Εάν $(A , <_A)$ είναι κάποιο (πιθανά κενό) γραμμικά διατεταγμένο σύνολο τότε $N + \mathbb{Z}\quad A \models T_{DIS}$ όπου το μοντέλο $\mathbb{N} + \mathbb{Z}\quad A$ έχει σύμπαν το σύνολο $\mathbb{N} \cup (\mathbb{Z} \times A)$ (η ένωση υποτίθεται ξένη) και διάταξη < ορισμένη από :
(α) $n < (z , \alpha)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και $(z , \alpha) \in \mathbb{Z} \times A$ ;
(b) < περιορισμένη στο $\mathbb{N}$ είναι η φυσική διάταξη στο $\mathbb{N}$;
(c) $(z_1 , \alpha_1) < (z_2 , \alpha_2)$ ανν ($\alpha_1 <_A \alpha_2$ ή ($\alpha_1 = \alpha_2$ και $z_1 < z_2$ )) για όλα τα $(z_1 , \alpha_1) , (z_2 , \alpha_2 ) \in \times A$ , και όπου $z_1 < z_2$ είναι η συνήθης διάταξη στο $\mathbb{Z}$.

$$\underset{\mathbb{N}}{\rightarrow}\Big(\underbrace{\underset{\mathbb{Z}}{\ldots\ldots\leftrightarrow}\underset{\mathbb{Z}}{\ldots\leftrightarrow}\underset{\mathbb{Z}}{\ldots.\leftrightarrow}\ldots\ldots\ldots\underset{\mathbb{Z}}{\leftrightarrow}\underset{\mathbb{Z}}{\ldots.}}_{\text{Πολλά αντίγραφα από } \mathbb{Z} \text{ με δείκτη το A}}\Big)$$

Έστω $(M , <_M ) \models T_{DIS}$ , και έστω $0_M$ το $<_M$ ελάχιστο στοιχείο του M (δοσμένο από το αξίωμα $T_{DIS}$6).
Τώρα ορίζω συναρτήσεις **S** και **P** στο M ως ακολούθως :

$$S(x) = \text{το μοναδικό } y \in M \text{ τ.π}$$
$$M \models x < y \wedge \forall w(x < w \longrightarrow (y < w \vee y = w))$$

$$P(x)\quad \begin{array}{l} \textit{το μοναδικό } y \quad M\textit{τ.π}\ M \models x \quad y \quad \forall w(w \quad x \longrightarrow (w \quad y \quad w \quad y)), \textit{εάν } x \quad 0_M \\ P(0_M) \quad 0_M,\ \textit{εάν } x \quad 0_M \end{array}$$

Ορίζουμε τώρα μια σχέση ~ στο M ως εξής: $\alpha \sim b$ ανν $b = P^{(n)}(\alpha)$ ή $b = S^{(n)}(\alpha)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.
Τότε μπορούμε να επαληθεύσουμε τα ακόλουθα:
(α)Η ~ είναι μια σχέση ισοδυναμίας (συμβολίζουμε με [α] την κλάση ισοδυναμίας του $\alpha \in M$).
(b) Η $<_M$ επάγει μια γραμμική διάταξη < στο M/~ που ορίζεται ως
$[\alpha] < [b] \Leftrightarrow M \vDash \alpha < b$ και $[\alpha] \neq [b]$.
(c) Εάν $A = (M/\sim - \{[0_M]\}$ και $<_A$ είναι η γραμμική διάταξη που δίδεται στο (b), τότε $(M , <_M) \cong \mathbb{N} + \mathbb{Z}\ A$.

Πρώτα θα δείξω το **(α)**
Για να έχω σχέση ισοδυναμίας πρέπει να ισχύουν η ανακλαστική , συμμετρική και η μεταβατική ιδότητα .
(1) Ανακλαστική
Πρέπει να δείξω ότι $\alpha \sim \alpha$. Αυτό ισχύει, διότι ισχύει $\alpha = P^{(0)}(\alpha)$ (μάλιστα ισχύει και $\alpha = S^{(0)}(\alpha)$).

(2) Συμμετρική
Πρέπει να δείξω ότι $\alpha \sim b \Rightarrow b \sim \alpha$.
Έστω ότι $\alpha \sim b$, ας πούμε ότι $b = P^{(n)}(\alpha)$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ (όμοια δουλεύουμε αν $b = S^{(n)}(\alpha)$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$). Τότε $P^{(n)}(b) = P^{(n)}(S^{(n)}(\alpha)) = \alpha$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $b \sim \alpha$.

(3) Μεταβατική
Έστω ότι $\alpha \sim b$ και $b \sim c$. Τότε υπάρχουν 4 περιπτώσεις:
α) $P^{(n)}(\alpha) = b$ και $P^{(n)}(b) = c$
b) $P^{(m)}(\alpha) = b$ και $S^{(n)}(b) = c$
c) $S^{(m)}(\alpha) = b$ και $P^{(n)}(b) = c$
d) $S^{(n)}(\alpha) = b$ και $S^{(n)}(b) = c$.
Στην περίπτωση α) έχουμε $c = P^{(n+m)}(\alpha)$, άρα $\alpha \sim c$(όμοια δουλεύουμε στην περίπτωση d)). Στην περίπτωση b) έχουμε $c = P^{(m-n)}(\alpha)$, αν $m \geq n$, ή $c = S^{(n-m)}(\alpha)$, αν $m < n$, δηλαδή $\alpha \sim c$ και στις δύο περιπτώσεις (όμοια δουλεύουμε στην περίπτωση c)).

Θα δείξω τώρα το **(b)**
Για να είναι η $[\alpha] < [b]$ **γραμμική διάταξη** αρκεί να δείξω ότι η $<_M$ είναι μη αυτοπαθής(1) ,μεταβατική(2) , και κάθε δυο στοιχεία είναι συγκρίσιμα(3).

(1) $[\alpha] \not> [\alpha]$.
Προφανές λόγω ορισμού.

(2)
Έστω $[\alpha] < [b]$ & $[b] < [c]$.
Τότε, από ορισμό, έχουμε
$\alpha <_M b$ & $[\alpha] \neq [b]$ και

$b <_M c$ & $[b] \neq [c]$.
Επειδή $<_M$ μεταβατική, ισχύει $\alpha <_M c$, άρα μένει να δείξουμε ότι $[\alpha] \neq [c]$.
Έστω ότι $[\alpha]=[c]$,δηλαδή $c = S^{(k)}(\alpha)$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.
(Η περίπτωση $c = P^{(k)}(\alpha)$ αποκλείεται, αφού $\alpha <_M c$).
Τότε υπάρχει $e \in \mathbb{N}$ τ.π $b = S^{(e)}(\alpha)$, πράγμα που αντιφάσκει με την υπόθεση ότι $[\alpha] \neq [b]$. Άρα $[\alpha] \neq [c]$.

(3)
Παίρνω δύο τυχούσες κλάσεις $[\alpha]$ , $[b]$.
Τότε θα ισχύει είτε $[\alpha] = [b]$ ή $[\alpha] \neq [b]$.
Έστω ότι ισχύει $[\alpha] \neq [b]$, οπότε θα ισχύει και $\alpha \neq b$.
Επειδή η $<_M$ είναι γραμμική, θα ισχύει $\alpha <_M b$ ή $b <_M \alpha$.
Συνεπώς θα ισχύει $[\alpha] < [b]$ ή $[b] < [\alpha]$, δηλαδή το ζητούμενο.

Θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη του **(c).**
Έστω $(\alpha_i)_{i \in I}$ οικογένεια στοιχείων του M που αντιπροσωπεύουν όλες τις κλάσεις ισοδυναμίας στοιχείων του M, δηλαδή
α) για κάθε $\alpha \in M$, υπάρχει $i \in I$ τ.π $\alpha \sim \alpha_i$
β) για κάθε $i,j \in I$, $i \neq j$, ισχύει $\alpha_i \nsim \alpha_j$.
Ορίζουμε τώρα συνάρτηση f: $M \longrightarrow \mathbb{N} + \mathbb{Z} \quad A$ ως εξής

$$\begin{array}{ll} & n, \qquad \acute{o}\pi o\upsilon\, n \quad \mathbb{N}\, \tau.\pi\, a \quad S^{(n)}(0_M) \\ f(a) & (k,[a_i]), \acute{o}\pi o\upsilon\, a_i\, \tau.\pi\, \alpha \sim a_i\, \kappa\alpha\iota\, k \quad \mathbb{Z}\, \tau.\pi \\ & \qquad \alpha \quad S^{(k)}(a_i)\, \acute{\eta}\, \alpha \quad P^{(k)}(a_i). \end{array}$$

Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η f είναι 1-1, επί και σέβεται τις διατάξεις.

Από την κατασκευή του A προκύπτει ότι το A είναι μοναδικό ως προς ισομορφισμό, δηλαδή ότι
$A \cong B$ ανν $\mathbb{N} + \mathbb{Z} \quad A \cong \mathbb{N} + \mathbb{Z} \quad B$ .
**Απόδ**
Θα δείξω πρώτα ότι
$A \cong B \Rightarrow \mathbb{N} + \mathbb{Z} \quad A \cong \mathbb{N} + \mathbb{Z} \quad B$ .
Έστω $A \cong B$ . Τότε έχω $g : A \longrightarrow B$ που είναι 1-1 , επί και σέβεται τις διατάξεις.
Θέλουμε μια $h : \mathbb{N} + \mathbb{Z} \quad A \longrightarrow \mathbb{N} + \mathbb{Z} \quad B$ που να είναι 1-1 , επί και να σέβεται τις διατάξεις .
Ορίζουμε την h ως εξής

$$h(x) = \begin{bmatrix} x, & x \in \mathbb{N} \\ (m, g(a)), & \alpha\nu \;\; x = (m,a) \in \mathbb{Z} \cdot A \end{bmatrix}$$

Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η h είναι 1-1, επί και σέβεται τις διατάξεις.

Θα περιγράψουμε σύντομα την απόδειξη του αντιστρόφου.

Υποθέτω ότι υπάρχει

$h: \mathbb{N} + \mathbb{Z} \quad A \cong \mathbb{N} + \mathbb{Z} \quad B$ και θα δείξω ότι $A \cong B$ .

Ορίζω $g : A \longrightarrow B$ ως εξής

Για $\alpha \in A \quad g(\alpha) = b \in B$ ανν $h(\mathbb{Z} \times \{\alpha\}) = \mathbb{Z} \times \{b\}$ .

Η g είναι 1-1 , επί και σέβεται τις διατάξεις επειδή για την h ισχύει το ίδιο. □

Έτσι έπεται ότι όλα τα μοντέλα του $T_{DIS}$ είναι της μορφής $\mathbb{N} + \mathbb{Z} \quad A$.

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι, εφόσον υπάρχουν ως προς ισομορφισμό $2^{\aleph_0}$ αριθμήσιμα γραμμικά διατεταγμένα σύνολα A, τότε υπάρχουν $2^{\aleph_0}$ αριθμήσιμα μοντέλα του $T_{DIS}$ .

Επιστρέφοντας στα μοντέλα της αριθμητικής θα θέλαμε να γνωρίζουμε εάν μας δώσουν ένα n-std μοντέλο $M \models PA$, ποια από τα δυνατά μοντέλα του $T_{DIS}$ μπορεί να είναι το $M{\restriction}<$ ;

Είναι αξιοσημείωτο ότι εάν M είναι αριθμήσιμο ,υπάρχει μόνο μια δυνατότητα για τον διατακτικό τύπο του $M{\restriction}<$.

**Θεώρημα 5.4**

Έστω $M \models PA$ είναι n-std . Τότε $M{\restriction}< \cong \mathbb{N} + \mathbb{Z} \quad A$ για κάποιο γραμμικά διατεταγμένο σύνολο $(A \ , <_A)$ που ικανοποιεί την θεωρία DLO (πυκνή γραμμική διάταξη ) που αξιωματικοποιείται ως ακολούθως .

$$
\begin{aligned}
&DLO_1: && \forall x\ \neg x<x \\
&DLO_2: && \forall x , y ,z(x < y \wedge y < z \longrightarrow x < z) \\
&DLO_3: && \forall x , y(x < y \vee x = y \vee y < x) \\
&DLO_4: && \forall x , y(x < y \longrightarrow \exists z(x < z \wedge z < y) \\
&DLO_5: && \forall x \exists y , z(y < x \wedge x < z)
\end{aligned}
$$

Ειδικότερα , εάν M είναι αριθμήσιμο , τότε $M \cong N + \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q}$ , όπου $\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των ρητών με την συνήθη του διάταξη .

**Απόδ**

Θεωρούμε γνωστό το θεώρημα ότι κάθε αριθμήσιμη δομή $(A, <_A)$ που ικανοποιεί το DLO είναι ισομορφική προς το $(\mathbb{Q}, <)$.

Εφόσον οι συναρτήσεις S(x) και P(x) που ορίσθηκαν προηγουμένως είναι προφανώς οι $x + 1$ και $x \dot{-} 1$ (αφαίρεση στο $\mathbb{N}$) στο M, μπορούμε να ξαναερμηνεύσουμε την σχέση ισοδυναμίας ~ ως εξής

$\alpha \sim b$ ανν $M \models \alpha + n = b \vee \alpha = b + n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

Θεωρούμε το σύνολο A και τη σχέση $<_A$ που ορίζεται όπως πριν και θα ελέγξουμε ότι $(A , <_A) \models DLO$.

Πρώτα θα ελέγξω το $(A , <_A) \models DLO_4$

Παρατηρώ ότι $[\alpha] \in A$ ανν $\alpha > \mathbb{N}$ . (Αυτό προκύπτει από την εικόνα στη σελίδα 24).

Υποθέτω $(A , <_A) \models [\alpha] < [b]$ . Από τον ορισμό του $<_A$ έχουμε ότι $M \models \alpha < b$.

Από τον ορισμό της ~ έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $M \models \exists x(\alpha+n < x \wedge x +n< b)$.

Άρα, λόγω της αρχής υπερχείλισης, υπάρχει $c \in M$ με $c > \mathbb{N}$ και $d \in M$ τ.π $M \vDash \alpha + c < d \wedge d + c < b$.
Τότε όμως $[\alpha] < [d] < [c]$, δηλαδή υπάρχει κλάση ισοδυναμίας που βρίσκεται γνήσια μεταξύ των $[\alpha]$, $[c]$.
Άρα ανάμεσα από τις κλάσεις $[\alpha]$ και $[b]$ υπάρχει η κλάση $[d]$ .
Άρα ισχύει το $DLO_4$ .

Τώρα θα ελέγξω το $DLO_5$ .
Υποθέτω ότι α ειναι n-std.
Τότε

$$M \vDash \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + n < \alpha < \alpha + n < \alpha + \alpha = 2\alpha \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} .$$

Άρα από overspill υπάρχει $c \in M$ με $c > \mathbb{N}$ τ.π

$$M \vDash \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + c < \alpha < \alpha + \alpha = 2\alpha$$

Άρα

$$\left[ \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor \right] <_A [\alpha] <_A [2\alpha] .$$

Άρα ισχύει το $DLO_5$ δηλαδή βρήκα μια κλάση κάτω από την $[\alpha]$ και μία πάνω.
Τα $DLO_1$ , $DLO_2$ , $DLO_3$ ισχύουν προφανώς. □

**Πόρισμα 5.5**
Έστω $M \vDash PA$ αριθμήσιμο και n-std . Τότε το M έχει $2^{\aleph_0}$ γνήσιες τομές.

**Απόδ**
Από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει ένας ισομορφισμός

$$f: M{\upharpoonright}< \cong \mathbb{N} + \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q}.$$

Εάν $S \subseteq \mathbb{Q}$ ικανοποιεί $\forall x \in S\ \forall y \in \mathbb{Q}\ (M \vDash y < x \longrightarrow y \in S)$ τότε το σύνολο $f^{-1}(\mathbb{N} + \mathbb{Z} \quad S)$ είναι κλειστό ως προς <, αφού η f σέβεται τις διατάξεις. Έστω τώρα $\alpha \in f^{-1}(\mathbb{N} + \mathbb{Z} \quad S)$. Τότε $\alpha = f^{-1}(n)$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ή $\alpha = f^{-1}(k, q)$, για κάποια $k \in \mathbb{Z}$ και $q \in S$. Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε ότι $\alpha + 1 \in f^{-1}(\mathbb{N} + \mathbb{Z} \quad S)$, αφού $\alpha + 1 = f^{-1}(n + 1)$ στην πρώτη περίπτωση, ενώ $\alpha + 1 = f^{-1}(k + 1, q)$ στη δεύτερη περίπτωση.
Άρα το $f^{-1}(\mathbb{N} + \mathbb{Z} \quad S)$ είναι γνήσια τομή του M.

Είναι εύκολο να δούμε ότι αν $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{Q}$ τ.π .$S_1 \neq S_2$, τότε $f^{-1}(S_1) \neq f^{-1}(S_2)$.
Έστω $S_1 \neq S_2 \Rightarrow S_1 \subset S_2$ ή $S_2 \subset S_1$ .
Οι πραγματικοί $\mathbb{R}$ είναι σε 1-1 αντιστοιχία με τις τομές που κατασκευάζουμε στο $\mathbb{Q}$ ,διαμέσου της απεικόνισης

$$r \longrightarrow \{q \in Q \,/\, q < r\}.$$

Όμως η πληθικότητα του $\mathbb{R}$ είναι $2^{\aleph_0}$, άρα το M έχει $2^{\aleph_0}$ γνήσιες τομές. □

Το προηγούμενο επιχείρημα μπορεί εύκολα να τροποποιηθεί και να δώσει:

**Θεώρημα 5.6**

Έστω M $\models$ PA μοντέλο αριθμήσιμο και n-std .Τότε υπάρχουν $2^{\aleph_0}$ γνήσια αρχικά τμήματα του M.

**Απόδ**

Ξαναορίζω την σχέση ~ ως εξής:

$\alpha \sim b$ ανν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τ.π

$M \models b \leq \alpha^m$ και υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τ.π $M \models \alpha \leq b^n$.

Τότε πάλι η ~ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Πράγματι, από τον ορισμό της ~ έχω ότι είναι ανακλαστική και συμμετρική.

Θα δείξω ότι είναι και μεταβατική.

Έστω $\alpha \sim b$ & $b \sim c$. Τότε υπάρχουν κάποια $m,n, l, k \in \mathbb{N}$ τ.π

$M \models b \leq \alpha^m \wedge \alpha \leq b^n \wedge c \leq b^l \wedge b \leq c^k$.

Τότε όμως $\alpha \leq b^n \leq c^{nk}$ και $c \leq b^l \leq \alpha^{ml}$, οπότε $\alpha \sim c$.

Άρα η σχέση ~ είναι μεταβατική και άρα είναι σχέση ισοδυναμίας .

Όπως πριν, το $A = (M/\sim -\{[0]\})$ είναι γραμμικά διατεταγμένο από τη σχέση

$[\alpha] <_A [b]$ ανν $[\alpha] \neq [b]$ & $M \models \alpha < b$ .

Θα δείξω ότι $(A , <_A) \models$ DLO.

Πρώτα θα δείξω ότι $(A , <_A) \models DLO_4$ .

Εφόσον $[\alpha] <_A [b]$, έχω $\mathbb{N} < \alpha < b$ και

$M \models \exists x((\alpha + 2)^n < x < (x + 2)^n < b)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι, αφού, $\alpha \nsim b$, πρέπει $M \models (\alpha + 2)^m < b$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Συνεπώς για $x = (\alpha + 2)^n + 1$, ισχύει $M \models (\alpha + 2)^n < x < (x + 2)^n \leq a^{n^2} < b$ , για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άρα, λόγω της αρχής υπερχείλισης, υπάρχει $c > \mathbb{N}$ και $d > \mathbb{N}$ τ.π

$M \models (\alpha + 2)^c < d < (d + 2)^c < b$ .

Άρα $[\alpha] <_A [d] <_A [b]$ και έτσι $(A , <_A) \models DLO_4$ .

Θα δείξω τώρα ότι $(A , <_A) \models DLO_5$

Έστω τυχούσα κλάση $[\alpha] \in A$. Θεωρούμε τυχόν $b \in \alpha^{1/\mathbb{N}}$ και τυχόν $c \in M\text{-}\alpha^{\mathbb{N}}$. Τότε $M \models b^n < \alpha$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $b \nsim \alpha$, και $M \models \alpha^n < c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\alpha \nsim c$. Συνεπώς $[b] <_A [\alpha] <_A [c]$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

Άρα $(A , <_A) \models DLO_5$ .

Έτσι υπάρχει ένας ισομορφισμός $f: (A , <_A) \cong (\mathbb{Q} , <)$.

Όπως στην απόδειξη του Πορίσματος 5.5, θεωρούμε τα τμήματα του M που προκύπτουν ως $f^{-1}(S_r)$, όπου $S_r = \{q \in \mathbb{Q} / q < r \}$.

Όπως πριν, δείχνουμε ότι κάθε $f^{-1}(S_r)$ είναι κλειστό ως προς +, και ότι διαφορετικά $S_r$, $S_t$ οδηγούν σε διαφορετικά αρχικά τμήματα. Άρα ισχύει το ζητούμενο. □

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

## ΤΟ ΣΧΗΜΑ ΣΥΛΛΟΓΗΣ

### §6.1 ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΥΛΛΟΓΗΣ ΚΑΙ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

Τα αξιώματα συλλογής μας επιτρέπουν να δείχνουμε ότι οι κλάσεις τύπων $\Sigma_n$, $\Pi_n$ είναι κλειστές ως προς φραγμένη ποσόδειξη .
Θεωρούμε γνωστό τον ορισμό της αριθμητικής ιεραρχίας δηλαδή τον ορισμό των κλάσεων $\Sigma_n$ και $\Pi_n$ τύπων.

**Ορισμός**
Έστω $\varphi(x, \bar{y}, \bar{z})$ μια $\mathcal{L}_A$ formula . Το αξίωμα συλλογής για τον φ είναι μια πρόταση **Βφ** που είναι

$$\forall \bar{z}, t(\forall x < t\, \exists \bar{y}\, \varphi(x, \bar{y}, \bar{z}) \rightarrow \exists s \forall x < t\, \exists \bar{y} < s\, \varphi(x, \bar{y}, \bar{z})$$

Παρατηρώ ότι το ‘**αντίστροφο**’ του **Βφ** δηλαδή η πρόταση

$$\forall \bar{z}, t\, (\exists s \forall x < t\, \exists \bar{y} < s\, \varphi(x, \bar{y}, \bar{z}) \rightarrow \forall x < t\, \exists \bar{y}\, \varphi(x, \bar{y}, \bar{z}))$$

είναι έγκυρη σε όλες τις $\mathcal{L}_A$-δομές . Επίσης παρατηρώ ότι **Β(¬φ)** συνεπάγεται ότι $\forall \bar{z}, t(\exists x < t\, \forall \bar{y}\, \varphi(x, \bar{y}, \bar{z}) \leftrightarrow \forall s \exists x < t \forall \bar{y} < s\, \varphi(x, \bar{y}, \bar{z}))$ .
Έτσι τα αξιώματα συλλογής δείχνουν ότι ένας φραγμένος ποσοδείκτης μπορεί να σπρωχθεί προς τα δεξιά ένος άφρακτου ποσοδείκτη .
Θα συμβολίζουμε την θεωρία χωρίς την επαγωγή
$PA^- + \{B\varphi \,/\, \varphi$ μια $\mathcal{L}_A$ – formula$\}$ σαν ΒΣ . Την θεωρία
$I\Delta_0 + \{B\varphi \,/\, \varphi$ είναι μια $\Sigma_n$ $\mathcal{L}_A$ – formula$\}$ θα συμβολίζουμε με $B\Sigma_n$ .
Λέγοντας $\Sigma_n$ formula εδώ εννοούμε $\Sigma_n$ formula με ‘αυστηρή έννοια’, δηλαδή formula της μορφής $\exists \bar{x} \forall \bar{y} \exists \bar{z} \ldots \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots)$, όπου φ ανοικτή formula και το πλήθος εναλλαγών ποσοδεικτών μπροστά του είναι n. Όταν θα δουλεύουμε αργότερα σε μοντέλα της $B\Sigma_n$ εννοούμε ακόμα και formulas που είναι ισοδύναμοι με $\Sigma_n$ formulas.
Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι οι κλάσεις $\Sigma_n(B\Sigma_n)$, $\Pi_n(B\Sigma_n)$ και $\Delta_n(B\Sigma_n)$ είναι κλειστές ως προς φραγμένη ποσόδειξη.

**Πρόταση 6.1**
Έστω $n \in \mathbb{N}$, $\theta(x, \bar{y})$ ένας $\Sigma_n$ τύπος, $\psi(x, \bar{y})$ ένας $\Pi_n$ τύπος , και $t(\bar{y})$ ένας $\mathcal{L}_A$ όρος . Τότε οι τύποι $\forall x < t(\bar{y})\theta(x, \bar{y})$ και $\exists x < t(\bar{y})\psi(x, \bar{y})$ είναι $\Sigma_n(B\Sigma_n)$ και $\Pi_n(B\Sigma_n)$ αντιστοίχως.

**Απόδ**
Με επαγωγή στο n θα δείξουμε ότι:
για κάθε $\Sigma_n$ τύπο $\theta(x, \bar{y})$ και για κάθε όρο $t(\bar{y})$ ο τύπος $\forall x < t(\bar{y})\theta(x, \bar{y}) \in \Sigma_n(B\Sigma_n)$.

Προφανώς $\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0$ είναι κλειστοί ως προς φραγμένη ποσόδειξη , έτσι η πρόταση είναι αληθής για n = 0 .
Λόγω επαγωγικής υπόθεσης ισχύει για n-1 τύπους δηλ για $\Sigma_{n-1}$ , $\Pi_{n-1}$ τύπους .
Υποθέτω $\theta(x, \bar{y})$ είναι $\exists \bar{z}\ \varphi(x, \bar{y}, \bar{z})$ όπου φ είναι $\Pi_{n-1}$ και $n \geq 1$ . Τώρα παίρνω τυχόντα όρο $t(\bar{y})$ και από αξίωμα συλλογής έχω

$B\Sigma_n \vdash \forall y(\forall x < t(\bar{y}) \exists \bar{z}\, \varphi(x , \bar{y}, \bar{z}) \leftrightarrow \exists s \forall x < t(\bar{y}) \exists \bar{z} < s \varphi(x , \bar{y}, \bar{z}))$ .

Θέλω να δείξω ότι $\forall x < t(\bar{y})\theta(x , \bar{y}) \in \Sigma_n(B\Sigma_n)$ δηλαδή

$\forall x < t(\bar{y}) \exists \bar{z}\, \varphi(x , \bar{y}, \bar{z}) \in \Sigma_n(B\Sigma_n)$ και ισοδύναμα αρκεί να δειχθεί το κάτωθι

$\exists s \forall x < t(\bar{y}) \exists \bar{z} < s \varphi(x , \bar{y}, \bar{z}) \in \Sigma_n(B\Sigma_n)$ .

Όμως, $\varphi(x , \bar{y}, \bar{z}) \in \Pi_{n-1}$ από υπόθεση, άρα

$\exists \bar{z} < s \varphi(x , \bar{y}, \bar{z}) \in \Pi_{n-1}$ από επαγωγική υπόθεση, οπότε

$\forall x < t(\bar{y}) \exists \bar{z} < s \varphi(x , \bar{y}, \bar{z}) \in \Pi_{n-1}$. Τελικά

$\exists s \forall x < t(\bar{y}) \exists \bar{z} < s \varphi(x , \bar{y}, \bar{z}) \in \Sigma_n$ (λόγω $\Sigma_n$).

Χρησιμοποιώντας την **ίδια** αποδεικτική διαδικασία δείχνω ότι $\Pi_n(B\Sigma_n)$ είναι κλειστό ως προς φραγμένη ποσόδειξη. □

Έχοντας δεί την σημασία της αρχής συλλογής θα δείξουμε ότι είναι αποδείξιμη στο PA. Θυμόμαστε ότι για μια κλάση τύπων Γ, IΓ είναι η θεωρία που αξιωματικοποιείται από το $PA^-$ μαζί με όλα τα αξιώματα επαγωγής Iθ για όλους τους $\theta \in \Gamma$. Ιδιαιτέρως το $I\Sigma_n$ είναι $PA^-$ + επαγωγή για όλες $\Sigma_n$ formulas, και $I\Pi_n$ είναι $PA^-$ + επαγωγή για όλες $\Pi_n$ formulas. Τότε, κάθε formula είναι ισοδύναμη (στην κατηγορηματική λογική) προς μια $\Sigma_n$ formula για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Επίσης PA είναι ισοδύναμη προς την θεωρία $I\Sigma_1 + I\Sigma_2 + I\Sigma_3 + \ldots\ldots$ που είναι ισοδύναμη επίσης προς $I\Pi_1 + I\Pi_2 + I\Pi_3 + \ldots$.
Τώρα αποδεικνύουμε ότι

**Πρόταση 6.2**
$I\Sigma_n \vdash B\Sigma_n$ για κάθε $n \geq 1$. Επομένως $PA \vdash B\Sigma$ .

**Απόδ**
Θα κάνω επαγωγή ως προς n.

Πρώτα θα κάνω την απόδειξη για n = 1 δηλ $\mathbf{I\Sigma_1 \vdash B\Sigma_1}$.
Έστω $M \models I\Sigma_1$ , με $t, \bar{a} \in M$ και

$M \models \forall x < t\, \exists y\, \varphi(x , \bar{a})$, (1)

όπου υποθέτουμε ότι ο φ είναι $\Delta_0$ (αν είναι $\Sigma_1$ δηλαδή της μορφής $\exists \bar{u}\, \theta(x, y, \bar{u})$, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση ζευγαρώματος για να συμπυκνώσουμε τους ποσοδείκτες ∃y και $\exists \bar{u}$ σε ένα μόνο υπαρξιακό ποσοδείκτη).
Με επαγωγή θα δείξουμε ότι

$M \models \forall w \leq t\, \exists v\, \forall x < w\, \exists y < v\, \varphi(x , \bar{a})$ . Ο τύπος όλος είναι $\Sigma_1$.

Θα κάνω επαγωγή ως προς w .

Για w = 0 Τότε M $\vDash \forall x < 0\ \exists y < v\varphi(x , \bar{a})$, για οποιοδήποτε $v \in M$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

Θέτω όπου $w = b < \alpha$ και υποθέτω ότι

$M \vDash \exists v\ \forall x < b\ \exists y < v\varphi(x , \bar{a})$ (2).

Θα δείξουμε ότι

$M \vDash \exists v\ \forall\ x < b + 1\ \exists y < v\varphi(x , \bar{a})$.

Από (1) υπάρχει $d \in M$ τ.π $M \vDash \varphi(b , \bar{a})$ (3) .

Από (2) υπάρχει $c \in M$ τ.π $M \vDash \forall x < b\ \exists y < c\ \varphi(x , \bar{a})$ (4) .

Θεωρώ $c^* = \max(c , d)$. Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι

$M \vDash \forall x < b + 1\ \exists y < c^*\varphi(x , \bar{a})$, οπότε ισχύει το ζητούμενο.

Τώρα επανέρχομαι στο επαγωγικό βήμα.

Έστω $M \vDash I\Sigma_n$ , $\varphi(x , \bar{y}, \bar{z})$ μια $\Sigma_n$ formula , και υποθέτω $\bar{a}$, $t \in M$ ικανοποιούν τον τύπο

$$M \vDash \forall x < t\ \exists\ \bar{y}\,\varphi(x , \bar{y}, \bar{a})$$

Η περίπτωση **n = 1** έγινε προηγουμένως . Τώρα θα εξετάσω για $n > 1$ και θα υποθέσω επαγωγικά ότι ισχύει $I\Sigma_{n-1} \vdash B\Sigma_{n-1}$ (Ε.Υ)

Αρκεί να δείξω ότι (α.ν.δ.ο)

$$M \vDash \exists s\ \forall x < t\ \exists\ \bar{y} < s\ \varphi(x , \bar{y}, \bar{a}) , \varphi \in \Sigma_n .$$

Τώρα μπορούμε να θεωρήσουμε τον $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Pi_{n-1}}$ αντικαθιστώντας φ με $\exists\,\bar{w}\theta(x , \bar{y}, \bar{w}, \bar{a})$ με $\theta \in \Pi_{n-1}$ και στη θέση του $\bar{y}$ τα $\bar{y}, \bar{w}$ δηλαδή να θεωρώ τον φ αντί για θ . Έτσι πέφτω κάτω μια θέση στην πολυπλοκότητα .Άρα (α.ν.δ.ο) το κάτωθι

$$M \vDash \exists s\ \forall x < t\ \exists\ \bar{y} < s\ \varphi(x , \bar{y}, \bar{a}) , \varphi \in \Pi_{n-1} .$$

Τώρα θεωρούμε την formula $\psi(w , \bar{a})$ , που είναι

$$\exists s\ \forall x < w\ \exists\ \bar{y} < s\ \varphi(x , \bar{y}, \bar{a}).$$

**Ισχυρισμός**

$\psi \in \Sigma_n$

Απόδ

Επειδή $\varphi(x , \bar{y}, \bar{a}) \in \Pi_{n-1}$, θα ισχύει $\exists\ \bar{y} < s\ \varphi(x , \bar{y}, \bar{a}) \in \Pi_{n-1}(B\Sigma_{n-1})$ και άρα $\forall x < w \exists\ \bar{y} < s\ \varphi(x , \bar{y}, \bar{a}) \in \Pi_{n-1}(B\Sigma_{n-1})$. Όμως από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $I\Sigma_{n-1} \vdash B\Sigma_{n-1}$. Άρα η formula $\forall x < w \exists\ \bar{y} < s\ \varphi(x , \bar{y}, \bar{a})$ είναι $\Pi_{n-1}$ και συνεπώς ο ψ είναι $\Sigma_n$.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι $M \vDash \forall w \leq t\ \psi(w , \bar{a})$ όπως στην περίπτωση για $n = 1$. Άρα ισχύει το ζητούμενο. □

Είναι γνωστό ότι ισχύουν $\mathbf{I\Sigma_n \vdash I^*\Sigma_n}$ και $\mathbf{I^*\Sigma_n \vdash I\Sigma_n}$ για $\varphi(x , \bar{y}) \in \Sigma_n$ .

**Θεώρημα 6.3**

Το PA είναι ισοδύναμο προς $I\Delta_0 + B\Sigma_n$ .

**Απόδ**

Έχουμε ήδη δείξει από (πρ 6.2) ότι $I\Sigma_n \vdash I\Delta_0 + B\Sigma_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για την άλλη κατεύθυνση θα αποδείξουμε $I\Delta_0 + B\Sigma_{n+1} \vdash I\Sigma_n$. Αυτό ακολουθεί από τα επόμενα δύο λήμματα .

**Λήμμα 6.4**

Για όλα τα $n \geq 0$, $I\Pi_n + B\Sigma_{n+2} \vdash I\Sigma_{n+1}$

**Απόδ**

Έστω $\bar{a} \in M \vDash I\Pi n + B\Sigma n + 2$ και έστω $\theta(x , \bar{a}) \in \Sigma n + 1$ όπου $\theta(x , \bar{a})$ είναι ο τύπος $\exists \bar{y}\, \psi(x , \bar{y}, \bar{a})$ και $\psi \in \Pi_n$ . Υποθέτω επίσης ότι

$$M \vDash \theta(0 , \bar{a}) \wedge \forall x\, (\theta(x , \bar{a}) \to \theta(x + 1 , \bar{a}))\ (*) .$$

Θα δείξω ότι $M \vDash \theta(b , \bar{a})\ \ \forall b \in M$ .

Θεωρώ ένα τυχαίο $b \in M$ . Προφανώς έχω

$$M \vDash \forall x < b +1\, \exists \bar{y}\, [\psi(x , \bar{y}, \bar{a}) \vee \forall \bar{z}\, \neg\psi(x , \bar{z}, \bar{a})] .$$

Τώρα η formula μέσα στις αγκύλες είναι $\Pi_{n+1}$ έτσι επειδή ισχύει $B\Sigma_{n+2}$ στο M, υπάρχει ένα $c \in M$ τ.π

$$M \vDash \forall x < b +1\, \exists \bar{y} < c[\psi(x , \bar{y}, \bar{a}) \vee \forall \bar{z}\, \neg\psi(x , \bar{z}, \bar{a})] .$$

Αυτό δείχνει ότι

$$M \vDash \forall x \leq b(\exists \bar{y}\, \psi(x , \bar{y}, \bar{a}) \to \exists \bar{y} < c\psi(x , \bar{y}, \bar{a}) .$$

Αλλά το $\exists \bar{y}<c\psi(x , \bar{y}, \bar{a})$ είναι ισοδύναμο στο (M) με μια $\Pi_n$ formula $\varphi(x , c , \bar{a})$ από την (πρόταση 6.1) και επομένως από (∗) έχω τα κάτωθι

$$\theta(x , \bar{a}) \equiv \exists \bar{y}\, \psi(x , \bar{y}, \bar{a}) \equiv \exists \bar{y} < c\psi(x , \bar{y}, \bar{a}) \equiv \varphi(x , c , \bar{a}) .$$

Εφόσον για $\theta(x , \bar{a})$ ίσχυε το (∗) τότε θα ισχύει και για τον $\varphi(x , c , \bar{a})$ .

$$M \vDash \varphi(0 , c , \bar{a}) \wedge \forall x < b\, (\varphi(x , c , \bar{a}) \to \varphi(x + 1 , c , \bar{a})\ (+) .$$

Όμως ισχύει το $I\Pi_n$ στο M και $\varphi \in \Pi_n$. Άρα, επειδή ισχύει το $I^*\Pi_n$, έχουμε ότι $M \vDash \forall x \leq b\, \varphi(x , c , \bar{a})$. Συνεπώς ισχύει $M \vDash \varphi(x , c , \bar{a})$, το ζητούμενο. □

**Λήμμα 6.5**

Για όλα τα $n \geq 0$ θα δείξω το

$I\Sigma_n \vdash I\Pi_n$ και $I\Pi_n \vdash I\Sigma_n$

**Απόδ**

Για να αποδείξω ότι $I\Sigma_n \vdash I\Pi_n$ υποθέτω $M \vDash I\Sigma_n$ , $\varphi(x , \bar{y})$ μια $\Pi_n$ formula $\bar{a} \in M$ και τις υποθέσεις της επαγωγής

$$M \vDash \varphi(0 , \bar{a}) \wedge \forall x\, (\varphi(x , \bar{a}) \to \varphi(x + 1 , \bar{a}))\ (*) .$$

Πρέπει να δείξω ότι $M \vDash \forall x\, \varphi(x , \bar{a})$ δηλ (α.ν.δ.ο) $\forall b \in M \vDash \varphi(b , \bar{a})$ .

Έστω ότι **δεν** ισχύει το **συμπέρασμα** δηλ

$\exists b \in M \vDash \neg\varphi(b , \bar{a})$

και θεωρώ την ακόλουθη formula $\psi(x, b, \bar{a})$ που είναι

$$M \vDash (x > b) \vee (x \leq b \wedge \exists y(y + x = b \wedge \neg\, \varphi(y , \bar{a}))) .$$

Θα κάνω επαγωγή ως προς x στην formula $\psi(x , b , \bar{a})$ .

Για **x = 0**

$M \models \psi(0 , b , \bar{a})$ θα δείξω ότι ισχύει

Επειδή $0 > b$ δεν ισχύει, θα δείξω ότι

$M \models 0 \le b \wedge \exists y(y + 0 = b \wedge \neg \varphi(y , \bar{a}))$.

Θεωρώ $y = b$ τότε $b = b \wedge \neg \varphi(b , \bar{a})$ ισχύει .

Θα δείξω τώρα την συνεπαγωγή

$M \models \forall x(\psi(x , b , \bar{a}) \to \psi(x + 1 , b , \bar{a}))$

Θεωρώ ότι ισχύει η υπόθεση (Ε.Υ)

$M \models (x > b) \vee (x \le b \wedge \exists y(y + x = b \wedge \neg \varphi(y , \bar{a})))$

Θα δείξω το συμπέρασμα

$M \models (x + 1 > b) \vee (x + 1 \le b \wedge \exists y(y + x + 1 = b \wedge \neg \varphi(y , \bar{a})))$ .

**Διακρίνω περιπτώσεις**

I) Έστω $x > b$

$M \models x > b \Rightarrow M \models x + 1 > b$ ισχύει .

II)

Έστω $x < b$ τότε

$M \models \exists y(y + x = b \wedge \neg \varphi(y , \bar{a}))$

δηλ υπάρχει $c \in M$ τ.π $M \models c + x = b \wedge \neg \varphi(c , \bar{a}))$

Αν ίσχυε $c = 0$, τότε θα είχαμε

$M \models 0 + x = b \wedge \neg \varphi(0 , \bar{a})$ που είναι άτοπο διότι $M \models \varphi(0 , \bar{a})$ από (∗).

Άρα $c \ne 0$.

Τότε έχω

$M \models c -1 + x + 1 = b \wedge \neg \varphi(c -1 , \bar{a})$ που ισχύει διότι

$M \models \neg \varphi(c , \bar{a}) \to \neg \varphi(c -1 , \bar{a})$

Άρα ισχύει $M \models \psi(x + 1, b, \bar{a})$.

Έστω $x = b$. Τότε

$M \models x +1 > b$ και άρα $M \models \psi(x + 1, b, \bar{a})$.

Άρα

$M \models \forall x\ \psi(x , b , \bar{a})$ και άρα

$b \in M \models \psi(b , b , \bar{a})$ δηλ

$M \models (b > b) \vee (b \le b \wedge \exists y(y + b = b \wedge \neg \varphi(y , \bar{a})))$. Αφού δεν ισχύει

$M \models b > b$ και $M \models 0 + b = b$, έχουμε

$M \models \neg \varphi(0 , \bar{a})$ άτοπο διότι

$M \models \varphi(0 , \bar{a})$

Η αντίστροφη κατεύθυνση αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο θεωρώντας την παρακάτω formula

$x > b \vee (x \le b \wedge \forall y(y + x = b \to \neg \varphi(y , \bar{a})))$ για $\varphi \in \Sigma_n$ .

Άρα αποδείξαμε την **ισοδυναμία** του θεωρήματος 6.3 και τελειώνει το κεφάλαιο .

## §6.2 ΟΜΟΤΕΛΙΚΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

Το αξίωμα συλλογής είναι ένα ισχυρό εργαλείο της θεωρίας μοντέλων για την PA.Θα το χρησιμοποιήσουμε όταν μελετήσουμε τις ομοτελικές επεκτάσεις.
Τώρα θα δώσω τον ορισμό τι είναι ομοτελική επέκταση

**Ορισμός** Εάν $M \subseteq N$ είναι μοντέλα του $PA^-$ θα λέμε ότι M είναι ομοτελικό στο N, ή N είναι ομοτελική επέκταση του M σμβ $M \subseteq_{cf} N$ iff $\forall \alpha \in N\ \exists b \in M$ $(N \models \alpha \leq b)$

Ετσι $M \subseteq_{cf} N$ iff υπάρχουν στοιχεία του M αυθαίρετα ψηλά πάνω από το N.

**Παράδειγμα** Εάν $M \models PA^-$ είναι non-standard, έστω $\mathcal{L}_{M,c}$ είναι η γλώσσα που λαμβάνεται με την πρόσθεση σταθερών για κάθε ένα $\alpha \in M$ και μια επιπλέον σταθερά c. Έστω $b \in M$ είναι non-standard.
Θα δείξουμε ότι η θεωρία

$T = \{\varphi(\bar{a}) \setminus \bar{a} \in M \models \varphi(\bar{a})$, φ μια $\mathcal{L}_A$ formula$\} \cup \{c \neq c_\alpha \setminus \alpha \in M\} \cup \{c < c_b\}$

έχει ένα μοντέλο K.
Θεωρούμε ένα πεπερασμένο υποσύνολο Σ του T, έστω το
$\{\varphi_\iota(c_{a_i}) / 1 \leq i \leq k\} \cup \{c \neq c_{a_j} / 1 \leq j \leq l\} \cup \{c < c_b\}$
Θα δείξω ότι το Σ έχει μοντέλο K.
Ορίζω την δομή $M^*$ της $\mathcal{L}_{M,c}$ ως εξής:
$M^* \restriction \mathcal{L}_A = M$
$c_a^{M^*} = c_a^M = \alpha$
$c^{M^*}$ = τυχόν $m \in M$ τ.π $m < b$ $m \neq \alpha_1, \ldots ..\alpha_l$ (τέτοιο m υπάρχει διότι b n-std και έχουμε πεπερ πλήθος στοιχείων $\alpha_1, \ldots \alpha_l$ του M.
Τότε έχουμε ότι
$M^* \models \varphi_\iota(\bar{c}_a)$ ι=1,…,κ και $M^* \models c \neq c_{a_i}$, $1 \leq I \leq l$ και $M \models c < c_b$, δηλαδή $M^*$ μοντέλο του Σ.
Άρα το T έχει μοντέλο έστω το K.
Τότε $M < K \restriction \mathcal{L}_A$. Θεωρούμε τώρα το αρχικό τμήμα N του K που έχει σύμπαν το σύνολο $\{d \in K / K \models d < \alpha$, για τυχόν $\alpha \in M\}$. Τότε το N είναι ομοτελική επέκταση του M. Επειδή ισχύει $c \in N\text{-}M$, το N είναι γνήσια επέκταση.
Τέλος $N \models PA^-$, επειδή N υποδομή της K και $K \models PA^-$.

Από την άλλη μεριά το θ 2.2 δείχνει ότι το std μοντέλο N δεν έχει γνήσιες ομοτελικές επεκτάσεις που να ικανοποιούν το $PA^-$. Η ερώτηση που θα μελετήσουμε τώρα είναι εάν κάθε n-std μοντέλο του PA έχει μια γνήσια ομοτελική επέκταση που να ικανοποιεί το PA .
Όπως δείχνει η ακόλουθη πρόταση, αυτή η ερώτηση σχετίζεται με το αξιωματικό σχήμα συλλογής.

**Πρόταση 6.6**
Υποθέτω $M \subseteq_{cf} N$ είναι μοντέλα του $PA^-$ και $M <_{\Delta o} N$ . Υποθέτω επίσης ότι τα μοντέλα M, N της $PA^-$ ικανοποιούν το αξίωμα συλλογής. Τότε $M < N$.
**Απόδ**

Θα δείξουμε ότι $M < N$ με επαγωγή στην πολυπλοκότητα των τύπων.
Για $M <_{\Delta o} N$ ισχύει από υπόθεση.Υποθέτουμε ότι ισχύει $M <_{\Sigma n} N$ και θα δείξουμε $M <_{\Sigma n+1} N$.
Για την απόδειξη του θα χρησιμοποιήσουμε μια μορφή του κριτήριου του Tarski.
(Έστω M,N είναι δομές για την $\Gamma_1$ τ.π $M <_{\Delta o} N$ και για κάθε $\alpha_o,\ldots..,\alpha_n \in M$ , $\varphi(x_o,\ldots,x_n) \in \Pi_n$.
Αν $N \vDash \exists\, x_{n+1}\, \varphi(\alpha_o,\ldots,\alpha_n\, x_{n+1})$ , τότε υπάρχει $\alpha_{n+1} \in M$ τ.π $N \vDash \varphi(\alpha_o,\ldots,\alpha_n ,\alpha_{n+1})$.
Τότε $M <_{\Sigma n+1} N$).
Έστω $\theta \in \Pi_n$, $\bar{a} \in N$ τ.π $N \vDash \exists \bar{x}\, \theta(\bar{x}, \bar{a})$. Επειδή $M \subseteq_{cf} N$, υπάρχει $b \in M$ τ.π $N \vDash \exists \bar{x} < b\, \theta(\bar{x}, \bar{a})$.
Τώρα η formula $\exists \bar{x} < b\, \theta(\bar{x}, \bar{a})$ είναι $\Pi_n$ (ΒΣ) από (πρόταση 6.1) δηλαδή

$$B\Sigma \vdash \forall \bar{y}, z\, (\exists \bar{x} < z\, \theta(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \chi(\bar{y}, z)) \text{ για κάποια } \Pi_n \text{ formula } \chi(\bar{y}, z).$$

Έτσι $B\Sigma \vdash \chi(\bar{a}, b)$ και επειδή $N \vDash \chi(\bar{a}, b)$ και άρα $M \vDash \chi(\bar{a}, b)$ (αυτό ισχύει διότι εάν $M \vDash \neg \chi(\bar{a}, b) \Rightarrow N \vDash \neg \chi(\bar{a}, b)$ καθώς $M <_{\Sigma n} N$ και $\neg\chi$ είναι $\Sigma_n$ αλλά είναι άτοπο). Επομένως

$$M \vDash \exists \bar{x} < b\, \theta(\bar{x}, \bar{a}) \text{ διότι } M \vDash B\Sigma \text{ από υπόθεση και άρα}$$
$$M \vDash \exists \bar{x}\, \theta(\bar{x}, \bar{a}).$$

Συνεπώς υπάρχουν $\bar{d} \in M$ τ.π $M \vDash \theta(\bar{d}, \bar{a})$. Όμως $M <_{\Sigma n} N$ και άρα $N \vDash \theta(\bar{d}, \bar{a})$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.
Άρα $M < N$. □

Η πρόταση 7.6 δουλεύει επειδή τα δύο μοντέλα M ,N ικανοποιούν το σχήμα επιλογής. Εάν το $M \vDash PA$ το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει αλλά σ' αυτήν την περίπτωση το $N \vDash B\Sigma$ δεν χρειάζεται όπως απέδειξε ο Gaifman (1972).

**Θεώρημα 6.7**
Υποθέτω $M \subseteq_{cf} N$ είναι μοντέλα του $PA^-$. Υποθέτω επιπλέον ότι $M <_{\Delta o} N$ και ότι $M \vDash PA$. Τότε $M < N$ και επομένως $N \vDash PA$ .

**Αποδ**
Πρώτα θα δείξουμε ότι $M <_{\Sigma_2} N$. Αρκεί να δείξουμε ότι εάν $\bar{a} \in M$, $\theta(\bar{x}) \in \Sigma_2$ τότε $N \vDash \theta(\bar{a}) \Rightarrow M \vDash \theta(\bar{a})$.(∗)
Πράγματι, έστω ότι ισχύει η (∗). Θα δείξουμε ότι για $\bar{a} \in M$, $\theta(\bar{x}) \in \Sigma_2$ ισχύει $M \vDash \theta(\bar{a}) \Rightarrow N \vDash \theta(\bar{a})$. Έστω λοιπόν ότι $M \vDash \theta(\bar{a})$, όπου $\bar{a} \in M$, $\theta(\bar{x}) \in \Sigma_2$.

Υποθέτοντας ότι η $\theta(\bar{x})$είναι της μορφής $\exists\bar{y}\varphi(\bar{a},\bar{y})$ και $\varphi\in\Pi_1$, υπάρχουν $\bar{b}\in M$ τ.π $M\vDash\varphi(\bar{a},\bar{b})$.Αν ίσχυε $N\vDash\neg\varphi(\bar{a},\bar{b})$, τότε επειδή $\neg\varphi\in\Sigma_2$, από την $(*)$ θα είχαμε ότι $M\vDash\neg\varphi(\bar{a},\bar{b})$, που είναι άτοπο. Άρα ισχύει $N\vDash\varphi(\bar{a},\bar{b})$, όποτε $N\vDash\exists\bar{y}\varphi(\bar{a},\bar{y})$, δηλαδή το ζητούμενο.

Τώρα θα δείξω την (*)

Υποθέτω ότι $N\vDash\theta(\bar{a})$ και $\theta(\bar{x})$ τύπος της μορφής $\exists\bar{y}\forall\bar{z}\psi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ με $\psi\in\Delta_0$. Τότε υπάρχουν $\bar{d}\in M$ τ.π $N\vDash\forall\bar{z}\psi(\bar{a},\bar{d},\bar{z})$. Όμως $M\subseteq_{cf}N$, άρα υπάρχει b τ.π $\bar{d}<b$ και άρα $N\vDash\exists\bar{y}<b\forall\bar{z}\psi(\bar{a},\bar{y},\bar{z})$.

Τότε, για τυχόν $c\in M$, $N\vDash\exists\bar{y}<b\ \forall\bar{z}<c\ \psi(\bar{a},\bar{y},\bar{z})$.

Επειδή $M <_{\Delta_0} N$, έπεται ότι $M\vDash\exists\bar{y}<b\ \forall\bar{z}<c\ \psi(\bar{a},\bar{y},\bar{z})$ και άρα ότι $M\vDash\forall w\exists\bar{y}<b\forall\bar{z}<w\psi(\bar{a},\bar{y},\bar{z})$.Όμως $M\vDash PA$, $M\vDash B\Sigma_1$. Συνεπώς ισχύει ότι

$M\vDash\exists\bar{y}<b\ \forall\bar{z}\neg\psi(\bar{a},\bar{y},\bar{z})\longrightarrow\exists w\ \forall\bar{y}<b\exists\bar{z}<w\neg\psi(\bar{a},\bar{y},\bar{z})$, όποτε

$M\vDash\forall w\exists\bar{y}<b\ \forall\bar{z}<w\ \psi(\bar{a},\bar{y},\bar{z})\longrightarrow\exists\bar{y}<b\forall\bar{z}\psi(\bar{a},\bar{y},\bar{z})$.

Άρα έχουμε $M\vDash\exists\bar{y}<b\forall\bar{z}\psi(\bar{a},\bar{y},\bar{z})$, όποτε $M\vDash\exists\bar{y}\forall\bar{z}\psi(\bar{a},\bar{y},\bar{z})$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

Τώρα θα δείξουμε ότι για όλους τους $n\geq 2$, $M<_{\Sigma_n}N \Rightarrow M<_{\Sigma_{n+1}}N$.

Έστω λοιπόν ότι $n\geq 2$ και $M<_{\Sigma_n}N$.

Αντί να δείξουμε ότι για κάθε $\theta(\bar{a})\in\Sigma_{n+1}$ με $\bar{a}\in M$, $N\vDash\theta(\bar{a})\Rightarrow M\vDash\theta(\bar{a})$ θα αποδείξουμε τον ισοδύναμο ισχυρισμό ότι για κάθε $\bar{a}\in M$ και $\psi(\bar{a})\in\Pi_{n+1}$, $M\vDash\psi(\bar{a})\Rightarrow N\vDash\psi(\bar{a})$.(1)

Έτσι υποθέτω $M\vDash\psi(\bar{a})$ όπου ψ της μορφής $\forall y\exists z\ \varphi(\bar{a},y,z)$ με $\varphi\in\Pi_{n-1}$.

Για να δείξω ότι $N\vDash\forall y\exists z\ \varphi(\bar{a},y,z)$, αρκεί να δείξω ότι για κάθε $b\in M$ έχω

$M\vDash\forall y<b\exists z\ \varphi(\bar{a},y,z)\Rightarrow N\vDash\forall y<b\exists z\ \varphi(\bar{a},y,z)$. (1)

Πράγματι, έστω ότι ισχύει η (1). Θεωρούμε τυχόν $c\in N$.

Επειδή $M\subseteq_{cf}N$, υπάρχει $b\in M$ τ.π $N\vDash c<b$.

Όμως ισχύει $M\vDash\forall y<b\exists z\ \varphi(\bar{a},y,z)$. Άρα ισχύει και ότι $N\vDash\forall y<b\exists z\ \varphi(\bar{a},y,z)$, που είναι το ζητούμενο.

Τώρα θα δείξω το (1). Έστω $M\vDash\forall y<b\exists z\ \varphi(\bar{a},y,z)$.

Με επαγωγή στο M θα δείξω ότι

$M\vDash\forall t\leq b\ \exists w\ \forall y<t\ \forall z(z=(w)_y\to\varphi(\bar{a},y,z))$.

Έστω $t=0$ τότε όλα τα w πληρούν $M\vDash\forall y<t\ \forall z(z=(w)_y\to\varphi(\bar{a},y,z))$.

Έστω $t<b$ τ.π

$M\vDash\exists w\ \forall y<t\ \forall z(z=(w)_y\to\varphi(\bar{a},y,z))$ (E.Y)

Επιλέγω $c\in M$ τ.π

$M\vDash\forall y\leq t-1\ \forall z(z=(c)_y\to\varphi(\bar{a},y,z))$ (1)

Από $M\vDash\forall y<b\exists z\ \varphi(\bar{a},y,z)$, αφού $t-1<b$ υπάρχει $d\in M$ τ.π

$M\vDash\varphi(\bar{a},t-1,d)$ (2)

Τώρα από **θ.4.8** υπάρχει $w=e\in M$ τ.π

$M\vDash(e)_{t-1}=d\wedge\forall y\leq t-1\ ((e)_y=(c)_y)$ (3)

Μένει να δείξω ότι

$M \vDash \forall y \leq t\text{-}1\ \forall z(z=(e)_y \to \varphi(\bar{a}, y, z))$

**Περ 1**

Για **y < t-1**

Από (1) για $\forall y < t\text{-}1$ έχω $M \vDash \forall z(z=(c)_y \to \varphi(\bar{a}, y, z))$ και λόγω (3) έχω
$M \vDash (c)_y = (e)_y$ άρα έχω το ζητούμενο δηλ
$M \vDash \forall z\ (z=(e)_y \to \varphi(\bar{a}, y, z))$.

**Περ 2**

Για **y =t-1**

Λόγω επιλογής των e και d ισχύει από (2) και (3) ότι
$M \vDash (e)_{t-1} = d \wedge \varphi(\bar{a}, t\text{-}1, d)$. Άρα
$M \vDash \forall z\ (z = (e)_{t-1} \to \varphi(\bar{a}, y, z))$.
Ισχύει λοιπόν ότι $M \vDash \exists w \forall y < b \forall z\ (z = (w)_y \to \varphi(\bar{a}, y, z))$.
Έπειδή ο τύπος $\exists w \forall y < b \forall z\ (z = (w)_y \to \varphi(\bar{a}, y, z))$ είναι $\Sigma_n$ και $M <_{\Sigma_n} N$, έπεται ότι $N \vDash \exists w \forall y < b \forall z\ (z = (w)_y \to \varphi(\bar{a}, y, z))$.
Συνεπώς υπάρχει $e \in N$ τ.π

$N \vDash \forall y < b \forall z\ (z = (e)_y \to \varphi(\bar{a}, y, z))$.

Όμως η πρόταση $\forall y, w \exists z (z = (w)_y)$ είναι $\Pi_2$ και αληθεύει στην M. Άρα αληθεύει στην N, εφοσον $M <_{\Sigma_2} N$.
Άρα $N \vDash \forall y < b \exists z\ \varphi(\bar{a}, y, z)$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο. ◻

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να ισχυροποιηθεί ακόμη περισσότερο:
Τώρα τι είναι $\exists_1$ formula της $\mathcal{L}_A$ ή υπαρξιακή ;
Είναι μια formula της μορφής $\exists \bar{y}\, \theta(\bar{x}, \bar{y})$ όπου θ ανοικτός τύπος(χωρίς ποσοδείκτες ) .
Σε απάντηση του 10 προβλήματος του HILBERT οι Matijasevits, Robinson, Davis, Putnam (MRDP) βρήκαν ένα πολύ ωραίο και βαθύ αποτέλεσμα που δείχνει ότι:
Κάθε $\Sigma_1$ formula φ(x) είναι ισοδύναμη (στο $\mathbb{N}$) προς μια $\exists_1$ formula ψ(x). Αυτό μπορεί να βελτιωθεί ως εξής.

**Θεώρημα 6.8 (MRDP)**

Για κάθε $\Sigma_1$ formula $\varphi(\bar{x})$ του $\mathcal{L}_A$ υπάρχει μια $\exists_1$ formula ψ(x) του $\mathcal{L}_A$ τ.π

$$PA \vdash \forall \bar{x} (\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$$

Δεν σκοπεύουμε να αποδείξουμε το θ MRDP σ' αυτήν την εργασία.
Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι το **ακόλουθο** που είναι συνέπεια του MRDP.

**Πόρισμα 6.8**

Για οποιαδήποτε $M, N \vDash PA$ αν $M \subseteq N$ τότε $M <_{\Delta_0} N$.

**Αποδ**

Θεωρούμε τυχόντα M , N ⊨ PA τ.π $M \subseteq N$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $\theta(\bar{x}) \in \Delta_0$ και κάθε $\bar{a} \in M$ M ⊨ $\theta(\bar{a})$ ανν N ⊨ $\theta(\bar{a})$ . Θα δείξω πρώτα M ⊨ $\theta(\bar{a})$ => N ⊨ $\theta(\bar{a})$.

Έστω M ⊨ $\theta(\bar{a})$. Τότε από MRDP υπάρχει ανοικτός τύπος φ τ.π

$$M \models \forall \bar{x}\ (\theta(\bar{x}) \leftrightarrow \exists\ \bar{y}\, \psi(\bar{x}, \bar{y})).$$

Άρα υπάρχει $\bar{c} \in M$ τ.π M ⊨ $\varphi(\bar{a}, \bar{c})$. Τότε όμως N ⊨ $\varphi(\bar{a}, \bar{c})$(από γνωστό θεώρημα της θεωρίας Μοντέλων) και άρα N ⊨ $\theta(\bar{a})$.

Ομοίως N ⊨ $\theta(\bar{a})$ => M ⊨ $\theta(\bar{a})$ χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\neg\, \theta(\bar{x})$ είναι επίσης $\Sigma_1$ και άρα, με βάση το θεώρημα MRDP, υπάρχει ανοικτός τύπος ψ τ.π

$$M \models \forall \bar{x}\ (\neg\theta(\bar{x}) \leftrightarrow \exists\ \bar{z}\, \psi(\bar{x}, \bar{z})).$$

**Θ 6.9 (Gaifman 1972)**

Έστω M ⊨PA και $M \subseteq_{cf} N$ ⊨$PA^-$ .Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

a) $M <_{\Delta_0} N$

b) N ⊨ PA

c) M < N

**Απόδ**

a)=> c)

Προφανές, από ορισμό <.

c)=> b) Προφανές, από ορισμό <.

b)=> a) Επειδή M,N ⊨ PA και $M \subseteq N$ τότε από το πόρισμα 6.8 έχουμε $M <_{\Delta_0} N$ .

**Πόρισμα 6.10 (Θ Διαχωρισμού του Gaifman )**

Εάν $M \subseteq N$ ,M, N ⊨PA τότε υπάρχει ένα μοναδικό K ⊨PA τ.π $M \subseteq_{cf} K \subseteq_e N$ και επιπλέον M < K

**Απόδ**

Θεωρούμε τη δομή K= {α ∈ N / K ⊨ α < b για κάποιο b ∈ M}. Προφανώς $M \subseteq_{cf} K$ και $K \subseteq_e N$.

Τώρα θα δείξω ότι K ⊨ PA . Αρκεί να δείξω $M <_{\Delta_0} K$ αφού τότε θα προκύψει ότι M < K, με βάση το θεώρημα 6.9.

Όμως $M \subseteq N$ και M, N ⊨ PA. Άρα $M <_{\Delta_0} N$, με βάση το θ. MRDP.

Επιπλέον έχουμε από γνωστό θεώρημα ότι $K \subseteq_e N$ => $K <_{\Delta_0} N$.

Άρα για $\theta(\bar{x}) \in \Delta_0$ και $\bar{a} \in M$ έχω M ⊨ $\theta(\bar{a})$ ανν N ⊨$\theta(\bar{a})$ ανν K ⊨ $\theta(\bar{a})$. Άρα $M <_{\Delta_0} K$ και από 6.7 M < K => K ⊨ PA. □

Τώρα θα δώσουμε τη λύση στην ερώτησή μας για την ύπαρξη της γνήσιας ομοτελικής επέκτασης στην αρχή αυτού του κεφαλαίου .

**Πόρισμα 6.11**
Κάθε non – std μοντέλο της $M \models PA$ έχει μια γνήσια στοιχειώδη ομοτελική επέκταση N.

**Απόδ**
Έστω $M \models PA$, M n-std.
Από το παράδειγμα στην αρχή του κεφαλαίου έχω ότι υπάρχει K τ.π $M < K$ και υπάρχει στοιχείο $c \in K \setminus M$ που ικανοποιεί ότι $K \models c < b$ για κάποιο $b \in M$.
Ορίζω το σύνολο $N = \{d \in K \; / \; K \models d < \alpha$ για κάποιο $\alpha \in M\}$.
Προφανώς ισχύει $M \subseteq_{cf} N$ και $M \neq N$. Με βάση την απόδειξη του πορ 6.10, έχουμε ότι $M <_{\Delta_0} N$. Συνεπώς, από θεώρημα 6.7, προκύπτει $N \models PA$.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

## ΠΡΩΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Εάν T είναι μια πλήρης συνεπής επέκταση του PA τότε υπάρχει ένα ‘ελάχιστο’ μοντέλο της T που ξεχωρίζει από τα υπόλοιπα μοντέλα της T, με την έννοια ότι μπορεί να θεωρηθεί το μικρότερο από όλα.Το παρόν κεφάλαιο αφορά αυτά τα μοντέλα και μια εφαρμογή, δηλαδή το σπουδαίο θεώρημα MacDowell-Specker.

### §7.1 ΟΡΙΣΙΜΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Έστω $M \models PA$ και $A \subseteq M$. Ένα στοιχείο $b \in M$ είναι ‘ορίσιμο στο M ως προς A’ ανν υπάρχει μια $\mathcal{L}_A$-formula $\theta(x, \bar{y})$ και μια ν-αδα $\bar{a} \in A$ τ.π $M \models \exists! x\theta(x, \bar{a}) \wedge \theta(b, \bar{a})$. K(M;A) συμβολίζει το σύνολο όλων των στοιχείων του M που είναι ορίσιμα ως προς A. Εάν A είναι κενό γράφουμε K(M).
Αποδεικνύεται ότι υπάρχει υποδομή του M με σύμπαν το K(M;A) που συμβολίζουμε με K(M, A)

**Θεώρημα 7.1**
Εάν $M \models PA$ και $A \subseteq M$ τότε $A \subseteq K(M;A) < M$ και έτσι K(M;A) ικανοποιεί το PA επίσης.

**Απόδ**
Έστω $M \models PA$ και $A \subseteq M$.
Πρώτα θα αποδείξω ότι υπάρχει μοναδική υποδομή του M με σύμπαν το K(M,A).
Θα δείξω τα κάτωθι:
1) $A \subseteq K(M,A)$, $0^M \in K(M, A)$.
2) $c,d \in K(M, A) \Rightarrow c'^M, c +^M d, c \ ^M d \in K(M, A)$.

**Απόδ**
1)Προφανώς κάθε $\alpha \in A$ είναι ορίσιμο στο A από την formula $x = \alpha$ και το $0^M$ ορίζεται από το $x = 0$.
2) Έστω $c, d \in K(M, A)$. Τότε υπάρχει $\mathcal{L}_A$-formula $\theta(x, \bar{y})$ και μια n-αδα $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in A$ τ.π το c ορίζεται στο M από τον $\theta(x, \bar{a})$ και υπάρχει $\mathcal{L}_A$-formula $\varphi(x, \bar{z})$ και μια m-αδα $b_1,\ldots,b_m \in A$ τ.π το d ορίζεται στο M από τον $\theta(x, \bar{b})$.
Θα δείξω ότι το $c +^M d$ ορίζεται από την παρακάτω formula, $\psi(x, \bar{a}, \bar{b})$:
$M \models \exists u,v\, (\theta(u, \bar{a}) \wedge \varphi(v, \bar{b}) \wedge u+v=x)$
Αρκεί να δείξω ότι
$M \models \psi(c+d, \bar{a}, \bar{b}) \wedge \exists! x\, \psi(x, \bar{a}, \bar{b})$
Αρκεί να δείξω τα κάτωθι

α) $M \models \exists u,v\ (\theta(u, \bar{a}) \wedge \varphi(v , \bar{b}) \wedge u+v=c+d)$.Αυτό όμως ισχύει διότι ο τύπος $\theta(x, \bar{a})$ ορίζει μοναδικά τα c , u. Ομοίως ο $\varphi(y , \bar{b})$ ορίζει μοναδικά και τα v, d. Άρα c+d=u+v.

β) Πρέπει να δείξω ότι υπάρχει μοναδικό x τ.π $M \models \psi(x, \bar{a}, \bar{b})$ .

Έστω ότι τα x, y πληρούν τον ίδιο τύπο, δηλ

$M \models \psi(x, \bar{a}, \bar{b}) \wedge \psi(y, \bar{a}, \bar{b})$ δηλ

$M \models \exists u,v\ (\theta(u, \bar{a}) \wedge \varphi(v , \bar{b}) \wedge u+v=x) \wedge \exists u,v\ (\theta(u, \bar{a}) \wedge \varphi(v , \bar{b}) \wedge u+v=y)$ .

Όμως λόγω κατασκευής των c,d από τους τύπους φ, θ έχω ότι c+d = x και c+d = y. Άρα x = y και επομένως υπάρχει μοναδικό στοιχείο του M που ικανοποιεί τον $\psi(x, \bar{a}, \bar{b})$.

Άρα $c +^M d \in K(M;A)$. Ομοίως δείχνω $c' \ ^M d \in K(M;A)$. Άρα υπάρχει μοναδική υποδομή του M με σύμπαν το σύνολο K(M; A).

Για να δείξω ότι K(M;A) < M εφαρμόζουμε το κριτήριο του Tarski δηλ ( Έστω ότι M , N δομές για την $\mathcal{L}_A$ τ.π $M \subseteq N$ και για κάθε $\alpha_0,\ldots,\alpha_n \in M$ , $\varphi(\bar{x}, x_{n+1}) \in T(\mathcal{L}_A)$, αν $N \models \exists x_{n+1}\ \varphi(\bar{a}, x_{n+1})$ τότε υπάρχει $\alpha_{n+1} \in M$ τ.π $N \models \varphi(\bar{a}, \alpha_{n+1})$ . Τότε M < N) .

Έστω λοιπόν ότι $M \models \exists x \varphi(x, \bar{c})$ με $\bar{c} \in K(M;A)$.

Τότε υπάρχουν $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in A$ και τύποι $\eta_\iota(x, \bar{c})$, $i = 1,\ldots,n$, τ.π κάθε ένα $c_\iota$ ορίζεται από τον $\eta_\iota(x, \bar{a})$.

Τότε προφανώς $M \models \exists x, \bar{y}\ (\Lambda\Lambda_{i=1}^{n} \eta_i(y_i , \bar{a}) \wedge \varphi(x, \bar{y}))$.Ορίζω $\theta(x , \bar{y})$ το $\exists \bar{y} (\Lambda\Lambda_{i=1}^{n} \eta_i(y_i , \bar{a}) \wedge \varphi(x, \bar{y}))$ οπότε έχω $M \models \exists x\ \theta(x, \bar{a})$ .Έτσι από την αρχή του ελαχίστου αριθμού έχω :

$M \models \exists x\ (\theta(x, \bar{a}) \wedge \forall w < x\ \neg\theta(w, \bar{a}))$ (εδώ χρησιμοποιώ σαν ελάχιστο το x).

Πιο αναλυτικά έχω $M \models \exists x\{\exists \bar{y}\ [\Lambda\Lambda_{i=1}^{n} \eta_i(y_i , \bar{a}) \wedge \varphi(x, \bar{y})] \wedge \forall z < x\ \forall \bar{w}[(\Lambda\Lambda_{i=1}^{n} \eta_i(w_i, \bar{a}) \rightarrow \neg\ \varphi(z , \bar{w})]\}$ . Ορίζω τον τύπο που είναι εντός των άγκιστρων σαν $k(x , \bar{a})$. Τότε υπάρχει μοναδικό $d \in M$ τ.π $M \models k(d , \bar{a})$. Όμως ο $k(d , \bar{a})$ αποτελείται από μια σύζευξη δύο τύπων. Κρατώντας μόνο τον πρώτο έχουμε $M \models \exists \bar{y}\ [\Lambda\Lambda_{i=1}^{n} \eta_i(y_i , \bar{a}) \wedge \varphi(d, \bar{y})]$.

Όμως τα $c_1,\ldots,c_m$ ορίζονται μοναδικά από τους $\eta_i(x , \bar{a})$. Άρα $y_1 = c_1,\ldots,y_m = c_m$ και συνεπώς $M \models \varphi(d, \bar{c})$, όπως απαιτείται. □

Για κάθε πλήρη συνεπή θεωρία T που επεκτείνει το PA, έστω $M \models T$ ένα τυχαίο μοντέλο της και έστω $K_T = K(M)$. Το $\mathbf{K_T}$ καλείται **πρώτο μοντέλο** της T.

Ο ορισμός του $K_T$ εξαρτάται μόνο από το T (μέχρι ισομορφισμό) και όχι από την επιλογή του μοντέλου M, όπως δείχνει το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 7.2**

Έστω T θεωρία που είναι πλήρης συνεπής επέκταση του PA και έστω $N \models T$. Τότε υπάρχει μια μοναδική στοιχειώδης εμφύτευση $h: K_T \longrightarrow N$ τ.π $h[K_T] = K(N)$.

**Απόδ**

Υποθέτουμε $K_T = K(M)$ όπου $M \models T$ και $N \models T$. Εφόσον η T είναι πλήρης θα ισχύει $T \vdash \exists!x\ \theta(x)$ ή $T \vdash \neg \exists!x\ \theta(x)$ για κάθε $\mathcal{L}_A$- formula $\theta(x)$ .Επιπλέον έχω ότι λόγω $K_T = K_T(M) < M$ (8.1) .
Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $\mathcal{L}_A$-formula $\theta(x)$:
$N \models \exists!x\ \theta(x)$ ανν $T \vdash \exists!x\ \theta(x)$ ανν $K_T \models \exists!x\ \theta(x)$
Αρκεί να δείξω τα κάτωθι
α) $N \models \exists!x\ \theta(x) \Rightarrow T \vdash \exists!x\ \theta(x)$
β) $T \vdash \exists!x\ \theta(x) \Rightarrow K_T \models \exists!x\ \theta(x)$
γ) $K_T \models \exists!x\ \theta(x) \Rightarrow N \models \exists!x\ \theta(x)$.

Απόδ των α) ,β), γ)

α) Έστω ότι ισχύει $N \models \exists!x\ \theta(x)$
Εφόσον $N \models T$ και T πλήρης θα έχω $T \vdash \exists!x\ \theta(x)$.

β) Έστω ότι ισχύει $T \vdash \exists!x\ \theta(x)$. Αφού $K_T \models T$ τότε $K_T \models \exists!x\ \theta(x)$.

γ) Όπως στο α), δείχνουμε ότι αν $K_T \models \exists!x\ \theta(x)$, τότε $T \vdash \exists!x\ \theta(x)$. Όμως $N \models T$ και άρα αν $K_T \models \exists!x\ \theta(x)$, τότε $N \models \exists!x\ \theta(x)$.
Άρα οι ισοδυναμίες απεδείχθησαν.

Τώρα για κάθε $\alpha \in K_T$ , έστω $\theta_\alpha(x)$ η formula που ορίζει το $\alpha \in M$.
Τώρα ορίζω $h : K_T \longrightarrow N$ ως εξής $h(\alpha)$ = το μοναδικό στοιχείο του N που ικανοποιεί τον τύπο $\theta_\alpha(x)$.
Πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι ορίζεται το $h(\alpha)$ για κάθε $\alpha \in K_T$.
Από ορισμό του $\theta_\alpha(x)$ έχω $M \models \exists!x\ \theta_\alpha(x)$ και επειδή $K_T < M$ τότε $K_T \models \exists!x\ \theta_\alpha(x)$. Λόγω της ισοδυναμίας που δείξαμε πριν, ισχύει $N \models \exists!x\theta_\alpha(x)$, άρα ορίζεται το $h(\alpha)$. Άρα απεδείχθη η ύπαρξη .
Θα δείξω τώρα ότι η συνάρτηση **h** είναι **εμφύτευση** .
Αρκεί να δείξω ότι h είναι 1-1 και διατηρεί τα ( 0, 1, +, ) .
Δείχνω πρώτα ότι είναι 1-1.
Εάν $\alpha_1,\alpha_2 \in K_T$ τ.π $K_T \models \alpha_1 \neq \alpha_2$.
Εφόσον $\alpha_1$, $\alpha_2 \in K_T$, υπάρχουν τύποι $\theta_{\alpha_1}(x)$ ,$\theta_{\alpha_2}(x)$ που τα ορίζουν στο M. Έστω τώρα φ πρόταση

$\forall x, y(\theta_{\alpha_1}(x) \wedge \theta_{\alpha_2}(y) \longrightarrow x \neq y)$.

Επειδή $K_T \vDash \varphi$ και T πλήρης, ισχύει $N \vDash \varphi$, άρα $h(\alpha_1) \neq h(\alpha_2)$.
Τώρα θα δείξω ότι η h διατηρεί το άθροισμα.
Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K_T$ τ.π $K_T \vDash \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$. Λόγω ορισμού του $K_T$, υπάρχουν τύποι $\theta_{\alpha_1}(x)$ ,$\theta_{\alpha_2}(x)$, $\theta_{\alpha_3}(x)$ που ορίζουν τα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ στο $K_T$. Τότε

$K_T \vDash \theta_{\alpha_1}(x) \wedge \theta_{\alpha_2}(y) \wedge \theta_{\alpha_3}(z) \longrightarrow x + y = z)$, άρα (όπως πριν)

$N \vDash \theta_{\alpha_1}(x) \wedge \theta_{\alpha_2}(y) \wedge \theta_{\alpha_3}(z) \longrightarrow x + y = z)$, οπότε

$N \vDash h(\alpha_1) + h(\alpha_2) = h(\alpha_3)$.

Ομοίως για .
Θα δείξω τώρα ότι $h(K_T) = K(N)$.
Από τα προηγούμενα, είναι άμεσο ότι $h(K_T) \subseteq K(N)$, άρα αρκεί να δείξω ότι $K(N) \subseteq h(K_T)$.Έστω λοιπόν $b \in K(N)$ και $\varphi(x)$ τύπος που ορίζει το b στο N και στο K(N).
Τότε $N \vDash \exists! x\ \varphi(x)$, άρα (λόγω των ισοδυναμιών) $K_T \vDash \exists! x\varphi(x)$.
Έστω τώρα α το στοιχείο του $K_T$ που ορίζει ο τύπος $\varphi(x)$.
Από τον ορισμό της h έπεται ότι $h(\alpha) = b$, δηλαδή $b \in h(K_T)$, όπως απαιτείται.
Άρα h είναι **εμφύτευση**.
Όμως $h(K_T) = K(N) < N$ λόγω 7.1. Άρα $K_T \vDash \theta_\alpha(\alpha) \Rightarrow N \vDash \theta_\alpha(h(\alpha))$, δηλαδή η εμφύτευση είναι **στοιχειώδης** .
Θα δείξω ότι η h είναι **μοναδική** εμφύτευση της $K_T$ στη N.
Έστω ότι υπάρχει και άλλη στοιχειώδης εμφύτευση $k : K_T \to N$. Τότε για κάθε $\alpha \in K_T$
$K_T \vDash \theta_\alpha(\alpha) \Rightarrow N \vDash \theta_\alpha(k(\alpha))$ (1)
$K_T \vDash \theta_\alpha(\alpha) \Rightarrow N \vDash \theta_\alpha(h(\alpha))$ (2)
και $N \vDash \exists! x\ \theta_\alpha(x)$ (3) από ισοδυναμία .Λόγω των (1) ,(2) ,(3) έχω ότι $k(\alpha) = h(\alpha)\ \forall\alpha$. Άρα η h είναι **μοναδική**. ▫

Το θεώρημα 7.2 μας λέει ότι ο ορισμός του $K_T$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του μοντέλου M αλλά υπάρχει ένας κανονικός ισομορφισμός $K(N) \cong K(M)$ για όλα τα μοντέλα $N,M \vDash T$ ,όπου T είναι μια πλήρης συνεπής επέκταση του PA .
Είναι φανερό ότι το $K_T$ πρέπει να θεωρείται σαν **μικρό**. Τα επόμενα τρία θεωρήματα μας εξηγούν γιατί.

**Πόρισμα 7.3**
Έστω T μια πλήρης συνεπής επέκταση του PA.Τότε το $K_T$ είναι ελαχιστικό δηλ **δεν** έχει γνήσιες στοιχειώδεις υποδομές .

**Απόδ**
Θεωρώ θεωρία T όπως παραπάνω , και για κάθε $\alpha \in K_T$ έστω $\theta_\alpha(x)$ μια $\mathcal{L}_A$ formula που μας ορίζει το **α** στο $K_T$ .
Υποθέτω ότι $N < K_T$ (1). Από **θεώρημα 7.2** υπάρχει κανονική εμφύτευση $h : K_T \longrightarrow N$ που ορίζεται ως $h(\alpha) =$ το μοναδικό στοιχείο του N που ικανοποιεί

το $\theta_\alpha(x)$. Έστω τυχόν $\alpha \in K_T$. Τότε $N \vDash \exists! x\ \theta_\alpha(x)$, δηλαδή υπάρχει $b \in N$ τ.π $N \vDash \theta_\alpha(b)$. Τότε όμως $K_T \vDash \theta_\alpha(b)$, λόγω της (1). Άρα $\alpha = b$, οπότε η h είναι η ταυτοτική συνάρτηση και $N = K_T$. ◻

**Πόρισμα 7.4**

Έστω T πλήρης συνεπής επέκταση του PA . Τότε $K_T$ είναι **αυστηρό** (rigid ) δηλ **δεν** έχει **μη** τετριμένους (ταυτοτικούς) **αυτομορφισμούς.**

**Άπόδ**

Εάν h είναι αυτομορφισμός του $K_T$ (δηλ h είναι μια εμφύτευση $K_T \to K_T$ που είναι επίσης **επί**) τότε η h είναι η μοναδική στοιχειώδης εμφύτευση του θεωρήματος 7.2, δηλαδή η ταυτοτική. ◻

Πρέπει να σημειώσουμε επίσης ότι εάν T = Th(ℕ) , τότε $K_T$ είναι το ορθόδοξο μοντέλο ℕ , εφόσον ℕ ⊨ T και **δεν** έχει γνήσιες υποδομές .

Το τελευταίο **πόρισμα** που ακολουθεί μετά τα θεωρήματα 7.1 και 7.2 είναι μια έκδοση του πολύ γνωστού θεωρήματος παράλειψης τύπων , και δείχνει πόσο '**μικρό**' είναι το $K_T$ και το σχετικό με αυτό K(M;A). Για να περιγράψουμε το πόρισμα πρέπει πρώτα να εισαγάγουμε κάποιους πολύ σπουδαίους ορισμούς.

Εάν T είναι μια θεωρία , ένας **type** στο T είναι ένα σύνολο p(x) από formulas φ(x) που περιέχουν πεπερασμένα πολλές ελεύθερες μεταβλητές $\bar{x}$, τ.π $T + \{\varphi(\bar{x}) \,/\, \varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})\}$ είναι συνεπές. Το παραπάνω θα το γράφουμε πιο απλά ως '**T + p($\bar{x}$) συνεπές**'.

Ο $p(\bar{x})$ είναι ένας πλήρης type στο T **ανν** T+ $p(\bar{x})$ είναι μια πλήρης θεωρία δηλ για όλους $\theta(\bar{x})$ , είτε $T + p(\bar{x}) \vdash \theta(\bar{x})$ ή $T + p(\bar{x}) \vdash \neg\, \theta(\bar{x})$.

Ο type $p(\bar{x})$ είναι **κύριος** (principal) ανν υπάρχει μια formula $\psi(\bar{x})$ τ.π $T + p(\bar{x}) \vdash \psi(\bar{x})$ και $T \vdash \forall \bar{x}(\psi(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x}))$ για όλους τους $\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$.

Τελικά , εάν M ⊨ T θα λέμε ότι ο **type** $p(\bar{x})$ επί της θεωρίας T ικανοποιείται στο M ανν υπάρχει $\bar{a} \in M$ τ.π $M \vDash \varphi(\bar{a})$ για όλους τους $\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$, αλλιώς λέμε ότι 'το μοντέλο M παραλείπει το $p(\bar{x})$'.

Από το θ πληρότητας προκύπτει, εάν **p($\bar{x}$)** είναι type της θεωρίας T , τότε T έχει ένα μοντέλο που ικανοποιεί το $p(\bar{x})$**.**

Ομοίως εάν $p_1(\bar{x})$ , $p_2(\bar{x})$ , $p_3(\bar{x})$ ,…… είναι types της θεωρίας **Th(M)** του μοντέλου M ,τότε υπάρχει μια στοιχειώδης επέκταση N > M που ικανοποιεί όλους τους types $p_i(\bar{x})$.

**Πόρισμα 7.5** (Παράλειψη τύπων)

Έστω $\mathcal{L}_C$ μια επέκταση της γλώσσας $\mathcal{L}_A$ της αριθμητικής που λαμβάνεται με την πρόσθεση ενός νέου (μη αναγκαία αριθμήσιμου ) συνόλου από σταθερές C.

Έστω T μια πλήρης συνεπής $\mathcal{L}_C$ θεωρία που περιέχει το PA .Τότε υπάρχει ένα μοντέλο K του T τ.π , για κάθε πλήρη type p($\bar{x}$) στο T ,το K ικανοποιεί το p($\bar{x}$) ανν p($\bar{x}$) είναι κύριος.

**Απόδ**

Έστω M ⊨ T και έστω A ⊆ M το σύνολο των στοιχείων του M που είναι ερμηνείες των σταθερών στο C.

Έστω K η δομή K(M; A). Από θ 7.1 έχουμε ότι A ⊆ K(M; A) < M. Έστω τώρα p($\bar{x}$) ένας πλήρης type στο T. Θα δείξουμε ότι το K ικανοποιεί τον p($\bar{x}$) ανν ο p($\bar{x}$) είναι κύριος.

(=>)Υποθέτω πρώτα ότι p($\bar{x}$) ικανοποιείται από $\bar{a} = \alpha_1,\ldots,\alpha_n \in$ K.

Τότε υπάρχουν $c_1,\ldots\ldots,c_n \in$ A και $\eta_1(x, \bar{y}),\ldots\ldots, \eta_n(x, \bar{y})$ τ.π το $\alpha_\iota$ ορίζεται από τον $\eta_\iota(x, \bar{y})$ στο M (και στο K).

(Μπορούμε να υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε το ίδιο σύνολο παραμέτρων για όλους τους $\eta_\iota$.)

Τότε $K \vDash \exists \bar{x}\ \Lambda\Lambda_{i=1}^{n} \eta_i(x_i, \bar{c})$.

Αφού $K \vDash \exists \bar{x}\ (\Lambda\Lambda_{i=1}^{n} \eta_i(x_i, \bar{c}) \wedge \varphi(\bar{x}))$ και $K \vDash \exists! x_i\, \eta_i(x_i, \bar{c})$, ισχύει

$K \vDash \forall \bar{x}\ (\Lambda\Lambda_{i=1}^{n} n_i(x_i, \bar{c}) \to \varphi(\bar{x}))$ (1) για κάθε $\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ .

Τώρα επειδή η θεωρία T + p($\bar{x}$) είναι πλήρης, θα έχω $T + p(\bar{x}) \vdash \Lambda\Lambda_{i=1}^{n} \eta_i(x_i, \bar{c})$ ή $T + p(\bar{x}) \vdash \neg\Lambda\Lambda_{i=1}^{n} \eta_i(x_i, \bar{c})$ .

Έστω ότι ισχύει : $T + p(\bar{x}) \vdash \neg\Lambda\Lambda_{i=1}^{n} n_i(x_i, \bar{c})$ .

Τότε υπάρχουν $\varphi_1,\ldots,\varphi_m \in p(\bar{x})$ τ.π

$T + \{ \varphi_1(\bar{x}),\ldots,\varphi_m(\bar{x})\} \vdash \neg\Lambda\Lambda_{i=1}^{n} \eta_i(x_i, \bar{c})$ .Από το θ σε άτοπο απαγωγής έχω

$T \vdash \varphi_1(\bar{x}) \wedge\ldots\wedge\varphi_m(\bar{x}) \to \neg\Lambda\Lambda_{i=1}^{n} \eta_i(x_i, \bar{c})$ ή από αντιθετοαναστροφή και το προηγούμενο θεώρημα έχω $T \vdash \Lambda\Lambda_{i=1}^{n} \eta_i(x_i, \bar{c}) \to \neg\Lambda\Lambda_{i=1}^{m}\varphi_i$ όπου $\varphi_i \in p(\bar{x})$.

Τότε όμως $K \vDash \Lambda\Lambda_{i=1}^{n} \eta_i(x_i, \bar{c}) \to \neg\Lambda\Lambda_{i=1}^{m}\varphi_i$, που είναι άτοπο, λόγω της (1).

Άρα

$T + p(\bar{x}) \vdash \Lambda\Lambda_{i=1}^{n} \eta_i(x_i, \bar{c})$ (2)

Τώρα καταλήγουμε στο ζητούμενο ότι το p($\bar{x}$) είναι **κύριο** λόγω των (1) και (2).

(<=)

Υποθέτω ότι p($\bar{x}$) είναι **κύριο** ,από ορισμό έχω ότι υπάρχει θ($\bar{x}$) τύπος τ.π $T + p(\bar{x}) \vdash \theta(\bar{x})$ (1)και $T \vdash \forall \bar{x}(\theta(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x}))$ (2) για κάθε $\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$.

Επειδή **T πλήρης**, τότε ισχύει $T \vdash \exists\bar{x}\,\theta(\bar{x})$ ή $T \vdash \neg\exists\bar{x}\,\theta(\bar{x})$ για κάθε θ($\bar{x}$).

Αν ίσχυε $T \vdash \neg\exists\bar{x}\,\theta(\bar{x})$ τότε θα είχαμε $T + p(\bar{x}) \vdash \neg\exists\bar{x}\,\theta(\bar{x})$.

Όμως από την (1) έχουμε Τ+ $p(\bar{x}) \vdash \exists \bar{x}\, \theta(\bar{x})$, άρα Τ+ $p(\bar{x})$ είναι αντιφατικό που είναι άτοπο.

Άρα $T \vdash \exists \bar{x}\, \theta(\bar{x})$ και συνεπώς $K \vDash \exists \bar{x}\, \theta(\bar{x})$ . Άρα $p(\bar{x})$ ικανοποιείται στο Κ.

Παρατηρώ ότι , εάν $p(\bar{x})$ είναι ένας κύριος type στην πλήρη θεωρία Τ, τότε $p(\bar{x})$ ικανοποιείται σε όλα τα μοντέλα $M \vDash T$ . Το συμπέρασμα που εξάγεται από το πόρισμα 7.5 είναι ότι τα μοντέλα Κ(Μ;Α) του PA ικανοποιούν το μικρότερο δυνατό σύνολο types .

Το θεώρημα **Παράλειψης Τύπων** είναι ευρύτερα γνωστό με την εξής μορφή: εάν Τ είναι πλήρης θεωρία σε μια αριθμήσιμη γλώσσα $\mathcal{L}$ και $p_1(\bar{x})$ , $p_2(\bar{x})$ , $p_3(\bar{x})$ ,…..είναι αριθμήσιμα πολλοί **μη** κύριοι types στο Τ, τότε το Τ έχει ένα μοντέλο που παραλείπει κάθε ένα από τους $p_1(\bar{x})$ , $p_2(\bar{x})$ , $p_3(\bar{x})$ ,….. (βλέπε Chang και Keisler 1973) . Ας αντιπαραβάλλουμε το θεώρημα αυτό με το πόρισμα 7.5 . Η κύρια διαφορά είναι ότι στο 7.5 μπορούμε να παραλείψουμε **μη αριθμήσιμα** πολλούς τύπους ενώ στο γενικό θεώρημα παράλειψης τύπων **μόνο** αριθμήσιμα πολλούς τύπους. Η επιπλέον δύναμη του πορίσματος 7.5 βγαίνει από το PA και το **ιδιαίτερο** χαρακτηριστικό του να έχει 'κατά σημείο **ορίσιμα'** μοντέλα (δηλαδή τα μοντέλα της μορφής Κ(Μ; Α)).

## §7.2 ΤΕΛΙΚΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

Σ αυτή την παράγραφο θα αποδείξουμε το ακόλουθο.

**Θεώρημα 7.6** (MαcDowell και Specker 1961)
Κάθε μοντέλο $M \vDash PA$ έχει μια γνήσια στοιχειώδη τελική επέκταση .

Το επιχείρημα που θα χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε αυτό το θεώρημα οφείλεται στον Gaifman (1976) και δίδει επιπλέον πληροφορίες .
Πριν προχωρήσουμε στην αναλυτική απόδειξη, θα σκιαγραφήσουμε τις βασικές ιδέες της απόδειξης. Παρατηρούμε καταρχήν ότι αν $M < K$ και $M \subset_e K$, $b \in K\text{-}M$, τότε η K θα ήταν μοντέλο της θεωρίας

$$T = \{\varphi(\bar{c}_a)/ <M, |M|> \vDash \varphi(\bar{c}_a)\} \cup \{c > c_\alpha / \alpha \in M\} \text{ στη γλώσσα}$$

$$\mathcal{L}_A(M) = \mathcal{L}_A \cup \{c_\alpha / \alpha \in M\} \cup \{c\}, \text{ όπου c νέο σύμβολο σταθεράς.}$$

Επίσης το K θα παρέλειπε όλους τους τύπους της μορφής

$$P_\alpha(x) = \{x < c_\alpha\} \cup \{x \neq c_b / M \vDash b \leq \alpha\}$$

(σημειώνουμε ότι υπάρχει μη αριθμήσιμο πλήθος τέτοιων τύπων, όταν το M δεν είναι αριθμήσιμο). Το μοντέλο K που ζητάμε θα οριστεί ως $K(N;M\cup\{d\})$, όπου N είναι κατάλληλη στοιχειώδης επέκταση του M και d κατάλληλο στοιχείο του N.

**Ισχυρισμός**
Έστω $M < K$, $M \subseteq_e K$, $b \in K \setminus M$, $\varphi(x, \bar{y})$ τύπος και $\bar{b} \in M$. Αν ισχύει $K \vDash \varphi(b, \bar{b})$, τότε $M \vDash \forall z \exists x(x > z \wedge \varphi(x, \bar{b}))$.
**Απόδ**
Αρκεί να δείξω για τυχόν $\alpha \in M$ ισχύει $M \vDash \exists x(x > \alpha \wedge \varphi(x, \bar{b}))$.
Αφού ισχύει $K \vDash \varphi(b, \bar{b})$, τότε $K \vDash \exists x(x > \alpha \wedge \varphi(x, \bar{b}))$, για τυχόν $\alpha \in M$. Όμως $M < K$, άρα ισχύει $M \vDash \exists x(x > \alpha \wedge \varphi(x, \bar{b}))$.
Αυτή η έννοια είναι πολύ σπουδαία και θα συντομεύσουμε την $\forall z \exists x\,(x > z \wedge \varphi(x , \bar{b}))$ ως $Qx\varphi(x , \bar{b})$. Όπως συνήθως, θα γράφουμε απλά M αντί για τη δομή $<M, |M|>$ για την $\mathcal{L}_A(M)$.

**Λήμμα 7.7**
Έστω $\varphi(x)$ μια $\mathcal{L}_A(M)$- formula τ.π $M \vDash Qx\varphi(x)$ , και έστω $\theta(x, \bar{y})$ μια τυχαία $\mathcal{L}_A(M)$-formula. Τότε υπάρχει μια $\mathcal{L}_A(M)$-formula $\psi(x)$ τ.π :
(α) $M \vDash Qx\psi(x)$ ;
(b) $M \vDash \forall x(\psi(x) \longrightarrow \varphi(x))$ ;
(c) για όλα τα $\bar{a} \in M$ ,
είτε: $M \vDash \exists y \forall x(x > y \wedge \psi(x) \longrightarrow \theta(x , \bar{a}))$
ή $M \vDash \exists y \forall x(x > y \wedge \psi(x) \longrightarrow \neg\theta(x , \bar{a}))$

**Απόδ**

Για να απλοποιήσουμε τα πράγματα υποθέτουμε ότι η ν-αδα $\bar{y}$ στην $\theta(x, \bar{y})$ είναι μια μόνο μεταβλητή. (Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας την συνάρτηση ζευγαρώματος).

Η ιδέα είναι να ‘ ορίσουμε’ formulas $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x),\ldots..,\psi_y(x),\ldots$ τ.π

α) $\psi_0(x) = \varphi(x)$

β) για κάθε $y \in M$ έχοντας βρεί $\psi_y(x)$ τ.π $M \vDash Qx\psi_y(x)$, ορίζουμε $\psi_{y+1}(x)$ να είναι τύπος τ.π

$$M \vDash Qx[\psi_y(x) \wedge \theta(x , y)] \text{ ή}$$
$$M \vDash Qx[\psi_y(x) \wedge \neg\theta(x , y)] .$$

Τελικά θα ορίσω την formula $\psi(x)$ που εκφράζει

$\exists y$ ‘x είναι το (y + 1) στοιχείο που ικανοποιεί την $\psi_y$’.

Θα δείξουμε ότι $\psi(x)$ είναι μια γνήσια $\mathcal{L}_A(M)$-formula με τις τρεις απαιτούμενες ιδιότητες ; όμως ο διαισθητικός λόγος γιατί η $\psi(x)$ δουλεύει είναι ο εξής:

α) Λόγω της κατασκευής των $\psi_0(x), \psi_1(x),\ldots\ldots..$, για κάθε y ισχύει $M \vDash Qx\psi_y(x)$ και $M \vDash \forall x(\psi_y(x) \longrightarrow \psi_{y+1}(x))$. Άρα, για κάθε y, το (y + 2)- οστο στοιχείο που ικανοποιεί την $\psi_{y+1}$ είναι μεγαλύτερο από το (y + 1)-οστο στοιχείο που ικανοποιεί την $\psi_y$, όποτε $M \vDash Qx\psi(x)$.

b) Προφανές.

c) Για κάθε $\alpha \in M$, αφού είτε $M \vDash \forall x(\psi_y(x) \longrightarrow \theta(x, \alpha))$ ή $M \vDash \forall x(\psi_y(x) \longrightarrow \neg\theta(x, \alpha))$, για κάθε $y > \alpha$, τότε για κάθε x μεγαλύτερο από το ($\alpha$ +2)- οστο στοιχείο που ικανοποιεί την $\psi_{\alpha+1}$ και την $\psi$ είτε $M \vDash \theta(x, \alpha)$ συνέχεια ή $M \vDash \neg\theta(x, \alpha)$ συνέχεια.

Ας προχωρήσουμε τώρα σε λεπτομέρειες, υπενθυμίζοντας πρώτα ότι κάθε $s \in M$ μπορεί να θεωρηθεί ως κωδικός της ακολουθίας $(s)_0, (s)_1,\ldots$. Θεωρούμε την $\mathcal{L}_A(M)$- formula $\chi(x, y, s)$ που ορίζεται ως εξής:

$$\varphi(x) \wedge \forall u < y[((s)_u = 0 \longrightarrow \theta(x , u)) \wedge$$
$$[((s)_u \neq 0 \longrightarrow \neg\theta(x , u))] .$$

Διαισθητικά η $\chi(x , y , s)$ εκφράζει την αλήθεια της $\varphi(x) \wedge \bigwedge_{u<y} \neg^{(s)_u} \theta(x , u)$ όπου $\neg^{(s)_u}$ είναι κενό εάν $(s)_u = 0$ και $\neg$, αλλιώς.

Στη συνέχεια, θεωρούμε την formula **$\delta(x , y)$** που ορίζεται ως

$$\exists s[\forall u < y[Qz(\chi(z , u , s) \wedge \theta(z , u)) \leftrightarrow (s)_u = 0] \wedge \chi(x, y, s)]$$

και εκφράζει ΄$\psi_y(x)$ είναι αληθής’.

Πριν να ορίσω την $\psi(x)$ θα αποδείξω κάποιες ιδιότητες των $\chi$ και $\delta$ .

Με επαγωγή στο y μπορούμε να δείξουμε ότι

$$M \vDash \forall y\forall s\forall t[\forall i < y((s)_i = (t)_i)\longrightarrow (\chi(x , y , s)\leftrightarrow \chi(x, y, t)],$$

δηλαδή ότι η τιμή αλήθειας της $\chi(x , y , s)$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές των x, y, $(s)_0, (s)_1,\ldots.,(s)_{y-1}$.

**Ισχυρισμός**

$$M \vDash \forall x , y \exists s\forall u < y[(s)_u = 0 \leftrightarrow Qz(\chi(z , u , s) \wedge \theta(z , u))].$$

**Απόδ**

Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά στο y, θεωρώντας τυχόν x.

Για y = 0 έχω $M \vDash \exists s\ \forall u < 0[(s)_u = 0 \leftrightarrow Qz(\chi(z , u , s) \wedge \theta(z , u))]$ που ισχύει λόγω του ότι δεν υπάρχουν u < 0.

Έστω ότι ισχύει η επαγωγική υπόθεση, δηλαδή υπάρχει $s \in M$ τ.π

$$M \vDash \forall u < y[(s)_u = 0 \leftrightarrow Qz(\chi(z , u , s) \wedge \theta(z , u))] \text{ (E.Y).}$$

Θέλω να δείξω ότι υπάρχει $s^* \in M$ τ.π

$$M \vDash \forall u < y +1[(s^*)_u = 0 \leftrightarrow Qz(\chi(z , u , s^*) \wedge \theta(z , u))] \text{ (+).}$$

Τώρα ρωτάμε αν

$$Qz(\chi(z, y, s) \wedge \theta(z, y)).$$

Αν ‘ναι’, τότε παίρνουμε s* κωδικό της ακολουθίας

$(s)_0, (s)_1,\ldots,(s)_{y-1}, 0$.

Αν ‘όχι’ τότε παίρνουμε s* κωδικό της ακολουθίας

$(s)_0, (s)_1,\ldots,(s)_{y-1}, 1$.

(Δηλαδή εφαρμόζω το λήμμα 4.8 (b)).

Τώρα πρέπει να επαληθεύσω την (+)

Άπό επαγωγική υπόθεση έχω ότι

$$M \vDash \forall u < y[(s)_u = 0 \leftrightarrow Qz(\chi(z, u, s) \wedge \theta(z, u))].$$

Λόγω του ορισμού του s*, θα ισχύει λοιπόν ότι

$$M \vDash \forall u < y[(s^*)_u = 0 \leftrightarrow Qz(\chi(z, u, s^*) \wedge \theta(z, u))].$$

Όμως από τον ορισμό του s*, έχουμε ότι

$$M \vDash (s^*)_y = 0 \leftrightarrow Qz(\chi(z, y, s) \wedge \theta(z, y)).$$

Επειδή $(s)_i = (s^*)_i$ για i = 0,….,y-1, έχουμε

$$M \vDash \forall z((\chi(z, y, s) \leftrightarrow \chi(z, y, s^*)).$$

Άρα $M \vDash (s^*)_y = 0 \leftrightarrow Qz(\chi(z, y, s^*) \wedge \theta(z, y))$, συνεπώς ισχύει η (+).

Πάλι με επαγωγή στο y, μπορούμε ν’ αποδείξουμε ότι

$M \vDash \forall y \forall s \forall t[\forall u<y(Qz(\chi(z, u, s) \wedge \theta(z, u)) \leftrightarrow (s)_u = 0) \wedge \forall u<y(Qz(\chi(z, u, t) \wedge \theta(z, u)) \leftrightarrow (t)_u = 0)]$.

Αν s, t τ.π

$M \vDash \forall u<y(Qz(\chi(z, u, s) \wedge \theta(z, u)) \leftrightarrow (s)_u = 0) \wedge \forall u<y(Qz(\chi(z, u, t) \wedge \theta(z, u)) \leftrightarrow (t)_u = 0)$,

τότε με επαγωγή αποδεικνύουμε ότι

$M \vDash \forall u < y((s)_u = 0 \leftrightarrow (t)_u = 0)$, από όπου έπεται ότι

$$M \vDash \forall u \leq y(\chi(x, u, s) \leftrightarrow \chi(x, u, t)).$$

Τώρα θα δείξω ότι για κάθε $y \in M$ , $M \vDash Qx\delta(x , y)$ . Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο y .

Για y = 0

Λόγω του ορισμού του τύπου χ, για τυχόν s ισχύει $M \vDash \chi(x, 0, s) \leftrightarrow \varphi(x)$. Επίσης, επειδή δεν υπάρχουν u < 0, για τυχόν s ισχύει

$M \vDash \forall u<y(Qz(\chi(z, u, s) \wedge \theta(z, u)) \leftrightarrow (s)_u = 0)$.

Άρα, για να ισχύει $M \vDash Qx\delta(x, 0)$, αρκεί να ισχύει $M \vDash Qx\varphi(x)$, που είναι αρχική μας υπόθεση.

Έστω ότι ισχύει για y δηλαδή

$$M \vDash Qx\delta(x, y)\ (*)\ \text{(E.Y)}$$

Θα δείξω ότι ισχύει για y + 1 δηλαδή

$M \vDash Qx\delta(x, y + 1)$.

Εφόσον ισχύει η (Ε.Υ) τότε

$M \vDash Qx(\delta(x, y) \wedge \theta(x, y))$ ή

$M \vDash Qx(\delta(x, y) \wedge \neg\theta(x, y))$.

Πράγματι εάν και τα δύο δεν είναι αληθή, θα είχαμε

$M \vDash \exists w \forall x(\delta(x, y) \wedge \theta(x, y) \longrightarrow x < w)$ και

$M \vDash \exists w^* \forall x(\delta(x, y) \wedge \neg\theta(x, y) \longrightarrow x < w^*)$, ας πούμε ότι $c, d \in M$ τ.π

$M \vDash \forall x(\delta(x, y) \wedge \theta(x, y) \longrightarrow x < c)$ και

$M \vDash \forall x(\delta(x, y) \wedge \neg\theta(x, y) \longrightarrow x < d)$. Τότε θα ίσχυε

$M \vDash \forall x(\delta(x, y) \longrightarrow x < \max(c, d))$, που αντιφάσκει με την $(*)$.

**Περίπτωση 1)**

$M \vDash Qx(\delta(x , y) \wedge \theta(x , y))$ (1)

Θεωρώ τυχόν $t \in M$.

Από (Ε.Υ) $(*)$ υπάρχει $s \in M$ τ.π

$M \vDash \forall u < y[Qz(\chi(z, u, s) \wedge \theta(z, u)) \leftrightarrow (s)_u = 0] \wedge \exists x > t(\chi(x, y, s) \wedge \theta(x, y))$(2).

Με βάσει το 4.8 υπάρχει $s^* \in M$ που ικανοποιεί το

$M \vDash \forall u < y((s)_u = (s^*)_u) \wedge (s^*)_y = 0$ (3).

Ισχυριζόμαστε ότι ισχύει

$M \vDash \forall u < y + 1[Qz(\chi(z, u, s^*) \wedge \theta(z, u)) \leftrightarrow (s^*)_u = 0]$(4).

Πράγματι, από τις (2) και (3) έχουμε ότι

$M \vDash \forall u < y[Qz(\chi(z, u, s^*) \wedge \theta(z, u)) \leftrightarrow (s^*)_u = 0]$.

Έπίσης $M \vDash Qz(\chi(z, y, s^*) \wedge \theta(z , y)) \wedge (s)_u = 0$, λόγω της (2) και της

$M \vDash \chi(z, y, s^*) \leftrightarrow \chi(z, \upsilon, s)$.

Άρα ισχύει η (4).

Τέλος, ισχύει $M \vDash \chi(x, y +1, s^*) \leftrightarrow \chi(x, y, s^*) \wedge \theta(x, y)$

$M \vDash \chi(x, y +1, s) \leftrightarrow \chi(x, y, s) \wedge \theta(x, y)$,

οπότε, λόγω της (2), ισχύει $M \vDash \exists x > t\ \chi(x, y +1, s^*)$.

Άρα $M \vDash \forall u < y + 1(Qz(\chi(z, u, s^*) \wedge \theta(z, u)) \leftrightarrow (s^*)_u = 0) \wedge \exists x > t(\chi(x, y +1, s^*) \wedge \theta(x, y))$,

Δηλαδή $M \vDash Qx\delta(x , y +1)$.

**Περίπτωση 2)**

$M \vDash Qx(\delta(x , y) \wedge \neg\theta(x , y))$.

Δουλεύουμε όπως πριν, θέτοντας $(s^*)_y = 1$.

Θα ορίσω τώρα το **γ(x, y)** να είναι

$\exists w[\delta((w)_0 , y) \wedge \forall v < (w)_0 \neg\delta(v , y) \wedge$

$\forall u < y[\delta((w)_{u+1} , y) \wedge \forall v < (w)_{u+1}(\delta(v , y) \longrightarrow v \leq (w)_u)] \wedge x = (w)_y]$

Εδώ ορίζεται μια ακολουθία $w : (w)_0 , (w)_1 , \ldots..,(w)_y$, που εκφράζει ‘x είναι το (y + 1)-οστο στοιχείο που ικανοποιεί το δ(x , y)’.

**Ισχυρισμός**

$M \models \forall y \exists ! x \gamma(x , y)$.

**Απόδ**

Θα γίνει με επαγωγή στο y .

$y = 0$

Αφού $M \models \exists x \delta(x, 0)$, άρα υπάρχει ελάχιστο τέτοιο x, ας πούμε το α. Θεωρούμε κωδικό c της ακολουθίας με μοναδικό όρο το α και τότε έχουμε

$M \models \delta((w)_0 , 0) \wedge \forall v < (w)_0 \neg\delta(v , 0) \wedge$

$\forall u < 0[\delta((w)_{u+1} , 0) \wedge \forall v < (w)_{u+1}(\delta(v , 0) \longrightarrow v \leq (w)_u)] \wedge \alpha = (w)_0$,

δηλαδή ότι $M \models \gamma(\alpha, 0)$ (το α είναι προφανώς μοναδικό).

Έστω ότι ισχύει η επαγωγική υπόθεση δηλαδή

$M \models \exists ! x \gamma(x , y)$ (Ε.Υ)και θα δείξω

$M \models \exists ! x \gamma(x , y + 1)$

Λόγω της (Ε.Υ), υπάρχουν x, w ∈M τ.π

$M \models \delta((w)_0 , y) \wedge \forall v < (w)_0 \neg\delta(v , y) \wedge$

$\forall u < y[\delta((w)_{u+1} , y) \wedge \forall v < (w)_{u+1}(\delta(v , y) \longrightarrow v \leq (w)_u)] \wedge x = (w)_y$.

Θα δείξω

$M \models \exists ! x \exists w[\delta((w)_0 , y + 1) \wedge \forall v < (w)_0 \neg\delta(v , y + 1) \wedge$

$\forall u < y + 1[\delta((w)_{u+1} , y + 1) \wedge \forall v < (w)_{u+1}(\delta(v , y + 1) \longrightarrow v \leq (w)_u)] \wedge$
$x = (w)_{y+1}]$ .

Από τα προηγούμενα, έχουμε ότι

$M \models Qx\delta(x , y + 1)$ δηλαδή

$M \models \forall t \exists x > t\delta(x , y + 1)$ και θέτω όπου $t = (w)_y$

$M \models \exists x > (w)_y\delta(x , y + 1)$

Παίρνουμε το ελάχιστο τέτοιο x έστω το x*.

Τώρα από λήμμα 4.8 υπάρχει w* τ.π

$M \models (w)_u = (w^*)_u \wedge (w^*)_{y+1} = x^*$ για $u \leq y$ και τότε έπεται $M \models \gamma(x^* , y + 1)$, δηλαδή το ζητούμενο.

Θέτουμε **ψ(x)** να είναι η formula **$\exists y\gamma(x , y)$** και θα δείξουμε ότι η ψ ικανοποιεί τα (α)-(c) του λήμματος.

(α) Από ορισμό του $\delta(x , y)$ ισχύει

$M \models \forall x , y(\delta(x , y + 1) \longrightarrow \delta(x , y))$ (∗)

Λόγω της (∗) αν $M \models \gamma(x , y)$ τότε υπάρχουν το πολύ $y + 1$ στοιχεία $w \leq x$ τ.π

$M \models \delta(w , y + 1)$

Άρα $M \models \forall x , y , z(\gamma(x , y) \wedge \gamma(z , y + 1) \longrightarrow z > x)$ (∗ ∗)

Τώρα θα δείξω $M \models Qx\psi(x)$ ή $M \models \forall u \exists x > u \exists y\gamma(x , y)$ (+)

Ξέρω $M \models \forall y Qx\delta(x , y)$ δηλαδή

$M \models \forall y \forall u \exists x > u\delta(x , y)$

Θεωρώ τυχόν $u \in M$ και θέτω $y = u + 1$. Τότε έχω

$M \models \exists ! x\gamma(x, u + 1)$ .

Άρα υπάρχει x τ.π $M \models \gamma(x, u + 1)$.

Όμως $x > u$ από την (∗∗), άρα ισχύει το ζητούμενο.

(b) Τώρα θα δείξω ότι $M \models \forall x(\psi(x) \longrightarrow \varphi(x))$.
Λόγω του ορισμού της γ ισχύει $M \models \forall x \forall y(\gamma(x, y) \longrightarrow \delta(x, y))$ και λόγω του ορισμού της δ ισχύει $M \models \forall x \forall y(\delta(x, y) \longrightarrow \varphi(x, y))$.
Άρα έχουμε ότι $M \models \forall x \forall y(\gamma(x, y) \longrightarrow \varphi(x, y))$, οπότε $M \models \forall x(\exists y \gamma(x, y) \longrightarrow \delta(x, y))$, δηλαδή $M \models \forall x(\psi(x) \longrightarrow \varphi(x))$.

(c)Αρκεί να δείξουμε ότι για $\alpha \in M$

$M \models \exists y \forall x(x > y \wedge \psi(x) \longrightarrow \theta(x , \alpha))$ ή

$M \models \exists y \forall x(x > y \wedge \psi(x) \longrightarrow \neg\theta(x , \alpha))$ .

Έστω λοιπόν τυχόν $\alpha \in M$ και $b \in M$ τ.π $M \models \gamma(b, \alpha)$.
Ισχυριζόμαστε ότι η αληθοτιμή της $x > b \wedge \psi(x) \longrightarrow \theta(x , \alpha)$ είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη από την τιμή του x. Πράγματι, με επαγωγή μπορούμε να δείξουμε ότι $M \models \forall x(x > b \wedge \psi(x) \longrightarrow \exists w > \alpha\ \gamma(x, w))$, χρησιμοποιώντας τη σχέση (∗∗). Άρα

$M \models \forall x(x > b \wedge \psi(x) \longrightarrow \exists w > \alpha\ \delta(x, w))$.

Έστω $c \in M$ τ.π $M \models c > b \wedge \psi(c)$. Τότε υπάρχει $d > \alpha$ τ.π $M \models \delta(c, d)$, δηλαδή

$M \models \exists s[\forall u < d(Qz(\chi(z, u, s) \wedge \theta(z, u)) \leftrightarrow (s)_u = 0) \wedge \chi(x, y, s)]$.

Επειδή όμως $d > \alpha$, η τιμή της $\theta(b, \alpha)$ εξαρτάται μόνο από την τιμή $(s)_\alpha$, οπότε είναι σταθερή. □

Έχοντας δείξει το λήμμα 7.7 επιστρέφουμε στην απόδειξη του θεωρήματος 7.6. Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 7.7 για να βρούμε όλες τις πρωτοβάθμιες ιδιότητες που ικανοποιεί το $c \in K \setminus M$. Για να το κάνω αυτό , απαριθμώ όλες τις formulas στη γλώσσα $\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_A \cup \{c\}$ (όπου c είναι το νέο σύμβολο σταθεράς) από $\theta_0(c, \bar{y})$ , $\theta_1(c, \bar{y})$ ,……..,$\theta_i(c, \bar{y})$,…….,($i \in \mathbb{N}$).

Θα κατασκευάσουμε μια δεύτερη ακολουθία από $\mathcal{L}_A$-formulas $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,……., τ.π $M \models Qx\ \varphi_i(x)$ για όλα τα $i \in \mathbb{N}$.

Η ακολουθία αυτή ορίζεται ως εξής: (α) $\varphi_0(x)$ είναι ‘$x = x$’.
(β) Έστω ότι έχω $\varphi_i(x)$ τ.π $M \models Qx\ \varphi_i(x)$ και θέλω να βρώ $\varphi_{i+1}(x)$. Από λήμμα 7.7 για $\varphi = \varphi_i$ και $\theta = \theta_i$ υπάρχει ψ τ.π να ικανοποιεί τα (α)-(c) του Λήμματος. Θέτω $\varphi_{i+1} = \psi$.

Η ιδέα τώρα είναι να θεωρήσουμε την θεωρία (γράφοντας α αντί $c_\alpha$)

$$T = \{\theta(\bar{a}) \mid M \models \theta(\bar{a}) \text{ και } \theta(\bar{a}) \text{ είναι μια } \mathcal{L}_A(M)\text{-πρόταση}\} \cup$$
$$\cup\{c > \alpha \mid \alpha \in M\} \cup \{\varphi_i(c) \mid i \in \mathbb{N}\} \text{ στην γλώσσα } \mathcal{L}_A(M) \cup \{c\}.$$

**Ισχυρισμός**
Το **T** είναι συνεπές.

**Απόδ**
Από θ συμπάγειας αρκεί κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του T να είναι συνεπές. Έστω πεπερασμένο $T' \subseteq T$, ας πούμε ότι

$$T' = \{\theta_1(\bar{a}),\ldots,\theta_\kappa(\bar{a})\} \cup \{c > \alpha_1,\ldots,c > \alpha_n\} \cup \{\phi_{i_1}(c),\ldots, \phi_{i_m}(c)\}.$$

Θεωρούμε το $i = \max_{1 \le j \le m}(i_j)$ και ένα στοιχείο $\alpha \in M$ τ.π $M \vDash \varphi_i(\alpha) \wedge \alpha > \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha > \alpha_n$.
Τότε η δομή $< M, |M|, \alpha >$ για την γλώσσα $\mathcal{L}_A(M) \cup \{c\}$ είναι μοντέλο της T΄.
Άρα T΄ έχει μοντέλο και από θεώρημα συμπάγειας υπάρχει μοντέλο για το T.
Έστω $N \vDash T$.
Εφαρμόζοντας γνωστές μεθόδους από την θεωρία Μοντέλων έχουμε ότι η συνάρτηση $g{:}M \longrightarrow N$ με $g(c_a^M) = c_a^N$ είναι μια στοιχειώδης εμφύτευση της M στην N. Μάλιστα μπορούμε να θεωρήσουμε την M ως στοιχειώδη υποδομή της N.
Τώρα ορίζουμε $K = K(N;M\cup\{c\})$.
Από προηγούμενα γνωρίζουμε ότι $K < N$, από όπου μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $M < K$.
Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος 7.6 πρέπει να δείξουμε ότι K είναι τελική επέκταση του M.
Στην πραγματικότητα ισχύει κάτι περισσότερο:

Πράγματι, K είναι μια **συντηρητική** επέκταση του M, δηλαδή για κάθε $\bar{b} \in K$ και κάθε $\mathcal{L}_A$-formula $\theta(u, \bar{v})$ υπάρχει $\bar{a} \in M$ και $\psi(u, \bar{w})$ τ.π

$$\{u \in K / K \vDash \theta(u, \bar{b})\} \cap M = \{u \in M / M \vDash \psi(u, \bar{a})\}.$$

**Απόδ**
Έστω $b_1,\ldots,b_n \in K$ και $\theta(u, \bar{v})$.
Τότε (από ορισμό K) υπάρχουν τύποι $\eta_j(v, x_1,\ldots,x_\kappa, c)$ και $\alpha_1,\ldots,\alpha_\kappa \in M$ τ.π το $b_i$ ορίζεται από τον $\eta_j(v,\alpha_1,\ldots,\alpha_\kappa,c)$, για $j = 1,\ldots,n$.
Θεωρούμε την formula

$$\exists v_1\ldots v_n(\textstyle\bigwedge_{j=1}^{n} \eta_j(v_j, y_1,\ldots,y_\kappa, x) \wedge \theta(y_0,\bar{v}))$$ της γλώσσας $\mathcal{L}_A\cup\{c\}$.

Τότε υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ τ.π αυτή η formula να είναι η $\theta_i(x,y_0, y_1,\ldots,y_\kappa)$.
Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $d \in M$

$$K \vDash \theta(d, b_1,\ldots,b_n) \text{ ανν}$$
$$M \vDash \exists w \forall x > w(\varphi_{i+1}(x) \longrightarrow \theta_i(x, d, \alpha_1,\ldots,\alpha_\kappa))(1).$$

(<=)
Έστω για $e \in M \vDash \forall x > e(\varphi_{i+1}(x) \longrightarrow \theta_i(x, d, \bar{a}))$.
Επειδή $M < K$ θα ισχύει

$$K \vDash \forall x > e(\varphi_{i+1}(x) \longrightarrow \theta_i(x, d, \bar{a})).$$

Άρα για $x = c$ επειδή $K \vDash c > e \wedge \varphi_{i+1}(c)$, προκύπτει

$$K \vDash \theta_i(x, d, \bar{a})$$

και άρα $K \vDash \theta(d, \bar{b})$, λόγω του ορισμού της $\theta_i$ και ότι τα $b_1,\ldots,b_n$ ορίζονται από τους $\eta_j$.
(=>)
Έστω ότι $K \vDash \theta(d, b_1,\ldots,b_n)$.
Λόγω κατασκευής του $\varphi_{i+1}$ έχω είτε

$$M \vDash \exists w \forall x > w[\varphi_{i+1}(x) \longrightarrow \theta_i(x, d, \bar{a})] \text{ ή}$$
$$M \vDash \exists w \forall x > w[\varphi_{i+1}(x) \longrightarrow \neg\theta_i(x, d, \bar{a})].$$

Θα δείξω ότι δεν ισχύει η δεύτερη δυνατότητα.

Έστω ότι ισχύει.
Τότε για κάποιο $e \in M$ ισχύει

$M \models \forall x > e[\varphi_{i+1}(x) \longrightarrow \neg\theta_i(x, d, \bar{a})]$.

Αφού $M < K$ πρέπει

$K \models \forall x > e[\varphi_{i+1}(x) \longrightarrow \neg\theta_i(x, d, \bar{a})]$.

Τότε για $x = c$ πρέπει

$K \models \neg\theta_i(c, d, \bar{a})]$ δηλαδή

$K \models \neg\, \theta(d, \bar{b})$ άτοπο από υπόθεση.

Είδαμε λοιπόν ότι K είναι συντηρητική επέκταση του M. □

Θα δείξουμε ότι $M \subset_e K$.
Έστω λοιπόν $\alpha \in M$ και $b \in K$ τ.π $K \models b < \alpha$.
Θα δείξω ότι $b \in M$.
Επειδή K είναι συντηρητική επέκταση του M, υπάρχει $\bar{a} \in M$ και $\psi(u, \bar{w})$ τ.π

$\{u \in K / K \models u \leq b\} \cap M = \{u \in M \,/\, M \models \psi(u, \bar{a})\}$ (∗).

Τότε το $S = \{u \in M \mid M \models \psi(u, \bar{a})\}$ είναι φραγμένο $\subseteq M$. Άρα έχει μέγιστο στοιχείο (αφού $M \models \exists u \neg\, \psi(u, \bar{a})$, από αρχή ελαχίστου υπάρχει ελάχιστο $d \in M$ τ.π να ικανοποιεί $M \models \neg\, \psi(u, \bar{a})$ δηλαδή

$M \models \neg\, \psi(d, \bar{a}) \wedge \forall u < d\; \psi(u, \bar{a}))$.

Τότε το $d - 1$ είναι το μέγιστο στοιχείο του S).
Τότε από (∗) έχω $d - 1 \leq b$. Αν ίσχυε $d - 1 < b$, τότε $d \leq b$, άρα $d \in S$, που είναι άτοπο.

Άρα αποδείξαμε τη ακόλουθη βελτίωση του θεωρήματος 7.6.

**Θεώρημα 7.8**
Κάθε μοντέλο του PA έχει μια συντηρητική επέκταση.

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1.C.C Chang and H.J. keisler: Model Theory, North-Holland, 1990.

2. Gaifman: A note on models and submodels of arithmetic, Lecture Notes in Math. 255 (1972), 128-144.

3 R. Kaye: Models of Peano Arithmetic, Clarendon Press, 1991.

4 R MacDowell and E. Specker: Modelle der Arithmetic, in Infinitistic methods, Pergamon Press 1961, 257-263.

5 J. Paris and L Kirby:$\Sigma_n$-Collection schemas in arithmetic, Logic Colloquium 77, North-Holland, 1978, 199-209.