

Παρεμποδίσσεις και Αλγόριθμοι για Προβλήματα Ανίχνευσης Γραφημάτων

Δημήτρης Ζώρος
Α.Μ. 200811

Τριμελής Επιτροπή:

Δημήτριος Μ. Θηλυκός, Τμ. Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α.
Σταύρος Κολλιόπουλος, Τμ. Πληροφορικής και
Τηλ/νιών, Ε.Κ.Π.Α.
Λευτέρης Κυρούσης, Τμ. Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α.

Επιβλέπων:

Δημήτριος Μ. Θηλυκός, Αναπληρωτής
Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών
του Πανεπιστημίου Αθηνών

Η *Ανίχνευση Γραφημάτων* αποτελεί έναν κλάδο των Διακριτών Μαθηματικών με πλήθος εφαρμογών σε πολλούς τομείς της Θεωρητικής Πληροφορικής. Παρουσιάζει επίσης μεγάλο θεωρητικό ενδιαφέρον καθώς μέσω αυτής εκφράζονται πολλά σημαντικά συνδυαστικά προβλήματα.

Στα πρώτα κεφάλαια αυτής της εργασίας θα παρουσιάσουμε τα κίνητρα που ώθησαν τους ερευνητές να ασχοληθούν με την ανίχνευση γραφημάτων, θα ορίσουμε τυπικά τους τρεις βασικούς τύπους της και θα παρουσιάσουμε τις σημαντικότερες παραλλαγές τους. Στη συνέχεια θα αναλύσουμε τις έννοιες της μονοτονίας και της συνεκτικότητας και θα καταγράψουμε μερικά αποτελέσματα από τη βιβλιογραφία.

Το δεύτερο σκέλος της εργασίας αυτής είναι η μελέτη της *Θεωρίας Μερικών Διατάξεων* σε κλάσεις γραφημάτων και πως από αυτή προκύπτει ο χαρακτηρισμός της κλάσης μέσω ενός συνόλου απαγορευμένων γραφημάτων, το οποίο καλείται *Σύνολο Παρεμπόδισης* της κλάσης. Αφού αναφέρουμε συνοπτικά τις απαραίτητες έννοιες, θα παρουσιάσουμε όλα τα έως τώρα γνωστά σύνολα παρεμπόδισης για κλάσεις γραφημάτων με φραγμένο αριθμό ανίχνευσης. Το μεγαλύτερο σε μέγεθος σύνολο που θα αναφερθεί συγκαταλέγεται στα αποτελέσματα δικής μας εργασίας, που βρίσκεται ακόμα υπό συγγραφή.

Η ανίχνευση γραφημάτων συνδέεται άρρηκτα με τις *Παραμέτρους Πλάτους* γραφήματος. Τα περισσότερα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας αφορούν τις παραμέτρους αυτές καθώς η ορολογία τους διευκολύνει αρκετά την απόδειξη των θεωρημάτων. Στο Κεφάλαιο 6 θα ορισθούν οι σημαντικότερες παράμετροι πλάτους γραφήματος και θα παρουσιαστεί ο τρόπος που σχετίζονται με τους αριθμούς ανίχνευσης.

Το τρίτο σκέλος της εργασίας αυτής αφορά την *Υπολογιστική Πολυπλοκότητα* των προβλημάτων ανίχνευσης γραφημάτων.

Στο τέλος της εργασίας αυτής θα κάνουμε μια συνοπτική παρουσίαση των δικών μας αποτελεσμάτων και των κεντρικών ιδεών που διέπουν την απόδειξη τους.

ABSTRACT

Graph Searching is a field of Discrete mathematics with numerous applications in many areas of Theoretical Computer Science. It is also of great theoretical interest as it formalizes many important combinatorial problems.

We present the motivations which led researchers to graph searching, we typically define the three basic types of searching, and we introduce some of the major variants. Then we analyze the concepts of monotonicity and connectivity and record some results from the literature.

Next we study the *Theory of Partial Orders* on graph classes and how this is associated with the characterization of some classes through a set of forbidden graphs, called *obstruction Set* of the class. After briefly mentioning the necessary concepts, we present all so far known obstruction sets for classes of graphs with bounded search number. The larger set to be mentioned is included in the results of our work, which is still under preparation.

Graph searching is closely related to the *Width Parameters* of a graph. Most of the results in the literature concern these parameters, as their terminology eases the proofs of the theorems. In Chapter 6 we define some important width parameters and we illustrate how they relate to the search number of the graph.

The third part of this work consists of the study of the *Computational Complexity* of some graph searching problems.

Finally we make a brief presentation of our results and the core ideas underlying their proofs.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια της ολοκλήρωσης των σπουδών μου στο *Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Λογικής, Αλγορίθμων και Θεωρίας Υπολογισμού (Μ.Π.Λ.Α.)*.

Θα ήθελα να εκφράσω την βαθιά μου ευγνωμοσύνη, προς του συντελεστές του Μ.Π.Λ.Α., για την τιμή που μου έκαναν να φοιτήσω στο πρόγραμμα αυτό. Θεωρώ τον εαυτό μου τυχερό που μου δόθηκε η ευκαιρία να παρακολουθήσω τόσα πολλά και ενδιαφέροντα μαθήματα, τα οποία διεύρυναν την αντίληψή μου στα Μαθηματικά και τη Θεωρητική Πληροφορική, δίνοντάς μου παράλληλα όλα τα απαραίτητα εφόδια για τη συνέχιση της μελέτης μου στη Λογική, τους Αλγορίθμους, και τα Διακριτά Μαθηματικά.

Το Μ.Π.Λ.Α. μου παρείχε το προνόμιο να παρακολουθήσω τις διδακτικές και εποικοδομητικές διαλέξεις σπουδαίων καθηγητών, από ένα ευρύ πλήθος διαφορετικών ερευνητικών πεδίων. Αισθάνομαι βαθύτατα υποχρεωμένος σε κάθε έναν από αυτούς ξεχωριστά, για τη μεγάλη προσφορά γνώσεων και ερεθισμάτων. Υπήρξαν για εμένα μεγάλη πηγή έμπνευσης, καθώς, χωρίς τη συμβολή τους δεν θα μου είχε δημιουργηθεί η επιθυμία να καταπιαστώ με την έρευνα.

Πρώτα απ' όλα θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα της παρούσας εργασίας, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Δημήτριο Θηλυκό, ο οποίος με την επιμονή, υπομονή, τις γνώσεις του και την εμπειρία του συνετέλεσε τα μέγιστα για τη συγκρότηση και ολοκλήρωσή της, και προπάντων για την ερευνητική και ηθική καθοδήγησή του στην έως τώρα ακαδημαϊκή μου πορεία.

Σεβασμό και ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς μου επιτροπής: Καθηγητή κ. Λευτέρη Κυρούση, και Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Σταύρο Κολλιόπουλο, για τη πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφεραν ώστε η εργασία αυτή να γίνει ουσιαστική και αξιόπιστη, καθώς και για την πληθώρα χρήσιμων συμβουλών και ιδεών που μοιράστηκαν μαζί μου.

Ήταν μεγάλη τιμή για εμένα να συνεργαστώ μαζί τους, και ακόμα μεγαλύτερη τιμή να συνεχίσω κοντά τους τις μεταπτυχιακές μου σπουδές, υπό την επίβλεψη του κ. Θηλυκού.

Τέλος, δεν θα μπορούσα να παραλείψω από τις ευχαριστίες μου τους συμφοιτητές μου, με τους οποίους, εκτός από τη συνύπαρξη στον ίδιο ακαδημαϊκό χώρο και τη συνεχή ανταλλαγή ιδεών, συνδέθηκα προσωπικά με ισχυρούς δεσμούς φιλίας.

Δημήτρης Ζώρος
Αθήνα, 4 Φεβρουαρίου 2014

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

i

6.5	Γραμμικό-πλάτος	42
7	Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα	45
7.1	NP-πληρότητα	45
7.2	Αλγόριθμοι	46
7.2.1	Πολυωνυμικοί	46
7.2.2	Παραμετρικοί	48
8	Γραφήματα με cms το πολύ 2	51
8.1	Κατεύθυνση	52
8.2	Ορισμοί και προκαταρκτικά αποτελέσματα	52
8.3	Περιγραφή των γραφημάτων με cms το πολύ 2	61
	Βιβλιογραφία	65

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1.1	Ένα γράφημα με αριθμό ανίχνευσης ακμών 2.	7
1.2	Στη μικτή ανίχνευση η μεγαλύτερη πυκνότητα του γραφήματος «βοηθάει» πάντα τον φυγά.	8
2.1	Παρατηρούμε ότι $\mathbf{vans}(G) = 4$, $\mathbf{ilns}_1(G) = 3$, και $\mathbf{ns}(G) = 6$	13
2.2	Τέσσερις ανιχνευτές αρκούν για να «στριμώξουν» τον φυγά.	14
2.3	Οι κεντρικές κορυφές αποτελούν 6-κρησφύγετο για το γράφημα.	14
2.4	Αν θέλουμε συνεκτική ανίχνευση είναι απαραίτητο να καταναλώσουμε παραπάνω ανιχνευτές.	15
3.1	Το γράφημα W	22
3.2	Παράδειγμα γραφήματος στο οποίο η μη-μονοτονία «βοηθάει» τους ανιχνευτές.	23
4.1	Το γράφημα G επιδέχεται στρατηγική μικτής ανίχνευσης που χρησιμοποιεί 2 ανιχνευτές. Παρατηρούμε όμως ότι δεν υπάρχει πλήρης συνεκτική στρατηγική μικτής ανίχνευσης για το G , που να χρησιμοποιεί λιγότερους από 3 ανιχνευτές.	26
5.1	Η κλάση γραφημάτων $\mathcal{C} = \{K_{2,i} \mid i = 1, 2, \dots\}$	30
5.2	Παράδειγμα σαρανταποδαρούσας.	32
5.3	Το σύνολο $\mathbf{obs}_{\preceq}(\mathcal{C}[\mathbf{s}, 2])$	32
5.4	Το σύνολο $\mathbf{obs}_{\preceq}(\mathcal{C}[\mathbf{ms}, 2])$	33
6.1	Η αποσύνθεση-μονοπατιού που αποτελείται από τα σύνολα $\{u_1, u_2, u_3\}$, $\{u_2, u_3, u_4\}$, $\{u_3, u_4, u_5\}$, και $\{u_3, u_4, u_6\}$ δεν είναι γνήσια.	37
6.2	Μία δεντροαποσύνθεση και μια αποσύνθεση μονοπατιού του γραφήματος G	40
6.3	Ένα γράφημα με πλάτος, και γραμμικό-πλάτος ίσο με 2.	41
6.4	Ένα γράφημα και μία ομοιομορφική εικόνα του.	41

8.1	Παρατηρούμε ότι αν ταυτίσουμε την u με την v , το γράφημα G που θα προκύψει θα έχει $\mathbf{cms}(G) = 2$.	52
8.2	Το σύνολο $\mathcal{O}_1$.	53
8.3	Τα σύνολα $\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4, \mathcal{O}_5, \mathcal{O}_6, \mathcal{O}_7$.	54
8.4	Τα σύνολα $\mathcal{O}_8, \mathcal{O}_9$.	55
8.5	Το σύνολο $\mathcal{A}$ περιέχει 5 ριζωμένα γραφήματα, της μορφής $(G, \{v\}, \{v\})$.	61
8.6	Το σύνολο $\mathcal{B}$ περιέχει 12 ριζωμένα γραφήματα, της μορφής $(G, \emptyset, \{v\})$.	62
8.7	Το σύνολο $\mathcal{C}$ περιέχει 6 ριζωμένα γραφήματα, της μορφής $(G, \{v\}, \emptyset)$.	62
8.8	Ένα γράφημα $G \in \mathcal{C}[\mathbf{cmp}, 2]$, τα (εξωτερικά) επεκτεταμένα μπλοκ B_0^* και B_4^* , τα (εσωτερικά) επεκτεταμένα μπλοκ B_1^*, B_2^* και B_3^* και οι βεντάλιες F_1, F_2 , και F_4 .	63

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η *Ανίχνευση Γραφημάτων* τα τελευταία χρόνια έχει εξελιχθεί σε έναν ιδιαίτερα ελκυστικό κλάδο των Διακριτών Μαθηματικών, λόγω των εφαρμογών που έχει σε πολλούς τομείς της Θεωρητικής Πληροφορικής, αλλά και από τη θεωρητική σκοπιά, λόγω της στενής σχέσης της με τις *Παραμέτρους Πλάτους* γραφημάτων, και του προσοδοφόρου εδάφους που προσφέρει για τη μελέτη της θεωρίας των *Μερικών Διατάξεων* πάνω σε γραφήματα. Εξίσου σημαντικό είναι το γεγονός ότι μπορεί να εκφράσει με απλό και περιγραφικό τρόπο πολλά ενδιαφέροντα συνδυαστικά προβλήματα.

Μια πολύ σύντομη διαισθητική περιγραφή της ανίχνευσης γραφημάτων, που θα διευκολύνει αρκετά στη κατανόηση των τυπικών ορισμών, είναι η ακόλουθη:

Βρισκόμαστε σε ένα δίκτυο διαδρόμων οι οποίοι διασταυρώνονται μεταξύ τους (οι διάδρομοι θα αποτελούν τις ακμές ενός γραφήματος, και οι διασταυρώσεις τις κορυφές του). Το δίκτυο αυτό θα αποτελέσει το πεδίο στο οποίο θα εκτυλιχθεί ένα παιχνίδι μεταξύ δυο παικτών. Ο πρώτος παίκτης διαχειρίζεται μία διαφεύγουσα οντότητα (που θα καλούμε *δραπέτη* ή *φυγά* ή και *κλέφτη* ακόμα¹) που κρύβεται μέσα στο δίκτυο, και ο δεύτερος ένα πλήθος από διώκτες αυτής της οντότητας (τους οποίους θα τους καλούμε *ανιχνευτές* ή και *αστυνομικούς* ακόμα²). Σε κάθε γύρο του παιχνιδιού οι δύο παίκτες μετακινούν τις οντότητές τους μέσα στο δίκτυο. Σκοπός του δεύτερου παίκτη είναι να συλλάβει τη διαφεύγουσα οντότητα, ντετερμινιστικά χωρίς πιθανοτικές υποθέσεις, και του πρώτου να διαφεύγει την σύλληψη επ' αόριστον.

Αυτού του είδους η ανίχνευση ονομάζεται *εγγυημένη ανίχνευση* (*guaranteed search*), και αποτελεί το κλασικό μοντέλο ανίχνευσης³. Το παιχνίδι αυτό κατά κύριο λόγο θα μας απασχολήσει στη συνέχεια, καθώς και οι πολλές παραλλαγές του, οι οποίες προκύπτουν

¹Στη βιβλιογραφία συνήθως απαντάται ως *evader*, *fugitive*, *explorer*, *robber* ανάλογα με το εκάστοτε παράδειγμα.

²Στη βιβλιογραφία συνήθως αναφέρονται σαν *searchers*, *pursuers*, *cops*, σε αντιστοιχία με το όνομα που έχει δοθεί στην διαφεύγουσα οντότητα.

³Αυτού του είδους τα προβλήματα απαρτίζουν την κλάση των *persuit-evasion* προβλημάτων.

ανάλογα με τις ιδιότητες του «δραπέτη», τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε να έχουμε τη σύλληψή του, το κατά πόσο είναι ορατός στους «ανιχνευτές» και άλλες γενικότερες συνθήκες.

Το παρόν κείμενο θα ξεκινήσει με τον ορισμό της «κλασικής» ανίχνευσης γραφημάτων, εν συνεχεία θα παρουσιάσουμε τις κυριότερες παραλλαγές της, διαλέγοντας αυτές που έχουν και μαθηματικό, πέραν από πρακτικό, ενδιαφέρον. Επίσης θα καταγράψουμε τη σχέση τους με γνωστές παραμέτρους γραφημάτων, ούτως ώστε να αποκτήσουμε το απαραίτητο υπόβαθρο για να παρουσιάσουμε τα μεγαλύτερα, μέχρι στιγμής, αποτελέσματα του χώρου αυτού. Για να πραγματοποιηθεί αυτός ο στόχος, θα πρέπει να αφιερώσουμε ένα μεγάλο κομμάτι του κειμένου αυτού, σε ορισμούς και σε παραδείγματα, που θα βοηθήσουν τον αναγνώστη να γνωρίσει και να εξοικειωθεί με τις έννοιες, με τις οποίες θα καταπιαστούμε.

1.1 Συμβολισμοί και βασικοί ορισμοί

Υποθέτουμε πως ο αναγνώστης είναι στοιχειωδώς εξοικειωμένος με τις βασικές έννοιες της Θεωρίας Γραφημάτων⁴ και της Θεωρίας Υπολογιστικής Πολυπλοκότητας⁵. Στην παράγραφο αυτή θα αναφέρουμε, εν συντομία, τους ορισμούς που θα χρειαστούμε, και θα καθορίσουμε τον συμβολισμό που θα χρησιμοποιήσουμε.

Έστω πεπερασμένο σύνολο V και σύνολο που απαρτίζεται από σύνολα στοιχείων του V , με πληθάρημο δύο. Το ζεύγος (V, E) θα το αποκαλούμε *γράφημα* (*graph*), και θα χρησιμοποιούμε γι' αυτό το γράμμα G . Αν δεν κάνουμε ρητή αναφορά στα σύνολα των δύο συντεταγμένων ενός γραφήματος G , θα αναφερόμαστε στην πρώτη εξ' αυτών με τον συμβολισμό $V(G)$, και στη δεύτερη με $E(G)$. Τα στοιχεία του $V(G)$ καλούνται *κορυφές* (*vertices*), και τα στοιχεία του $E(G)$ *ακμές* (*edges*). Έστω $\{x, y\} \in E(G)$. Οι κορυφές x και y αποτελούν τα άκρα της ακμής $\{x, y\}$. Την κλάση όλων των γραφημάτων τη συμβολίζουμε με $\mathcal{G}$. Για να απεικονίσουμε ένα γράφημα θα χρησιμοποιήσουμε κουκκίδες για τα στοιχεία του $V(G)$, καταγράφοντας δίπλα σε κάθε μία σε ποιο στοιχείο αντιστοιχεί, αν αυτό κριθεί απαραίτητο, και θα ενώνουμε τις κουκκίδες που αντιστοιχούν σε δύο κορυφές u, v με μία γραμμή, αν και μόνο αν $\{u, v\} \in E(G)$.

Μερικά γραφήματα που θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια είναι τα ακόλουθα:

- Το *μονοπάτι* (*path*) μήκους $k \geq 1$, είναι το γράφημα $P_k = (\{u_1, \dots, u_{k+1}\}, \{\{u_1, u_2\}, \dots, \{u_k, u_{k+1}\}\})$. Οι κορυφές u_1 και u_{k+1} είναι τα άκρα του P_k .
- Ο *κύκλος* (*cycle*) μεγέθους $k \geq 1$ είναι το γράφημα $C_k = (\{u_1, \dots, u_k\}, \{\{u_1, u_2\}, \dots, \{u_{k-1}, u_k\}, \{u_k, u_1\}\})$.
- Η *κλίκα* (*clique*) $k \geq 1$ κορυφών είναι το γράφημα $K_k = (\{u_1, \dots, u_k\}, \{\{u_i, u_j\} \mid 1 \leq i < j \leq k\})$.
- Για δύο ξένα σύνολα κορυφών A, B , με πληθάρημους k, l αντίστοιχα, ορίζουμε το γράφημα $K_{k,l} = (A \cup B, \{\{u, v\} \mid u \in A \text{ και } v \in B\})$.
- Έστω $S \subseteq V(G)$. Το γράφημα που *επάγουν* (*induce*) οι *κορυφές* του S είναι το $G[S] = (S, \{\{u, v\} \in E(G) \mid \{u, v\} \subseteq S\})$.

⁴Για πληροφορίες σχετικά με τη Θεωρία Γραφημάτων απευθυνθείτε στο [1].

⁵Για πληροφορίες σχετικά με τη Θεωρία Υπολογιστικής Πολυπλοκότητας απευθυνθείτε στο [2].

- Έστω $F \subseteq E(G)$. Το γράφημα που ενάγουν (*induce*) οι ακμές του F είναι το $G[F] = (\cup_{e \in F} e, F)$.

Αν σε ένα γράφημα G , ορίσουμε τις ακμές ως διατεταγμένα ζεύγη αντί για απλά σύνολα, τότε το G θα αποτελεί *κατευθυνόμενο γράφημα* (*directed graph*). Αν στο G υπάρχουν παραπάνω από ένα αντίτυπα της ακμής $e \in E(G)$, τότε το G είναι ένα *πολυγράφημα* (*multigraph*), και αν θεωρήσουμε ως ακμές του G σύνολα πληθαιθμού μεγαλύτερο του 2, τότε οδηγούμαστε σε ένα *υπεργράφημα* (*hypergraph*).

Δύο κορυφές $u, v \in V(G)$ *συνδέονται* στο G ή *αλλιώς είναι γειτονικές* (*connected*), αν $\{u, v\} \in E(G)$. Η *γειτονιά* (*neighborhood*) της u στο G είναι το σύνολο $N_G(u) = \cup_{\{e \in E(G) | u \in e\}} e \setminus \{u\}$. *Βαθμός* (*degree*) της u στο G είναι η ποσότητα $\deg_G(u) = |N_G(u)|$, *ελάχιστος βαθμός του G* η ποσότητα $\delta(G) = \min\{\deg_G(u) \mid u \in V(G)\}$, και *μέγιστος βαθμός του G* η ποσότητα $\Delta(G) = \max\{\deg_G(u) \mid u \in V(G)\}$. Ένα γράφημα καλείται *d-κανονικό* (*d-regular*) αν όλες οι κορυφές του έχουν βαθμό d .

Ένα γράφημα είναι *συνεκτικό* (*connected*) αν για κάθε δύο κορυφές $u, v \in V(G)$ (αγνοώντας μερικές κορυφές και ακμές του G) μπορεί να βρεθεί μονοπάτι στο G , οποιουδήποτε μήκους, με άκρα τις κορυφές u, v ⁶. Όλα τα γραφήματα που θα εξετάζουμε είναι συνεκτικά, εκτός αν για κάποιο ειπωθεί το αντίθετο. Αν ένα γράφημα δεν είναι συνεκτικό και τα $V_1, \dots, V_k$ είναι τα μεγιστικά, ως προς τη σχέση του υποσυνόλου, σύνολα κορυφών που ενάγουν συνεκτικά γραφήματα, τότε τα $G[V_i]$, $1 \leq i \leq k$, καλούνται *συνεκτικές συνιστώσες* του G . Ένα γράφημα, με τουλάχιστον τρεις κορυφές, είναι *δισυνεκτικό* (*2-connected*), αν για κάθε $u, v \in V(G)$ μπορούν να βρεθούν δύο μονοπάτια στο G , με άκρα αυτές τις κορυφές, που δεν έχουν καμία άλλη κοινή κορυφή.

Ένα γράφημα καλείται *δέντρο* (*tree*) αν είναι συνεκτικό και δεν υπάρχει σε αυτό κύκλος, οποιουδήποτε μεγέθους.

Αν ένα γράφημα μπορεί να απεικονιστεί στο επίπεδο ούτως ώστε οι γραμμές που αντιστοιχούν στις ακμές του να τέμνονται μόνο πάνω στις κορυφές που αποτελούν τα άκρα τους, τότε είναι ένα *επίπεδο* (*planar*) *γράφημα*. Ένα επίπεδο γράφημα G , μαζί με την απεικόνισή του στο επίπεδο καλείται *επίπεδη εμβάπτιση* (*planar embedding*) του G . Μία επίπεδη εμβάπτιση Γ του G χωρίζει το $\mathbb{R}^2$ σε συνεκτικές συνιστώσες, οι οποίες ονομάζονται *όψεις* (*faces*) της Γ . Μία από αυτές τις όψεις είναι μη φραγμένη και ονομάζεται *εξωτερική όψη* (*exterior face*). Αν για ένα επίπεδο γράφημα G υπάρχει επίπεδη εμβάπτιση, τέτοια ώστε κάθε κορυφή του να βρίσκεται στην εξωτερική όψη, τότε το G είναι *εξωεπίπεδο* (*outerplanar*).

Έστω σύνολο ακμών F , που δεν έχουν κοινά στοιχεία μεταξύ τους. Αν $\cup_{e \in F} e = V(G)$, τότε το F καλείται *τέλειο ταίριασμα* (*perfect matching*) μεταξύ των κορυφών του G .

Έστω ακολουθίες $L_1 = \langle l_1^1, \dots, l_p^1 \rangle$, και $L_2 = \langle l_1^2, \dots, l_q^2 \rangle$. Συμβολίζουμε $L_1 \oplus L_2$ την ακολουθία $\langle l_1^1, \dots, l_p^1, l_1^2, \dots, l_q^2 \rangle$, και την καλούμε *παράθεση* (*concatenation*) των L_1, L_2 . Επαγωγικά ορίζουμε για κάθε φυσικό $n \geq 2$, την παράθεση n ακολουθιών.

Κλείνοντας αυτή την παράγραφο, θα αναφέρουμε μερικούς βασικούς ορισμούς της Θεωρίας Υπολογισμού, απαραίτητους για τον τυπικό ορισμό των προβλημάτων που θα δούμε στη συνέχεια.

Έστω πεπερασμένο αλφάβητο Σ . Κάθε στοιχείο του συνόλου Σ^* ονομάζεται *λέξη ή συμβολοσειρά* (*string*). Ένα υποσύνολο του Σ^* καλείται *γλώσσα* (*language*). Μπορούμε

⁶Το μονοπάτι αυτό αποτελεί υπογράφημα του G , όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 5.

να θεωρήσουμε πως μία γλώσσα L αντιστοιχεί στο ακόλουθο «πρόβλημα»:

L -MEMBERSHIP	
Είσοδος:	Μία λέξη $w \in \Sigma^*$
Ερώτηση:	$w \in L$;

Συνήθως, χάριν απλότητας, θα αποκαλούμε τις λέξεις στις οποίες η ερώτηση του L -MEMBERSHIP λαμβάνει θετική απάντηση, «λύσεις» του προβλήματος.

Τα προβλήματα που θα μας απασχολήσουν αφορούν γραφήματα, και προκειμένου να τα εντάξουμε σε αυτό το πλαίσιο, θα χρειαστεί να οριστικοποιήσουμε μία κωδικοποίησή τους, σε κατάλληλο αλφάβητο, έστω Σ_G . Εφόσον γίνει αυτό, θεωρούμε πως η κλάση $\mathcal{G}$ είναι το υποσύνολο του Σ_G^* που περιέχει όλες τις λέξεις που αποτελούν έγκυρες κωδικοποιήσεις. Ως *πρόβλημα γραφημάτων* θεωρούμε μία γλώσσα $L \subseteq \mathcal{G}$. Χάριν απλότητας, θα παρακάμψουμε (όπου αυτό είναι δυνατό) τη χρήση γλωσσών για τον ορισμό προβλημάτων γραφημάτων, και θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο (λιγότερο τυπικό) φορμαλισμό: Αν I είναι μια περιγραφή (στην καθηλωμένη) της ιδιότητας που διέπει τα γραφήματα της γλώσσας L , και μόνο αυτά, τότε το L -MEMBERSHIP αντιστοιχεί το ακόλουθο πρόβλημα:

L -MEMBERSHIP ⁷	
Είσοδος:	Ένα γράφημα G
Ερώτηση:	Έχει το G την ιδιότητα I ;

Σε πολλά από τα προβλήματα που θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια, εκτός από ένα γράφημα G , στην είσοδο θα δίνεται και ένας θετικός ακέραιος k . Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να θεωρήσουμε κατάλληλη κωδικοποίηση της εισόδου, ούτως ώστε να είναι ξεκάθαρο ποιο τμήμα της εκάστοτε κωδικοποίησης αναφέρεται στο γράφημα, και ποιο στον αριθμό k . Η κλάση $\mathcal{G}$ θα οριστεί με τον ίδιο τρόπο. Επίσης, σε μερικά προβλήματα τα γραφήματα της εισόδου είτε θα ανήκουν σε συγκεκριμένο υποσύνολο της κλάσης $\mathcal{G}$, είτε θα ικανοποιούν κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα.

Όπου αναφερόμαστε σε *αλγόριθμους* που επιλύουν κάποιο πρόβλημα, υπονοούμε ότι υπάρχει *μηχανή Turing* που, για οποιαδήποτε λέξη $w \in \Sigma^*$, σωστά αποφασίζει αν η w ανήκει στη γλώσσα που αντιστοιχεί στο πρόβλημα. Ο *χρόνος* ενός αλγόριθμου ισοδυναμεί με το πλήθος κινήσεων πάνω στην ταινία που θα κάνει η κεφαλή της αντίστοιχης μηχανής Turing, και για να αναφερόμαστε σε αυτόν, υιοθετώντας την «κλασική» ορολογία της Θεωρίας Υπολογιστικής Πολυπλοκότητας. Ακολουθώντας λοιπόν την ορολογία αυτή, θα καλούμε P την κλάση των προβλημάτων για τα οποία υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου, όπου η μεταβλητή του πολωνύμου είναι το *μέγεθος της εισόδου*, το πλήθος δηλαδή των συμβόλων της λέξης εισόδου, και NP την κλάση των προβλημάτων για τα οποία υπάρχει αλγόριθμος που αν του δοθεί η περιγραφή μιας πιθανής λύσης του προβλήματος, σε πολυωνυμικό χρόνο αποφασίζει αν όντως είναι λύση. Για όλα τα προβλήματα γραφημάτων που θα δούμε στο κείμενο αυτό, θα

⁷Στα προβλήματα που θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια θα δοθούν ενδεικτικοί τίτλοι, για λόγους σαφήνειας.

θεωρούμε ως μέγεθος της εισόδου το πλήθος των κορυφών του γραφήματος που μας δίνεται.

1.2 «Ιστορική αναδρομή»

Η πρώτη θεμελίωση της ανίχνευσης γραφημάτων έγινε από τον Torrence Parsons το 1976 [38]. Η ιδέα προήλθε από προγενέστερο άρθρο του R. Breisch (από το 1967 [23]) σε περιοδικό σπηλαιολογίας, το οποίο πραγματευόταν την εύρεση ενός εξερευνητή χαμένου μέσα σε ένα σύστημα σκοτεινών σπηλαίων, από ένα πλήθος ανιχνευτών. Το ζήτημα που είχε τεθεί στην εργασία του 1967, ήταν να βρεθεί το ελάχιστο πλήθος ανιχνευτών που μπορούν να εγγυηθούν την ύπαρξη (ντετερμινιστικής) στρατηγικής ανίχνευσης των σπηλαίων, η οποία θα εξασφαλίσει την ανακάλυψη του εξερευνητή ανεξάρτητα από τις όποιες κινήσεις του (ακόμα και στην περίπτωση όπου ο εξερευνητής σκοπίμως αποφεύγει του ανιχνευτές).

Χρησιμοποιώντας ως πηγή έμπνευσης το παραπάνω πρόβλημα, ο Parsons έδωσε τον ακόλουθο ορισμό:

Έστω γράφημα G και μια εμβάπτισή του στο $\mathbb{R}^3$, τέτοια ώστε οι κορυφές του να αποτελούν σημεία του $\mathbb{R}^3$, και οι ακμές του κλειστά ευθύγραμμα τμήματα, που τέμνονται μόνο στα σημεία των κορυφών που αποτελούν τα άκρα τους. Η εμβάπτιση αυτή, έστω Γ , ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ αποτελεί ένα τοπολογικό χώρο. Μία οικογένεια από συνεχείς συναρτήσεις $\Pi = \{x_i | 1 \leq i \leq k\}$ είναι ένα *πρόγραμμα ανίχνευσης* (search program) για την Γ , αν και μόνο αν για κάθε συνεχή συνάρτηση $y: [0, \infty) \rightarrow \Gamma$, υπάρχει ένα $t(y) \in [0, \infty)$ και ένα $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, τέτοια ώστε $y(t(y)) = x_i(t(y))$. Το $y(t)$ αντιστοιχεί στη θέση του εξερευνητή τη χρονική στιγμή t μέσα σε μία σπηλιά (που απεικονίζεται από τη Γ), το $x_i(t)$ στη θέση του i -οστού ανιχνευτή από τους συνολικά k , και το $t(y)$ στη χρονική στιγμή όπου ο εξερευνητής τελικά ανακαλύπτεται από τους ανιχνευτές. Το μικρότερο k το οποίο μας εξασφαλίζει την ύπαρξη προγράμματος ανίχνευσης για την Γ ονομάζεται *αριθμός ανίχνευσης* (search number) της Γ .

Στο πρόβλημα αυτό (αλλά και σε πολλά από τα αποτελέσματα του Parsons) οδηγήθηκε αργότερα (το 1982), ύστερα από ανεξάρτητη έρευνα ο Nikolai Petron [39], με διαφορετικό φορμαλισμό και υπόβαθρο. Αρκετά χρόνια από τον πρώτο ορισμό (το 1989), ο Petr Golovach [28, 29] απέδειξε ότι οι δύο αυτοί φορμαλισμοί ταυτίζονται, και πρότεινε έναν τρίτο ορισμό του προβλήματος που έμελε να καθιερωθεί στον χώρο της Ανίχνευσης Γραφημάτων. Ο ορισμός αυτός μπορεί να θεωρηθεί περισσότερο «γραφωφωθητικός», και ως εκ τούτου εξυπηρετεί καλύτερα τους σκοπούς μας. Ο τυπικός ορισμός της ανίχνευσης που θα χρησιμοποιήσουμε στο κείμενο αυτό, ακολουθεί το πνεύμα του ορισμού του Golovach [28, 29].

1.3 Τυπικός ορισμός του παιχνιδιού

Το παιχνίδι εξελίσσεται μέσα σε ένα σύστημα διαδρόμων ή τούνελ, που στο θεωρητικό μας μοντέλο θα αναπαριστούν ένα γράφημα $G = (V, E)$. Αν και υπάρχουν

αξιόλογα αποτελέσματα, και μεγάλα ανοιχτά προβλήματα, που αφορούν κατευθυνόμενα γραφήματα και πολυγραφήματα, σε αυτή την εργασία θα περιοριστούμε μόνο σε απλά γραφήματα, χωρίς *λούπες* (ή *θηλιές*, δηλαδή ακμές που τα δύο άκρα τους ταυτίζονται). Ο φυγάς κινείται πάνω στις ακμές του γραφήματος, ενώ οι ανιχνευτές στις κορυφές του. Στην αρχή του παιχνιδιού, όταν στις κορυφές του γραφήματος δεν υπάρχει κανένας ανιχνευτής, ο φυγάς θα διαλέξει μία ακμή. Στους επόμενους γύρους οι ανιχνευτές θα κινούνται με σκοπό τη σύλληψή του, ενώ ο ίδιος θα προσπαθεί να τους διαφύγει.

Τη μεγαλύτερη διαφοροποίηση στο παιχνίδι την επιφέρουν οι δυνατότητες του φυγά, όπως για παράδειγμα:

- *τεμπέλης* (*lazy* ή *inert*): αναγκάζεται να κινηθεί μόνο όταν απειλείται από κάποιον ανιχνευτή, ή *σβέλτος* (*agile*): κινείται σε κάθε γύρω του παιχνιδιού
- *ορατός* (*visible*) από τους ανιχνευτές, ή *αόρατος* (*invisible*)
- *περιορισμένη ταχύτητα* (*bounded speed*): μπορεί να διασχίσει συγκεκριμένο αριθμό ακμών σε κάθε γύρο, ή *άπειρη ταχύτητα* (*unbounded speed*): μπορεί να βρεθεί σε οποιαδήποτε ακμή του γραφήματος σε κάθε γύρο

Αν δε γίνει ρητή αναφορά στις δυνατότητες του φυγά, ο φυγάς θα θεωρείται *σβέλτος* με *άπειρη ταχύτητα* (*κινητικός φυγάς*), και *αόρατος*. Αυτού του είδους ο φυγάς μπορεί να παρομοιαστεί με ένα αέριο που κυκλοφορεί στις ακμές του γραφήματος (που όπως είπαμε μπορείτε να τις φαντάζεστε ως τούνελ). Οι ανιχνευτές τότε καλούνται να «καθαρίσουν» το γράφημα από το αέριο, κινούμενοι από κορυφή σε κορυφή, με τους ακόλουθους τρόπους: (έστω u και v κορυφές του γραφήματος)

$p(v)$: *τοποθέτηση* (*placement*) ενός ανιχνευτή στην v ,

$r(v)$: *αφαίρεση* (*removal*) ενός ανιχνευτή που βρισκόταν στην v ,

$s(u, v)$: *γλίστρημα* (*slide*) ενός ανιχνευτή πάνω στην ακμή $\{u, v\}$, με αφετηρία την u , και τοποθέτησή του στην v .

Μία *στρατηγική ανίχνευσης* $\mathcal{S}$ είναι μία πεπερασμένη ακολουθία από τις παραπάνω κινήσεις.

Μία ακμή $e \in E(G)$ μπορεί να καθαριστεί με τον ακόλουθο τρόπο:

A: όταν ένας ανιχνευτής γλιστράει πάνω στην e

Στο παράδειγμα με τον φυγά, αν αυτός βρίσκεται στην ακμή e και συμβεί το **A** τότε θα έχουμε τη σύλληψή του. Η ανίχνευση με αυτά τα χαρακτηριστικά συναντάται στη βιβλιογραφία ως *ανίχνευση ακμών* (*edge search* ή *graph sweeping*).

Επειδή ο φυγάς είναι *αόρατος*, οι κινήσεις που *απαρτίζουν* την $\mathcal{S}$ δεν εξαρτώνται από τη θέση του και επομένως μπορούν να δοθούν από την αρχή του παιχνιδιού (*ad-hoc strategy*).

Δεδομένης μίας στρατηγικής $\mathcal{S}$, ορίζουμε το σύνολο $E(\mathcal{S}, i)$ ούτως ώστε να περιέχει τις ακμές που είναι καθαρές μετά από τις i πρώτες κινήσεις της $\mathcal{S}$, δηλαδή τις ακμές για τις οποίες κατά τα i πρώτα βήματα της $\mathcal{S}$ μπορούμε να εγγυηθούμε ότι δεν περιέχουν αέριο (ή αντίστοιχα τον φυγά). Πιο τυπικά, ορίζουμε τα σύνολα $E(\mathcal{S}, i)$ αναδρομικά ως εξής:

- $E(S, 0) = \emptyset$, και για $i \geq 1$
- ορίζουμε το σύνολο E^i των ακμών που καθαρίζονται εξαιτίας του κανόνα **A** κατά το βήμα i , και το σύνολο $Q_i = E(S, i - 1) \cup E^i$. Τέλος το $E(S, i)$ αποτελείται από τις ακμές του Q_i για τις οποίες δεν υπάρχει μονοπάτι που να περιέχει ακμές του $E(G) \setminus Q_i$ (ένα τέτοιο μονοπάτι θα έδινε διέξοδο διαφυγής στο αέριο-φυγά).

Η S θεωρείται *πλήρης (complete) στρατηγική ανίχνευσης* αν $E(S, i) = E(G)$ για κάποιο i , δηλαδή όλες οι ακμές του G έχουν καθαριστεί μέσα στις i πρώτες κινήσεις της S .

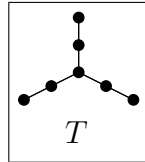
Προσέξτε ότι τα σύνολα E^i μπορεί να είναι και κενά, όπως παραδείγματος χάρι όταν η i -οστή κίνηση της S είναι αφαίρεση ανιχνευτή. Επίσης προσέξτε ότι μπορεί $E(S, i) \subset Q_i$, δηλαδή η i -οστή κίνηση μπορεί να δώσει διέξοδο διαφυγής στο αέριο-φυγά, και ως εκ τούτου οι καθαρές ακμές μετά την i -οστή κίνηση να είναι λιγότερες από αυτές βήματος $i - 1$. Σε αυτή την περίπτωση λέμε πως έχουμε *επαναμόλυνση (recontamination)* ακμών. Μία στρατηγική ανίχνευσης στην οποία δεν υπάρχουν κινήσεις που προκαλούν επαναμόλυνση ακμών, δηλαδή μία στρατηγική τέτοια ώστε, αν $i \leq j$ τότε $E(S, i) \subseteq E(S, j)$, καλείται *μονότονη στρατηγική (monotone strategy)*.

Αν και η μη-μονοτονία φαίνεται αποθαρρυντική, καθώς σε μία πλήρη ανίχνευση, με επαναμόλυνση ακμών, αναγκαζόμαστε να καθαρίσουμε τις επαναμολυσμένες ακμές παραπάνω από μία φορά, σε μερικές από της παραλλαγές που θα δούμε στη συνέχεια, βοηθάει στην κατασκευή «καλύτερων» στρατηγικών ανίχνευσης. Το ποσοτικό μέγεθος που καθορίζει μεταξύ δύο στρατηγικών ανίχνευσης ποια είναι η «καλύτερη», ορίζεται στη συνέχεια.

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό, στα περισσότερα πρακτικά προβλήματα αυτό που στοιχίζει περισσότερο είναι οι ανιχνευτές που καταναλώνονται από μια στρατηγική ανίχνευσης. Επομένως είναι απολύτως λογικό να ορίσουμε ως *κόστος της ανίχνευσης* S το πλήθος των ανιχνευτών που χρησιμοποιούνται, συνεπώς θα ορίσουμε ως $\text{cost}_G(S)$ το μέγιστο πλήθος ανιχνευτών που βρίσκονται στο G κατά τη διάρκεια των κινήσεων της S .

Το ζητούμενο βέβαια είναι να κατασκευάζονται στρατηγικές ανίχνευσης με όσο το δυνατόν μικρότερο κόστος. Ορίζουμε $s(G) = \min\{\text{cost}_G(S) \mid S \text{ πλήρης στρατηγική ανίχνευσης για το } G\}$ (αν το $E(G) = \emptyset$ τότε ορίζουμε $s(G) = 0$) και καλούμε αυτήν τη ποσότητα *αριθμό ανίχνευσης ακμών (edge search number)* του G .

Παράδειγμα 1.3.1. Για το δέντρο του σχήματος 1.1, ισχύει ότι $s(T) = 2$:



Σχήμα 1.1: Ένα γράφημα με αριθμό ανίχνευσης ακμών 2.

Αν, εκτός από τον κανόνα καθαρισμού ακμών **A**, προσθέσουμε και τον κανόνα **B** που ακολουθεί, θα οδηγηθούμε σε δύο πολύ σημαντικές παραλλαγές:

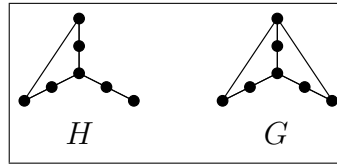
- B:** όταν και τα δύο άκρα της e καταλαμβάνονται από ανιχνευτές

Η πρώτη, εκ των δύο αυτών παραλλαγών, δόθηκε (το 1985) από τους Λευτέρη Κυρούση και Χρήστο Παπαδημητρίου [30, 31]. Σύμφωνα με αυτήν τη παραλλαγή οι ανίχνευτές δεν έχουν την δυνατότητα να γλιστρήσουν πάνω σε ακμές, και ως εκ τούτου οι ακμές μπορούν να καθαριστούν μόνο με τον κανόνα **B**. Αυτού του είδους η ανίχνευση ονομάζεται *ανίχνευση κορυφών (node search)* και, υιοθετώντας τον ορισμό του κόστους της ανίχνευσης ακμών, μπορούμε να ορίσουμε κατ' αντιστοιχία τον *αριθμό ανίχνευσης κορυφών (node search number)* ενός γραφήματος G , τον οποίο θα συμβολίζουμε ως $\mathbf{ns}(G)$.

Παράδειγμα 1.3.2. Το δέντρο T του Σχήματος 1.1 έχει $\mathbf{ns}(T) = 3$. Μπορεί για το συγκεκριμένο παράδειγμα να ισχύει ότι $\mathbf{s}(T) \leq \mathbf{ns}(T)$, όμως αυτή η ανισότητα δεν ισχύει κατά κανόνα. Για παράδειγμα το $K_{3,3}$ έχει $\mathbf{ns}(K_{3,3}) = 4$ και $\mathbf{s}(K_{3,3}) = 5$.

Η δεύτερη παραλλαγή, που ίσως είναι η πιο ενδιαφέρουσα, δόθηκε έξι χρόνια αργότερα από τους Daniel Bienstock και Neil Robertson [20], σύμφωνα με την οποία οι ανίχνευτές έχουν το δικαίωμα να κινούνται και με τους τρεις τρόπους, ενώ οι ακμές καθαρίζονται είτε με τον κανόνα **A** είτε με τον **B**. Αυτή η ανίχνευση ονομάζεται *μικτή ανίχνευση (mixed search)* και, πάλι κατ' αντιστοιχία, ορίζουμε τον *αριθμό μικτής ανίχνευσης (mixed search number)* ενός γραφήματος G , που θα τον συμβολίζουμε με $\mathbf{ms}(G)$.

Παράδειγμα 1.3.3. Για τα παρακάτω γραφήματα ισχύει ότι $\mathbf{ms}(H) = 2$ και $\mathbf{ms}(G) = 3$:



Σχήμα 1.2: Στη μικτή ανίχνευση η μεγαλύτερη πυκνότητα του γραφήματος «βοηθάει» πάντα τον φυγά.

Παρατηρούμε ότι η μικτή ανίχνευση ενοποιεί τους άλλους δύο τύπους, καθώς μία στρατηγική ανίχνευσης ακμών ή κορυφών, εξ ορισμού αποτελεί στρατηγική μικτής ανίχνευσης, επομένως για ένα γράφημα G ισχύουν οι ακόλουθες δύο ανισότητες: $\mathbf{ms}(G) \leq \mathbf{ns}(G)$ και $\mathbf{ms}(G) \leq \mathbf{s}(G)$. Οι ανισότητες αυτές μπορούν να γίνουν ισότητες μετασχηματίζοντας το γράφημα με τους τρόπους που περιγράφονται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.3.1 (D. Bienstock, N. Robertson [20]). *Έστω γράφημα $G = (V, E)$.*

- (i) *Αν G^e είναι το γράφημα που προκύπτει από το G αν υποδιαιρέσουμε κάθε ακμή του, δηλαδή αντικαταστήσουμε κάθε ακμή $\{x, y\} \in E$ με δύο ακμές $\{x, u_{xy}\}$ και $\{u_{xy}, y\}$, όπου $u_{xy} \notin V$, τότε $\mathbf{s}(G) = \mathbf{ms}(G^e)$.*
- (ii) *Αν G^n είναι το πολυγράφημα που προκύπτει από το G αν προσθέσουμε μία παράλληλη ακμή για κάθε ακμή $e \in E$, τότε $\mathbf{ns}(G) = \mathbf{ms}(G^n)$.*

Η απόδειξη αυτής της πρότασης είναι ιδιαίτερα απλή και θα παραληφθεί.

Κλείνοντας αυτήν την παράγραφο, στην ακόλουθη πρόταση θα ανακεφαλαιώσουμε τη σχέση των τριών βασικών τύπων ανίχνευσης.

Πρόταση 1.3.2. Για κάθε γράφημα G , ισχύουν τα παρακάτω:

- (i) $\mathbf{ns}(G) - 1 \leq \mathbf{s}(G) \leq \mathbf{ns}(G) + 1$
- (ii) $\mathbf{ms}(G) \leq \mathbf{s}(G) \leq \mathbf{ms}(G) + 1$
- (iii) $\mathbf{ms}(G) \leq \mathbf{ns}(G) \leq \mathbf{ms}(G) + 1$

Απόδειξη. Για το (i), παρατηρούμε ότι αν μας δοθεί μια στρατηγική ανίχνευσης ακμών, που χρησιμοποιεί k ανιχνευτές, προσθέτοντας έναν ακόμα ανιχνευτή, για να εξομοιώσουμε την κίνηση του γλιστρήματος πάνω σε μία ακμή, μπορούμε να τη μετατρέψουμε σε στρατηγική ανίχνευσης κορυφών, που χρησιμοποιεί $k + 1$ ανιχνευτές.

Για την άλλη ανισότητα του (i), αν μας δώσουν μία στρατηγική ανίχνευσης κορυφών που χρησιμοποιεί k ανιχνευτές, προσθέτοντας έναν ακόμα ανιχνευτή, ο οποίος θα γλιστράει πάνω στην ακμή που θα καθαρίζεται σε κάποιο βήμα αυτής της στρατηγικής, μπορούμε να τη μετατρέψουμε σε στρατηγική ανίχνευσης ακμών, που χρησιμοποιεί $k + 1$ ανιχνευτές.

Για τα (ii) και (iii), οι ανισότητες $\mathbf{ms}(G) \leq \mathbf{ns}(G)$ και $\mathbf{ms}(G) \leq \mathbf{s}(G)$, όπως προείπαμε, προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό της μικτής ανίχνευσης, και οι υπόλοιπες δύο ανισότητες, μετασχηματίζοντας τις στρατηγικές ανίχνευσης ακμών ή κορυφών, σε μικτές με τον ίδιο τρόπο που πράξαμε στην απόδειξη του (i). $\square$

Για όσα ακολουθούν, όταν δε γίνεται ρητή αναφορά σε συγκεκριμένο τύπο ανίχνευσης, ο τύπος ανίχνευσης που θα χρησιμοποιείται θα είναι η μικτή ανίχνευση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΑΡΑΛΛΑΓΕΣ ΑΝΙΧΝΕΥΣΗΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Πέρα από τους τρεις βασικούς τύπους ανίχνευσης που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, τα τελευταία είκοσι χρόνια έχουν οριστεί και μελετηθεί αρκετοί άλλοι τύποι ανίχνευσης, εκ των οποίων τους σημαντικότερους θα προσπαθήσουμε να καταγράψουμε σε αυτό το κεφάλαιο. Κυριότερη πηγή έμπνευσης για τους ερευνητές αποτέλεσαν, πρώτον, τα πρακτικά προβλήματα που εκφράζονται μέσω αυτών των παραλλαγών και, δεύτερον, οι παράμετροι πλάτους γραφήματος.

2.1 Κλέφτες και Αστυνόμοι

Τα παιχνίδια μεταξύ κλεφτών και αστυνόμων (*cop-and-robbers games*) αποτελούν έναν ανεξάρτητο τομέα έρευνας, με πολλά και ενδιαφέροντα αποτελέσματα.

Ο πρώτος ορισμός τέτοιου είδους παιχνιδιού δόθηκε, με διαφορά μερικών ετών από τον ορισμό του Parsons, από τους Richard Nowakowski, Peter Winkler [37] και (ανεξάρτητα) από τον Alain Quilliot [40]:

Το παιχνίδι απαρτίζεται από δύο παίκτες έναν κλέφτη R , και έναν αστυνόμο C . Ο C τοποθετείται πρώτος πάνω σε μία κορυφή του γραφήματος, και στη συνέχεια τοποθετείται ο R . Αυτές οι δύο κινήσεις συμπληρώνουν τον πρώτο γύρο του παιχνιδιού. Κάθε επόμενος γύρος του παιχνιδιού ξεκινάει με τον C και οι δύο παίκτες είτε παραμένουν στην ίδια κορυφή, είτε μετακινούνται σε μία γειτονική τους κορυφή. Ο C κερδίζει αν σε κάποιο γύρο μεταβεί πάνω στην κορυφή που καταλαμβάνει ο R και ο R αν καταφέρει επ' άπειρο να αποφεύγει τον C .

Παράδειγμα 2.1.1.

1. Στα δέντρα ο C πάντα κερδίζει.
2. Στους κύκλους μεγέθους μεγαλύτερο από 3 ο R πάντα κερδίζει.
3. Στα d -κανονικά γραφήματα που δεν αποτελούν κλίκα ο R πάντα κερδίζει.

Μία, ίσως πιο ενδιαφέρουσα, παραλλαγή αυτού του παιχνιδιού δόθηκε από τους Martin Aigner και Michael Fromme [17], στην οποία αντί για έναν, έχουμε k αστυνομικούς (*cops-and-robber game*). Σκοπός των αστυνομικών είναι να συλλάβουν τον $\mathbf{R}$, δηλαδή σε κάποιον γύρο του παιχνιδιού να μετακινηθεί κάποιος εκ των αστυνομικών στην κορυφή στην οποία βρίσκεται. Το ελάχιστο k για το οποίο k στο πλήθος αστυνομικοί μπορούν να εγγυηθούν τη σύλληψη του $\mathbf{R}$, σε ένα γράφημα G , ονομάζεται *cop-number* του G , και συμβολίζεται $\mathbf{CR}(G)$.

Ενώ τα γραφήματα για τα οποία ο $\mathbf{C}$ κερδίζει (ή αλλιώς τα γραφήματα με *cop-number* 1) έχουν χαρακτηριστεί πλήρως από το 1986 [18], για $k > 1$ το αν υπάρχει τέτοιος χαρακτηρισμός παραμένει ανοιχτό πρόβλημα. Αν όμως περιοριστούμε σε ειδικές κλάσεις γραφημάτων, όπως για παράδειγμα τα *επίπεδα γραφήματα*, και τα γραφήματα με *φραγμένο γένος*, τότε θα μπορέσουμε να βρούμε στη βιβλιογραφία μερικά ενδιαφέροντα αποτελέσματα, όπως είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.1.1 (M. Aigner, M. Fromme [17]). *Έστω G επίπεδο γράφημα. Ισχύει ότι $\mathbf{CR}(G) \leq 3$.*

Ένα ακόμα ενδιαφέρον παιχνίδι μεταξύ κλεφτών και αστυνομικών, ορίστηκε από τους Paul Seymour και Robin Thomas το 1993 [41]. Στη βιβλιογραφία συναντάται συνήθως ως *helicopter cops-and-robber game*, και η μόνη εκτροπή από τον ορισμό του *cops-and-robber game*, είναι η εξής:

Ο μεν κλέφτης, σε κάθε γύρο του παιχνιδιού (είτε είναι η δική του σειρά είτε όχι) έχει την δυνατότητα να μεταβεί από την κορυφή που βρίσκεται, έστω u , σε οποιαδήποτε κορυφή συνδέεται με μονοπάτι με την u , που δεν μπλοκάρεται όμως από αστυνομικό. Οι δε αστυνομικοί, βρίσκονται είτε μέσα στο γράφημα, καταλαμβάνοντας μία κορυφή, είτε εκτός γραφήματος (μέσα σε ένα «ελικόπτερο»). Όσοι είναι εντός γραφήματος μπορούν να παραμείνουν στην ίδια κορυφή ή να βγουν από το γράφημα, και όσοι είναι εκτός γραφήματος μπορούν να εισέλθουν πίσω στο γράφημα σε οποιαδήποτε κορυφή επιθυμούν¹.

Παρατηρούμε ότι αν ο κλέφτης είναι αόρατος, τότε έχουμε την ανίχνευση κορυφών που ορίσαμε στο πρώτο κεφάλαιο. Στην ανίχνευση κορυφών το ζητούμενο ήταν να καθαριστεί όλο το γράφημα βάση του κανόνα $\mathbf{B}$, ενώ στη δική μας περίπτωση, το ζητούμενο για τους αστυνομικούς είναι να «στριμώξουν» τον κλέφτη, και ως εκ τούτου να πετύχουν την σύλληψη του. Για ένα γράφημα G , καλούμε $\mathbf{vans}(G)$ το ελάχιστο πλήθος αστυνομικών που μπορούν να εγγυηθούν σύλληψη του κλέφτη σε ένα *helicopter cops-and-robber game*.

Παράδειγμα 2.1.2. Για ένα δέντρο T ισχύει $\mathbf{vans}(T) = 2$.²

¹ Αν επιχειρήσουν να μεταβούν στην κορυφή που καταλαμβάνει ο κλέφτης και υπάρχει μονοπάτι που δεν μπλοκάρεται από αστυνομικό, τότε ο κλέφτης μπορεί να διαφύγει από αυτό το μονοπάτι προτού εισέλθουν οι αστυνομικοί. Ένας άλλος τρόπος να ιδωθούν οι κινήσεις των αστυνομικών είναι σαν «άλματα» από μία κορυφή σε οποιαδήποτε άλλη κορυφή του γραφήματος.

² Στην ανίχνευση κορυφών όμως είδαμε ότι αυτό δεν ισχύει (Παράδειγμα 1.3.2).

2.2 Ορατότητα και Κινητικότητα του φυγά

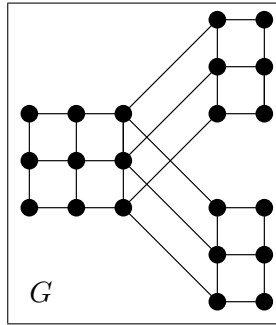
Στους τρεις τύπους ανίχνευσης που ορίσαμε στο πρώτο κεφάλαιο, ο φυγάς ήταν αόρατος και κινητικός. Στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου ορίσαμε ένα παιχνίδι μεταξύ κλεφτών και αστυνόμων, που θα μπορούσε να χαρακτηριστεί, σύμφωνα με τον «κλασικό» ορισμό του πρώτου κεφαλαίου, ως ανίχνευση κορυφών με ορατό και κινητικό φυγά. Μένουν ακόμα να εξετασθούν οι περιπτώσεις των επόμενων δύο παραγράφων.

2.2.1 Αόρατος και τεμπέλης φυγάς

Η ανίχνευση κορυφών με αόρατο και τεμπέλη φυγά εισήχθη από τους Νίκο Δενδρή, Λευτέρη Κυρούση και Δημήτριο Θηλυκό [24]. Για ένα γράφημα G , θα συμβολίζουμε με $\mathbf{ilns}(G)$ το ελάχιστο πλήθος ανιχνευτών που μπορούν να εγγυηθούν σύλληψη του φυγά στο G . Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει το επόμενο Θεώρημα, καθώς δείχνει πως οι δύο τελευταίοι τύποι ανίχνευσης είναι ισοδύναμοι³.

Θεώρημα 2.2.1 (Nick D. Dendris, Lefteris M. Kirousis, Dimitrios M. Thilikos [24]). Για ένα γράφημα G ισχύει ότι $\mathbf{ilns}(G) = \mathbf{vans}(G)$.

Παράδειγμα 2.2.1. Για το γράφημα G που ακολουθεί, έχουμε $\mathbf{vans}(G) = 4$.



Σχήμα 2.1: Παρατηρούμε ότι $\mathbf{vans}(G) = 4$, $\mathbf{ilns}_1(G) = 3$, και $\mathbf{ns}(G) = 6$.

Περιορίζοντας την «ταχύτητα» του φυγά, οδηγούμαστε σε μια πληθώρα παραλλαγών αυτού του τύπου ανίχνευσης. Συγκεκριμένα, για ένα γράφημα G με n στο πλήθος κορυφές, ορίζουμε, για κάθε $s \in \{1, \dots, n-1\}$, τον αριθμό $\mathbf{ilns}_s(G)$ να ισούται με το ελάχιστο πλήθος ανιχνευτών, απαραίτητων για τη σύλληψη ενός φυγά, που μπορεί να κινείται πάνω σε αφύλακτα μονοπάτια διασχίζοντας το πολύ s ακμές. Παρατηρήστε ότι $\mathbf{ilns}_{n-1}(G) = \mathbf{ilns}(G)$.

Παράδειγμα 2.2.2. Για το γράφημα G του Σχήματος 2.1, έχουμε $\mathbf{ilns}_1(G) = 3$.

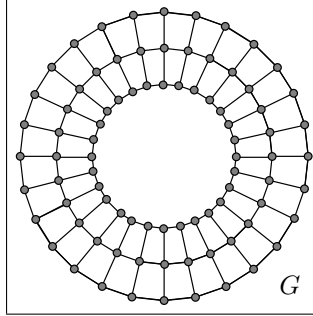
Μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτό ότι ο περιορισμός της ταχύτητας του φυγά, πάντα δρα υπέρ των ανιχνευτών και ότι, για ένα γράφημα G , ισχύει η ανισότητα $\mathbf{ilns}_s(G) \leq \mathbf{ilns}(G)$, για κάθε $s \in \{1, \dots, n-1\}$.

³Το θεώρημα αυτό θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποδεικνύει μαθηματικά το ακόλουθο γεγονός: Σε μια καταδίωξη όταν οι ανιχνευτές βλέπουν τον φυγά τότε αυτός θα πρέπει να τρέχει, ενώ όταν δεν τον βλέπουν μπορεί και να τεμπελιάζει.

2.2.2 Ορατός και τεμπέλης φυγάς

Η ανίχνευση κορυφών με ορατό και τεμπέλη φυγά εισήχθη από τους David Richerby και Δημήτριο Θηλυκό [8]. Για ένα γράφημα G , συμβολίζουμε με $\mathbf{vlns}(G)$ το ελάχιστο πλήθος ανιχνευτών που μπορούν να εγγυηθούν σύλληψη του φυγά στο G .

Παράδειγμα 2.2.3. Το παρακάτω γράφημα G έχει $\mathbf{vlns}(G) = 4$.

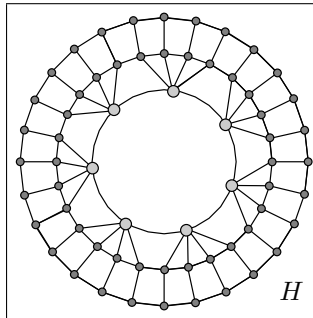


Σχήμα 2.2: Τέσσερις ανιχνευτές αρκούν για να «στριμώξουν» τον φυγά.

Για την ποσότητα $\mathbf{vlns}(G)$, οι ερευνητές που την εισήγαγαν, έδωσαν έναν πολύ κομψό χαρακτηρισμό ο οποίος παρουσιάζει ενδιαφέρον καθώς ρίχνει φως στο πως η δομή του γραφήματος μπορεί να επηρεάσει την ανίχνευση σε αυτό.

Ορισμός 2.2.1. Ένα k -κρησφύγετο (k -hide-out) σε ένα γράφημα G είναι ένα σύνολο $X \subseteq V(G)$, τέτοιο ώστε, για κάθε $v \in X$, υπάρχουν τουλάχιστον k μονοπάτια που συνδέουν την v με μία κορυφή στο $X \setminus \{v\}$.

Παράδειγμα 2.2.4. Το σύνολο $X = \{u \in V(H) \mid \deg_H(u) = 6\}$, αποτελεί ένα 6-κρησφύγετο για το H .



Σχήμα 2.3: Οι κεντρικές κορυφές αποτελούν 6-κρησφύγετο για το γράφημα.

Θεώρημα 2.2.2 (David Richerby, Dimitrios M. Thilikos [8]). Για ένα γράφημα G ισχύει ότι $\mathbf{vlns}(G) + 1 = \max\{k \mid \text{το } G \text{ περιέχει } k\text{-κρησφύγετο}\}$.

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα για το γράφημα H του παραδείγματος 2.2.4 έχουμε $\mathbf{vlns}(H) = 7$.

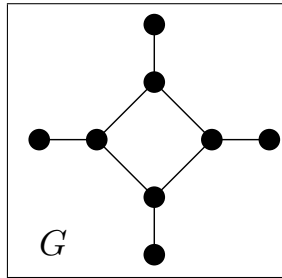
2.3 Συνεκτική Ανίχνευση

Σε πάρα πολλές εφαρμογές, όπως για παράδειγμα στην ασφάλεια δικτύων υπολογιστών ή σε μια επιχείρηση διάσωσης σε ένα σύστημα σπηλιών (την ιδέα που τροφοδότησε τη δημιουργία αυτού του κλάδου), είναι απαραίτητο οι ανιχνευτές να μπορούν να επικοινωνούν μεταξύ τους μέσω ενός ασφαλούς καναλιού επικοινωνίας. Το ρόλο αυτού του καναλιού επικοινωνίας, μοιραία θα παίζει το «καθαρό» κομμάτι του γραφήματος, στο οποίο δεν υπάρχει πρόσβαση από τον φυγά. Σύμφωνα με τις επιταγές αυτής της απαίτησης, θα πρέπει σε κάθε βήμα της ανίχνευσης να παραμένει «συνεκτικό». Αυτό οδήγησε τους ερευνητές στο να εισάγουν, και να μελετήσουν, την έννοια της *συνεκτικής ανίχνευσης* (*connected search*), που θα μας απασχολήσει σε αυτήν την παράγραφο.

Ας επιστρέψουμε στους τρεις κλασικούς τύπους ανίχνευσης, και ας θεωρήσουμε ένα γράφημα G , το οποίο καλούμαστε να καθαρίσουμε με έναν από τους τρεις τρόπους. Αν επιπλέον απαιτήσουμε να καθαριστεί με μία *συνεκτική στρατηγική ανίχνευσης* (*connected search strategy*), δηλαδή με μία στρατηγική $\mathcal{S}$ τέτοια ώστε, για κάθε $i \in \{1, \dots, |\mathcal{S}|\}$, το γράφημα $G[E(\mathcal{S}, i)]$ που ενάγουν οι καθαρές ακμές, να είναι συνεκτικό, τότε καταλήγουμε στην *συνεκτική ανίχνευση* (*connected search*) *κορυφών* ή *ακμών* (αντίστοιχα) και την *μικτή συνεκτική ανίχνευση*. Αυτός ο τύπος ανίχνευσης ορίστηκε από τους Barrière, Flocchini, Fomin, Fraigniaud, Nisse, Santoro, και Θηλυκό [19, 5]. Κατά αναλογία με τον τρόπο που ορίσαμε τους αριθμούς $s(G)$, $\mathbf{ns}(G)$ και $\mathbf{ms}(G)$ ορίζονται και οι συνεκτικοί ομόλογοί τους, που θα συμβολίζουμε $\mathbf{cs}(G)$, $\mathbf{cns}(G)$ και $\mathbf{cms}(G)$ αντίστοιχα.

Ένας άλλος τρόπος να ορίσουμε συνεκτική ανίχνευση είναι ο εξής: απαγορεύουμε την αφαίρεση ανιχνευτών, και απαιτούμε όλες οι τοποθετήσεις ανιχνευτών να γίνουν στην αρχή της εκάστοτε στρατηγικής $\mathcal{S}$ ⁴.

Παράδειγμα 2.3.1. Για το γράφημα G του Σχήματος 2.4, ισχύει ότι $\mathbf{ms}(G) = 2$ και $\mathbf{cms}(G) = 3$.



Σχήμα 2.4: Αν θέλουμε συνεκτική ανίχνευση είναι απαραίτητο να καταναλώσουμε παραπάνω ανιχνευτές.

Η συνεκτικότητα των στρατηγικών ανίχνευσης, στα παιχνίδια κλεφτών-αστυνομικών, προκύπτει άμεσα από τον ορισμό τους, ενώ όσον αφορά τα υπόλοιπα παιχνίδια στα οποία οι ανιχνευτές κινούνται και σε μη γειτονικές τους κορυφές, η συνεκτικότητα

⁴Η συνεκτική ανίχνευση κορυφών δεν μπορεί να ορισθεί με αυτόν τον τρόπο.

μπορεί να εισαχθεί απαιτώντας σε κάθε βήμα μίας στρατηγικής, το κομμάτι που παραμένει «μπλοκαρισμένο» για τον φυγά, να αποτελεί *συνεκτικό υπογράφημα*⁵ του G . Κατά αυτόν τον τρόπο ορίζονται οι ποσότητες $\mathbf{evans}(G)$ και $\mathbf{evlms}(G)$.

2.4 Μη-ντετερμινιστική ανίχνευση

Μία *μη-ντετερμινιστική στρατηγική ανίχνευσης* $\mathcal{S}$ (*nondeterministic search strategy*) για ένα γράφημα $G = (V, E)$ είναι μια στρατηγική ανίχνευσης που απαρτίζεται από τοποθετήσεις και αφαιρέσεις ανιχνευτών σε κορυφές. Επιπλέον σε μερικά βήματα, έστω για παράδειγμα στο βήμα i , μπορεί να θέσει ένα ερώτημα σε ένα *μαντείο* (*oracle*) (μη-ντετερμινιστικό βήμα), το οποίο με την απάντηση που θα δώσει θα καθορίσει ποιο θα είναι το σύνολο καθαρών ακμών μετά το βήμα i . Πιο συγκεκριμένα, στην αρχή του βήματος i , δίνουμε στο μαντείο το σύνολο $E(\mathcal{S}, i - 1)$ των καθαρών ακμών του γραφήματος, και μας επιστρέφει, εν είδη απάντησης, μία συνεκτική συνιστώσα C του «βρωμικού» μέρους του γραφήματος⁶. Στο τέλος του μη-ντετερμινιστικού βήματος, το σύνολο των καθαρών ακμών είναι το $E(\mathcal{S}, i) = E(G) \setminus E(C)$ και οι ανιχνευτές καταλαμβάνουν τις κορυφές που αποτελούν άκρο ταυτόχρονα ακμής του $E(\mathcal{S}, i)$ και του $E(G) \setminus E(\mathcal{S}, i)$.

Αν περιορίσουμε σε κάποιο φυσικό αριθμό q , τα ερωτήματα στο μαντείο που μπορεί να θέσει μια μη-ντετερμινιστική στρατηγική ανίχνευσης για το G , θα πάρουμε τον q -περιορισμένο αριθμό μη-ντετερμινιστικής ανίχνευσης (*q-limited nondeterministic search number*) $\mathbf{ndns}_q(G)$, που ισούται με το ελάχιστο πλήθος των ανιχνευτών που απαιτούνται για τη σύλληψη του φυγά⁷, ενώ αν δεν τα περιορίσουμε, παίρνουμε τον (απεριόριστο) αριθμό μη-ντετερμινιστικής ανίχνευσης, που συμβολίζεται με $\mathbf{ndns}_\infty(G)$.

Αυτός ο τύπος ανίχνευσης εισήχθη από τους Fedor Fomin, Pierre Fraigniaud, και Nicolas Nisse [25], οι οποίοι απέδειξαν πως για ένα γράφημα G ισχύει $\mathbf{ndns}_\infty(G) = \mathbf{ilms}(G)$, χρησιμοποιώντας την παράμετρο του *δεντροπλάτους* (*treewidth*), που θα δούμε στο Κεφάλαιο 6, και τη σχέση της με τους δύο αυτούς τύπους ανίχνευσης.

⁵Την έννοια του υπογραφήματος θα την ορίσουμε στο Κεφάλαιο 5.

⁶Η συνεκτική συνιστώσα C μπορεί να θεωρηθεί σαν το κομμάτι του γραφήματος στο οποίο κρύβεται ο φυγάς.

⁷Προφανώς, για $q = 0$, ισχύει ότι $\mathbf{ndns}_0(G) = \mathbf{ns}(G)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

MONOTONIA

Ας επανέλθουμε στους κλασικούς τύπους ανίχνευσης. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε το κατά πόσον μας βοηθούν οι μη-μονότονες στρατηγικές ανίχνευσης να «καθαρίσουμε» το γράφημα με μικρότερο πλήθος ανιχνευτών. Θα χρειαστούμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 3.0.1. Ένα παιχνίδι ανίχνευσης γραφήματος ονομάζεται *μονότονο* (*monotone game*) αν και μόνο αν για κάθε γράφημα G και κάθε μη-μονότονη στρατηγική ανίχνευσης $\mathcal{S}$, με $\text{cost}_G(\mathcal{S}) = k$, υπάρχει μονότονη στρατηγική $\mathcal{S}'$, με $\text{cost}_G(\mathcal{S}') \leq k$.

Το ερώτημα ποιος τύπος ανίχνευσης είναι μονότονος απασχόλησε πολύ τους ερευνητές του χώρου, και όχι άδικα, καθώς μέσω της μονοτονίας παίρνουμε πληροφορίες για την πολυπλοκότητα των προβλημάτων:

k -SEARCH	
Είσοδος:	Ένα γράφημα G , και ένας θετικός ακέραιος k
Ερώτηση:	Είναι το $\#(G) \leq k$;

για $\# \in \{\mathbf{s}, \mathbf{ns}, \mathbf{ms}, \mathbf{cs}, \mathbf{cns}, \mathbf{cms}\}$, καθώς για τα μονότονα παιχνίδια μπορούμε να αγνοήσουμε τις μη-μονότονες στρατηγικές, πράγμα που είναι απαραίτητο αν θέλουμε να έχουμε πιστοποιητικά (δηλαδή περιγραφές στρατηγικών) με πολυωνυμικό μέγεθος. Περισσότερα επ' αυτού θα δούμε στο Κεφάλαιο 7.

Η πρώτη απόδειξη μονοτονίας ήρθε το 1983 (και δημοσιεύτηκε 10 χρόνια μετά) από την Andrea Lapaugh [32].

Θεώρημα 3.0.1 (Andrea S. Lapaugh [32]). *Η ανίχνευση ακμών είναι μονότονη.*

Το 1986 δημοσιεύτηκε η δεύτερη απόδειξη μονοτονίας, που αφορούσε την ανίχνευση κορυφών από τους Λευτέρη Κυρούση και Χρίστο Παπαδημητρίου που όρισαν αυτόν τον τύπο ανίχνευσης.

Θεώρημα 3.0.2 (Lefteris M. Kirousis, Christos H. Papadimitriou [31]). *Η ανίχνευση κορυφών είναι μονότονη.*

Όμως, η σημαντικότερη απόδειξη μονοτονίας ήρθε πέντε χρόνια αργότερα, και αφορούσε τη μικτή ανίχνευση. Δημοσιεύτηκε στην εργασία των Bienstock και Robertson του 1991 όπου και όρισαν αυτόν τον τύπο ανίχνευσης.

Θεώρημα 3.0.3 (Daniel Bienstock, Neil Robertson [20]). *Η μικτή ανίχνευση είναι μονότονη.*

Το αποτέλεσμα αυτό, πέρα από το ότι συνεπάγεται τα Θεωρήματα 3.0.1 και 3.0.2, είχε πιο απλή απόδειξη, και ως εκ τούτου πιο κατανοητή, αλλά και πιο εμπνευσμένη καθώς βρίθει χρήσιμων ιδεών. Την απόδειξη αυτή θα δούμε στην παράγραφο που ακολουθεί.

3.1 Η μονοτονία της μικτής ανίχνευσης

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.0.3 δεν θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της μικτής ανίχνευσης που δώσαμε στο πρώτο κεφάλαιο, καθώς, αν και εξυπηρετεί την περιγραφή των στρατηγικών ανίχνευσης ενός γραφήματος, όταν χρησιμοποιείται για την απόδειξη Θεωρημάτων γίνεται ιδιαίτερα δύσκλητος. Αντ' αυτού θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο ισοδύναμο ορισμό.

Ορισμός 3.1.1. Μία (πλήρης) στρατηγική μικτής ανίχνευσης, για ένα γράφημα G , είναι μία ακολουθία ζευγών

$$\langle (A_0, Z_0), \dots, (A_n, Z_n) \rangle,$$

για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $A_i \subseteq E(G)$ και $Z_i \subseteq V(G)$, για $0 \leq i \leq n$
2. $A_0 = \emptyset$ και $A_n = E(G)$ (τα A_i αντιπροσωπεύουν τα σύνολα των καθαρών ακμών σε κάθε βήμα της στρατηγικής)
3. $Z_i = (\bigcup_{e \in A_i} e) \cap (\bigcup_{e \in E(G) \setminus A_i} e)$, για $0 \leq i \leq n$ (τα Z_i αντιπροσωπεύουν τα σύνολα των κορυφών, πάνω στις οποίες βρίσκονται οι ανιχνευτές σε κάθε βήμα της στρατηγικής)
4. Για $0 \leq i \leq n$:
 - i. $Z_i \supseteq Z_{i-1}$, και $A_i = A_{i-1}$ (τοποθέτηση ανιχνευτών)
 - ii. $Z_i \subseteq Z_{i-1}$, και το A_i περιέχει μία ακμή e αν και μόνο αν κάθε μονοπάτι που περιέχει την e και μία ακμή στο $E(G) \setminus A_{i-1}$ περιέχει κορυφή στο Z_i (αφαίρεση ανιχνευτή)
 - iii. $Z_i = (Z_{i-1} \setminus \{u\}) \cup \{v\}$, για κορυφές $u \in Z_{i-1}$ και $v \in V(G) \setminus Z_{i-1}$ για τις οποίες $\{u, v\} \in E(G) \setminus A_{i-1}$ και κάθε άλλη ακμή με άκρο την u ανήκει στο A_{i-1} , και $A_i = A_{i-1} \cup \{e\}$ (γλίστρημα ανιχνευτή πάνω στην ακμή $\{u, v\}$ με κατεύθυνση προς την v)
 - iv. $Z_i = Z_{i-1}$, και $A_i = A_{i-1} \cup \{e\}$ για μία ακμή $e \in E(G) \setminus A_{i-1}$ που έχει και τα δύο άκρα στο Z_{i-1} (καθαρισμός ακμής σύμφωνα με τον κανόνα **B**)

Αν για μια στρατηγική $\mathcal{S} = \langle (A_0, Z_0), \dots, (A_n, Z_n) \rangle$ σε ένα γράφημα G , έχουμε $\mathbf{cost}_G(\mathcal{S}) = \max\{|Z_i| \mid 0 \leq i \leq n\}$, τότε, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, $\mathbf{ms}(G) = \min\{\mathbf{cost}_G(\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} \text{ στρατηγική για το } G\}$.

Ας περάσουμε τώρα σε μία καινούρια έννοια, απαραίτητη για την απόδειξη.

Ορισμός 3.1.2. Μία *σταυροφορία* (*crusade*) σε ένα γράφημα G , είναι μια ακολουθία $\langle X_0, \dots, X_n \rangle$ υποσυνόλων του συνόλου ακμών $E(G)$, τέτοιο ώστε:

1. $X_0 = \emptyset$
2. $X_n = E(G)$
3. $|X_i \setminus X_{i-1}| \leq 1$, για $1 \leq i \leq n$

Αν η τρίτη ιδιότητα αντί για ανισότητα γίνει ισότητα, τότε έχουμε μία *μονότονη σταυροφορία*.

Στη συνέχεια τα σύνολα ακμών X_i μίας σταυροφορίας θα τα συσχετίσουμε με τα σύνολα A_i των καθαρών ακμών. Για το λόγο αυτό είναι απαραίτητο να ορίσουμε κάποια μορφή κόστους που θα αφορά τις σταυροφορίες.

Ορισμός 3.1.3. Έστω γράφημα G , και σύνολο ακμών $X \subseteq E(G)$, ορίζουμε

$$\partial_G(X) = \left(\bigcup_{e \in X} e \right) \cap \left(\bigcup_{e \in E(G) \setminus X} e \right)$$

Ορισμός 3.1.4. Θα λέμε ότι μια σταυροφορία $\langle X_0, \dots, X_n \rangle$ στο γράφημα G , χρησιμοποιεί $\leq k$ *φύλακες* (*guards*) αν $|\partial_G(X_i)| \leq k$, για $0 \leq i \leq n$.

Λήμμα 3.1.1. Έστω γράφημα G . Αν $\mathbf{ms}(G) \leq k$ τότε υπάρχει σταυροφορία στο G που χρησιμοποιεί το πολύ k φύλακες.

Απόδειξη. Έστω στρατηγική $\mathcal{S} = \langle (A_0, Z_0), \dots, (A_n, Z_n) \rangle$ για το G με $\mathbf{cost}_G(\mathcal{S}) \leq k$. Παρατηρούμε ότι $\partial_G(A_i) \subseteq Z_i$, για $0 \leq i \leq k$, συνεπώς $|\partial_G(A_i)| \leq k$ και άρα η σταυροφορία $\langle A_0, \dots, A_n \rangle$ χρησιμοποιεί το πολύ k φύλακες. $\square$

Το αντίστροφο του Λήμματος 3.1.1 ισχύει μόνο για γραφήματα με ελάχιστο βαθμό μεγαλύτερο του 2. Στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.0.3 θα παρακάμψουμε αυτό το εμπόδιο μετασχηματίζοντας το γράφημά μας σε ένα γράφημα με την επιθυμητή ιδιότητα. Προτού περάσουμε στην αντίστροφη κατεύθυνση του Λήμματος 3.1.1 θα αποδείξουμε την «μονοτονία» των σταυροφοριών σε ένα γράφημα.

Λήμμα 3.1.2. Αν σε ένα γράφημα G υπάρχει σταυροφορία που χρησιμοποιεί $\leq k$ φύλακες, τότε υπάρχει και μονότονη σταυροφορία που χρησιμοποιεί $\leq k$ φύλακες.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{X} = \langle X_0, \dots, X_n \rangle$ μία σταυροφορία στο G που χρησιμοποιεί $\leq k$ φύλακες, τέτοια ώστε:

- (α) το άθροισμα $\sum_{0 \leq i \leq n} (\partial_G(X_i) + 1)$ είναι το ελάχιστο δυνατό, και
- (β) το άθροισμα $\sum_{0 \leq i \leq n} |X_i|$ είναι το ελάχιστο δυνατό.

Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{X}$ είναι μονότονη.

Παρατηρούμε ότι $|\partial_G(X_{i-1} \cup X_i)| \geq |\partial_G(X_i)|$ για $1 \leq i \leq n$, διότι αλλιώς θα είχαμε την σταυροφορία¹

$$\mathcal{X}' = \langle X_0, X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i-1} \cup X_i, X_{i+1}, \dots, X_n \rangle,$$

που χρησιμοποιεί k φύλακες, πράγμα που αντιβαίνει στην (a).

Παρατηρούμε επίσης ότι για κάθε δύο σύνολα ακμών X, Y , ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$|\partial_G(X \cup Y)| + |\partial_G(X \cap Y)| \leq |\partial_G(X)| + |\partial_G(Y)|$$

συνεπώς $|\partial_G(X_{i-1} \cap X_i)| \leq |\partial_G(X_{i-1})| \leq k$. Όμως τότε η ακολουθία

$$\mathcal{X}'' = \langle X_0, X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i-1} \cap X_i, X_{i+1}, \dots, X_n \rangle,$$

θα ήταν σταυροφορία² που χρησιμοποιεί k φύλακες, και για να ισχύει η (b) θα πρέπει $|X_{i-1} \cap X_i| \geq |X_{i-1}|$, οπότε (αφού εξαιτίας της (b) δεν μπορεί να ισχύει $X_{i-1} = X_i$) θα έχουμε $X_{i-1} \subset X_i$. Επομένως ισχύει ότι $|X_i \setminus X_{i-1}| = 1$, και άρα η σταυροφορία $\mathcal{X}$ είναι μονότονη. $\square$

Λήμμα 3.1.3. Έστω γράφημα G με $\delta(G) \geq 2$ και έστω $\langle X_0, \dots, X_n \rangle$ μία μονότονη σταυροφορία στο G που χρησιμοποιεί k φύλακες. Επίσης, έστω ότι $X_i \setminus X_{i-1} = \{e_i\}$, για $1 \leq i \leq n$. Τότε υπάρχει μονότονη στρατηγική ανίχνευσης $\mathcal{S}$ τέτοια ώστε $A_i = A_{i-1} \cup \{e_i\}$, για $1 \leq i \leq n$.

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε την $\mathcal{S}$ επαγωγικά. Υποθέτουμε πως για κάποιο $j \in \{1, \dots, n\}$, $A_j = \{e_1, \dots, e_{j-1}\}$, ικανοποιώντας την απαίτηση $A_i = A_{i-1} \cup \{e_i\}$, για $1 \leq i \leq j$, και $|Z_i| \leq k$, για $0 \leq i \leq j$.

Παρατηρούμε ότι $\partial_G(X_{j-1}) = Z_j$, επομένως οι κορυφές του $\partial_G(X_{j-1})$ καταλαμβάνονται από ανιχνευτές.

Η ακμή e_j ανήκει στο $X_j \setminus X_{j-1}$, επομένως τουλάχιστον ένα από τα άκρα της δεν ανήκει στο X_{j-1} .

Διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με τον πληθύνισμο του συνόλου $e_j \cup \partial_G(X_{j-1})$:

- Αν $|e_j \cup \partial_G(X_{j-1})| \leq k$, τότε ορίζουμε $Z_{j+1} = Z_j \cup e_j$, και $A_{j+1} = A_j \cup e_j$ (τοποθετούμε ανιχνευτές στα άκρα της e_j).
- Αλλιώς, έχουμε ότι $e_j \not\subseteq \partial_G(X_{j-1})$. Έστω v το ένα άκρο της e_j . Επειδή ο βαθμός της v είναι μεγαλύτερος του 2, έπεται ότι $v \in \partial_G(X_j)$. Αν u είναι το άλλο άκρο της e_j , τότε $u \in \partial_G(X_{j-1}) \setminus \partial_G(X_j)$, και η u δεν αποτελεί άκρο ακμής στο $E(G) \setminus X_j$. Ορίζουμε $Z_{j+1} = (Z_j \setminus \{u\}) \cup \{v\}$, και $A_{j+1} = A_j \cup e_j$ (γλιστράμε τον ανιχνευτή που βρίσκεται στην u πάνω στην ακμή e_j , με κατεύθυνση προς την v).

Παρατηρούμε ότι, και στις δύο περιπτώσεις, δεν χρησιμοποιήσαμε παραπάνω από k ανιχνευτές. Τέλος, από τον τρόπο που ορίστηκε η $\mathcal{S}$, προκύπτει άμεσα ότι είναι μονότονη. $\square$

Πλέον, είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το Θεώρημα 3.0.3.

¹ Είναι εύκολο να επαληθευτεί ότι $|(X_{i-1} \cup X_i) \setminus X_{i-1}| \leq 1$ και $|X_{i+1} \setminus (X_{i-1} \cup X_i)| \leq 1$.

² Είναι εύκολο να επαληθευτεί ότι $|(X_{i-1} \cap X_i) \setminus X_{i-2}| \leq 1$ και $|X_i \setminus (X_{i-1} \cap X_i)| \leq 1$.

Απόδειξη. Έστω G' το γράφημα που προκύπτει από G προσθέτοντας μία λούπα σε κάθε κορυφή του. Προφανώς ισχύει ότι $\mathbf{ms}(G') = \mathbf{ms}(G)$. Αν $\mathcal{S}$ είναι μια στρατηγική ανίχνευσης για το G' , από το Λήμμα 3.1.1, υπάρχει σταυροφορία στο G' που χρησιμοποιεί το πολύ k φύλακες, και από το Λήμμα 3.1.2 υπάρχει μονότονη σταυροφορία στο G' , που χρησιμοποιεί το πολύ k φύλακες. Τέλος, από το Λήμμα 3.1.3 υπάρχει μονότονη στρατηγική για το G' που χρησιμοποιεί το πολύ k ανιχνευτές, η οποία μπορεί εύκολα να μετασχηματιστεί (αγνοώντας τυχούσες κινήσεις γλιστρήματος πάνω σε λούπες) σε μία μονότονη στρατηγική ανίχνευσης για το G που χρησιμοποιεί το πολύ k ανιχνευτές. $\square$

3.2 Άλλοι μονότονοι τύποι ανίχνευσης

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναφέραμε την ισοδυναμία μεταξύ δύο φαινομενικά ασύνδετων τύπων ανίχνευσης, του helicopter cops-and-robber game και της ανίχνευσης κορυφών με αόρατο και τεμπέλη φυγά. Για τους τύπους αυτούς μπορούμε να ορίσουμε μονότονες στρατηγικές ανίχνευσης χρησιμοποιώντας την έννοια της επαναμόλυνσης³ και, εν συνεχεία, τους αντίστοιχους μονότονους τύπους ανίχνευσης, χρησιμοποιώντας τον ορισμό 3.0.1.

Και οι δύο αυτοί τύποι ανίχνευσης είναι μονότονοι, όπως αποδείχθηκε από τους Seymour και Thomas [41] για τα helicopter cops-and-robber game, και τους Δενδρή, Κυρούση και Θηλυκό [24] για την ανίχνευση κορυφών, με αόρατο και τεμπέλη φυγά. Και οι δύο αποδείξεις στηρίχθηκαν στην ισοδυναμία των αριθμών $\mathbf{vans}(G)$, και $\mathbf{ilns}(G)$, με το δεντροπλάτος ενός γραφήματος G που θα δούμε στο Κεφάλαιο 6.

Αργότερα δόθηκαν δύο μετα-θεωρήματα τα οποία απέδειξαν την μονοτονία πολλών τύπων ανίχνευσης, συμπεριλαμβανομένου αυτών που έχουμε δει έως τώρα. Το πρώτο δόθηκε από τους Fedor Fomin και Δημήτριο Θηλυκό, οι οποίοι όρισαν ένα γενικότερο πλαίσιο τύπων ανίχνευσης και βρήκαν την προϋπόθεση που πρέπει να πληρείται ώστε ο εκάστοτε τύπος ανίχνευσης να είναι μονότονος.

Δοσμένου ενός γραφήματος G και μιας στρατηγικής ανίχνευσης $\mathcal{S}$ σε αυτό, ορίζουμε την *συνάρτηση συνόρου* $\alpha : \{1, \dots, |\mathcal{S}|\} \rightarrow V(G)$, με $\alpha(i) = \partial_G(E(\mathcal{S}, i))$. Παραλλαγές της συνάρτησης συνόρου μπορούν να ορίσουν διαφορετικούς τύπους ανίχνευσης, συμπεριλαμβανομένων και των κλασικών τύπων της ανίχνευσης ακμών, της ανίχνευσης κορυφών και της μικτής ανίχνευσης. Το παρακάτω θεώρημα δίνει γενικό κριτήριο για το πότε αυτοί οι τύποι ανίχνευσης είναι μονότονοι.

Θεώρημα 3.2.1 (F. V. Fomin, D. M. Thilikos [26]). *Αν σε έναν τύπο ανίχνευσης με ορατό και κινητικό φυγά, η συνάρτηση συνόρου α ικανοποιεί την ιδιότητα της υπομοιαιότητας (submodularity):*

$$|\alpha(i) \cup \alpha(j)| + |\alpha(i) \cap \alpha(j)| \leq |\alpha(i)| + |\alpha(j)|,$$

τότε ο τύπος αυτός ανίχνευσης είναι μονότονος.

Το επόμενο αποτέλεσμα ήταν των Frédéric Mazoit και Nicolas Nisse και αφορούσε την μη-ντετερμινιστική ανίχνευση.

³Μπορούμε, χάριν απλότητας, να θεωρήσουμε ότι μία στρατηγική ανίχνευσης $\mathcal{S}$ είναι μονότονη, εφόσον σε κανένα βήμα i της $\mathcal{S}$, δεν τοποθετείται ανιχνευτής-αστυνομικός σε κορυφή που καλυπτόταν από ανιχνευτή-αστυνομικό σε κάποιο βήμα $j < i$, και στη συνέχεια ελευθερώθηκε.

Θεώρημα 3.2.2 (F. Mazoit, N. Nisse [34]). *Η μη-ντετερμινιστική ανίχνευση είναι μονότονη.*

3.3 Μη-μονοτονία

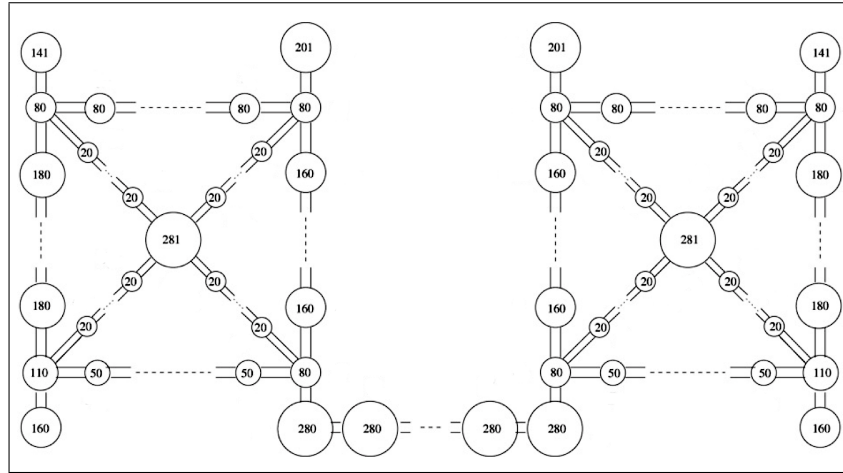
Όπως προείπαμε, η μονοτονία είναι μία επιθυμητή ιδιότητα για ένα πρόβλημα ανίχνευσης. Δυστυχώς όμως δεν ισχύει για όλους τους τύπους ανίχνευσης που έχουμε δει. Επομένως έχει νόημα να περιοριστούμε σε μονότονες στρατηγικές ανίχνευσης, και να ορίσουμε την ποσότητα $\mathbf{mvlns}(G)$ και τους μονότονους και συνεκτικούς αριθμούς $\mathbf{mcs}(G)$, $\mathbf{mcns}(G)$, $\mathbf{mcms}(G)$, $\mathbf{mcvans}(G)$ και $\mathbf{mcvlns}(G)$ ενός γραφήματος G .

Έχοντας ορίσει αυτές τις ποσότητες, το ερώτημα κατά πόσο ένας τύπος ανίχνευσης είναι μονότονος μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

Ερώτημα Μονοτονίας: *Ισχύει ότι $\#(G) = \mathbf{m}\#(G)$ για κάθε γράφημα G ;*

όπου $\# \in \{\mathbf{vlns}, \mathbf{cs}, \mathbf{cns}, \mathbf{cms}, \mathbf{cvans}, \mathbf{cvlns}\}$. Για τη συντριπτική πλειοψηφία αυτών των τύπων ανίχνευσης, το να δοθεί απάντηση στο Ερώτημα Μονοτονίας παραμένει ανοιχτό πρόβλημα. Σε αυτήν τη παράγραφο θα παρουσιάσουμε τις δύο περιπτώσεις για τις οποίες έχουμε απάντηση, και μάλιστα αρνητική. Ενδιαφέρον είναι το γεγονός ότι και οι δύο περιπτώσεις αφορούν συνεκτική ανίχνευση.

Θεώρημα 3.3.1 (Boting Yang, Danny Dyer, Brian Alspach [48]). *Έστω W το γράφημα του Σχήματος 3.1, στο οποίο κάθε κύκλος με τον αριθμό i , αναπαριστά την κλίκα K_i , και οι διπλές γραμμές μεταξύ των κλικών K_i και K_j συμβολίζουν ένα τέλειο ταίριασμα μεταξύ των κορυφών των δύο κλικών, αν $i = j$, ή μεταξύ της K_i και ενός υπογραφήματος της K_j , αν $i < j$. Για το γράφημα αυτό ισχύει ότι $\mathbf{cs}(W) = 281$ ενώ $\mathbf{mcs}(W) = 290$.*



Σχήμα 3.1: Το γράφημα W .

Το αντιπαράδειγμα του προηγούμενου θεωρήματος, αποδεικνύει ότι η συνεκτική μικτή ανίχνευση δεν είναι μονότονη. Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι το κατά πόσο

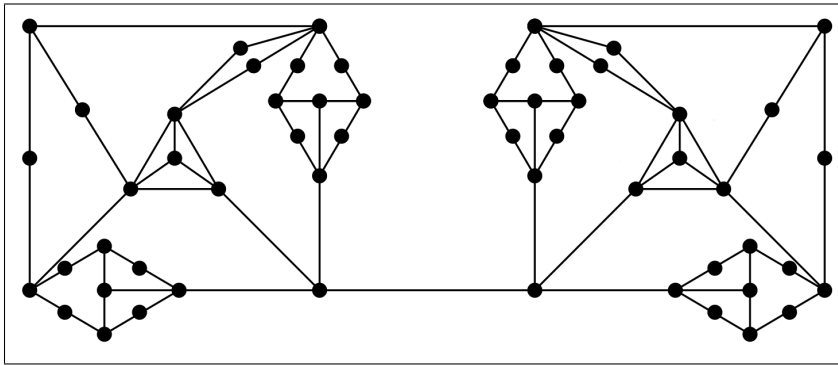
ισχύει η μονοτονία αυτού του τύπου ανίχνευσης, για περιορισμένες κλάσεις γραφημάτων.

Θεώρημα 3.3.2 (Barière, Flocchini, Fomin, Fraigniaud, Nisse, Santoro, Thilikos [5]). Για κάθε δέντρο T ισχύει ότι $\mathbf{cs}(T) = \mathbf{mcs}(T)$.

Το δεύτερο αρνητικό αποτέλεσμα ήρθε δύο χρόνια αργότερα, το 2006.

Θεώρημα 3.3.3 (Pierre Fraigniaud, Nicolas Nisse [27]). Για κάθε $k \geq 4$, υπάρχει γράφημα G τέτοιο ώστε $\mathbf{cvans}(G) = 4k + 1$ και $\mathbf{mcvans}(G) = 4k + 2$.

Παράδειγμα 3.3.1. Το γράφημα G του Σχήματος 3.2 έχει $\mathbf{cvans}(G) = 4$ και $\mathbf{mcvans}(G) = 5$.



Σχήμα 3.2: Παράδειγμα γραφήματος στο οποίο η μη-μονοτονία «βοηθάει» τους ανιχνευτές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

Όπως έχουμε ήδη πει, σε αρκετές εφαρμογές της ανίχνευσης γραφημάτων, οι συνθήκες επιβάλλουν τη συνεκτικότητα του καθαρού τμήματος του γραφήματος. Αυτό ώθησε τους ερευνητές στο να ορίσουμε τους συνεκτικούς τύπους ανίχνευσης, και τους αντίστοιχους αριθμούς που εκφράζουν το ελάχιστο πλήθος των απαραίτητων, για την σύλληψη του φυγά, ανιχνευτών. Το επόμενο βήμα ήταν η σύγκριση των αριθμών αυτών με τους αντίστοιχους αριθμούς της μη-συνεκτικής ανίχνευσης, ούτως ώστε να υπολογισθεί το επιπλέον κόστος που επιφέρουν οι συνεκτικές στρατηγικές.

Για ένα γράφημα G , η ανισότητα:

$$\#(G) \leq \mathbf{c}\#(G),$$

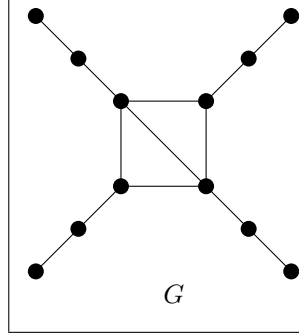
όπου $\# \in \{\mathbf{s}, \mathbf{ns}, \mathbf{ms}, \mathbf{vans}, \mathbf{vlms}\}$, προκύπτει άμεσα, και είναι αρκετά εύκολο να κατασκευάσει κανείς, για κάθε έναν από αυτούς τους τύπους ανίχνευσης, γραφήματα για τα οποία η ανισότητα είναι σφιχτή (Παράδειγμα 2.3.1). Για να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε αυτό που στη βιβλιογραφία ονομάστηκε το *Τίμημα της Συνεκτικότητας* (*Price of Connectivity*) [5], θα χρειαστεί να ορίσουμε την ποσότητα που θα το μετράει.

Ορισμός 4.0.1. Έστω γράφημα G . Για $\# \in \{\mathbf{s}, \mathbf{ns}, \mathbf{ms}, \mathbf{vans}, \mathbf{vlms}\}$ ορίζουμε την ποσότητα:

$$\alpha_{\#}(G) = \frac{\mathbf{c}\#(G)}{\#(G)}$$

Παράδειγμα 4.0.2. Για το γράφημα του Σχήματος 4.1 έχουμε $\alpha_{\mathbf{ms}}(G) = 1, 5$.

Όπως είναι αναμενόμενο, δεν μας ενδιαφέρει να μετρήσουμε το τίμημα της συνεκτικότητας για μεμονωμένα γραφήματα αλλά για ολόκληρες κλάσεις γραφημάτων με συγκεκριμένες ιδιότητες, ή ακόμα, για την κλάση $\mathcal{G}$ όλων των γραφημάτων. Το πρόβλημα αυτό παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον για όλους τους τύπους ανίχνευσης, αλλά δυστυχώς μοιάζει να είναι πολύ δύσκολο καθώς οι ερευνητές έχουν, για τις περισσότερες κλάσεις γραφημάτων, μόνο ελάχιστες ενδείξεις και ακόμα λιγότερες απαντήσεις.



Σχήμα 4.1: Το γράφημα G επιδέχεται στρατηγική μικτής ανίχνευσης που χρησιμοποιεί 2 ανιχνευτές. Παρατηρούμε όμως ότι δεν υπάρχει πλήρης συνεκτική στρατηγική μικτής ανίχνευσης για το G , που να χρησιμοποιεί λιγότερους από 3 ανιχνευτές.

4.1 Το τίμημα της συνεκτικότητας για την ανίχνευση ακμών

Η πρώτη εργασία που αφορούσε αποκλειστικά τη συνεκτική ανίχνευση, δημοσιεύτηκε το 2012, και ήταν η εργασία των Lali Barrière, Paola Flocchini, Fedor V. Fomin, Pierre Fraigniaud, Nicolas Nisse, Nicola Santoro, και Δημήτριο Μ. Θηλυκό [5, 19], στην οποία αναφέρθηκε για πρώτη φορά ο όρος Τίμημα της Συνεκτικότητας. Τα δύο βασικά αποτελέσματα αυτής της εργασίας είναι τα ακόλουθα.

Θεώρημα 4.1.1 (Barrière, Flocchini, Fomin, Fraigniaud, Nisse, Santoro, Thilikos [5, 19]). *Για κάθε γράφημα G , με n το πλήθος κορυφές, ισχύει ότι $\alpha_s(G) = O(\log n)$.*

Θεώρημα 4.1.2 (Barrière, Flocchini, Fomin, Fraigniaud, Nisse, Santoro, Thilikos [5, 19]). *Για κάθε δέντρο T , που δεν αποτελεί μονοπάτι, ισχύει η παρακάτω ανισότητα:*

$$s(T) \leq cs(T) \leq 2s(T) - 2$$

Η παραπάνω ανισότητα δίνει το εξής φράγμα για το Τίμημα της Συνεκτικότητας των δεντρών:

$$\text{Για κάθε δέντρο } T, \alpha_s(T) < 2$$

Είναι εύκολο διαισθητικά να καταλάβουμε ότι η ανίχνευση γραφημάτων εμπεριέχει την έννοια της κατεύθυνσης πάνω σε έναν νοητό άξονα του γραφήματος την οποία θα πρέπει να ακολουθήσει μία στρατηγική ανίχνευσης ώστε να είναι βέλτιστη. Οι κλασικοί τύποι ανίχνευσης επιτρέπουν τις στρατηγικές ανίχνευσης που καθαρίζουν το γράφημα με συμμετρικό τρόπο, δηλαδή που ακολουθούν και τις δύο κατευθύνσεις του άξονα αυτού ταυτόχρονα. Σε μια συνεκτική στρατηγική ανίχνευσης όμως, για να διατηρηθεί η συνεκτικότητα του γραφήματος που ενάγουν οι ακμές κορυφές, θα πρέπει να επιλέγει μόνο μία εκ των δύο κατευθύνσεων, γεγονός που δρα περιοριστικά. Έπειτα από τη παρατήρηση του φαινομένου αυτού, οι ερευνητές οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι το Τίμημα της Συνεκτικότητας όσο αυξάνεται το μέγεθος του γραφήματος θα πρέπει να τείνει στον αριθμό 2.

Εικασία 4.1.1 (Barière, Flocchini, Fomin, Fraigniaud, Nisse, Santoro, Thilikos [5, 19]).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{ \alpha_s(G) \mid G \text{ γράφημα με } n \text{ κορυφές} \} = 2$$

Ακόμα ισχυρότερες ενδείξεις για την αλήθεια της Εικασίας 4.1.1 δόθηκαν από το Θεώρημα 4.1.2. Η επιβεβαίωσή της έγινε το 2012 από τον Dariusz Dereniowski [6]. Περισσότερες λεπτομέρειες θα δοθούν στο Κεφάλαιο 6.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΝΟΛΑ ΠΑΡΕΜΠΟΔΙΣΗΣ

Προτού περάσουμε στο κυρίως θέμα αυτού του κεφαλαίου, πρέπει να οριστικοποιήσουμε την ορολογία που θα χρησιμοποιήσουμε. Συνεπώς θα αρχίσουμε με τους απαραίτητους ορισμούς.

5.1 Σχέσεις μεταξύ γραφημάτων και μερικές διατάξεις

Έστω $G = (V, E)$ γράφημα, $u \in V$, $e = \{x, y\} \in E$ και $u_{xy} \notin V$. Μπορούν να οριστούν πολλές πράξεις που μετασχηματίζουν το G , όμως για τους σκοπούς της εργασίας αυτής, θα περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας στις ακόλουθες τρεις πράξεις, που το μετασχηματίζουν στο γράφημα:

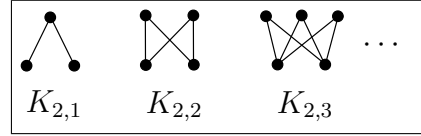
1. $G \setminus u = (V \setminus \{u\}, \{\{u_1, u_2\} \in E \mid u_1, u_2 \neq u\})$. Η πράξη αυτή ονομάζεται *αφαίρεση της κορυφής u* .
2. $G \setminus e = (V, E \setminus \{e\})$. Η πράξη αυτή ονομάζεται *αφαίρεση της ακμής e* .
3. $G/e = (V \setminus \{x, y\} \cup \{u_{x,y}\}, \{\{u_1, u_2\} \in E \mid u_1, u_2 \notin \{x, y\}\} \cup \{\{u_{x,y}, v\} \mid v \in N_G(x) \cup N_G(y) \setminus \{x, y\}\})$. Η πράξη αυτή ονομάζεται *σύνθλιψη της ακμής e στην κορυφή $u_{x,y}$* .

Έστω δύο γραφήματα H και G . Το H θα καλείται:

- *Υπογράφημα (subgraph)* του G , αν προκύπτει από το G μετά από μια πεπερασμένη ακολουθία αφαιρέσεων κορυφών ή ακμών. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $H \leq G$.
- *Ελάσσον υπογράφημα (minor)* του G , αν προκύπτει από το G μετά από μια πεπερασμένη ακολουθία αφαιρέσεων κορυφών ή ακμών και συνθλίψεων ακμών. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $H \preceq G$.
- *Σύνθλιψη (contraction)* του G , αν προκύπτει από το G μετά από μια πεπερασμένη ακολουθία συνθλίψεων ακμών. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $H \trianglelefteq G$.

Παρατηρούμε ότι οι σχέσεις $\leq$, $\preceq$, $\trianglelefteq$ αποτελούν σχέσεις μερικής διάταξης επί του συνόλου $\mathcal{G}$ όλων των γραφημάτων, καθώς δύο γραφήματα μπορεί να μην είναι συγκρίσιμα ως προς κάποια σχέση. Παρατηρούμε επίσης ότι, αν ισχύει ότι $\leq G$ ή $H \trianglelefteq G$, τότε θα ισχύει επίσης ότι $H \preceq G$, χωρίς να συμβαίνει όμως το αντίστροφο.

Παράδειγμα 5.1.1. Για τη κλάση γραφημάτων $\mathcal{C} = \{K_{2,i} \mid i = 1, 2, \dots\}$ του Σχήματος 5.1, ισχύει ότι $K_{2,i} \leq K_{2,j}$, και κατ' επέκταση $K_{2,i} \preceq K_{2,j}$, για $i \leq j$, ενώ $K_{2,i} \not\trianglelefteq K_{2,j}$ για οποιουδήποτε φυσικούς i, j .



Σχήμα 5.1: Η κλάση γραφημάτων $\mathcal{C} = \{K_{2,i} \mid i = 1, 2, \dots\}$.

Ορισμός 5.1.1. Έστω μία κλάση γραφημάτων $\mathcal{C}$. Η $\mathcal{C}$ είναι *κλειστή ως προς τη σχέση* $\triangleleft \in \{\leq, \preceq, \trianglelefteq\}$ αν και μόνο αν:

$$H \triangleleft G \text{ και } G \in \mathcal{C}, \text{ συνεπάγεται ότι } H \in \mathcal{C}$$

Ορισμός 5.1.2. Έστω $\triangleleft$ μια μερική διάταξη των γραφημάτων μιας κλάσης $\mathcal{C}$. Η $\triangleleft$ είναι *καλή-μερική-διάταξη* (*well-quasi-order*) των γραφημάτων της $\mathcal{C}$ αν και μόνο αν για κάθε άπειρη ακολουθία $G_1, G_2, \dots$ γραφημάτων της $\mathcal{C}$, υπάρχουν δύο γραφήματα G_i, G_j τέτοια ώστε $G_i \triangleleft G_j$. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε επίσης ότι η $\mathcal{C}$ είναι *καλώς-μερικά-διατεταγμένη* ως προς την $\triangleleft$.

Ορισμός 5.1.3. Έστω κλάση γραφημάτων $\mathcal{C}$. Συμβολίζουμε με $\mathbf{obs}_{\triangleleft}(\mathcal{C})$ το σύνολο των ελαχιστικών ως προς τη σχέση $\triangleleft$ γραφημάτων της κλάσης $\mathcal{G} \setminus \mathcal{C}$. Το $\mathbf{obs}_{\triangleleft}(\mathcal{C})$ καλείται *σύνολο παρεμπόδισης* (*obstruction set*) για την $\mathcal{C}$ ως προς την σχέση $\triangleleft$.

Παράδειγμα 5.1.2.

1. Έστω $\mathcal{T}$ η κλάση των δέντρων. Τότε $\mathbf{obs}_{\triangleleft}(\mathcal{T}) = \{K_3\}$, για $\triangleleft \in \{\leq, \preceq, \trianglelefteq\}$.
2. Έστω $\mathcal{P}$ η κλάση των επίπεδων γραφημάτων. Τότε $\mathbf{obs}_{\preceq}(\mathcal{P}) = \{K_5, K_{3,3}\}$.¹

Συνδυάζοντας τους παραπάνω ορισμούς, μπορούμε άμεσα να συμπεράνουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.1.1. Έστω μια κλάση γραφημάτων $\mathcal{C}$, και μία σχέση μερικής διάταξης $\triangleleft$. Αν η $\mathcal{G} \setminus \mathcal{C}$ είναι καλώς-μερικά-διατεταγμένη ως προς την $\triangleleft$ τότε το σύνολο $\mathbf{obs}_{\triangleleft}(\mathcal{C})$ είναι πεπερασμένο.

Ας θεωρήσουμε μια κλάση γραφημάτων $\mathcal{C}$ και ας παρατηρήσουμε πως, αν η $\mathcal{C}$ είναι κλειστή ως προς τη σχέση $\triangleleft$ και η $\mathcal{G} \setminus \mathcal{C}$ καλώς-μερικά-διατεταγμένη ως προς την $\triangleleft$ τότε θα συμβαίνουν τα ακόλουθα:

¹ Αυτός ο ισχυρισμός είναι γνωστός ως *Θεώρημα του Wagner*, και αποδείχθηκε από τον Klaus Wagner το 1937. Η απόδειξή του στηριζόταν σε προγενέστερο αποτέλεσμα του 1930, που αποδίδεται στον Kazimierz Kuratowski, αν και πρώτα αποδείχθηκε από τον Lev Pontryagin σε αδημοσίευτες εργασίες του.

- το σύνολο $\mathbf{obs}_{\blacktriangleleft}(\mathcal{C})$ είναι πεπερασμένο,
- $G \in \mathcal{C}$ αν και μόνο αν για κάθε $O \in \mathbf{obs}_{\blacktriangleleft}(\mathcal{C})$ ισχύει ότι $O \not\blacktriangleleft G$,

επομένως τα γραφήματα του συνόλου παρεμπόδισης $\mathbf{obs}_{\blacktriangleleft}(\mathcal{C})$ αποτελούν έναν πεπερασμένο χαρακτηρισμό της κλάσης $\mathcal{C}$. Ο χαρακτηρισμός αυτός έχει αλγοριθμικές εφαρμογές, τις οποίες θα αναλύσουμε εκτενώς στο Κεφάλαιο 7.

Στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε τέτοιου είδους χαρακτηρισμούς για τις κλάσεις:

$$\mathcal{C}[\#, k] = \{G \in \mathcal{G} \mid \#(G) \leq k\}$$

όπου $\# \in \{\mathbf{s}, \mathbf{ns}, \mathbf{ms}, \mathbf{cs}, \mathbf{cns}, \mathbf{cms}, \mathbf{mcs}, \mathbf{mcns}, \mathbf{mcms}\}$ και k ένας φυσικός αριθμός.

5.2 Παραδείγματα συνόλων παρεμπόδισης

Ξεκινώντας την παράγραφο αυτή θα δώσουμε ένα Θεώρημα, βασικό για τη συνέχεια.

Θεώρημα 5.2.1. *Για κάθε φυσικό αριθμό $k \geq 1$, οι κλάσεις $\mathcal{C}[\mathbf{s}, k]$, $\mathcal{C}[\mathbf{ns}, k]$, και $\mathcal{C}[\mathbf{ms}, k]$ είναι κλειστές ως προς τη σχέση $\preceq$.*

Η απόδειξη αυτού του Θεωρήματος έχει πολλές τεχνικές λεπτομέρειες, και ως εκ τούτου θα παραληφθεί. Εκτός αυτού, το Θεώρημα 5.2.1 μπορεί να προκύψει μέσω της σχέσης των αριθμών ανίχνευσης με τις παραμέτρους πλάτους, που θα δούμε στη συνέχεια, και την κλειστότητα των παραμέτρων αυτών ως προς την $\preceq$.

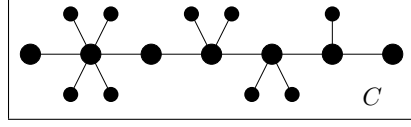
Παρατηρούμε ότι, από το Θεώρημα 5.2.1 προκύπτει ότι οι κλάσεις $\mathcal{C}[\mathbf{s}, k]$, $\mathcal{C}[\mathbf{ns}, k]$, και $\mathcal{C}[\mathbf{ms}, k]$, για $k \geq 1$, είναι κλειστές και ως προς τις σχέσεις $\leq$, $\trianglelefteq$.

Στη συνέχεια της παραγράφου αυτής, θα δούμε μερικά παραδείγματα συνόλων παρεμπόδισης για τις παραπάνω κλάσεις γραφημάτων.

Παράδειγμα 5.2.1.

1. Το σύνολο $\mathbf{obs}_{\preceq}(\mathcal{C}[\mathbf{ns}, 1])$ περιέχει μόνο το γράφημα $(\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$, δηλαδή το γράφημα που αποτελείται από μία ακμή.
2. Εύκολα μπορεί ναδειχθεί ότι $\mathbf{obs}_{\preceq}(\mathcal{C}[\mathbf{ns}, 2]) = \{K_3, T\}$, όπου T το γράφημα του Παραδείγματος 1.3.1.
3. Παρατηρούμε ότι τα σύνολα $\mathbf{obs}_{\preceq}(\mathcal{C}[\mathbf{ns}, k])$, $\mathbf{obs}_{\preceq}(\mathcal{C}[\mathbf{cns}, k])$, και $\mathbf{obs}_{\preceq}(\mathcal{C}[\mathbf{mcns}, k])$, για $k = 1, 2$ είναι μεταξύ τους ίσα.

Ας σταθούμε λίγο στο σύνολο παρεμπόδισης $\mathbf{obs}_{\preceq}(\mathcal{C}[\mathbf{ns}, 2])$ και ας δούμε πως αυτό χαρακτηρίζει τα γραφήματα για τα οποία δύο ανιχνευτές μπορούν να εγγυηθούν την ύπαρξη πλήρους στρατηγικής ανίχνευσης κορυφών. Λόγω του ότι έχουμε αποκλείσει το K_3 ως ελλάσον υπογράφημα, τα γραφήματα αυτά θα πρέπει να είναι δέντρα. Το δέντρο T μας επιβάλει ένα ακόμα περιορισμό για τα γραφήματα αυτά, ο οποίος ίσως δεν είναι τόσο προφανής. Θέλοντας να αποκλείσουμε ως ελλάσον υπογράφημα το T , οδηγούμαστε σε δέντρα που αποτελούνται από ένα κεντρικό μονοπάτι, και όλες οι κορυφές τους βρίσκονται σε απόσταση 1 από αυτό, δηλαδή είτε ανήκουν στο μονοπάτι, είτε συνδέονται, μέσω ακμής, με κορυφή του μονοπατιού. Τα δέντρα αυτά, λόγω του ιδιαίτερου σχήματός τους, έχουν ονομαστεί *σαρανταποδαρούσες (caterpillars)*.



Σχήμα 5.2: Παράδειγμα σαρανταποδαρούσας.

Παράδειγμα 5.2.2.

1. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $\mathbf{obs}_{\preceq}(C[s, 1]) = \{K_3, K_{1,3}\}$.
2. Το ίδιο σύνολο αποτελεί σύνολο παρεμπόδισης για την κλάση $C[ms, 1]$.
3. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, τα σύνολα $\mathbf{obs}_{\preceq}(C[s, 1])$, $\mathbf{obs}_{\preceq}(C[cs, 1])$, $\mathbf{obs}_{\preceq}(C[mcs, 1])$, $\mathbf{obs}_{\preceq}(C[ms, 1])$, $\mathbf{obs}_{\preceq}(C[cms, 1])$, και $\mathbf{obs}_{\preceq}(C[mcms, 1])$ είναι μεταξύ τους ίσα.

Παρατηρούμε ότι, για μια κλάση γραφημάτων C , ισχύουν τα ακόλουθα:

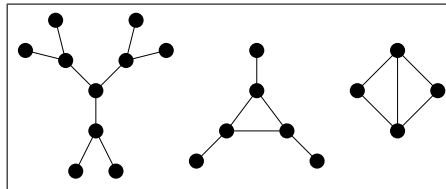
$$\mathbf{obs}_{\preceq}(C) \subseteq \mathbf{obs}_{\leq}(C), \text{ και } \mathbf{obs}_{\preceq}(C) \subseteq \mathbf{obs}_{\trianglelefteq}(C)$$

επομένως είναι εύλογο να ξεκινήσουμε ψάχνοντας σύνολα παρεμπόδισης ως προς τη σχέση ελασσόνων υπογραφημάτων, καθώς τα σύνολα αυτά έχουν μικρότερο μέγεθος. Εξαιτίας του γεγονότος αυτού (και των αποτελεσμάτων που θα δούμε στο Κεφάλαιο 7 τα οποία μας εγγυούνται ότι για κάθε κλάση γραφημάτων που είναι κλειστή ως προς την $\preceq$, τα σύνολα παρεμπόδισής της είναι πεπερασμένα), οι ερευνητές στόχευσαν κυρίως στην ανεύρεση συνόλων παρεμπόδισης ως προς την $\preceq$.

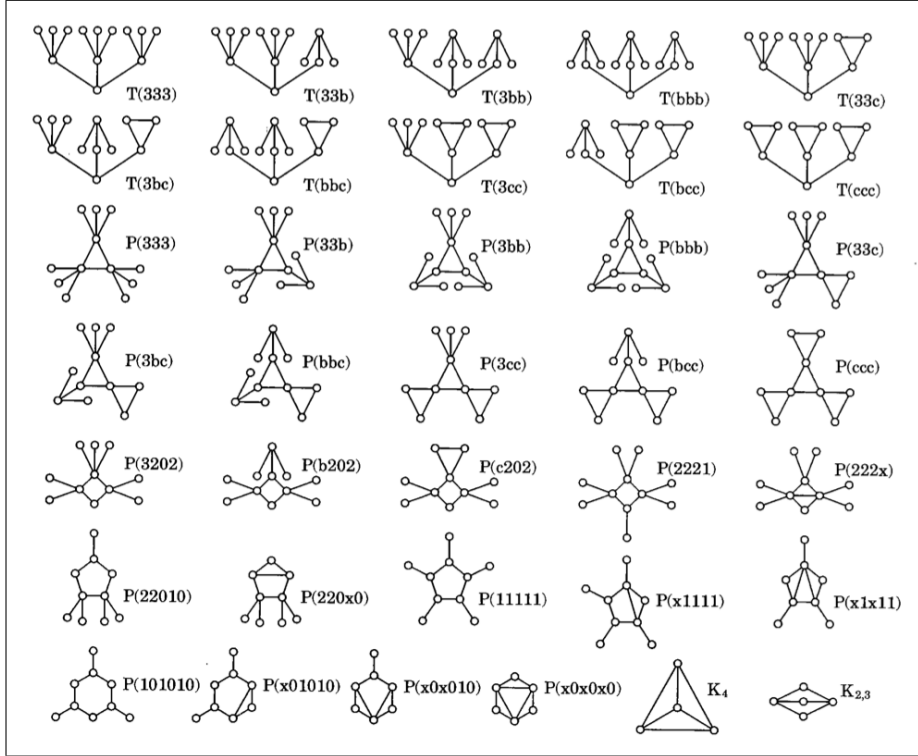
Παράδειγμα 5.2.3. Τα σύνολα παρεμπόδισης που είδαμε, αποτελούν σύνολα παρεμπόδισης για αυτές τις κλάσεις και ως προς τις σχέσεις $\leq$ και $\trianglelefteq$.

Πέρα από αυτά τα τετριμμένα σύνολα παρεμπόδισης, ελάχιστα άλλα είναι γνωστά. Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο που ακολουθεί, στις περισσότερες περιπτώσεις ο αριθμός ανίχνευσης ενός γραφήματος, ανάλογα με τον τύπο της ανίχνευσης, συνδέεται με αντίστοιχη παράμετρο-πλάτους. Τα δύο από τα τρία σύνολα παρεμπόδισης που έχουν καταγραφεί στη βιβλιογραφία, έχουν δοθεί για τέτοιου είδους παραμέτρους, συγκεκριμένα για το πλάτος-μονοπατιού και το γνήσιο-πλάτος-μονοπατιού. Περισσότερα επ' αυτού θα δούμε στο κεφάλαιο που ακολουθεί.

Θεώρημα 5.2.2 (Megiddo, Hakimi, Garey, Johnson, Papadimitriou [35]). *Το σύνολο παρεμπόδισης $\mathbf{obs}_{\preceq}(C[s, 2])$ αποτελείται από τα 3 γραφήματα του Σχήματος 5.3.*


 Σχήμα 5.3: Το σύνολο $\mathbf{obs}_{\preceq}(C[s, 2])$.

Θεώρημα 5.2.3 (A. Takahashi, S. Ueno, and Y. Kajitani [44]). Το σύνολο παρεμπόδισης $\mathbf{obs}_{\preceq}(\mathcal{C}[\mathbf{ms}, 2])$ αποτελείται από τα 36 γραφήματα του Σχήματος 5.4.



Σχήμα 5.4: Το σύνολο $\mathbf{obs}_{\preceq}(\mathcal{C}[\mathbf{ms}, 2])$.

Θεώρημα 5.2.4 (Nancy G. Kinnersley, Michael A. Langston [46]). Το σύνολο παρεμπόδισης $\mathbf{obs}_{\preceq}(\mathcal{C}[\mathbf{ns}, 3])$ αποτελείται από 110 γραφήματα.

Το μέγεθος του $\mathbf{obs}_{\preceq}(\mathcal{C}[\mathbf{ns}, 3])$ το καθιστά απαγορευτικό για την παρουσίασή του στα πλαίσια της εργασίας αυτής. Απεικόνιση των γραφημάτων του υπάρχει στο [46].

Αυτά είναι τα μόνα ως τώρα γνωστά σύνολα παρεμπόδισης για αριθμούς αντίχνευσης. Στο Κεφάλαιο 8 θα παρουσιάσουμε, εν συντομία, τις κεντρικές ιδέες της απόδειξης της ορθότητας για το σύνολο παρεμπόδισης $\mathbf{obs}_{\preceq}(\mathcal{C}[\mathbf{cms}, 2])$, που αποτελείται από 174 γραφήματα [49].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΠΛΑΤΟΥΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τη στενή σχέση των αριθμών ανίχνευσης ενός γραφήματος με τις *παραμέτρους πλάτους*. Η συσχέτιση αυτή προσέδωσε μεγαλύτερο κύρος στην ανίχνευση γραφημάτων και πρόσφερε περαιτέρω κίνητρα στους ερευνητές να ασχοληθούν με τον κλάδο αυτό.

Εκτός αυτού, η ισοδυναμία μεταξύ αριθμών ανίχνευσης και παραμέτρων πλάτους, βοήθησε τους επιστήμονες να αντιμετωπίσουν τις τεχνικές λεπτομέρειες τον αποδείξεων, παρακάμπτοντας τους δύσκολους ορισμούς των τύπων ανίχνευσης. Ενδεικτικό είναι ότι τα περισσότερα αποτελέσματα στη βιβλιογραφία αναφέρονται σε παραμέτρους πλάτους και όχι στην ανίχνευση γραφημάτων.

Θα χρειαστεί να δώσουμε αρκετούς ορισμούς. Για να βοηθήσουμε το περισσότερο δυνατό στην κατανόηση, θα τους πλαισιώσουμε με ενδεικτικά παραδείγματα. Στο τέλος του κεφαλαίου, θα ανακεφαλαιώσουμε τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν, στον Πίνακα 6.1.

Ξεκινάμε με έναν γενικό ορισμό.

Ορισμός 6.0.1. *Παράμετρος γραφημάτων (graph parameter)* αποτελεί κάθε συνάρτηση $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 6.0.4.

1. Το πλήθος κορυφών (ακμών) ενός γραφήματος $n(G)$ ($m(G)$ αντίστοιχα) ενός γραφήματος, αποτελεί παράμετρο με $n(G) = |V(G)|$ ($m(G) = |E(G)|$ αντίστοιχα).
2. Ο μέγιστος βαθμός $\Delta(G)$ ενός γραφήματος G αποτελεί παράμετρο με $\Delta(G) = \max\{\deg_G(u) \mid u \in V\}$.

6.1 Πλάτος-μονοπατιού

Το *Πλάτος-μονοπατιού* είναι η παράμετρος που, διαισθητικά, «μετράει» τον βαθμό τοπολογικής ομοιότητας του γραφήματος με ένα μονοπάτι υπό την ακόλουθη έννοια:

όσο μεγαλύτερη είναι η παράμετρος αυτή, για ένα γράφημα G , τόσο το G θα απέχει από τη «δομή» ενός μονοπατιού. Το τι εννοούμε με τον όρο «δομή» ενός μονοπατιού, θα αποσαφηνιστεί όταν δοθεί ο ορισμός της παραμέτρου.

Όπως είναι φυσικό, τα μονοπάτια έχουν την ελάχιστη τιμή πλάτους-μονοπατιού, που είναι 1, αλλά δεν είναι τα μόνα γραφήματα με αυτό το πλάτος-μονοπατιού.

Το πλάτος-μονοπατιού ορίστηκε το 1983 στην πρώτη εργασία [9] της «επικής» σειράς εργασιών των Neil Robertson και Paul Seymour, με τον γενικό τίτλο Graph Minors¹.

Ορισμός 6.1.1. Έστω γράφημα $G = (V, E)$. Μία ακολουθία $\langle X_1, \dots, X_r \rangle$ υποσυνόλων του V , αποτελεί *αποσύνθεση-μονοπατιού* (*path-decomposition*) αν πληροί τους ακόλουθους περιορισμούς:

$$(W1) \bigcup_{i=1, \dots, r} X_i = V$$

$$(W2) \text{ Για κάθε ακμή } \{x, y\} \in E, \text{ υπάρχει } i \in \{1, \dots, r\}, \text{ τέτοιο ώστε } \{x, y\} \subseteq X_i$$

$$(W3) \text{ Για } 1 \leq i \leq j \leq k \leq r, \text{ ισχύει ότι } X_i \cap X_k \subseteq X_j$$

Ονομάζουμε *πλάτος-μονοπατιού* (*path-width*) του G τον ελάχιστο φυσικό αριθμό k για τον οποίο υπάρχει αποσύνθεση-μονοπατιού $\langle X_1, \dots, X_r \rangle$, τέτοια ώστε $\max\{|X_i| \mid i = 1, \dots, r\} = k - 1$. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\mathbf{pw}(G) = k$. Θα αναφερόμαστε στην ποσότητα $\max\{|X_i| \mid i = 1, \dots, r\}$ ως *πλάτος της αποσύνθεσης*.

Παράδειγμα 6.1.1.

1. Έστω μονοπάτι P μήκους n και έστω $e_1, \dots, e_n$ μία αρίθμηση των ακμών του, ξεκινώντας από την αριστερότερη και καταλήγοντας στην δεξιότερη. Θεωρούμε τις ακμές ως σύνολα κορυφών, έστω $X_i = e_i$, $i = 1, \dots, n$, και παρατηρούμε ότι αποτελούν μία αποσύνθεση-μονοπατιού, επομένως $\mathbf{pw}(P) = 1$.
2. Θεωρούμε μία σαρανταποδαρούσα, για παράδειγμα τη C του Σχήματος 5.2. Αριθμούμε τις ακμές της σύμφωνα με τον ακόλουθο τρόπο:
 - Ξεκινάμε με μία βοηθητική αρίθμηση των ακμών του κεντρικού μονοπατιού, από την αριστερότερη ως την δεξιότερη.
 - Έστω μία κορυφή u με βαθμό μεγαλύτερο του δύο. Παρεμβάλουμε στην παραπάνω αρίθμηση, ανάμεσα στις δύο ακμές του μονοπατιού που περιέχουν την u , με τυχαία σειρά, τις ακμές εκτός μονοπατιού με άκρο την u .

Παρατηρούμε ότι, θεωρώντας και πάλι τις ακμές ως σύνολα κορυφών, παίρνουμε μία αποσύνθεση-μονοπατιού, με πληθάριθμο των X_i ίσο με 2, συνεπώς $\mathbf{pw}(C) = 1$.

Θεώρημα 6.1.1. Για ένα γράφημα G , ισχύει ότι $\mathbf{ns}(G) = \mathbf{pw}(G) + 1$.

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος προκύπτει άμεσα συνδυάζοντας δύο αποτελέσματα που αφορούν το *πάχος-διαστήματος* (*interval-thickness*), το πρώτο των Κυρούση, Παπαδημητρίου [30], και το δεύτερο του Rolf Möhring [36].

¹Στόχος της ήταν η απόδειξη της περιφημής εικασίας του Klaus Wagner: Σε κάθε άπειρη ακολουθία γραφημάτων υπάρχουν τουλάχιστον δύο γραφήματα H και G τέτοια ώστε $H \preceq G$. Περισσότερες λεπτομέρειες υπάρχουν στο Κεφάλαιο 7

Ο παραπάνω συσχετισμός ανίχνευσης και παραμέτρου πλάτους, ήταν ο πρώτος που εμφανίστηκε στη βιβλιογραφία, και ήταν κάπως απρόσμενος για τους ερευνητές του χώρου. Στη συνέχεια βέβαια εμφανίστηκαν αρκετοί άλλοι συσχετισμοί.

6.1.1 Γνήσιο-πλάτος-μονοπατιού

Το Γνήσιο-πλάτος-μονοπατιού (*proper-path-width*) ορίστηκε από τους Atsushi Takahashi, Shuichi Ueno και Yoji Kajitani [45], οι οποίοι επέβαλαν έναν ακόμα περιορισμό στις αποσυνθέσεις-μονοπατιού.

Ορισμός 6.1.2. Έστω γράφημα G και αποσύνθεση-μονοπατιού $\mathcal{P} = \langle X_1, \dots, X_r \rangle$, με πλάτος k . Η $\mathcal{P}$ είναι γνήσια-αποσύνθεση-μονοπατιού (*proper-path-decomposition*) αν ικανοποιεί τον περιορισμό:

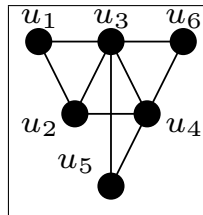
- (W4) Για κάθε i, j, k τέτοια ώστε $1 \leq i < j < k \leq r$, όπου κανένα από τα X_i, X_j, X_k δεν είναι υποσύνολο των άλλων δύο, ισχύει ότι $|X_i \cap X_j \cap X_k| \leq k - 1$.

Τον ελάχιστο φυσικό αριθμό k για τον οποίο υπάρχει γνήσια-αποσύνθεση-μονοπατιού, με πλάτος $k - 1$, τον καλούμε γνήσιο-πλάτος-μονοπατιού (*proper-path-width*) του G , και τον συμβολίζουμε $\mathbf{ppw}(G)$.

Η διαφορά του πλάτους-μονοπατιού από το γνήσιο πλάτος μονοπατιού δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από 1, όπως φαίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6.1.2 (A. Takahashi, S. Ueno, Y. Kajitani [43]). Για ένα γράφημα G , ισχύουν οι ανισότητες $\mathbf{pw}(G) \leq \mathbf{ppw}(G) \leq \mathbf{pw}(G) + 1$.

Παράδειγμα 6.1.2. Για το γράφημα G που ακολουθεί, το πλάτος-μονοπατιού είναι 2, ενώ το γνήσιο-πλάτος-μονοπατιού είναι 3.



Σχήμα 6.1: Η αποσύνθεση-μονοπατιού που αποτελείται από τα σύνολα $\{u_1, u_2, u_3\}$, $\{u_2, u_3, u_4\}$, $\{u_3, u_4, u_5\}$, και $\{u_3, u_4, u_6\}$ δεν είναι γνήσια.

Αποδείχθηκε στην εργασία των Takahashi, Ueno και Kajitani ότι η παραλλαγή αυτή της παραμέτρου του πλάτους-μονοπατιού ισοδυναμεί με τον αριθμό μικτής ανίχνευσης ενός γραφήματος.

Θεώρημα 6.1.3 (A. Takahashi, S. Ueno, Y. Kajitani [43]). Για ένα γράφημα G , ισχύει ότι $\mathbf{ms}(G) = \mathbf{ppw}(G)$.

6.1.2 Συνεκτικό-πλάτος-μονοπατιού

Έστω γράφημα G , και αποσύνθεση-μονοπατιού $\mathcal{P} = \langle X_1, \dots, X_r \rangle$. Αν αντί για τον περιορισμό (W4) απαιτήσουμε σε κάθε σημείο της $\mathcal{P}$, το γράφημα που ενάγουν οι κορυφές των συνόλων πριν από αυτό να είναι συνεκτικό, θα οδηγηθούμε στο *συνεκτικό-πλάτος-μονοπατιού* (*connected-path-width*). Πιο τυπικά, περιοριζόμαστε σε αποσυνθέσεις-μονοπατιού που ικανοποιούν τον περιορισμό:

(W5) Για κάθε $i \in \{1, \dots, r\}$ το γράφημα $G[X_1 \cup \dots \cup X_i]$ είναι συνεκτικό

Τις αποσυνθέσεις που ικανοποιούν αυτούς τους περιορισμούς, θα τις αποκαλούμε *συνεκτικές-αποσυνθέσεις-μονοπατιού* (*connected-path-decompositions*), και το συνεκτικό-πλάτος-μονοπατιού του G , συμβολικά $\mathbf{cpw}(G)$, θα οριστεί να είναι το ελάχιστο k για το οποίο υπάρχει συνεκτική-αποσύνθεση-μονοπατιού, με πλάτος $k - 1$.

Παράδειγμα 6.1.3. Η αποσύνθεση-μονοπατιού στη λεζάντα του Σχήματος 6.1 είναι συνεκτική.

Η παράμετρος αυτή εισήχθη από τους Barrière, Flocchini, Fomin, Fraigniaud, Nisse, Santoro, και Θηλυκό [5], και ισοδυναμεί με τη συνεκτική ανίχνευση κορυφών. Το 2012, ο Dariusz Dereniowski απέδειξε την ακόλουθη σχέση μεταξύ συνεκτικού-πλάτους-μονοπατιού και απλού πλάτους-μονοπατιού.

Θεώρημα 6.1.4 (Dariusz Dereniowski [6]). *Για κάθε γράφημα G , ισχύει $\mathbf{cpw}(G) \leq 2 \cdot \mathbf{pw}(G) + 1$.*

Η απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.4 προκύπτει μέσω ενός αλγορίθμου, που δέχεται ως είσοδο ένα γράφημα G και μια αποσύνθεση-μονοπατιού $\mathcal{P}$ πλάτους k και επιστρέφει μία συνεκτική-αποσύνθεση $\mathcal{C}$ πλάτους $2k + 1$. Μια παραλλαγή αυτού του αλγορίθμου που, με είσοδο την $\mathcal{C}$, κατασκευάζει μία πλήρη μονότονη και συνεκτική στρατηγική ανίχνευσης ακμών που δεν καταναλώνει παραπάνω από $2k + 3$ ανιχνευτές, αποδεικνύει την ανισότητα $\mathbf{mcs}(G) \leq \mathbf{cpw}(G) + 2$. Η ανισότητα αυτή οδηγεί στο ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 6.1.5 (Dariusz Dereniowski [6]). *Έστω συνεκτικό γράφημα G και στρατηγική ανίχνευσης ακμών $\mathcal{S}$ που χρησιμοποιεί k ανιχνευτές. Υπάρχει αλγόριθμος που με είσοδο το G και την $\mathcal{S}$, επιστρέφει μία μονότονη και συνεκτική ανίχνευση ακμών που χρησιμοποιεί το πολύ $2k + 3$ ανιχνευτές.*

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, για κάθε γράφημα G , ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\mathbf{cs}(G) \leq \mathbf{mcs}(G) \leq 2 \cdot \mathbf{s}(G) + 3$$

Αυτή η ανισότητα δίνει θετική απάντηση στην Εικασία 4.1.1 των Barrière, Flocchini, Fomin, Fraigniaud, Nisse, Santoro, και Θηλυκού που διατυπώθηκε στην [5] και [19].

6.2 Δεντροπλάτος

Η παράμετρος του *Δεντροπλάτους* (*treewidth*) ορίστηκε στη δεύτερη εργασία των Graph Minors [10] και όπως θα δούμε επεκτείνει το πλάτος-μονοπατιού σε δενδρικές δομές. Είναι βολικό να σκεφτόμαστε τον ορισμό μίας αποσύνθεσης-μονοπατιού $\langle X_1, \dots, X_r \rangle$, ενός γραφήματος G , ως εξής:

Τοποθετούμε τις κορυφές του G σε «τσάντες» (τα X_i), έτσι ώστε κάθε ακμή του να βρίσκεται μέσα σε μια τσάντα (ο περιορισμός (W2)). Έπειτα, τα σύνολα κορυφών X_i μπορούμε να τα θεωρήσουμε «υπερκορυφές» ενός μονοπατιού, στο οποίο δύο υπερκορυφές X_i, X_j συνδέονται με ακμή αν $|i - j| = 1$ και επιπλέον για κάθε υπερκορυφή X_j που βρίσκεται μεταξύ των X_i και X_k , θα πρέπει να ισχύει ότι $X_i \cap X_k \subseteq X_j$ (ο περιορισμός (W3)).

Το πλάτος-μονοπατιού ισούται με το μέγεθος της μεγαλύτερης τσάντας (πληθάριθμος των συνόλων X_i) μειωμένο κατά ένα.

Αν δοθεί η δυνατότητα, οι υπερκορυφές να μη σχηματίζουν απαραίτητα ένα μονοπάτι, αλλά να μπορούν να σχηματίσουν γενικότερα ένα δέντρο, τότε έχουμε μία *δεντρο-αποσύνθεση* (*tree-decomposition*) του G . Ο αυστηρός ορισμός είναι ο ακόλουθος.

Ορισμός 6.2.1. Έστω γράφημα $G = (V, E)$. Μια δεντρο-αποσύνθεση του G αποτελείται από μια ακολουθία $\langle X_1, \dots, X_r \rangle$ υποσυνόλων του V , και ένα δέντρο T με $V(T) = \{1, \dots, r\}$, τέτοια ώστε:

$$(W1) \bigcup_{i=1, \dots, r} X_i = V$$

$$(W2) \text{ Για κάθε ακμή } \{x, y\} \in E, \text{ υπάρχει } i \in \{1, \dots, r\}, \text{ τέτοιο ώστε } \{x, y\} \subseteq X_i$$

$$(W6) \text{ Για κάθε } i, j, k \in \{1, \dots, r\}, \text{ αν η κορυφή } j \text{ βρίσκεται στο μονοπάτι του } T \text{ που ενώνει την } i \text{ με την } k, \text{ τότε } X_i \cap X_k \subseteq X_j$$

Ονομάζουμε *δεντροπλάτος* (*tree-width*) του G , τον ελάχιστο φυσικό αριθμό k για τον οποίο υπάρχει δεντρο-αποσύνθεση $(\langle X_1, \dots, X_r \rangle, T)$, πλάτους $k - 1$. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\text{tw}(G) = k$.

Παράδειγμα 6.2.1.

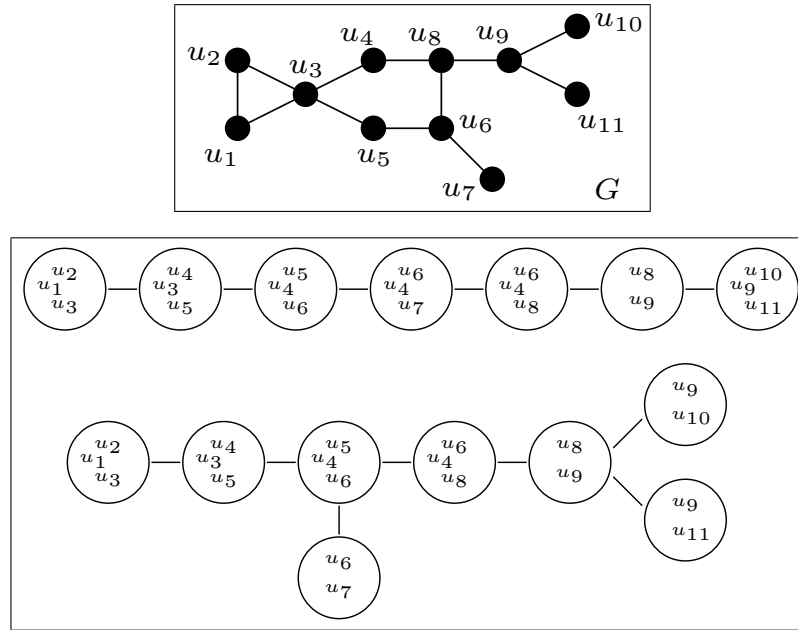
1. Προφανώς τα δέντρα έχουν δεντροπλάτος 1.
2. Το γράφημα G που ακολουθεί έχει $\text{tw}(G) = \text{pw}(G) = 2$.

Οι Δενδρής, Κυρούσης και Θηλυκός, το 1997, απέδειξαν ότι το δεντροπλάτος ενός γραφήματος, αυξημένο κατά ένα, ισούται με τον αριθμό αντίχνευσης κορυφών, όπου ο φυγός είναι αόρατος και τεμπέλης και έχει άπειρη ταχύτητα.

Θεώρημα 6.2.1 (Nick D. Dendris, Lefteris M. Kirousis, Dimitrios M. Thilikos [24]). Για ένα γράφημα G ισχύει ότι $\text{ilns}(G) = \text{tw}(G) + 1$.

6.3 Πλάτος-Εκφυλισμός

Σε αυτή την παράγραφο θα ορίσουμε μία ακόμα παράμετρο πλάτους γραφήματος, γνωστή απλά με την ονομασία *Πλάτος* (*Width*). Πρόκειται για μια παράμετρο που εμφανίζεται πολύ συχνά στη Θεωρία Γραφημάτων, και έχει πολυάριθμα ονόματα, όπως *Εκφυλισμός* (*Degeneracy*), *Αριθμός k -πυρήνα* (*k -core number*), *Συνδετικότητα* (*Linkage*) *Χρωματίζων αριθμός* (*Coloring number*) και ισάριθμους ορισμούς. Στα πλαίσια αυτού του κειμένου, θα δοθεί ένας ορισμός που ακολουθεί το πνεύμα των «αποσυνθέσεων» ενός γραφήματος.



Σχήμα 6.2: Μία δεντροαποσύνθεση και μια αποσύνθεση μονοπατιού του γραφήματος G .

Ορισμός 6.3.1. Έστω γράφημα $G = (V, E)$. Μία ακολουθία $\langle X_1, \dots, X_r \rangle$, υποσυνόλων του V , αποτελεί *αποσύνθεση-πλάτους* (*width-decomposition*) του G αν:

$$(W1) \bigcup_{i=1, \dots, r} X_i = V$$

$$(W7) \text{ Για κάθε ακμή } \{x, y\} \in E, x \in X_{F(y)} \text{ ή } y \in X_{F(x)}, \text{ όπου } F(u) = \min \{i \in \{1, \dots, r\} \mid u \in X_i\}$$

Ονομάζουμε *πλάτος* (*width*) του G , τον ελάχιστο φυσικό αριθμό k για τον οποίο υπάρχει αποσύνθεση-πλάτους $\langle X_1, \dots, X_r \rangle$, με πλάτος αποσύνθεσης $k - 1$. Στην περίπτωση αυτή θα γράφουμε $w(G) = k$.

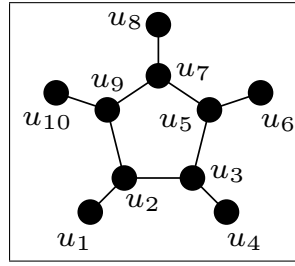
Ο ορισμός αυτός δόθηκε από τους Δενδρή, Κυρούση και Θηλυκό [24], και αποδείχθηκε ισοδύναμος του κλασικού ορισμού που θα παρουσιάσουμε αμέσως.

Ορισμός 6.3.2. Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$, όπου $|V| = n$, και μία ακολουθία των κορυφών του, έστω $L = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$. Καλούμε *πλάτος της κορυφής u στην L* , το πλήθος των γειτόνων της που βρίσκονται πριν από αυτή στην L και *πλάτος της ακολουθίας L* το μέγιστο πλάτος όλων των κορυφών του V . Το πλάτος του G ισούται με το ελάχιστο, ως προς όλες τις ακολουθίες κορυφών, πλάτος ακολουθίας.

Παράδειγμα 6.3.1. Η ακολουθία κορυφών $\langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10} \rangle$, του γραφήματος στο Σχήμα 6.3, έχει πλάτος 2.

Η παράμετρος αυτή αποδείχθηκε ισοδύναμη με τον αριθμό ανίχνευσης κορυφών με άορατο και τεμπέλη φυγά, όπως δηλώνει το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 6.3.1 (Nick D. Dendris, Lefteris M. Kirousis, Dimitrios M. Thilikos [24]). Για ένα γράφημα G ισχύει ότι $\text{ilns}_1(G) = w(G) + 1$.



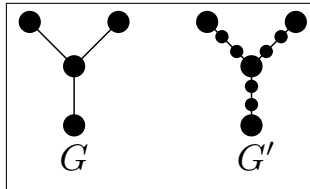
Σχήμα 6.3: Ένα γράφημα με πλάτος, και γραμμικό-πλάτος ίσο με 2.

6.4 Τοπολογικό-ζωνοπλάτος

Το τοπολογικό-ζωνοπλάτος (*topological-bandwidth*) ήταν η πρώτη παράμετρος πλάτους γραφήματος (μαζί με το τομοπλάτος (*cutwidth*)) που συσχετίστηκε με την ανίχνευση γραφημάτων. Ορίστηκε το 1985, από τους Fillia Makedon, Χρήστο Παπαδημητρίου και Ivan Hal Sudborough [33]. Προτού παρουσιάσουμε τον ορισμό τους, θα χρειαστεί να εισάγουμε μερικές καινούριες έννοιες, ξεκινώντας από την έννοια του (απλού) ζωνοπλάτους.

Ορισμός 6.4.1. Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$, με $|V| = n$, και μία ακολουθία $L = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ των κορυφών του. Ορίζουμε την ποσότητα $\mathbf{b}(G, L) = \max\{|i - j| \mid \{u_i, u_j\} \in E\}$, και καλούμε ζωνοπλάτος (*bandwidth*) του G το ελάχιστο k για το οποίο υπάρχει ακολουθία κορυφών L , με $\mathbf{b}(G, L) = k$. Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε $\mathbf{b}(G) = k$.

Θεωρήστε ένα γράφημα $G = (V, E)$. Το γράφημα G' είναι ομοιομορφική εικόνα του G (*homeomorphic image*), αν προκύπτει από το G ύστερα από την αντικατάσταση ακμών του E , με μονοπάτια οποιουδήποτε μήκους (Σχήμα 6.4).



Σχήμα 6.4: Ένα γράφημα και μία ομοιομορφική εικόνα του.

Ορισμός 6.4.2. Έστω γράφημα G . Καλούμε τοπολογικό-ζωνοπλάτος του G την ποσότητα $\mathbf{tb}(G) = \min\{\mathbf{b}(G') \mid G' \text{ ομοιομορφική εικόνα του } G\}$.

Παράδειγμα 6.4.1. Το γράφημα του Σχήματος 6.4 έχει $\mathbf{tb}(G) = 2$.

Θεώρημα 6.4.1 (F. S. Makedon, C. H. Papadimitriou, I. H. Sudborough [33]). Για ένα γράφημα G ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) $\mathbf{ns}(G) \leq \mathbf{tb}(G)$
- (ii) Αν το G δεν έχει κορυφή με βαθμό μεγαλύτερο του 3, τότε $\mathbf{ns}(G) = \mathbf{tb}(G)$.

6.5 Γραμμικό-πλάτος

Σε αυτήν την παράγραφο, σε αντίθεση με τις δύο προηγούμενες, θα ασχοληθούμε με ακολουθίες ακμών ενός γραφήματος G .

Ορισμός 6.5.1. Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$, όπου $|E| = m$, και μία ακολουθία $L = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$ των ακμών του. Θα αναφερόμαστε σε ακολουθίες ακμών με τον όρο *γραμμική-ακολουθία* (*linear-layout*). Καλούμε *πλάτος της ακμής e_i στην L* , τον αριθμό:

$$\partial_L(e_i) = \left| \left(\bigcup_{1 \leq j \leq i} e_j \right) \cap \left(\bigcup_{i < j \leq m} e_j \right) \right|$$

και *πλάτος της γραμμικής-ακολουθίας L* , τον αριθμό $\mathbf{lw}(L) = \max\{\partial_L(e) \mid e \in E\}$. Το *γραμμικό-πλάτος* (*linear-width*) του G ισούται με $\mathbf{lw}(G) = \min\{\mathbf{lw}(L) \mid L \text{ γραμμική-ακολουθία}\}$ (αν $|E| = 1$, τότε $\mathbf{lw}(G) = 0$).

Παράδειγμα 6.5.1. Η γραμμική-ακολουθία $\langle \{u_1, u_2\}, \{u_2, u_3\}, \{u_3, u_4\}, \{u_4, u_5\}, \{u_5, u_6\}, \{u_6, u_7\}, \{u_7, u_8\}, \{u_8, u_9\}, \{u_9, u_{10}\}, \{u_{10}, u_2\} \rangle$, του γραφήματος στο Σχήμα 6.3, έχει πλάτος 2.

Η πρώτη γραπτή αναφορά στο γραμμικό-πλάτος έγινε από τον Robin Thomas [42] το 1996 αν και η παράμετρος αυτή θα μπορούσε να ορισθεί μέσω της έννοιας των σταυροφοριών, που είδαμε στο Κεφάλαιο 3, απαιτώντας τα σύνολα των σταυροφοριών να αποτελούνται από μόνο ένα στοιχείο και να είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους. Από τα Λήμματα 3.1.1, και 3.1.3, συμπεραίνουμε ότι για ένα γράφημα G :

- $\mathbf{ms}(G) \geq \mathbf{lw}(G)$
- Αν το G δεν έχει κορυφές βαθμού 1, τότε $\mathbf{ms}(G) = \mathbf{lw}(G)$

Συνεπώς, τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να θεωρηθούν γνωστά από το 1991. Βεβαίως, δεν είναι αρκετά για να εξακριβωθεί η σχέση μεταξύ των τιμών των $\mathbf{lw}(G)$ και $\mathbf{ms}(G)$. Θα χρειαστεί να περάσουν μερικά χρόνια ακόμα, μέχρι το 2000, ώστε η σχέση αυτή να διερευνηθεί πλήρως.

Ορισμός 6.5.2. Έστω γράφημα G . Αν $P = \{p_1, \dots, p_r\}$ είναι το σύνολο των κορυφών του G που έχουν βαθμό 1, τότε ορίζουμε τα γραφήματα $\Lambda G = (V(G) \cup \{p'_1, \dots, p'_r\}, E(G) \cup \{\{p_1, p'_1\}, \dots, \{p_r, p'_r\}\})$, όπου $\{p'_1, \dots, p'_r\} \cap V(G) = \emptyset$, και $\Lambda^{-1}G = (V(G) \setminus P, \{\{u_1, u_2\} \in E \mid u_1, u_2 \notin P\})$.

Θεώρημα 6.5.1 (Dimitrios M. Thilikos [47]). Έστω γράφημα G . Τότε $\mathbf{ms}(G) = \mathbf{lw}(\Lambda G)$ και $\mathbf{lw}(G) = \mathbf{ms}(\Lambda^{-1}G)$.

Θεώρημα 6.5.2 (Dimitrios M. Thilikos [47]). Για ένα γράφημα G ισχύουν οι ανισότητες $\mathbf{lw}(G) \leq \mathbf{ms}(G) \leq \mathbf{lw}(G) + 1$.

Τύπος Ανίχνευσης:	Παράμετρος Πλάτους:	Σχέση:
Κορυφών	Πλάτος-μονοπατιού	$\mathbf{ns}(G) = \mathbf{pw}(G) + 1$
Μικτή	Γνήσιο-πλάτος-μονοπατιού	$\mathbf{ms}(G) = \mathbf{ppw}(G)$
Ακμών, Μονότονη, Συνεκτική	Συνεκτικό-πλάτος-μονοπατιού	$\mathbf{mcs}(G) \leq \mathbf{cpw}(G) + 2$
Κορυφών, Αόρατη, Τεμπέλης φυγής	Δεντροπλάτος	$\mathbf{ilns}(G) = \mathbf{tw}(G) + 1$
Κορυφών, Αόρατη, Τεμπέλης φυγής, Ταχύτητα 1	Πλάτος	$\mathbf{ilns}_1(G) = \mathbf{w}(G) + 1$
Κορυφών	Τοπολογικό-ζωνοπλάτος	$\mathbf{ns}(G) \leq \mathbf{tb}(G)$
Μικτή	Γραμμικό-πλάτος	$\mathbf{lw}(G) \leq \mathbf{ms}(G) \leq \mathbf{lw}(G) + 1$

Πίνακας 6.1: Η σχέση αριθμών ανίχνευσης και παραμέτρων πλάτους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

7.1 NP-πληρότητα

Θα ξεκινήσουμε αυτό το κεφάλαιο εξετάζοντας τον βαθμό δυσκολίας του προβλήματος k -SEARCH, για τους διάφορους τύπους ανίχνευσης.

Τα πρώτα δημοσιευμένα αποτελέσματα πολυπλοκότητας για το k -SEARCH εμφανίστηκαν το 1983, σε μία εργασία των Megiddo, Hakimi, Garey, Johnson, και Παπαδημητρίου [35], οι οποίοι απέδειξαν ότι όσον αφορά την ανίχνευση ακμών είναι NP-πλήρες, κάνοντας αναγωγή από το ακόλουθο πρόβλημα:

MIN-CUT INTO EQUAL-SIZED SUBSETS	
Είσοδος:	Ένα γράφημα $G = (V, E)$, με $ V $ άρτιο, και ένας θετικός ακέραιος k
Ερώτηση:	Μπορεί το V να χωριστεί σε δύο ισοπληθικά σύνολα V_1, V_2 , ώστε: $ \{ \{x, y\} \in E \mid x \in V_1, y \in V_2 \} \leq k;$

Λαμβάνοντας υπόψη μας τη σχέση μεταξύ ανίχνευσης ακμών, κορυφών και μικτής-ανίχνευσης (Πρόταση 1.3.2), συμπεραίνουμε ότι το k -SEARCH είναι NP-πλήρες και για τους υπόλοιπους δύο κλασικούς τύπους ανίχνευσης.

Σημαντικό ρόλο στην απόδειξη της συμπερίληψης του k -SEARCH στο NP, έπαιξε η μονοτονία αυτών των τύπων ανίχνευσης, καθώς χωρίς αυτήν θα ήταν αδύνατο να δώσουμε περιγραφή πολυωνυμικού μεγέθους των στρατηγικών, αφού το πλήθος βημάτων μιας μη-μονότονης στρατηγικής μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλο, συγκριτικά με το πλήθος των κορυφών του γραφήματος.

Από τις πρώτες κιόλας εργασίες που δημοσιεύθηκαν, προέκυψε μια γενική μεθοδολογία για τη μελέτη της πολυπλοκότητας ενός τύπου ανίχνευσης, που θα μπορούσε να εφαρμοστεί και για τους τρεις κλασικούς τύπους. Το πρώτο βήμα της είναι η απόδειξη μονοτονίας για τον εν λόγω τύπο ανίχνευσης. Στη συνέχεια εξετάζεται αν υπάρχει κάποια παράμετρος πλάτους του γραφήματος που συνδέεται με τον αριθμό αυτής

της ανίχνευσης¹. Έπειτα, χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα της πολυπλοκότητας της παραμέτρου ή περιορίζουμε τη μελέτη μας μόνο στην παράμετρο, πράγμα που τις περισσότερες φορές διευκολύνει πολύ τη συγγραφή των αποδείξεων.

Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι το k -SEARCH για την ανίχνευση κορυφών είναι NP-πλήρες, χρησιμοποιώντας την NP-πληρότητα του πλάτους-μονοπατιού.

Φυσικά, αυτή η μεθοδολογία θα μπορούσε να δουλέψει και αντιστρόφως, δίνοντας αποτελέσματα για την πολυπλοκότητα των παραμέτρων πλάτους. Παραδείγματος χάρι, χρησιμοποιώντας τη μικτή ανίχνευση αποδεικνύεται η NP-πληρότητα του προβλήματος του ελέγχου αν το γνήσιο-πλάτος-μονοπατιού ενός γραφήματος, είναι μικρότερο από ένα δοσμένο φυσικό αριθμό.

Ένα ακόμα παράδειγμα αυτής της μεθοδολογίας είναι η ανίχνευση κορυφών με τεμπέλη και αόρατο, φυγά. Είδαμε ότι η ανίχνευση αυτή είναι μονότονη, και πως για ένα γράφημα G ισχύει $\text{ilns}(G) = \text{tw}(G) + 1$, συνεπώς λόγω του ότι το πρόβλημα του ελέγχου για το αν το δέντροπλάτος ενός γραφήματος είναι μικρότερο από δοσμένο φυσικό k , είναι NP-πλήρες, συμπεραίνουμε ότι το k -SEARCH, για αυτήν την ανίχνευση, είναι επίσης NP-πλήρες.

7.2 Αλγόριθμοι

Όπως συμβαίνει συχνά με τα προβλήματα γραφημάτων, παρόλο που το k -SEARCH είναι NP-πλήρες για τους περισσότερους τύπους ανίχνευσης, για περιορισμένες κλάσεις γραφημάτων υπάρχουν θετικά αποτελέσματα. Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε μερικά από αυτά. Για λόγους πληρότητας θα ορίσουμε το k -SEARCH για περιορισμένες κλάσεις γραφημάτων.

k -C-SEARCH	
Είσοδος:	Ένα γράφημα $G \in \mathcal{C}$, και ένας θετικός ακέραιος k
Ερώτηση:	Είναι το $\#(G) \leq k$;

7.2.1 Πολυωνυμικοί

Στην εργασία τους, που δημοσιεύτηκε το 1983 [35], οι Megiddo, Hakimi, Garey, Johnson και Παπαδημητρίου, εκτός από την NP-πληρότητα του k -SEARCH για την ανίχνευση ακμών, έδωσαν τους πρώτους πολυωνυμικούς αλγόριθμους εύρεσης αριθμού ανίχνευσης.

Θεώρημα 7.2.1 (Megiddo, Hakimi, Garey, Johnson, Papadimitriou [35]). *Για κάθε δέντρο T , με n κορυφές το $\text{s}(T)$ μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(n)$.*

Σύμφωνα με το παραπάνω Θεώρημα, το k -T-SEARCH για την ανίχνευση ακμών, όπου $\mathcal{T}$ η κλάση των δέντρων, ανήκει στην P. Στα πλαίσια αυτού του Θεωρήματος έδωσαν και έναν αλγόριθμο που, με είσοδο ένα δέντρο T , υπολογίζει μία πλήρη στρατηγική ανίχνευσης ακμών, που χρησιμοποιεί $\text{s}(T)$ ανιχνευτές, και τερματίζει σε χρόνο $O(n \log n)$.

¹ Σε πολλές περιπτώσεις οι ερευνητές αναγκάστηκαν να ορίσουν καινούριες παραμέτρους πλάτους, ή να παραλλάξουν τις ήδη υπάρχουσες.

Όπως θα δούμε και στην επόμενη παράγραφο, για κάθε k , υπάρχει αλγόριθμος $\mathcal{A}$ που ελέγχει αν ένα γράφημα έχει $\#(G) = k$, όπου $\# \in \{\mathbf{s}, \mathbf{ns}, \mathbf{ms}\}$. Σύμφωνα με τις ανισότητες της Πρότασης 1.3.2, βρίσκοντας το $\mathbf{s}(T)$ για ένα δέντρο T με τον αλγόριθμο του Θεωρήματος 7.2.1, και τρέχοντας τον $\mathcal{A}$ το πολύ τρεις φορές, μπορούμε να υπολογίσουμε και τα $\mathbf{ms}(T)$, $\mathbf{ns}(T)$. Συνεπώς το k - $\mathcal{T}$ -SEARCH ανήκει στο P και για τους δύο αυτούς τύπους ανίχνευσης.

Ένα ακόμα αποτέλεσμα αυτής της εργασίας είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 7.2.2 (Megiddo, Hakimi, Garey, Johnson, Papadimitriou [35]). *Υπάρχει αλγόριθμος που ελέγχει αν ένα γράφημα G με n κορυφές, έχει $\mathbf{s}(G) \leq 3$, σε χρόνο $O(n)$.*

Πέρα από την μεθοδολογία που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο (και θα θέσουμε σε εφαρμογή και στη συνέχεια), υπάρχει ένας ακόμα τρόπος παραγωγής πολυωνυμικών αλγορίθμων για το k - $\mathcal{C}$ -SEARCH. Αυτή η μεθοδολογία βασίζεται στα δύο σημαντικότερα αποτελέσματα των Graph minors.

Θεώρημα 7.2.3 (Neil Robertson, P.D. Seymour [12]). *$H \preceq$ είναι καλή-μερική-διάταξη για την κλάση $\mathcal{G}^2$.*

Θεώρημα 7.2.4 (Neil Robertson, P.D. Seymour [11]). *Υπάρχει αλγόριθμος που με είσοδο δύο γραφήματα H και G , αποφασίζει αν $H \preceq G$ σε χρόνο $O(n^3)$, όπου $n = |V(G)|$.*

Άμεση συνέπεια του πρώτου θεωρήματος είναι ότι για κάθε κλάση $\mathcal{C}$ που είναι κλειστή ως προς τη σχέση $\preceq$, το σύνολο παρεμπόδισης $\mathbf{obs}_{\preceq}(\mathcal{C})$ περιέχει πεπερασμένου πλήθους γραφήματα, έστω τα $O_1, \dots, O_{|\mathbf{obs}_{\preceq}(\mathcal{C})|}$. Δεδομένου λοιπόν ενός γραφήματος G , μπορούμε να ελέγξουμε αν το G ανήκει στην $\mathcal{C}$, εξετάζοντας αν $O_i \preceq G$ για όλα τα γραφήματα παρεμπόδισης $O_i \in \mathbf{obs}_{\preceq}(\mathcal{C})$. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του δεύτερου Θεωρήματος, ο έλεγχος αυτός ολοκληρώνεται σε χρόνο $O(n^3)$, όπου n το πλήθος των κορυφών του G .

Ανακεφαλαιώνοντας, στα Graph Minors οι Neil Robertson και Paul Seymour έδειξαν ότι για κάθε κλάση γραφημάτων $\mathcal{C}$, που είναι κλειστή ως προς την $\preceq$, υπάρχει αλγόριθμος που ελέγχει αν ένα γράφημα ανήκει στην $\mathcal{C}$.

Τα άσχημα νέα είναι ότι για να δουλέψει αυτός ο αλγόριθμος, απαραίτητη προϋπόθεση είναι η εκ των προτέρων γνώση του συνόλου $\mathbf{obs}_{\preceq}(\mathcal{C})$, και όπως έχει αποδειχθεί δεν μπορεί να υπάρξει αλγόριθμος που με είσοδο την «περιγραφή»³ της $\mathcal{C}$ θα καταγράψει τα γραφήματα του $\mathbf{obs}_{\preceq}(\mathcal{C})$ [13]. Επομένως είμαστε καταδικασμένοι, για κάθε κλάση γραφημάτων, να χρησιμοποιούμε ad-hoc τεχνικές ώστε να ανακαλύψουμε το σύνολο παρεμπόδισης⁴.

Όσον αφορά την ανίχνευση γραφημάτων, μπορούμε να εφαρμόσουμε την μεθοδολογία αυτή για τα τρία σύνολα παρεμπόδισης που είδαμε στο Κεφάλαιο 5, υπό την προϋπόθεση πως οι κλάσεις γραφημάτων $\mathcal{C}[\mathbf{s}, k]$, $\mathcal{C}[\mathbf{ns}, k]$, $\mathcal{C}[\mathbf{ms}, k]$ είναι κλειστές ως

²Το θεώρημα αυτό δίνει καταφατική απάντηση στην εικασία του Klaus Wagner, που παρέμεινε ανοιχτή σχεδόν εβδομήντα χρόνια.

³Με τον όρο «περιγραφή» εννοούμε την κωδικοποίηση μιας μηχανής Turing που αποδέχεται μόνο τα γραφήματα που ανήκουν στην $\mathcal{C}$.

⁴Αναφορικά με τον αλγόριθμο του δεύτερου ερωτήματος κάτι που θα έπρεπε να διευκρινιστεί είναι ότι μέσα στο $O(n^3)$ κρύβονται κάποιες τεράστιες σταθερές που τον καθιστούν μη ρεαλιστικό για πρακτικά προβλήματα. Και εκτός αυτού, το μέγεθος των συνόλων παρεμπόδισης στις περισσότερες περιπτώσεις αποτελεί έναν εξίσου απαγορευτικό παράγοντα.

προς την $\preceq$. Για να εξασφαλίσουμε την προϋπόθεση αυτή θα ανατρέξουμε ξανά στις παραμέτρους πλάτους και θα εκμεταλλευτούμε το γεγονός πως οι κλάσεις γραφημάτων με φραγμένο πλάτος-μονοπατιού, δεντροπλάτος ή γραμμικό-πλάτος είναι κλειστές ως προς την $\preceq$. Συνεπώς αποδειξαμε ότι υπάρχουν πολυωνυμικοί αλγόριθμοι που ελέγχουν αν ένα γράφημα G έχει $\mathbf{s}(G) \leq 2$, $\mathbf{ms}(G) \leq 2$ ή $\mathbf{ns}(G) \leq 3$.

Οι Hans Bodlaender, και Ton Kloks [16] (μεταξύ άλλων αποτελεσμάτων που θα δούμε στην επόμενη παράγραφο) απέδειξαν το ακόλουθο.

Θεώρημα 7.2.5 (Hans L. Bodlaender, Ton Kloks [16]). *Για κάθε ακέραιο k υπάρχει αλγόριθμος που δέχεται σαν είσοδο γράφημα $G = (V, E)$, με $\mathbf{tw}(G) \leq k$ και υπολογίζει, σε πολυωνυμικό ως προς το $|V|$ χρόνο, το $\mathbf{pw}(G)$, καθώς και μια αποσύνθεση-μονοπατιού, με το ελάχιστο δυνατό πλάτος.*

Οι αλγόριθμοι αυτοί επιλύουν σε πολυωνυμικό χρόνο το k -C-SEARCH για την ανίχνευση κορυφών των κλάσεων $\mathcal{C}$ που περιέχουν γραφήματα των οποίων το δεντροπλάτος φράσσεται από έναν σταθερό αριθμό, όπως για παράδειγμα η κλάση των *κάκτων* (*cacti*), των *εξω-επίπεδων* (*outerplanar*) γραφημάτων, των γραφημάτων *Halin*, των *σειριακών-παράλληλων* (*series-parallel*) γραφημάτων και άλλων πολλών.

Κλείνοντας αυτήν τη παράγραφο θα ασχοληθούμε με το k -SEARCH για την ανίχνευση κορυφών με αόρατο και τεμπέλη φυγά, που μπορεί να κινείται μόνο σε γειτονικές του κορυφές:

$\mathbf{ilns}_1$ - k -SEARCH	
Είσοδος:	Ένα γράφημα G , και ένας θετικός ακέραιος k
Ερώτηση:	Είναι το $\mathbf{ilns}_1(G) \leq k$;

Το 1983 οι David Matula και Leland Beck [15] έδωσαν έναν αλγόριθμο που υπολογίζει το πλάτος ενός γραφήματος $G = (V, E)$, σε χρόνο $O(|V| + |E|)$. Συνεπώς ο αλγόριθμος αυτός επιλύει, σε πολυωνυμικό χρόνο, και το $\mathbf{ilns}_1$ - k -SEARCH.

7.2.2 Παραμετρικοί

Όπως είδαμε το k -SEARCH είναι NP-πλήρες πρόβλημα για τους περισσότερους τύπους ανίχνευσης. Όπως είναι όμως φυσικό, η απόδειξη αυτού του γεγονότος δε σήμανε το τέλος της έρευνας για την πολυπλοκότητα αυτού του προβλήματος. Λίγο πριν το 2000 πολλοί ερευνητές, στην προσπάθεια να υπερκεράσουν τη δυσκολία των NP-πλήρων, στράφηκαν σε «γρήγορους» εκθετικούς αλγόριθμους, σε αλγόριθμους δηλαδή που ναι μεν χρειάζονται εκθετικό χρόνο ως προς το μέγεθος της εισόδου τους, αλλά ο χρόνος αυτός δεν τους καθιστά πάντα απαγορευτικούς για πρακτικές εφαρμογές. Το πιο αντιπροσωπευτικό παράδειγμα αυτής της προσπάθειας, αποτελούν οι *αποδοτικοί αλγόριθμοι σταθερής-παραμέτρου* (*fixed-parameter tractable algorithms*), που θα δούμε σε αυτήν την παράγραφο.

Θα ξεκινήσουμε από τους απαραίτητους ορισμούς.

Ορισμός 7.2.1. Ένα *παραμετροποιημένο* (*parameterized*) πρόβλημα Π αντιστοιχεί σε μία γλώσσα $L_\Pi \subseteq \Sigma_G^* \times \mathbb{N}^*$, όπου Σ είναι ένα πεπερασμένο αλφάβητο. Έστω $(I, k) \in L_\Pi$, το I ονομάζεται *στιγμιότυπο* (*instance*) του Π , ενώ το k *πaráμετρος* (*parameter*) που αντιστοιχεί στο I .

Θα υιοθετήσουμε μια πιο απλή αναπαράσταση των παραμετροποιημένων προβλημάτων από αυτή των γλωσσών, όπως κάναμε και στο πρώτο κεφάλαιο. Για παράδειγμα, θεωρώντας στο k -SEARCH ως στιγμιότυπο εισόδου το γράφημα G και τον ακέραιο k , και ως παράμετρο που αντιστοιχεί σε αυτό το στιγμιότυπο το k , μπορούμε να εκφράσουμε την παραμετροποιημένη του μορφή ως εξής:

PARAMETERIZED k -SEARCH	
Είσοδος:	Ένα γράφημα G , και ένας θετικός ακέραιος k
Παράμετρος:	k
Ερώτηση:	Είναι το $\#(G) \leq k$;

όπου το $\#$ αντιστοιχεί στον αριθμό κάποιου τύπου ανίχνευσης.

Στα περισσότερα παραμετρικά προβλήματα, το μέγεθος της παραμέτρου είναι ουσιαστικά μικρότερο από το μέγεθος της εισόδου, όπως για παράδειγμα στο PARAMETERIZED k -SEARCH όπου δεν έχει νόημα να εξετάσουμε αν ένα γράφημα G μπορεί να «καθαριστεί», με πλήθος ανιχνευτών ανάλογο του πλήθους των κορυφών του γραφήματος $n(G)$. Συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι το k είναι πολύ μικρό, συγκριτικά πάντα με το $n(G)$. Κατ' αυτόν τον τρόπο, είναι εύλογο να σχεδιάσουμε εκθετικούς αλγόριθμους με χρόνο τερματισμού που εξαρτάται εκθετικά από την παράμετρο, αλλά πολυωνμικά από το μέγεθος της εισόδου, έτσι ώστε για μικρές τιμές της παραμέτρου να είναι πρακτικά εφαρμόσιμοι.

Ορισμός 7.2.2. Ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα Π καλείται *ευεπίλυτο ως προς σταθερή-παραμέτρο* (*fixed-parameter tractable*), αν επιδέχεται αλγόριθμο $\mathcal{A}$ που το επιλύει, και επιπλέον, τερματίζει σε χρόνο $O(f(k) \cdot p(n))$, όπου f μία υπολογίσιμη συνάρτηση, p ένα πολυώνυμο, και n το μέγεθος της εισόδου. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\Pi \in FPT$, και καλούμε τον $\mathcal{A}$ *FPT-αλγόριθμο*.

Ας επανέλθουμε στα Graph Minors, για να δούμε πως αυτά διαμόρφωσαν την κλάση πολυπλοκότητας FPT. Έστω παράμετρος γραφημάτων $\mathbf{p} : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{N}$. Θα λέμε ότι η $\mathbf{p}$ είναι κλειστή ως προς την $\preceq$, όταν για κάθε δύο γραφήματα H, G , με $H \preceq G$, ισχύει $\mathbf{p}(H) \leq \mathbf{p}(G)$. Θεωρούμε τις κλάσεις γραφημάτων $\mathcal{C}[\mathbf{p}, k] = \{G \in \mathcal{G} \mid \mathbf{p}(G) \leq k\}$, για $k \in \mathbb{N}$, και το παραμετροποιημένο πρόβλημα που ακολουθεί.

PARAMETERIZED k -CHECKING FOR $\mathbf{p}$	
Είσοδος:	Ένα γράφημα G , και ένας θετικός ακέραιος k
Παράμετρος:	k
Ερώτηση:	Είναι το $\mathbf{p}(G) \leq k$;

Θεώρημα 7.2.6. Για κάθε παράμετρο $\mathbf{p} : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{N}$, που είναι κλειστή ως προς την $\preceq$, το PARAMETERIZED k -CHECKING FOR $\mathbf{p}$ ανήκει στην κλάση FPT.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 7.2.3 προκύπτει ότι το σύνολο $\mathbf{obs}_{\preceq}(\mathcal{C}[\mathbf{p}, k])$, είναι πεπερασμένο. Έστω συνάρτηση $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, με $g(k) = |\mathbf{obs}_{\preceq}(\mathcal{C}[\mathbf{p}, k])|$. Για ένα γράφημα G , τρέχοντας τον αλγόριθμο του Θεωρήματος 7.2.4, με είσοδο το G και κάθε ένα από

τα γραφήματα του $\mathbf{obs}_{\leq}(C[\mathbf{p}, k])$, δηλαδή συνολικά $g(k)$ φορές, μπορούμε να ελέγξουμε, αν $\mathbf{p}(G) \leq k$, σε χρόνο $O(g(k) \cdot n^3)$. $\square$

Επομένως από τα Graph minors προκύπτει η ύπαρξη FPT-αλγορίθμων για πάρα πολλά παραμετροποιημένα προβλήματα, συμπεριλαμβανομένων και των PARAMETERIZED k -SEARCH για τους τρεις βασικούς τύπους ανίχνευσης. Όμως, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, η γνώση αυτή από μόνη της δεν αρκεί για να βρεθεί ο εκάστοτε αλγόριθμος. Εκτός αυτού, ακόμη και αν τελικά το σύνολο παρεμπόδισης υπολογιστεί με κάποιο τρόπο, οι σταθερές που κρύβονται στον αλγόριθμο του Θεωρήματος 7.2.4 θα καταστήσουν τον αλγόριθμο που προκύπτει από τα Graph Minors μη εφαρμόσιμο, και ως εκ τούτου μακριά από το πνεύμα των «γρήγορων» εκθετικών αλγορίθμων, που μελετάμε σε αυτή την παράγραφο. Όμως η γνώση της ύπαρξης FPT-αλγορίθμων για αυτά τα παραμετροποιημένα προβλήματα έδρασε ενθαρρυντικά στους ερευνητές που ασχολούνται με την παραμετρική πολυπλοκότητα, καθώς πλέον γνωρίζουν πως δεν υπάρχει ο κίνδυνος να ψάχνουν για κάτι που μπορεί και να μην «υπάρχει».

Στη βιβλιογραφία έχουν καταγραφεί αρκετοί FPT-αλγόριθμοι για τις παραμέτρους πλάτους που αντιστοιχούν σε αριθμούς ανίχνευσης, και οι οποίοι παρακάμπτουν την παραπάνω μεθοδολογία. Στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου θα κάνουμε μια σύντομη καταγραφή των δύο σημαντικότερων αποτελεσμάτων.

Θεώρημα 7.2.7 (Hans L. Bodlaender, Ton Kloks [16]). *Για κάθε σταθερές k και l , υπάρχει αλγόριθμος που, με είσοδο ένα γράφημα $G = (V, E)$, και μια δέντρο-αποσύνθεση του $\mathcal{P}$, πλάτους το πολύ l , αποφασίζει αν $\mathbf{tw}(G) \leq k$, και αν $\mathbf{pw}(G) \leq k$, ο οποίος τερματίζει σε χρόνο $O(2^{p(k)}n)$, όπου p ένα πολυώνυμο, και $n = |V|$.*

Για να υπολογίσουμε μία δέντρο-αποσύνθεση του γραφήματος G , θα χρειαστεί να τρέξουμε το τμήμα του αλγορίθμου των Robertson και Seymour [11], που σε χρόνο $O(n^2)$ επιστρέφει μία δέντρο-αποσύνθεση πλάτους l , αν βεβαίως υπάρχει. Επομένως έχουμε έναν FPT-αλγόριθμο για το PARAMETERIZED k -SEARCH των αριθμών $\mathbf{ns}(k)$ και $\mathbf{ilns}(G)$, με χρόνο $O(2^{p(k)}n^2)$.

Το επόμενο αποτέλεσμα χρησιμοποιεί το γραμμικό-πλάτος.

Θεώρημα 7.2.8 (Hans L. Bodlaender, Dimitrios M. Thilikos [22]). *Για κάθε k υπάρχει αλγόριθμος, με χρόνο $2^{k^{O(1)}} \cdot n$, που με είσοδο ένα γράφημα $G = (V, E)$ υπολογίζει αν $\mathbf{ms}(G) \leq k$, $\mathbf{s}(G) \leq k$, $\mathbf{ns}(G) \leq k$, και εφόσον κάποιο από αυτά ισχύει, επιστρέφει μία μονότονη στρατηγική ανίχνευσης (μικτή, ακμών ή κορυφών αντίστοιχα) που χρησιμοποιεί το πολύ k ανιχνευτές.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΜΕ CMS ΤΟ ΠΟΛΥ 2

Έχουμε ήδη αναφερθεί αρκετές φορές στη μεγάλη απήχηση που είχαν τα Graph Minors στην αλγοριθμική έρευνα, και στο πόσο δραστικά επηρέασαν το σύνολο της Θεωρίας Γραφημάτων, ειδικότερα τον τομέα της ανίχνευσης γραφημάτων. Όπως είναι φυσικό, θα ήταν θεμιτό να υπήρχαν αντίστοιχα θεωρήματα και για τις άλλες δύο μερικές διατάξεις, που αναφέραμε στο Κεφάλαιο 5: των υπογραφημάτων και των συνθλίψεων. Δυστυχώς όμως, οι δύο αυτές σχέσεις δεν αποτελούν καλές-μερικές-διατάξεις, όπως προκύπτει από τις ακόλουθες παρατηρήσεις.

Πρόταση 8.0.1. *Το σύνολο $\mathcal{O} = \{C_i, i \in \mathbb{N}\}$ των κύκλων, είναι μια αντι-αλυσίδα για την $\leq$ στην κλάση $\mathcal{G}$, δηλαδή ένα υποσύνολο της $\mathcal{G}$ όπου για οποιαδήποτε δύο γραφήματα $C, C' \in \mathcal{O}$ ισχύει $C \not\leq C'$ και $C' \not\leq C$.*

Πρόταση 8.0.2. *Η κλάση γραφημάτων του Σχήματος 5.1 είναι μια αντι-αλυσίδα για την $\leq$ στη κλάση $\mathcal{G}$.*

Οι παραπάνω προτάσεις αποδεικνύουν ότι η κλάση $\mathcal{G}$ δεν είναι καλώς-μερικά-διατεταγμένη ως προς την $\leq$ ή την $\preceq$, αυτό φυσικά δεν αποκλείει ότι μερικά υποσύνολά της θα μπορούσαν να είναι. Βεβαίως, για την εκάστοτε κλάση που θα αποδειχθεί καλώς-μερικά-διατεταγμένη θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί και διαφορετική απόδειξη, καθώς ακόμα δεν έχει βρεθεί κάποιο «μεταθεώρημα» (τύπου Graph minors) που θα δίνει αποδείξεις για μια ολόκληρη ομάδα κλάσεων γραφημάτων.

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τις βασικές ιδέες της απόδειξης του ακόλουθου Θεωρήματος.

Θεώρημα 8.0.9. *Το σύνολο παρεμπόδισης $\mathbf{obs}_{\leq C[\mathbf{cms}, 2]}$ είναι πεπερασμένο και αποτελείται από 174 γραφήματα.*

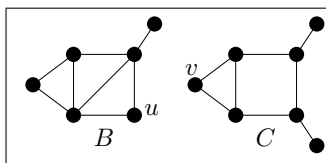
Η απόδειξη αυτή βρίσκεται υπό συγγραφή¹, και παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον για την ανίχνευση γραφημάτων καθώς το σύνολο παρεμπόδισης που προκύπτει μέσα από αυτή την απόδειξη χαρακτηρίζει πλήρως τα γραφήματα με αριθμό συνεκτικής μινι-ανίχνευσης το πολύ 2 και, εκτός αυτού, το σύνολο παρεμπόδισης είναι το με-

¹Από τους Micah J. Best, Arvind Gupta, Δημήτριο Μ. Θηλυκό και τον γράφων.

γαλύτερο που έχει υπολογισθεί μέχρι τώρα, χωρίς τη χρήση υπολογιστή. Όπως αντιλαμβάνεστε η απόδειξη διέπεται από πολλές τεχνικές λεπτομέρειες, και από μεγάλη περιπτώσιολογία, τα οποία θα παρακάμψουμε για να γίνουν αντιληπτά τα βασικά της σημεία.

8.1 Κατεύθυνση

Στην ανίχνευση γραφημάτων οι στρατηγικές ανίχνευσης, τις περισσότερες φορές, ακολουθούν μία συγκεκριμένη κατεύθυνση πάνω σε ένα νοητό άξονα του γραφήματος. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να γίνει κυρίως αντιληπτό στις συνεκτικές στρατηγικές ανίχνευσης, όπως για παράδειγμα στα γραφήματα του σχήματος 8.1, τα οποία έχουν συνεκτικό αριθμό μικτής ανίχνευσης δύο και η στρατηγική ανίχνευσης στο μεν B αναγκαστικά αρχίζει από την αριστερότερη κορυφή και τελειώνει στην u , ενώ στο δε C αναγκαστικά αρχίζει από την κορυφή v και καταλήγει σε μία από τις δύο κορυφές βαθμού ένα.



Σχήμα 8.1: Παρατηρούμε ότι αν ταυτίσουμε την u με την v , το γράφημα G που θα προκύψει θα έχει $\text{cms}(G) = 2$.

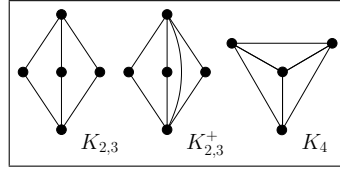
Στα γραφήματα με αριθμό συνεκτικής μικτής ανίχνευσης το πολύ δύο, για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία, η κατεύθυνση εμφανίζεται να παίζει πρωταρχικό ρόλο στις στρατηγικές ανίχνευσης, και ως εκ τούτου αποτελεί το κέντρο της απόδειξης που θα σκιαγραφήσουμε.

Προκειμένου να οριστεί τυπικά η έννοια της κατεύθυνσης, και να γίνει εφικτή η αξιοποίησή της στα πλαίσια της απόδειξής μας, θα χρειαστεί να ορίσουμε πιο πολύπλοκες συνδυαστικές δομές από αυτή των γραφημάτων, και στη συνέχεια να γενικεύσουμε τον ορισμό της ανίχνευσης, ώστε να λαμβάνει υπόψη του και αυτές τις δομές. Αφού γίνει αυτή η προεργασία, το βασικό «εργαλείο» της απόδειξης θα αποτελέσει, όπως συμβαίνει συνήθως στη βιβλιογραφία, μία παράμετρος πλάτους γραφήματος, που γενικεύει την έννοια των σταυροφοριών που είδαμε στο Κεφάλαιο 3 και η οποία θα αποδειχθεί ισοδύναμη με τη συνεκτική μικτή ανίχνευση των δομών αυτών.

8.2 Ορισμοί και προκαταρκτικά αποτελέσματα

Θα ξεκινήσουμε από τον ορισμό των *ριζωμένων γραφημάτων*.

Ορισμός 8.2.1. Μία *ριζωμένη γραφική τριάδα* (*rooted graph triple*), ή εν συντομία *ριζωμένο γράφημα* (*rooted graph*), είναι μια τριάδα $(G, S^{\text{in}}, S^{\text{out}})$, όπου το G είναι ένα συνεκτικό γράφημα και τα S^{in} και S^{out} είναι υποσύνολα του συνόλου κορυφών $V(G)$ (όχι απαραίτητα ξένα μεταξύ τους). Αν $G^* = (G, S^{\text{in}}, S^{\text{out}})$, θα λέμε ότι το G^* είναι το γράφημα G *εισαγωγικά-ριζωμένο* (*in-rooted*) στο σύνολο S^{in} και *εξαγωγικά ριζωμένο*


 Σχήμα 8.2: Το σύνολο $\mathcal{O}_1$.

(out-rooted) στο S^{out} . Τέλος, θα αναφερόμαστε στα σύνολα S^{in} , και S^{out} ως ρίζες του G .

Στην απόδειξή μας χρησιμοποιούμε ριζωμένα γραφήματα, γιατί αποτελούν τη συνδυαστική δομή που μπορεί να αποτυπώσει την έννοια της κατεύθυνσης, σε μία στρατηγική ανίχνευσης, καθώς τα δύο σύνολα κορυφών S^{in} και S^{out} χρησιμεύουν για να εξασφαλισθεί ότι στην εκάστοτε στρατηγική ανίχνευσης οι ανιχνευτές «ξεκινούν» από τις κορυφές του S^{in} , και «καταλήγουν» στις κορυφές του S^{out} . Φυσικά στις στρατηγικές που έχουμε ορίσει ως τώρα, δεν επιβάλουμε τέτοιους περιορισμούς, συνεπώς θα χρειαστεί να ορίσουμε μία καινούρια μορφή ανίχνευσης, γενικότερης αυτή που ορίσαμε στο πρώτο Κεφάλαιο, η οποία θα λαμβάνει υπόψη της τις καινούργιες μας απαιτήσεις.

Η κυριότερη εφαρμογή των ριζωμένων γραφημάτων θα γίνει σε μεμονωμένα υπογραφήματα, του προς ανίχνευση γραφήματος, με συγκεκριμένη δομή, που θα σχηματίζουν έναν νοητό άξονα μέσα στο γράφημα και θα επιβάλουν την κατεύθυνση που θα πρέπει να ακολουθεί πάνω στον άξονα αυτό η βέλτιστη στρατηγική. Τα γραφήματα αυτά, στα οποία θα αναφερόμαστε ως *επεκτεταμένα μπλοκ* (extended blocks), επιβάλλεται να ενώνονται μεταξύ τους, ταυτίζοντας τις ρίζες τους, εν είδει παζλ, με κατάλληλο τρόπο. Περισσότερες λεπτομέρειες επ' αυτού θα αναφέρουμε στην επόμενη παράγραφο.

Ας θεωρήσουμε ένα ριζωμένο γράφημα $(G, S^{\text{in}}, S^{\text{out}})$, με

$$S^{\text{in}} = \{v_1^{\text{in}}, \dots, v_{|S^{\text{in}}|}^{\text{in}}\} \quad \text{και} \quad S^{\text{out}} = \{v_1^{\text{out}}, \dots, v_{|S^{\text{out}}|}^{\text{out}}\}.$$

Ως *ενίσχυση* (enhancement) του ριζωμένου αυτού γραφήματος θα ορίσουμε το γράφημα $\text{enh}(G, S^{\text{in}}, S^{\text{out}})$ που προκύπτει από το G μετά από την προσθήκη των κορυφών u^{in} και u^{out} , και των ακμών των ακόλουθων συνόλων:

$$E^{\text{in}} = \{\{v_1^{\text{in}}, u^{\text{in}}\}, \dots, \{v_{|S^{\text{in}}|}^{\text{in}}, u^{\text{in}}\}\}$$

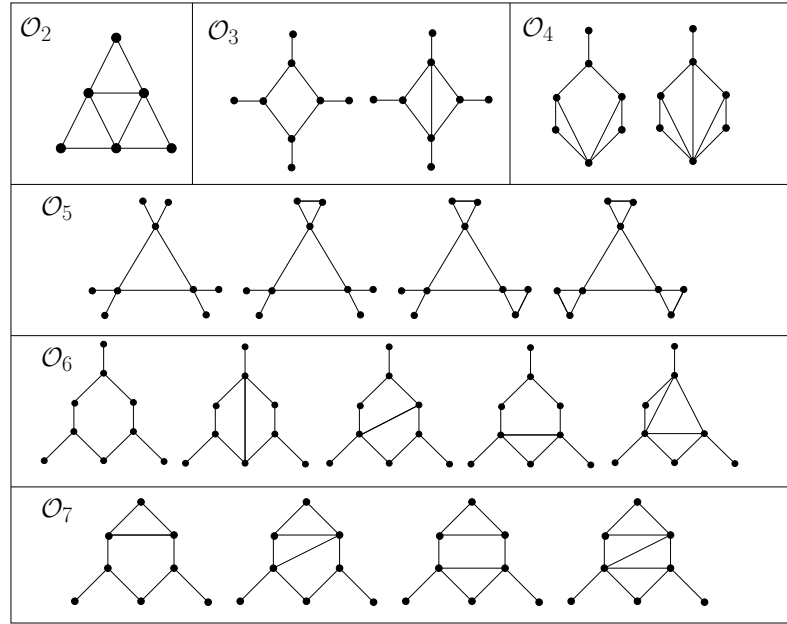
και

$$E^{\text{out}} = \{\{v_1^{\text{out}}, u^{\text{out}}\}, \dots, \{v_{|S^{\text{out}}|}^{\text{out}}, u^{\text{out}}\}\}.$$

Αν και στους ορισμούς θα χρησιμοποιήσουμε ριζωμένα γραφήματα, ή έννοια των ενισχύσεων τους θα μας διευκολύνει σε πολλά τεχνικά ζητήματα.

Για να γενικεύσουμε τη μικτή ανίχνευση γραφήματος, θα χρειαστεί να υποθέσουμε ότι οι ανιχνευτές δεν μπορούν να κάνουν το πρώτο βήμα που τους επιτάσσει μια στρατηγική ανίχνευσης προτού ο φυγάς πραγματοποιήσει την πρώτη του κίνηση.

Ορισμός 8.2.2. Έστω γράφημα G , και $S^{\text{in}}, S^{\text{out}} \subseteq V(G)$. Μία (S_1, S_2) -πλήρης στρατηγική ανίχνευσης για το G αποτελεί μία στρατηγική ανίχνευσης $\mathcal{S}$ για το γράφημα $\text{enh}(G, S^{\text{in}}, S^{\text{out}})$, με τους κάτωθι περιορισμούς:


 Σχήμα 8.3: Τα σύνολα $\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4, \mathcal{O}_5, \mathcal{O}_6, \mathcal{O}_7$.

- (i) $E(\mathcal{S}, i) = E^{\text{in}}$, για κάποιον δείκτη i ,
- (ii) $E(\mathcal{S}, i) \cap E^{\text{out}} = \emptyset$, για κάθε δείκτη i , και τέλος
- (iii) $E(\mathcal{S}, i) = E(G) \setminus E^{\text{out}}$, για κάποιον δείκτη i .

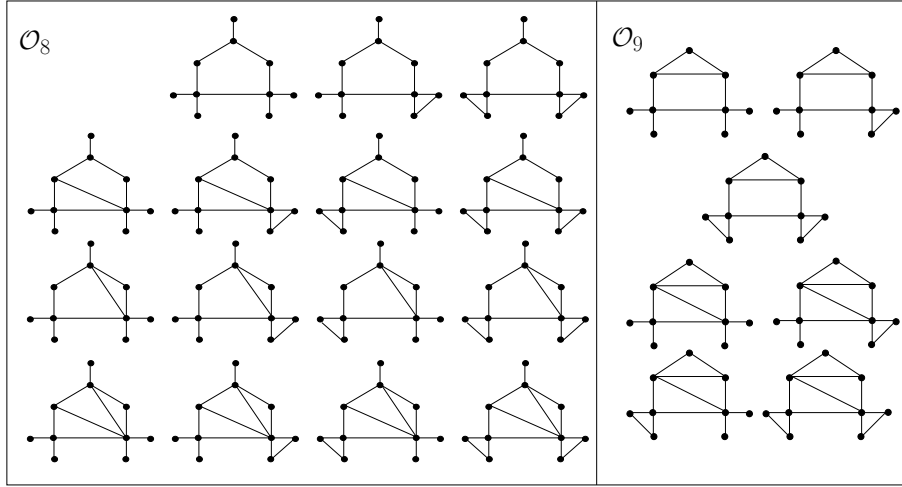
Συμβολίζουμε με $\mathbf{rs}(G, S_1, S_2)$ τον ελάχιστο αριθμό ανίχνευσης που έχει μία (S_1, S_2) -πλήρης στρατηγική ανίχνευσης για το G , και καλούμε αυτό τον αριθμό *αριθμό ριζωμένης ανίχνευσης (rooted search number)*. Κατά αναλογία με την μικτή ανίχνευση ορίζουμε τον μονότονο αριθμό ριζωμένης ανίχνευσης $\mathbf{mrs}(G, S_1, S_2)$, και τον συνεκτικό αριθμό ριζωμένης ανίχνευσης $\mathbf{crs}(G, S_1, S_2)$.

Παρατηρούμε ότι $\mathbf{ms}(G) = \mathbf{rs}(G, \emptyset, \emptyset)$, και ότι ισχύει ισότητα και μεταξύ των αριθμών $\mathbf{crs}, \mathbf{mcrs}$, της ενίσχυσης του γραφήματος G , που είναι εισαγωγικά και εξαγωγικά ριζωμένο στο κενό σύνολο κορυφών, και των αριθμών $\mathbf{cms}(G)$ και $\mathbf{mcms}(G)$, κατ' αντιστοιχία.

Στη συνέχεια, θα δώσουμε ακόμα μερικούς ορισμούς, απαραίτητους για την παρουσίαση της παραμέτρου που θα χρησιμοποιήσουμε.

Ορισμός 8.2.3. Έστω γράφημα G , και υποσύνολα $E^{\text{in}}, E^{\text{out}}$ του συνόλου ακμών $E(G)$ του G . Μία $(E^{\text{in}}, E^{\text{out}})$ -επέκταση (expansion) του G , είναι μια ακολουθία $\mathcal{E} = \langle A_1, \dots, A_r \rangle$ συνόλων ακμών, που πληροί τους ακόλουθους περιορισμούς:

1. Για κάθε $i \in \{1, \dots, r-1\}$, ισχύει ότι $E^{\text{in}} \subseteq A_i \subseteq E(G) \setminus E^{\text{out}}$.
2. Για κάθε $i \in \{1, \dots, r-1\}$, ισχύει ότι $|A_{i+1} \setminus A_i| \leq 1$.
3. $A_1 = E^{\text{in}}$,


 Σχήμα 8.4: Τα σύνολα $\mathcal{O}_8, \mathcal{O}_9$.

$$4. A_r = E(G) \setminus E^{\text{out}}.$$

Μία $(E^{\text{in}}, E^{\text{out}})$ -επέκταση του G είναι *συνεκτική* αν επιπλέον:

5. Για κάθε $i \in \{1, \dots, r\}$, το $G[A_i]$ είναι συνεκτικό γράφημα.

Τέλος, μία $(E^{\text{in}}, E^{\text{out}})$ -επέκταση του G είναι *μονότονη* αν:

$$6. A_1 \subseteq \dots \subseteq A_r.$$

Ορισμός 8.2.4. Έστω μία $(E^{\text{in}}, E^{\text{out}})$ -επέκταση $\mathcal{E}$, ενός γραφήματος G και έστω δείκτης $i \in \{1, \dots, r-1\}$. Το *κόστος της $\mathcal{E}$ στην θέση i* ορίζεται να είναι η ακόλουθη ποσότητα:

$$\text{cost}_G(\mathcal{E}, i) = |\partial_G(A_i)| + q_i$$

όπου το q_i είναι ίσο με τη μονάδα, αν ισχύει ένα από τα ακόλουθα

- $|A_i| \geq 2$ και $A_i \setminus A_{i-1}$ περιέχει ακμή με ακριβώς ένα άκρο βαθμού 1,
- A_i περιέχει απομονωμένη ακμή, δηλαδή ακμή που και τα δύο άκρα της έχουν βαθμό 1,

και σε αντίθετη περίπτωση, είναι ίσο με 0.

Τέλος, ορίζουμε ως *κόστος της επέκτασης $\mathcal{E}$ του G* , τον αριθμό $\text{cost}_G(\mathcal{E}) = \max\{\text{cost}_G(\mathcal{E}, i) \mid i \in \{1, \dots, r-1\}\}$.

Πλέον είμαστε σε θέση να ορίσουμε την παράμετρο που χρησιμοποιούμε στην απόδειξη.

Ορισμός 8.2.5. Έστω γράφημα G , και $S^{\text{in}}, S^{\text{out}} \subseteq V(G)$. Ορίζουμε $\mathbf{p}(G, S^{\text{in}}, S^{\text{out}})$ το ελάχιστο κόστος που μπορεί να έχει μία $(E^{\text{in}}, E^{\text{out}})$ -επέκτασης του $\mathbf{enh}(G, S^{\text{in}}, S^{\text{out}})$. Ορίζουμε επίσης τις ποσότητες $\mathbf{mp}(G, S^{\text{in}}, S^{\text{out}})$, θεωρώντας μόνο μονότονες $(E^{\text{in}}, E^{\text{out}})$ -επεκτάσεις, και $\mathbf{cmp}(G, S^{\text{in}}, S^{\text{out}})$, θεωρώντας συνεκτικές και μονότονες $(E^{\text{in}}, E^{\text{out}})$ -επεκτάσεις.

Το πρώτο βασικό λήμμα της απόδειξης είναι το ακόλουθο.

Λήμμα 8.2.1. Για κάθε γράφημα G , ισχύει ότι $\mathbf{cms}(G, S^{\text{in}}, S^{\text{out}}) = \mathbf{cmp}(G, S^{\text{in}}, S^{\text{out}})$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το γράφημα $G^* = \mathbf{enh}(G, S^{\text{in}}, S^{\text{out}})$ επιδέχεται συνεκτική και μονότονη, (S_1, S_2) -πλήρη στρατηγική ανίχνευσης $\mathcal{S}$, με κόστος το πολύ k .

Από την μονοτονία της $\mathcal{S}$ έπεται ότι για κάθε $i \in \{1, \dots, |\mathcal{S}|\}$, $E^i = E(\mathcal{S}, i) \setminus E(\mathcal{S}, i-1)$. Έστω L_i μία ακολουθία των ακμών του E^i , $i \in \{1, \dots, |\mathcal{S}|\}$, τέτοια ώστε αν η i -οστή κίνηση της $\mathcal{S}$ είναι γλίστρημα πάνω στην ακμή e , τότε η πρώτη ακμή της ακολουθίας L_i είναι η e . Έστω $L = L_1 \oplus \dots \oplus L_{|\mathcal{S}|}$.

Κατασκευάζουμε μια ακολουθία $\mathcal{E} = \langle A_0, \dots, A_r \rangle$, υποσυνόλων του $E(G^*)$, αναδρομικά, ως εξής:

- $A_0 = \emptyset$
- $A_i = A_{i-1} \cup \{e_i\}$, όπου e_i η i -οστή ακμή της L .

Παρατηρούμε ότι, εξαιτίας της Συνθήκης (i), $A_s = E^{\text{in}}$ για κάποιο $s \in \{1, \dots, |\mathcal{S}|\}$, και εξαιτίας της Συνθήκης (iii), $A_t = E^{\text{out}}$, για κάποιο $t \in \{1, \dots, |\mathcal{S}|\}$.

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\mathcal{E}' = \langle A_s, \dots, A_t \rangle$ είναι μία $(E^{\text{in}}, E^{\text{out}})$ -επέκταση του G^* . Πράγματι, η Συνθήκη (1) ισχύει λόγω της Συνθήκης (ii) και οι (2) -- (4) λόγω του τρόπου που κατασκευάστηκε η $\mathcal{E}'$. Από τον τρόπο που κατασκευάστηκε η $(\mathcal{E})'$, προκύπτει επίσης η μονοτονία της ενώ η συνεκτικότητά της προκύπτει από τη συνεκτικότητα της $\mathcal{S}$.

Μένει να υπολογίσουμε το $\mathbf{cost}_{G^*}(\mathcal{E}')$. Για κάθε $j \in \{0, \dots, |\mathcal{E}'|\}$, ορίζουμε i_j τον δείκτη για τον οποίο ισχύει $A_j \setminus A_{j-1} \in E^{i_j}$ και h_j τον δείκτη για τον οποίο το σύνολο $A_{h_j} \setminus A_{h_j-1}$ περιέχει την πρώτη ακμή της ακολουθίας L_{i_j} . Παρατηρούμε ότι το κόστος της $\mathcal{E}'$ στις θέσεις $h_j, \dots, j$, είναι μικρότερο από $\mathbf{cost}_{G^*}(\mathcal{E}', h_j)$ διότι, για $l \in \{h_j + 1, \dots, j\}$, ισχύει ότι $\partial_{G^*}(A_l) \subseteq \partial_{G^*}(A_{h_j})$ και $q_l = 0$, συνεπώς αν δείξουμε ότι $\mathbf{cost}_{G^*}(\mathcal{E}', h_j) \leq k$, θα έχουμε $\mathbf{cost}_{G^*}(\mathcal{E}') \leq k$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις, για το q_{h_j} :

Περίπτωση 1. Αν $q_{h_j} = 0$, τότε $\mathbf{cost}_{G^*}(\mathcal{E}', h_j) = |\partial_{G^*}(A_{h_j})|$. Αφού η $\mathcal{S}$ έχει υποτεθεί μονότονη, όλες οι κορυφές του $\partial_{G^*}(A_{h_j})$ πρέπει να καταλαμβάνονται από ανιχνευτές, έπειτα από την i_j -οστή κίνηση της $\mathcal{S}$ και επειδή η $\mathcal{S}$ δεν χρησιμοποιεί παραπάνω από k ανιχνευτές έπεται ότι $\mathbf{cost}_{G^*}(\mathcal{E}', h_j) \leq k$.

Περίπτωση 2. Αν $q_{h_j} = 1$, τότε η i_j -οστή κίνηση της $\mathcal{S}$ είναι, είτε $p(x)$, είτε $s(y, x)$, όπου η x είναι κορυφή βαθμού 1. Και στις δύο περιπτώσεις $x \notin \partial_{G^*}(A_{h_j})$ και όλες οι κορυφές του $\partial_{G^*}(A_{h_j})$ καταλαμβάνονται από ανιχνευτές έπειτα από την i_j -οστή κίνηση. Στην πρώτη περίπτωση, στο γράφημα υπάρχουν $|\partial_{G^*}(A_{h_j})| + 1 \leq k$ ανιχνευτές συνεπώς $\mathbf{cost}_{G^*}(\mathcal{E}', h_j) \leq k$ ενώ στη δεύτερη, εξαιτίας της μονοτονίας της $\mathcal{S}$ έχουμε $\partial_{G^*}(A_{h_j}) = \partial_{G^*}(A_{h_j-1}) \setminus \{y\}$ και επειδή, έπειτα από την $(h_j - 1)$ -οστή κίνηση, οι κορυφές του $\partial_{G^*}(A_{h_j-1})$ καταλαμβάνονται από ανιχνευτές, προκύπτει ότι $|\partial_{G^*}(A_{h_j})| \leq k - 1$, άρα $\mathbf{cost}_{G^*}(\mathcal{E}', h_j) \leq k$.

Έστω τώρα ότι το G^* επιδέχεται μονότονη και συνεκτική $(E^{\text{in}}, E^{\text{out}})$ -επέκταση $\mathcal{E} = \langle A_1, \dots, A_r \rangle$, με $\mathbf{cost}_{G^*}(\mathcal{E}) = k$. Η $\mathcal{E}$ μπορεί να υποτεθεί γνήσια μονότονη, αγνοώντας τυχούσες επαναλήψεις συνόλων ακμών σε αυτή.

Χρησιμοποιώντας την $\mathcal{E}$, θα κατασκευάσουμε μία μονότονη και συνεκτική $(E^{\text{in}}, E^{\text{out}})$ -επέκταση $\mathcal{E}' = \langle A'_1, \dots, A'_r \rangle$, με κόστος μικρότερο από k που θα ικανοποιεί επιπλέον την ακόλουθη ιδιότητα:

Ιδιότητα επέκτασης: Για κάθε $i \in \{1, \dots, r-1\}$, για το οποίο $V(A'_i) \subset V(A'_{i+1})$, το A'_i περιέχει όλες τις ακμές του $E(G^*)$ που και τα δύο τους άκρα ανήκουν στο $V(A'_i)$.

Αυτό επιτυγχάνεται με την εφαρμογή πεπερασμένου πλήθους φορών του ακόλουθου μετασχηματισμού $(E^{\text{in}}, E^{\text{out}})$ -επεκτάσεων:

Έστω ότι για κάποιο i έχουμε $V(A_i) \subset V(A_{i+1})$, και έστω $L = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ μια αρίθμηση των ακμών του $E(G^*) \setminus A_i$ που και τα δύο άκρα τους ανήκουν στο σύνολο A_i . Για κάθε $j \leq i$ ορίζουμε $A'_j = A_j$. Έπειτα ορίζουμε: $A'_{i+1} = A_i \cup \{e_1\}$, $A'_{i+2} = A_i \cup \{e_1, e_2\}$, $\dots$, $A'_{i+n} = A_i \cup \{e_1, \dots, e_n\}$. Τέλος, για $j \geq i+n$, ορίζουμε $A'_j = A_j \cup \{e_1, \dots, e_n\}$.

Παρατηρούμε ότι η επέκταση που προκύπτει μετά από μια εφαρμογή αυτού του μετασχηματισμού είναι γνήσια μονότονη και συνεκτική. Επίσης, για $j = 1, \dots, n$, έχουμε $\partial_{G^*}(A'_{i+j}) = \partial_{G^*}(A_i)$ και για $j \geq i+n$, $|\partial_{G^*}(A'_j)| \leq |\partial_{G^*}(A_j)|$. Συνεπώς η καινούρια επέκταση έχει κόστος το πολύ k .

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η δοθείσα επέκταση ικανοποιεί την *Ιδιότητα επέκτασης*. Σκοπός μας είναι να ορίσουμε μια $(S^{\text{in}}, S^{\text{out}})$ -πλήρη, μονότονη και συνεκτική στρατηγική ανίχνευσης του G^* , έστω $\mathcal{S}$, που θα χρησιμοποιεί το πολύ k ανιχνευτές.

Οι πρώτες $|S^{\text{in}}|$ κινήσεις της $\mathcal{S}$ θα είναι $p(u^{\text{in}})$, και οι επόμενες $|S^{\text{in}}|$, $s(u^{\text{in}}, v_i^{\text{in}})$. Συμβολίζουμε τις πρώτες $2|S^{\text{in}}|$ κινήσεις $\mathcal{S}$ με $\mathcal{S}_0$. Παρατηρούμε ότι $E(\mathcal{S}, 2|S^{\text{in}}|) = A_1$.

Για κάθε κορυφή u στο σύνολο $V^* = V(G^*) \setminus S^{\text{in}} \setminus \{u^{\text{out}}\}$, ορίζουμε l_u τον πρώτο δείκτη στο $\{1, \dots, r\}$ για τον οποίο $u \in V(A_{l_u})$. Έστω $L = \langle u_1, \dots, u_{|V^*|} \rangle$ μία αρίθμηση του V^* τέτοια ώστε $i \leq j$ όταν $l_{u_i} \leq l_{u_j}$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $i \in \{1, \dots, |V^*|\}$, η κορυφή u_i είναι άκρο της ακμής $e_i \in A_{l_{u_i}-1} \setminus A_{l_{u_i}}$. Έστω v_i το άλλο άκρο της e_i .

Εξαιτίας της συνεκτικότητας και της μονοτονίας της $\mathcal{E}$, έπεται ότι $v_i \in \partial_{G^*}(A_{l_{u_i}-1})$. Επίσης, η u_i έχει βαθμό 1 αν και μόνο αν $u_i \notin \partial_{G^*}(A_{l_{u_i}})$. Έστω $E' = \{e_1, \dots, e_{|V^*|}\}$. Ονομάζουμε ένα σύνολο A_j , $j \in \{1, \dots, r\}$, *κρίσιμο* αν $|A_{j-1} \cap E'| < |A_j \cap E'|$.

Για κάθε $i \in \{1, \dots, |V^*|\}$, ορίζουμε μια ακολουθία κινήσεων $\mathcal{S}_i$, ως εξής: αν $v_i \in \partial_{G^*}(A_{l_{u_i}})$, τότε η $\mathcal{S}_i$ ξεκινάει με $p(u_i)$, αλλιώς με $s(v_i, u_i)$. Οι υπόλοιπες κινήσεις της $\mathcal{S}_i$ είναι αφαιρέσεις των ανιχνευτών που καταλαμβάνουν τις κορυφές του $\partial_{G^*}(A_{l_{u_i}-1}) \setminus \partial_{G^*}(A_{l_{u_i}})$. Τέλος, ορίζουμε $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{S}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{S}_{|V^*|}$.

Παρατηρούμε ότι, λόγω του ότι η $\mathcal{E}$ ικανοποιεί την *Ιδιότητα επέκτασης*, όλες οι ακμές του συνόλου A_j , για $j = 1, \dots, l_{u_1}$ έχουν και τα δύο άκρα τους στο σύνολο S^{in} . Επιπλέον, για κάθε $i \in \{1, \dots, |V^*| - 1\}$, όλες οι ακμές των συνόλων A_j , για $j \in \{l_{u_i}, \dots, l_{u_{i+1}} - 1\}$ έχουν και τα δύο άκρα τους στο σύνολο $V(A_{l_{u_i}})$ και όλες οι ακμές των συνόλων A_j , για $j \in \{l_{u_{|V^*|}}, \dots, r\}$, έχουν και τα δύο άκρα τους στο σύνολο $V(A_{l_{u_{|V^*|}}})$.

Θα δείξουμε ότι ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής:

Ισχυρισμός 1. Για κάθε $A_j, j \in \{1, \dots, r\}$, οι κορυφές του $\partial_{G^*}(A_j)$ είναι οι μόνες κορυφές του G^* που καταλαμβάνονται από ανιχνευτές έπειτα από την τελευταία κίνηση στην $\mathcal{S}_{m_j}$, όπου m_j είναι ο δείκτης της ακμής του συνόλου $(A \cap E') \setminus (A_{j-1} \cap E')$ και A το πρώτο κρίσιμο σύνολο της $\mathcal{E}$, για το οποίο έχουμε $A_j \subseteq A$.

Προφανώς ο Ισχυρισμός 1 είναι αληθής για το $A_1 = E^{\text{in}}$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για το $A_{j'}$ και θα δείξουμε ότι οι κορυφές του συνόλου $\partial_{G^*}(A_{j'+1})$ είναι οι μόνες κορυφές στο G^* που καταλαμβάνονται από ανιχνευτές μετά από την τελευταία κίνηση της $\mathcal{S}_{m_{j'+1}}$.

Αν το $A_{j'+1}$ δεν είναι κρίσιμο τότε $\partial_{G^*}(A_{j'+1}) \subseteq \partial_{G^*}(A_{j'})$ και $m_{j'+1} = m_{j'}$, οπότε ο Ισχυρισμός 1 είναι αληθής. Αν όμως το $A_{j'+1}$ είναι κρίσιμο, και $\{e_{m_{j'+1}}\} = (A_{j'+1} \cap E') \setminus (A_{j'} \cap E')$, τότε $v_{m_{j'+1}} \in \partial_{G^*}(A_{j'})$, άρα καταλαμβάνεται από ανιχνευτή. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. Αν $v_{m_{j'+1}} \in \partial_{G^*}(A_{j'+1})$ και $u_{m_{j'+1}} \in \partial_{G^*}(A_{j'+1})$, τότε $\partial_{G^*}(A_{j'+1}) = \partial_{G^*}(A_{j'}) \cup \{u_{m_{j'+1}}\}$, και η πρώτη κίνηση της $\mathcal{S}_{m_{j'+1}}$ είναι η $\rho(u_{m_{j'+1}})$.

Περίπτωση 2. Αν $v_{m_{j'+1}} \in \partial_{G^*}(A_{j'+1})$ και $u_{m_{j'+1}} \notin \partial_{G^*}(A_{j'+1})$, τότε $\partial_{G^*}(A_{j'+1}) = \partial_{G^*}(A_{j'})$.

Περίπτωση 3. Αν $v_{m_{j'+1}} \notin \partial_{G^*}(A_{j'+1})$, τότε $\partial_{G^*}(A_{j'+1}) = (\partial_{G^*}(A_{j'}) \setminus \{v_{m_{j'+1}}\}) \cup \{u_{m_{j'+1}}\}$, και η πρώτη κίνηση της $\mathcal{S}_{m_{j'+1}}$ είναι $s(v_{m_{j'+1}}, u_{m_{j'+1}})$.

Παρατηρούμε ότι και για τις τρεις περιπτώσεις ο Ισχυρισμός 1 είναι αληθής.

Έστω $V_{\mathcal{S}}(i)$ το σύνολο των κορυφών που έχουν καταληφθεί από ανιχνευτές στις πρώτες i κινήσεις της $\mathcal{S}$ και έστω $V_{\mathcal{S}} = \langle V_{\mathcal{S}}(1), \dots, V_{\mathcal{S}}(r) \rangle$. Προφανώς η ακολουθία αυτή είναι μονότονη. Παρατηρούμε ότι, αν η i -οστή κίνηση ανήκει στην ακολουθία $\mathcal{S}_j$, τότε $V_{\mathcal{S}}(i) = V(A_{l_{u_j}})$.

Θα αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός 2: Για κάθε $i \in \{1, \dots, |\mathcal{S}|\}$, όλες οι ακμές του $G^*[V_{\mathcal{S}}(i)]$ έχουν καθαριστεί.

Ο Ισχυρισμός 2 είναι αληθής για τα $i \in \{1, \dots, 2|S^{\text{in}}|\}$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για το $i \in 2|S^{\text{in}}| + 1, \dots, r$, και θα δείξουμε ότι όλες οι κορυφές του $G^*[V_{\mathcal{S}}(i+1)]$ είναι καθαρές. Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις για την $(i+1)$ -οστή κίνηση της $\mathcal{S}$:

Περίπτωση 1. Είναι αφαίρεση, έστω $r(u)$. Παρατηρούμε ότι $G^*[V_{\mathcal{S}}(i+1)] = G^*[V_{\mathcal{S}}(i)]$, συνεπώς ο Ισχυρισμός 2 είναι αναληθής μόνο αν η $r(u)$ είναι κίνηση επαναμόλυνσης. Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχει ακμή που συνδέει την u με μία κορυφή έξω από το $V_{\mathcal{S}}(i)$, έστω την v . Επειδή $u \in \partial_{G^*}(A_{l_{u_j}-1}) \setminus \partial_{G^*}(A_{l_{u_j}})$, για κάποιο $j \in \{1, \dots, |V^*|\}$, όλες οι ακμές που έχουν άκρο την u ανήκουν στο $A_{l_{u_j}}$, συνεπώς $\{u, v\} \in A_{l_{u_j}}$. Όμως $V_{\mathcal{S}}(i) = V(A_{l_{u_j}})$. Άτοπο.

Περίπτωση 2. Είναι τοποθέτηση ανιχνευτή, έστω $\rho(u)$. Από τον τρόπο που ορίσαμε την $\mathcal{S}$, υπάρχει ακμή $\{u, v\}$ με την v να είναι κορυφή του συνόλου $V_{\mathcal{S}}(i)$. Όλες οι ακμές αυτής της μορφής, καθαρίζονται με την $\rho(u)$, συνεπώς όλες οι ακμές του $G^*[V_{\mathcal{S}}(i+1)]$

είναι καθαρές.

Περίπτωση 3. Είναι γλίστρημα, έστω $s(v_j, u_j)$, για κάποιο $j \in \{1, \dots, |V^*|\}$. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, το $G^*[V_S(i+1)]$ περιέχει τις ακμές του $G^*[V_S(i)]$ και τις ακμές με άκρα την u_j και μία κορυφή στο $v \in V_S(i)$. Μετά την i -οστή κίνηση η v_j καταλαμβάνεται από ανιχνευτή επομένως, από τον Ισχυρισμό 1, προκύπτει ότι $v_j \in \partial_{G^*}(A_{l_{u_j}})$. Παρατηρούμε ότι ο Ισχυρισμός 2 είναι αναληθής μόνο αν η $s(v_j, u_j)$ είναι κίνηση επαναμόλυνσης, δηλαδή υπάρχει ακμή που συνδέει τη v_j με μία κορυφή $u \notin V_S(i) = V(A_{l_{u_j}})$. Επειδή $v_j \notin \partial_{G^*}(A_{l_{u_j}})$, όλες οι ακμές που έχουν την u ως άκρο θα ανήκουν στο $A_{l_{u_j}}$, συνεπώς $\{v_j, u\} \in A_{l_{u_j}}$. Άτοπο.

Και στις τρεις παραπάνω περιπτώσεις, μετά την $(i+1)$ -οστή κίνηση της S , όλες οι ακμές του $G^*[V_S(i+1)]$ έχουν καθαριστεί.

Πλέον, είμαστε σε θέση να δείξουμε ότι η S είναι (S_1, S_2) -πλήρης. Η Συνθήκη (i) ικανοποιείται για κάθε στρατηγική που ξεκινάει με τις κινήσεις της S_0 . Η Συνθήκη (ii) ικανοποιείται διότι $u^{\text{out}} \notin V^*$, συνεπώς σε καμιά κίνηση της S δεν γίνεται τοποθέτηση ανιχνευτή στην u^{out} ή γλίστρημα προς την u^{out} . Σύμφωνα με τον Ισχυρισμό 2, για κάθε $i \in \{1, \dots, |V^*| - 1\}$, ισχύει $E(S, |S_0 \oplus \dots \oplus S_{i-1}| + 1) = \dots = E(S, |S_0 \oplus \dots \oplus S_{i-1}| + |S_i|) = A_{l_{u_{i+1}}} - 1$ και για $i = |V^*|$, ισχύει $E(S, |S_0 \oplus \dots \oplus S_{|V^*|}|) = A_r$, επομένως ικανοποιείται και η Συνθήκη (iii). Επιπλέον, η S εξ ορισμού είναι συνεκτική και λόγω του Ισχυρισμού 2, είναι και μονότονη.

Μένει να υπολογίσουμε το κόστος της S . Για τις πρώτες $2|S^{\text{in}}|$ κινήσεις της, χρησιμοποιούμε $|S^{\text{in}}| = \text{cost}_{G^*}(S, 1) \leq k$ ανιχνευτές. Υποθέτουμε πως έπειτα από $j > 2|S^{\text{in}}|$ κινήσεις, στο G^* βρίσκονται το πολύ k ανιχνευτές, και ότι η $(j+1)$ -οστή κίνηση είναι η $p(u_i)$, για κάποιο $i \in \{1, \dots, |V^*|\}$. Οι κορυφές του $\partial_{G^*}(A_{l_{u_i}-1})$ είναι ακριβώς αυτές που καταλαμβάνονται από ανιχνευτές, οπότε αν $|\partial_{G^*}(A_{l_{u_i}-1})| < k$ μετά την $p(u_i)$ θα έχουμε στο γράφημα το πολύ k ανιχνευτές. Έστω ότι $|\partial_{G^*}(A_{l_{u_i}-1})| = k$. Αν η u_i δεν έχει βαθμό 1, ισχύει ότι $\partial_{G^*}(A_{l_{u_i}}) = \partial_{G^*}(A_{l_{u_i}-1}) \cup \{u_i\}$, συνεπώς $|\partial_{G^*}(A_{l_{u_i}})| = k + 1$, ενώ αν η u_i έχει βαθμό 1, ισχύει ότι $\partial_{G^*}(A_{l_{u_i}}) = \partial_{G^*}(A_{l_{u_i}-1})$ και $\text{cost}_{G^*}(S, l_{u_i}) = |\partial_{G^*}(A_{l_{u_i}})| + 1 = k + 1$. Και στις δύο περιπτώσεις οδηγούμαστε σε άτοπο. Επομένως, το κόστος της S είναι το πολύ k . $\square$

Στη συνέχεια της απόδειξης, θα πρέπει να δείξουμε ότι η παράμετρος μας είναι κλειστή ως προς συνθλίψεις. Καθώς όμως η παράμετρος μας αφορά ριζωμένα γραφήματα, θα χρειαστεί να γενικεύσουμε τον ορισμό της μερικής διάταξης $\leq$.

Ορισμός 8.2.6. Έστω $(G_1, S_1^{\text{in}}, S_1^{\text{out}})$ και $(G_2, S_2^{\text{in}}, S_2^{\text{out}})$ ριζωμένα γραφήματα. Θα λέμε ότι το $(G_1, S_1^{\text{in}}, S_1^{\text{out}})$ αποτελεί ριζωμένη σύνθλιψη (*rooted contraction*) του $(G_2, S_2^{\text{in}}, S_2^{\text{out}})$, και θα υποδηλώνουμε το γεγονός αυτό γράφοντας $(G_1, S_1^{\text{in}}, S_1^{\text{out}}) \leq_r (G_2, S_2^{\text{in}}, S_2^{\text{out}})$, αν υπάρχει επιμορφισμός $\phi : V(G_2) \rightarrow V(G_1)$, τέτοιος ώστε:

- (1) Για κάθε κορυφή $v \in V(G_1)$, το $G_2[\phi^{-1}(v)]$ είναι συνεκτικό,
- (2) για κάθε ακμή $\{v, u\} \in E(G_1)$, το γράφημα $G_2[\phi^{-1}(v) \cup \phi^{-1}(u)]$ είναι συνεκτικό,
- (3) $\phi(S_2^{\text{in}}) = S_1^{\text{in}}$, και

$$(4) \phi(S_2^{\text{out}}) = S_1^{\text{out}}.$$

Πρόταση 8.2.1. Για δύο γραφήματα G_1, G_2 , έχουμε $G_1 \leq_r G_2$ αν και μόνο αν $(G_1, \emptyset, \emptyset) \leq_r (G_2, \emptyset, \emptyset)$.

Απόδειξη. Για το ευθύ, αρκεί να δείξουμε ότι σε ένα γράφημα G , μία εφαρμογή του μετασχηματισμού της σύνθλιψης ακμής μας οδηγεί σε ριζωμένη σύνθλιψη του G . Έστω λοιπόν γράφημα G και το γράφημα G/e όπου η ακμή $e = \{x, y\}$ συνθλίβεται στην κορυφή u_e . Θεωρούμε τον επιμορφισμό $\phi : V(G) \rightarrow V(G/e)$, με $\phi(x) = \phi(y) = u_e$, και $\phi(u) = u$, για κάθε $u \in V(G) \cap V(G/e)$. Για την ϕ ικανοποιούνται τετριμμένα οι προϋποθέσεις του Ορισμού 8.2.6, συνεπώς $(G/e, \emptyset, \emptyset) \leq_r (G, \emptyset, \emptyset)$.

Έστω τώρα δύο γραφήματα G_1, G_2 , για τα οποία η συνάρτηση $\phi : V(G_2) \rightarrow V(G_1)$ μας πιστοποιεί ότι $(G_1, \emptyset, \emptyset) \leq_r (G_2, \emptyset, \emptyset)$. Θα περιγράψουμε ένα σύνολο από συνθλίψεις ακμών του G_2 από τις οποίες προκύπτει γράφημα G'_2 ισόμορφο του G_1 . Για να αποδείξουμε την ισομορφία των δύο γραφημάτων θα πρέπει να δώσουμε μία ένα προς ένα και επί συνάρτηση $\sigma : V(G'_2) \rightarrow V(G_1)$, που ικανοποιεί την επιπλέον ιδιότητα ότι για κάθε δύο κορυφές $x, y \in V(G'_2)$, ισχύει ότι $\{x, y\} \in E(G'_2)$ αν και μόνο αν $\{\sigma(x), \sigma(y)\} \in E(G_1)$.

Για κάθε κορυφή $v \in V(G_1)$, λόγω της (1), συνθλίβοντας όλες τις ακμές του $G_2[\phi^{-1}(v)]$, οδηγούμαστε σε μία μόνο κορυφή, έστω την u_v . Ορίζουμε $\sigma(u_v) = v$. Παρατηρούμε ότι η σ είναι ένα προς ένα και επί και ότι, λόγω του (2), για κάθε ακμή $\{x, y\} \in E(G_1)$, το γράφημα $G_2[\phi^{-1}(v) \cup \phi^{-1}(u)]$ είναι συνεκτικό, οπότε μετά από τις συνθλίψεις θα αποτελείται από μία μόνο ακμή. Συνεπώς από τον τρόπο που ορίστηκε η σ προκύπτει άμεσα και η επιπλέον ιδιότητα που πρέπει να ικανοποιεί για να είναι ισόμορφα τα δύο γραφήματα. $\square$

Έχοντας δώσει αυτούς του ορισμούς, μπορούμε να περάσουμε στο δεύτερο βασικό λήμμα της απόδειξης.

Λήμμα 8.2.2. Αν $(G_1, S_1^{\text{in}}, S_1^{\text{out}})$ και $(G_2, S_2^{\text{in}}, S_2^{\text{out}})$ είναι ριζωμένα γραφήματα, και $(G_1, S_1^{\text{in}}, S_1^{\text{out}}) \leq_r (G_2, S_2^{\text{in}}, S_2^{\text{out}})$, τότε $\text{cmp}(G_1, S_1^{\text{in}}, S_1^{\text{out}}) \leq \text{cmp}(G_2, S_2^{\text{in}}, S_2^{\text{out}})$.

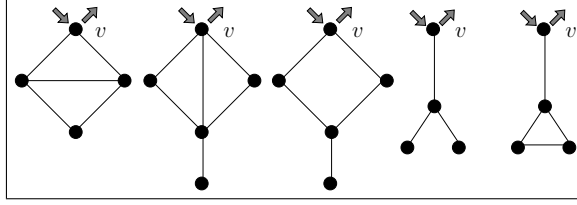
Απόδειξη. Έστω $\mathcal{E} = \langle A_1, \dots, A_r \rangle$ μία μονότονη και συνεκτική $(E_2^{\text{in}}, E_2^{\text{out}})$ -επέκταση του $G_2^* = \text{enh}(G_2, S_2^{\text{in}}, S_2^{\text{out}})$, με κόστος το πολύ k . Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε μονότονη και συνεκτική $(E_1^{\text{in}}, E_1^{\text{out}})$ -επέκταση του $G_1^* = \text{enh}(G_1, S_1^{\text{in}}, S_1^{\text{out}})$, με κόστος το πολύ k .

Έστω ϕ η συνάρτηση από την οποία προκύπτει ότι $(G_1, S_1^{\text{in}}, S_1^{\text{out}}) \leq_r (G_2, S_2^{\text{in}}, S_2^{\text{out}})$. Θεωρούμε επέκταση ψ , της συνάρτησης ϕ , με $\psi(u_2^{\text{in}}) = u_1^{\text{in}}$, και $\psi(u_2^{\text{out}}) = u_1^{\text{out}}$.

Παρατηρούμε ότι η ψ ικανοποιεί και τις τέσσερις προϋποθέσεις του Ορισμού 8.2.6, επομένως:

$$(G_1^*, S_1^{\text{in}} \cup \{u_1^{\text{in}}\}, S_1^{\text{out}} \cup \{u_1^{\text{out}}\}) \leq_r (G_2^*, S_2^{\text{in}} \cup \{u_2^{\text{in}}\}, S_2^{\text{out}} \cup \{u_2^{\text{out}}\})$$

Δοθείσας μιας ακμής $f = \{x, y\} \in E(G_1)$, έστω E_f το σύνολο των ακμών του $E(G_2)$ που έχουν το ένα άκρο τους στο $\psi^{-1}(x)$, και το άλλο στο $\psi^{-1}(y)$. Επιλέγουμε αυθαίρετα μία ακμή του E_f , και την συμβολίζουμε e_f . Έστω $E' = \{e_f \mid f \in E(G_1)\}$. Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $\mathcal{E}' = \langle A_1 \cap E', \dots, A_r \cap E' \rangle$ είναι μια συνεκτική, και μονότονη επέκταση του G_1^* και πως για κάθε $i \in \{1, \dots, r-1\}$, ισχύει ότι $\text{cost}_{G_1^*}(\mathcal{E}', i) \leq \text{cost}_{G_2^*}(\mathcal{E}, i)$. $\square$



Σχήμα 8.5: Το σύνολο $\mathcal{A}$ περιέχει 5 ριζωμένα γραφήματα, της μορφής $(G, \{v\}, \{v\})$.

8.3 Περιγραφή των γραφημάτων με cms το πολύ 2

Χρησιμοποιώντας την παράμετρο **cmp** θα χαρακτηρίσουμε τα γραφήματα που έχουν αριθμό συνεκτικής μικτής ανίχνευσης το πολύ δύο, μέσω του συνόλου παρεμπόδισης $\mathbf{obs}_{\leq}(\mathcal{C}[\mathbf{cmp}, 2])$.

Έστω $\mathcal{D}^1 = \mathcal{O}_1 \cup \dots \cup \mathcal{O}_{12}$, το σύνολο γραφημάτων, όπου το $\mathcal{O}_1$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.2, τα $\mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_9$ στα Σχήματα 8.3, 8.4, και τα $\mathcal{O}_{10}, \mathcal{O}_{11}, \mathcal{O}_{12}$ κατασκευάζονται ως εξής:

$\mathcal{O}_{10}$: Παίρνουμε τρία αντίτυπα των ριζωμένων γραφημάτων του συνόλου $\mathcal{A}$, που φαίνεται στο Σχήμα 8.5 και ταυτίζουμε τις τρεις κορυφές v .

$\mathcal{O}_{11}$: Παίρνουμε δύο αντίτυπα των ριζωμένων γραφημάτων του συνόλου $\mathcal{B}$, που φαίνεται στο Σχήμα 8.6 και ταυτίζουμε τις δύο κορυφές v .

$\mathcal{O}_{12}$: Παίρνουμε δύο αντίτυπα των ριζωμένων γραφημάτων του συνόλου $\mathcal{C}$, που φαίνεται στο Σχήμα 8.7 και ταυτίζουμε τις δύο κορυφές v .

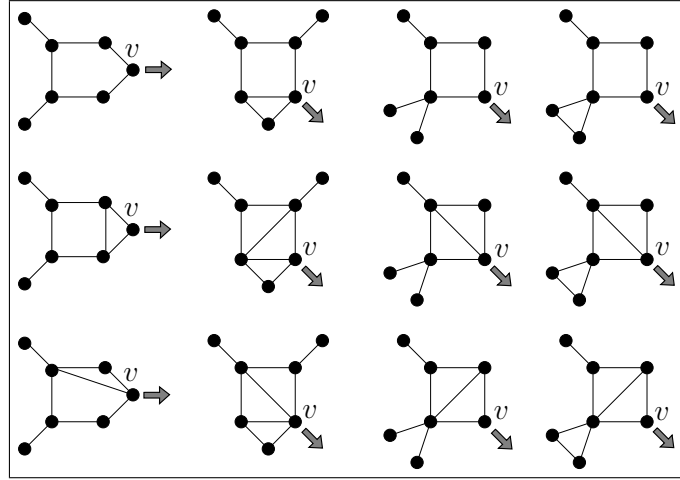
Το σύνολο $\mathcal{D}^1$ αποτελείται από 174 γραφήματα, τα οποία προκύπτει ότι είναι ακριβώς τα γραφήματα του $\mathbf{obs}_{\leq}(\mathcal{C}[\mathbf{cmp}, 2])$. Ο ισχυρισμός του επόμενου λήμματος είναι πολύ εύκολο να επαληθευτεί.

Λήμμα 8.3.1. $\mathcal{D}^1 \subseteq \mathbf{obs}_{\leq}(\mathcal{C}[\mathbf{cmp}, 2])$.

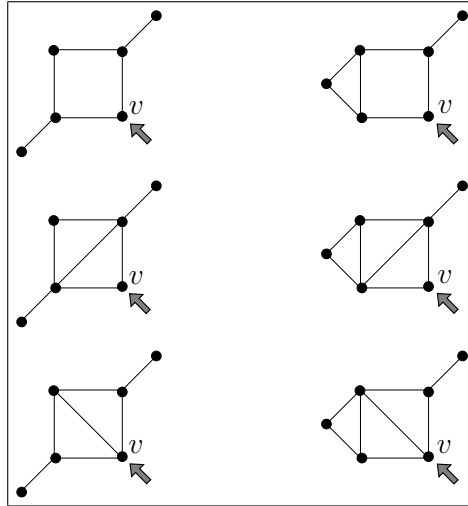
Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, μένει να αποδειχθεί το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 8.3.2. $\mathcal{D}^1 \supseteq \mathbf{obs}_{\leq}(\mathcal{C}[\mathbf{cmp}, 2])$.

Η απόδειξη του Λήμματος 8.3.2 είναι ιδιαίτερα εκτενής, καθώς για την ολοκλήρωσή της θα χρειαστεί πρώτα να αποδειχθούν 14 συνδυαστικά Λήμματα, μέσα από τα οποία προσδιορίζεται η δομή των γραφημάτων με αριθμό συνεκτικής μικτής ανίχνευσης το πολύ 2.



Σχήμα 8.6: Το σύνολο $\mathcal{B}$ περιέχει 12 ριζωμένα γραφήματα, της μορφής $(G, \emptyset, \{v\})$.



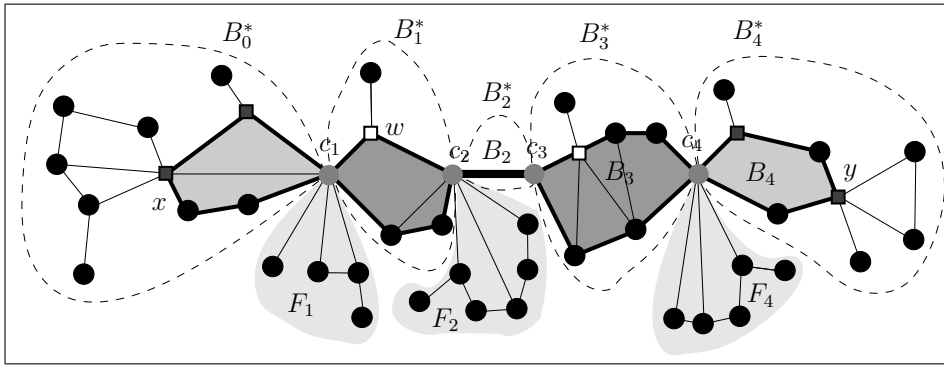
Σχήμα 8.7: Το σύνολο $\mathcal{C}$ περιέχει 6 ριζωμένα γραφήματα, της μορφής $(G, \{v\}, \emptyset)$.

Στα πλαίσια του κειμένου αυτού δε θα είχε αξία η πλήρης καταγραφή των λημμάτων αυτών. Συνεπώς θα αρκεστούμε μόνο στο να αναφέρουμε επιγραμματικά, τις βασικές ιδιότητες ενός γραφήματος $G \in \mathcal{C}[\mathbf{cmp}, 2]$:

- Το G είναι εξωεπίπεδο.
- Το G αποτελείται από έναν κυρίως σκελετό που απαρτίζεται από δυσυνεκτικά (εξωεπίπεδα) ριζωμένα υπογραφήματα, συγκεκριμένης δομής, τα οποία ενώνονται μεταξύ τους ταυτίζοντας τις ρίζες τους, το κάθε ένα με το πολύ άλλο ένα και μπορούν επιπλέον να περιέχουν μία ακόμα ακμή της οποίας το ένα άκρο θα γειτονεύει με την ρίζα και το άλλο θα είναι απομονωμένη κορυφή. Τα γραφήματα αυτά καλούνται *επεκτεταμένα μπλοκ* (*extended blocks*).

- Πάνω σε αυτό τον σκελετό, στις ρίζες των επεκτεταμένων μπλοκ, μπορούν να συνδεθούν οσοδήποτε μεγάλο πλήθος ριζωμένων γραφημάτων, ταυτίζοντας τις ρίζες, τους υπό την προϋπόθεση ότι δεν περιέχουν ως σύνθλιψη κάποιο από τα γραφήματα των Σχημάτων 8.3, 8.4. Τα γραφήματα αυτά, λόγω του ιδιαίτερου σχήματός τους, καλούνται *βεντάλιες* (*fans*).
- Τέλος, τα γραφήματα των συνόλων $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ (Σχήματα 8.6, 8.7) θα μας αναγκάσουν να ακολουθήσουμε μία συγκεκριμένη κατεύθυνση πάνω στον σκελετό του G , για να καταστρώσουμε μια πλήρη συνεκτική στρατηγική μικτής ανίχνευσης, που δεν χρησιμοποιεί παραπάνω από δύο ανιχνευτές.

Κλείνοντας, στο Σχήμα 8.8 δίνεται ένα παράδειγμα γραφήματος της κλάσης $\mathcal{C}[\mathbf{cmp}, 2]$. Όπως μπορείτε να διαπιστώσετε το γράφημα αυτό επιδέχεται πλήρη στρατηγική ανίχνευσης που ακολουθεί την κατεύθυνση από το B_4^* προς το B_0^* .



Σχήμα 8.8: Ένα γράφημα $G \in \mathcal{C}[\mathbf{cmp}, 2]$, τα (εξωτερικά) επεκτεταμένα μπλοκ B_0^* και B_4^* , τα (εσωτερικά) επεκτεταμένα μπλοκ B_1^* , B_2^* και B_3^* και οι βεντάλιες F_1 , F_2 , και F_4 .

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Reinhard Diestel, *Graph Theory*, GTM 173, 4th edition 2010, Springer-Verlag, Heidelberg
- [2] Michael Sipser, *Introduction to the Theory of Computation*, 3rd Edition, CENGAGE Learning Custom Publishing, 2012
- [3] Rolf Niedermeier, *Invitation to Fixed-Parameter Algorithms*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications 31, OUP Oxford, 2006
- [4] Fedor V. Fomin, Dimitrios M. Thilikos, *An annotated bibliography on guaranteed graph searching*, Theoretical Computer Science 399 (2008)
- [5] Lali Barrière, Paola Flocchini, Fedor V. Fomin, Pierre Fraigniaud, Nicolas Nisse, Nicola Santoro, Dimitrios M. Thilikos, *Connected graph searching*, Information and Computation 219 (2012)
- [6] Dariusz Dereniowski, *From Pathwidth to Connected Pathwidth*, SIAM J. vol 26 (2012)
- [7] Fan R. K. Chung, *On the Cutwidth and the Topological Bandwidth of a tree*, SIAM J. vol 6 (1985)
- [8] David Richerby, Dimitrios M. Thilikos, *Searching for a visible, lazy fugitive*, SIAM J. Discrete Math., 25(2), pp 497--513.
- [9] Neil Robertson, P.D. Seymour, *Graph minors. I. Excluding a forest*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, Volume 35, Issue 1, August 1983, Pages 39-61
- [10] Neil Robertson, P.D. Seymour, *Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width*, Journal of Algorithms, Volume 7, Issue 3, September 1986, Pages 309-322
- [11] N. Robertson, P.D. Seymour, *Graph Minors .XIII. The Disjoint Paths Problem*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, Volume 63, Issue 1, January 1995, Pages 65-110

- [12] Neil Robertson, P.D. Seymour, *Graph Minors. XX. Wagner's conjecture*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, Volume 92, Issue 2, November 2004, Pages 325-357
- [13] Michael R. Fellows, Michael A. Langston, *On search, decision, and the efficiency of polynomial-time algorithms*, Journal of Computer and System Sciences, Volume 49, Issue 3, December 1994, Pages 769-779
- [14] Dimitrios M. Thilikos, *Graph minors and parameterized algorithm design*, In The Multivariate Algorithmic Revolution and Beyond, Hans L. Bodlaender, Rod Downey, Fedor V. Fomin, and Dániel Marx (Eds.), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 228-256. (2012)
- [15] David W. Matula, Leland L. Beck, *Smallest-last ordering and clustering and graph coloring algorithms*, J. ACM 30, 3 (July 1983), 417-427.
- [16] Hans L. Bodlaender, Ton Kloks, *Efficient and Constructive Algorithms for the Pathwidth and Treewidth of Graphs*, Journal of Algorithms, Volume 21, Issue 2, September 1996, Pages 358-402
- [17] M. Aigner and M. Fromme, *A game of cops and robbers*, Discrete Appl. Math., 8 (1984), pp. 1--11.
- [18] R. P. Anstee and M. Farber, *On bridged graphs and cop-win graphs*, J. Combin. Theory Ser. B, 44 (1988), pp. 22--28.
- [19] L. Barrière, P. Fraigniaud, N. Santoro, and D. M. Thilikos, *Searching is not jumping*, in Proceedings of the 29th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2003), vol. 2880 of Lecture Notes in Comput. Sci., Springer, 2003, pp. 34--45.
- [20] D. Bienstock and P. Seymour, *Monotonicity in graph searching*, J. Algorithms, 12 (1991), pp. 239--245.
- [21] H. L. Bodlaender, *A linear time algorithm for finding tree-decompositions of small treewidth*, SIAM J. Comput., 25 (1996), pp. 1305--1317.
- [22] H. L. Bodlaender and D. M. Thilikos, *Computing small search numbers in linear time*, in Proceedings of the First International Workshop on Parameterized and Exact Computation (IWPEC 2004), vol. 3162 of Lecture Notes in Comput. Sci., Springer, 2004, pp. 37--48.
- [23] R. Breisch, *An intuitive approach to speleotopology*, Southwestern Cavers (A publication of the Southwestern Region of the National Speleological Society), VI (1967), pp. 72--78.
- [24] N. D. Dendris, L. M. Kirousis, and D. M. Thilikos, *Fugitive-search games on graphs and related parameters*, Theoret. Comput. Sci., 172 (1997), pp. 233--254.
- [25] F. V. Fomin, P. Fraigniaud, and N. Nisse, *Nondeterministic graph searching: From pathwidth to treewidth*, in Proceedings of the 30th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2005), vol. 3618 of Lecture Notes in Comput. Sci., Springer, 2005, pp. 364--375.

- [26] F. V. Fomin and D. M. Thilikos, *On the monotonicity of games generated by symmetric submodular functions*, Discrete Appl. Math., 131 (2003), pp. 323--335.
- [27] P. Fraigniaud and N. Nisse, *Monotony properties of connected visible graph searching*, in Proceedings of the 32nd International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2006), vol. 4271 of Lecture Notes in Comput. Sci., Springer, 2006, pp. 229--240.
- [28] P. A. Golovach, *Equivalence of two formalizations of a search problem on a graph (Russian)*, Vestnik Leningrad. Univ. Mat. Mekh. Astronom., (1989), pp. 10--14. translation in Vestnik Leningrad Univ. Math. 22 (1989), no. 1, 13--19.
- [29] P. A. Golovach, *A topological invariant in pursuit problems (Russian)*, Differentsial'nye Uravneniya, 25 (1989) 923--929. 1097. translation in Differential Equations 25 (1989), no. 6, 657--661.
- [30] L. M. Kirousis and C. H. Papadimitriou, *Interval graphs and searching*, Discrete Math., 55 (1985), pp. 181--184.
- [31] L. M. Kirousis and C. H. Papadimitriou, *Searching and pebbling*, Theoret. Comput. Sci., 47 (1986), pp. 205--218.
- [32] A. S. LaPaugh, *Recontamination does not help to search a graph*, J. Assoc. Comput. Mach., 40 (1993), pp. 224--245.
- [33] F. S. Makedon, C. H. Papadimitriou, and I. H. Sudborough, *Topological bandwidth*, SIAM J. Algebraic Discrete Methods, 6 (1985), pp. 418--444.
- [34] F. Mazoit and N. Nisse, *Monotonicity of non-deterministic graph searching*, in Proceedings of the 32th International Workshop on Graphs (WG07), vol. 4769 of Lecture Notes in Comput. Sci., Springer, 2007, pp. 33--44.
- [35] N. Megiddo, S. L. Hakimi, M. R. Garey, D. S. Johnson, and C. H. Papadimitriou, *The complexity of searching a graph*, J. Assoc. Comput. Mach., 35 (1988), pp. 18--44.
- [36] R. H. Möhring, *Graph problems related to gate matrix layout and PLA folding*, in Computational graph theory, vol. 7 of Comput. Suppl., Springer, Vienna, 1990, pp. 17--51.
- [37] R. Nowakowski and P. Winkler, *Vertex-to-vertex pursuit in a graph*, Discrete Math., 43 (1983), pp. 235--239.
- [38] T. D. Parsons, *Pursuit-evasion in a graph*, in Theory and applications of graphs, vol. 642 of Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1978, pp. 426--441.
- [39] N. N. Petrov, *A problem of pursuit in the absence of information on the pursued*, Differentsial'nye Uravneniya, 18 (1982), pp. 1345--1352.
- [40] A. Quilliot, *Problèmes de jeux, de point fixe, de connectivité et de représentation sur des graphes, des ensembles ordonnés et des hypergraphes*, (1983).

- [41] P. D. Seymour and R. Thomas, *Graph searching and a min-max theorem for tree-width*, J. Combin. Theory Ser. B, 58 (1993), pp. 22--33.
- [42] R. Thomas, *Tree-Decompositions of Graphs*, Lecture Notes, School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, 1996.
- [43] A. Takahashi, S. Ueno, and Y. Kajitani, *Mixed searching and proper-path-width*, Theoret. Comput. Sci., 137 (1995), pp. 253--268.
- [44] A. Takahashi, S. Ueno, and Y. Kajitani, *Minimal forbidden minors for the family of graphs with proper-path-width at most two*, IEICE Trans. Fund. E78-A (1995) 1828--1839.
- [45] A. Takahashi, S. Ueno, and Y. Kajitani, *Minimal acyclic forbidden minors for the family of graphs with bounded path-width*, Discrete Mathematics, Volume 127, Issues 1--3, 15 March 1994, Pages 293-304.
- [46] Nancy G. Kinnarsley, Michael A. Langston, *Obstruction set isolation for the gate matrix layout problem*, Discrete Applied Mathematics, Volume 54, Issues 2--3, 17 October 1994, Pages 169-213
- [47] D. M. Thilikos, *Algorithms and obstructions for linear-width and related search parameters*, Discrete Appl. Math., 105 (2000), pp. 239--271.
- [48] B. Yang, D. Dyer, and B. Alspach, *Sweeping graphs with large clique number*, in Proceedings of the 15th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2004), vol. 3341 of Lecture Notes in Comput. Sci., Springer, 2004, pp. 908--920.
- [49] Micah J. Best, Arvind Gupta, Dimitrios M. Thilikos, Dimitris Zoros, *Graphs with connected mixed search number at most 2*, under preparation.