Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Μαθηματικών

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα στη Λογική και Θεωρία Αλγορίθμων και Υπολογισμού

$\mu\Pi\lambda\forall$

Επιστημονικός Ρεαλισμός και Τροπικά Μοντέλα στην Απαγωγή

Διερεύνηση των ορίων των τυπικών προσεγγίσεων στη δικαιολόγηση απαγωγικών κανόνων

Αλέξανδρος Αποστολίδης

Αθήνα 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

στη

Λογική και Θεωρία Αλγορίθμων και Υπολογισμού

που απονέμει το

Τμήμα Μαθηματικών

του

Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

Εγκρίθηκε την ………….. από Εξεταστική Επιτροπή

αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**	**Υπογραφή**
Κωνσταντίνος Δημητρακόπουλος	Καθηγητής	
Στάθης Ψύλλος	Καθηγητής	
Ιωάννης Στεφάνου	Επίκουρος Καθηγητής	

Χρηματοδοτούμενο Έργο: / Ερευνητικό Πρόγραμμα: Θαλής – Ε.Κ.Π.Α.
Όψεις & Προοπτικές του Ρεαλισμού στην Φιλοσοφία της Επιστήμης και των Μαθηματικών

Η παρούσα έρευνα έχει συγχρηματοδοτηθεί από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο - ΕΚΤ) και από εθνικούς πόρους μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του Εθνικού Στρατηγικού Πλαισίου Αναφοράς (ΕΣΠΑ) – Ερευνητικό Πρόγραμμα: ΘΑΛΗΣ-ΕΚΠΑ – Όψεις και Προοπτικές του Ρεαλισμού στη Φιλοσοφία της Επιστήμης και των Μαθηματικών.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Research Funding Program: THALIS –UoA
Aspects and Prospects of Realism in the Philosophy of Science and Mathematics (APRePoSMa)

This research has been co-financed by the European Union (European Social Fund – ESF) and Greek national funds through the Operational Program "Education and Lifelong Learning" of the National Strategic Reference Framework (NSRF) – Research Funding Program: THALIS -UOA- Aspects and Prospects of Realism in the Philosophy of Science and Mathematics (APRePoSMa).

European Union
European Social Fund
OPERATIONAL PROGRAMME
EDUCATION AND LIFELONG LEARNING
investing in knowledge society
MINISTRY OF EDUCATION & RELIGIOUS AFFAIRS
MANAGING AUTHORITY
NSRF 2007-2013
programme for development
EUROPEAN SOCIAL FUND
Co- financed by Greece and the European Union

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Στην παρούσα εργασία μελετάμε το πρόβλημα της τυποποίησης της απαγωγής, στα πλαίσια τροπικών λογικών. Τα τελευταία χρόνια η έρευνα των απαγωγικών μεθόδων συμπερασμού έχει στραφεί στη χρήση τροπικών μοντέλων, καθώς αυτά μπορούν να ενθυλακώσουν τη διάκριση μεταξύ βέβαιης γνώσης και πεποίθησης ή να αναπαραστήσουν πολλαπλούς κόσμους με γνωσιακά συγκεκριμένη σχέση πρόσβασης μεταξύ τους. Κομβικό σημείο στη συζήτηση είναι το τι σημαίνει *καλύτερη εξήγηση* και ποιες ιδιότητες θα πρέπει να ικανοποιεί μια πρόταση για να χαρακτηριστεί ως τέτοια.

Στην εισαγωγή σκιαγραφείται ο απαγωγικός συλλογισμός και παρουσιάζονται περιπτώσεις εφαρμογής του στην επιστήμη και τη φιλοσοφία. Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφεται η χαρτογράφηση του χώρου των επιλεκτικών απαγωγών από τον Schurz και αναλύονται κάποιες από τις αρετές που προκρίνουν τις καλύτερες εξηγήσεις, όπως ορίστηκαν από τον Ψύλλο. Το τρίτο κεφάλαιο αφορά το πρόγραμμα των Soler-Toscano, Fernandez-Duque και Nepomuceno-Fernandez. Εκεί αναλύεται η προσέγγιση των πολλαπλών κόσμων, διατεταγμένων σε αύξουσα σειρά όσον αφορά το γνωστικό τους περιεχόμενο. Στο τέταρτο κεφάλαιο αναλύεται το μοντέλο στοχοκατευθυνόμενων αποδείξεων του Gauderis. Το πεμπτο και το έκτο κεφάλαιο συνιστούν μια κριτική αποτίμηση των δυο μοντέλων. Εξετάζεται το κατά πόσον μπορούν να τυποποιήσουν το σύνολο των επιλεκτικών απαγωγών και αν τα συμπεράσματά τους ικανοποιούν κάποιες από τις αρετές. Στο προτελευταίο κεφάλαιο προτείνεται ένας τρόπος τυποποίησης του συνάλματος. Ακολουθεί ο επίλογος, με τα τελικά συμπεράσματα και τα ανοικτά προβλήματα.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα αυτής της διπλωματικής, καθηγητή κ. Δημητρακόπουλο που μου έδωσε την δυνατότητα να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα. Επίσης τους καθηγητές κ. Ψύλλο και κ. Αραγεώργη για την ευρύτερη καθοδήγηση και την ευκαιρία που μου έδωσαν να ενταχθώ και να δουλέψω στα πλαίσια της ερευνητικής ομάδας Θαλής: Όψεις και προοπτικές του ρεαλισμού στη φιλοσοφία της επιστήμης και των μαθηματικών [APRePoSMa]. Τους ευχαριστώ θερμά!

1. Εισαγωγή

Η απαγωγή [abduction] ή μέθοδος της υπόθεσης [method of hypothesis] ή μέθοδος της υποθετικής συναγωγής [hypothetic inference] ή μέθοδος του αποκλεισμού [method of elimination] ή θεωρητική συναγωγή [theoretical inference] ή συναγωγή στην καλύτερη εξήγηση [inference to the best explanation] αποτελεί μία από τις τρεις βασικές μεθόδους της επιστημονικής έρευνας. Όμως, σε αντίθεση με την επαγωγή και την παραγωγή, η έρευνα έχει στραφεί στην ανάλυσή της με τυπικές μεθόδους μόλις από τα μέσα της δεκαετίας του 80, δίνοντας πληθώρα μοντέλων που τυποποιούν διάφορες εκδοχές της.

Ιστορικά, ο πρώτος που εισήγαγε την απαγωγική μέθοδο με τη σημερινή της μορφή ήταν ο Peirce. Κατά την ύστερη περίοδο, ο Peirce άλλαξε τον τρόπο με τον οποίο αντιμετώπιζε την επιστημονική έρευνα και υποστήριξε πως η επαγωγή είναι η μέθοδος ελέγχου των υποθέσεων ενώ η απαγωγή η μέθοδος ανακάλυψής τους. Πλέον, η απαγωγή αποτελεί μια μη αλγοριθμική διαδικασία σχηματισμού εξηγητικών υποθέσεων από ένα δεδομένο σύνολο παρατηρήσεων και σχηματοποιείται ως εξής:

Προκείμενη	Παρατηρήθηκε το μη αναμενόμενο γεγονός C.
Προκείμενη	Αλλά αν η υπόθεση A ήταν αληθής, τότε θα περιμέναμε την εμφάνιση του C.
Συμπέρασμα	Άρα, υπάρχουν ενδείξεις που να υποστηρίζουν ότι η A είναι αληθής.

Το παραπάνω σχήμα είναι αρκετά γενικό και δεν προσδιοριζει το τι σημαίνει η φράση "μή αναμενόμενο γεγονός C", ούτε καθιστά σαφές το πως προέκυψε η υπόθεση A. Μια ψευδολογική μορφή της απαγωγής που συναντάται συχνά είναι η παρακάτω:

Προκείμενη	C
Προκείμενη	$A \models C$
Συμπέρασμα	A

Σήμερα γνωρίζουμε πως ελάχιστες απαγωγές ικανοποιούν τη συγκεκριμένη μορφή, καθώς από αυτή απουσιάζει το υπόβαθρο γνώσης. Ουσιαστικά απαιτείται η απαγωγή να λαμβάνει χώρα σε ένα γνωσιακό κενό, όπου τα μόνα γνωστά είναι οι ταυτολογίες της εκάστοτε γλώσσας.

Σε αντιδιαστολή με τις απαγωγές που προσπαθούν να εξηγήσουν μή αναμενόμενα γεγονότα[1] υπάρχουν άλλα είδη που ασχολούνται με δεδομένα που δεν είναι συνεπή με την προϋπάρχουσα γνώση. Ειδικότερα, συμβαίνει πολλές φορές μια παρατήρηση να αποτελεί αρνητικό στιγμιότυπο ενός ή περισσότερων νόμων στα πλαίσια μιας θεωρίας. Αυτή η περίπτωση χαρακτηρίζεται ως απαγωγή αντικρουώμενων γεγονότων, όπου προτού γίνει το απαγωγικό βήμα πρέπει να προηγηθεί αναθεώρηση του υπόβαθρου γνώσης. Αρχικά, θα πρέπει να αφαιρεθούν από αυτό όσες αρχές το καθιστούν ασυνεπές κατά την υπαγωγή σε αυτό της παρατήρησης. Βέβαια μια τέτοια διαδικασία δεν μπορεί να οριστεί μονοσήμαντα ούτε η επιλογή των προς αφαίρεση αρχών είναι τετριμμένη[2]. Στη συνέχεια, με δεδομένο ότι το σύνολο των αρχών που απέμειναν και το προς εξήγηση δεδομένο είναι συνεπή, λαμβάνει χώρα η απαγωγή. Δηλαδή η απαγωγή αντικρουόμενων γεγονότων περιλαμβάνει ένα αρχικό βήμα οπισθοχώρησης [backtracking step] και στη συνέχεια μια απαγωγή καινοφανών.

Είτε ως απαγωγή καινοφανών είτε ως απαγωγή αντικρουώμενων, ο απαγωγικός συλλογισμός έχει ευρύ πεδίο εφαρμογής. Το δεδομένο που είναι προς εξήγηση δεν είναι απαραίτητο να αποτελεί ένα γεγονός. Μπορεί, επίσης, να είναι ένα σύνολο γεγονότων, μια παρατηρημένη κανονικότητα, ένας φυσικός νόμος ή και απαγωγές θεωρητικών μοντέλων. Επίσης, η υπόθεση που εξηγεί το δεδομένο, μπορεί να έχει προκύψει με δυο τρόπους: είτε επιλέγοντάς την μέσα από ένα σύνολο υποθέσεων, οπότε χαρακτηρίζεται ως επιλεκτική απαγωγή [selective abduction], είτε κατασκευάζοντάς την στα πλαίσια ενός δημιουργικού απαγωγικού συλλογισμού [creative abduction].

Σε κάθε περίπτωση, η χρήση της απαγωγής δεν περιορίζεται στα πλαίσια των φυσικών επιστημών ή της λήψης αποφάσεων στην καθημερινή ζωή, αλλά επεκτείνεται στη φιλοσοφία και την επιστημολογία. Μια επιστημικά αποδεκτή μέθοδος είναι η απλή

---

[1] Στη βιβλιογραφία συναντώνται ως απαγωγές καινοφανών γεγονότων [novel fact abductions] ή απλά απαγωγές καινοφανών.

[2] Οι απαγωγές αντικρουόμενων αποτελούν το βασικό πεδίο εφαρμογής των μοντέλων AGM, ενδεικτικά βλ. Nepomuceno-Fernandez et al. (2013).

επαγωγή ή επαγωγή με απαρίθμηση. Σε αυτή το συμπέρασμα προκύπτει από πεπερασμένο αριθμό προκείμενων και αποτελεί τη γενίκευση της παρατηρημένης κανονικότητας. Τυπικά, ορίζεται ως:

Προκείμενη	$Ax_1 \wedge Bx_1$	Το x_1 με την ιδιότητα A έχει και την ιδιότητα B
Προκείμενες	...	
Προκείμενη	$Ax_n \wedge Bx_n$	Το x_n με την ιδιότητα A έχει και την ιδιότητα B
Συμπέρασμα	$\forall x(Ax \to Bx)$	Για όλα τα x, αν έχουν την ιδιότητα A θα έχουν και την ιδιότητα B

Όμως τέτοιου είδους συλλογισμοί είναι δυνατόν να μεταγραφούν ως απαγωγές:

Προκείμενη	Παρατηρήθηκαν τα γεγονότα $Ax_1 \wedge Bx_1$, ..., $Ax_n \wedge Bx_n$.
Προκείμενη	Αλλά αν η υπόθεση $\forall x(Ax \to Bx)$ ήταν αληθής, τότε θα περιμέναμε την εμφάνιση των $Ax_1 \wedge Bx_1$, ..., $Ax_n \wedge Bx_n$.
Συμπέρασμα	Άρα, υπάρχουν ενδείξεις που να υποστηρίζουν ότι η $\forall x(Ax \to Bx)$ είναι αληθής.

Γενικά κάθε απαγωγή με απαρίθμηση που αφορά ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα του πληθυσμού, μπορεί να ειδωθεί ως απαγωγή. Προφανώς το αντίθετο δεν ισχύει.

Το ίδιο συμβαίνει και με την υποθετικοπαραγωγική μέθοδο. Σε αυτή, τα συμπεράσματα οφείλουν να επικυρώνονται από τις παρατηρήσεις. Κάθε υπόθεση που θα γίνει αποδεκτή θα πρέπει να παράγει τα παρατηρησιακά δεδομένα, σε διαφορετική περίπτωση θα απορρίπτεται. Ουσιαστικά πρόκειται για μια απαγωγή όπου η καλύτερη εξήγηση ταυτίζεται με την υπόθεση που συνεπάγεται τα προς εξήγηση γεγονότα:

Προκείμενη	Παρατηρήθηκαν τα $B_1, ..., B_n$.

Προκείμενη	Αλλά αν οι A_j [3], με $1 \leq j \leq k$, ήταν αληθείς τότε θα περιμέναμε την εμφάνιση των $B_1,...,B_n$.
Συμπέρασμα	Άρα υπάρχουν ενδείξεις που να υποστηρίζουν ότι οι A_j είναι αληθείς.

Άρα η απλή επαγωγή συνιστά μια απαγωγή όπου καλύτερη εξήγηση είναι αυτή που πληρεί το κριτήριο της ενοποιητικής ισχύος, ενώ η υποθετικοπαραγωγική μέθοδος γράφεται ως απαγωγή όπου η καλύτερη εξήγηση ικανοποιεί την αρετή της πληρότητας[4]. Επομένως θα έχουν τουλάχιστον την ίδια αξιοπιστία με την αντίστοιχη απαγωγική μέθοδο.

Σε ένα δεύτερο επίπεδο, η απαγωγή συνεισφέρει στην υπεράσπιση του ρεαλισμού. Ειδικότερα, το επιχείρημα "Δεν Είναι Θαύμα" [No-Miracles Argument] βασίζει την επιτυχία των ώριμων επιστημονικών θεωριών στην προσεγγιστική τους αλήθεια. Μια παραλλαγή της διατύπωσης του Putnam είναι:

Προκείμενη	Οι ώριμες επιστημονικές θεωρίες είναι εργαλειακά αξιόπιστες, δηλαδή είναι εμπειρικά επιτυχείς και παράγουν ακριβείς προβλέψεις.
Προκείμενη	Η καλύτερη εξήγηση για την εργαλειακή αξιοπιστία των ώριμων θεωριών είναι ότι αυτές είναι προσεγγιστικά αληθείς και όλοι οι όροι που περιλαμβάνονται σε αυτές έχουν αναφορά στον φυσικό κόσμο.
Συμπέρασμα	Άρα οι ώριμες επιστημονικές θεωρίες είναι προσεγγιστικά αληθείς και όλοι οι όροι που περιλαμβάνονται σε αυτές έχουν αναφορά στον φυσικό κόσμο.

Αυτή η δευτέρου βαθμού απαγωγή έχει διττό στόχο. Αφενός ενισχύει τον επιστημονικό ρεαλισμό και αφετέρου δικαιολογεί την απαγωγική μέθοδο. Με δεδομένο ότι η απαγωγή αποτελεί την ενισχυτική μέθοδο με την οποία από τις παρατηρήσεις εισάγονται οι θεωρητικοί όροι και αποδίδονται σε αυτούς ιδιότητες, η συναγωγή της προσεγγιστικής

[3] Όπου ισχύει $A_j \vDash B_1 \wedge ... \wedge B_n$, $1 \leq j \leq k$.

[4] Για μια αναλυτική πραγμάτευση της πληρότητας και της ενοποιητικής ισχύος, βλ. επόμενο κεφάλαιο.

αλήθειας των θεωριών και της αναφοράς των όρων στο NMA αποτελεί ισχυρό επιχείρημα για την αξιοπιστία της[5].

Συμπερασματικά, η απαγωγή αποτελεί την κύρια μη παραγωγική μέθοδο εξαγωγής συμπερασμάτων. Είναι ενισχυτική και ταυτόχρονα έχει τη μεγαλύτερη δυνατή επιστημική αποδεικτικότητα. Άλλα είδη συλλογισμών, όπως η επαγωγή με απαρίθμηση και η υποθετικοπαραγωγική μέθοδος, ανάγονται σε αυτήν, οπότε οποιοδήποτε επιχείρημα υπέρ της απαγωγής λειτουργεί ενισχυτικά και για αυτές. Φιλοσοφικά επιχειρήματα όπως το NMA βασίζονται στην απαγωγική μέθοδο. Τέλος, μπορεί να δικαιολογηθεί η χρήση της με μια δεύτερης τάξης απαγωγή. Άρα η μελέτη της απαγωγής σε θεωρητικό και τυπικό επίπεδο και η διερεύνηση των ορίων των τυπικών προσεγγίσεων αποτελεί κρίσιμο φιλοσοφικό και επιστημολογικό ζήτημα.

[5] Για μια διεξοδική ανάλυση σχετικά με την φαινομενική κυκλικότητα της δικαιολόγησης της απαγωγής με έναν απαγωγικό συλλογισμό, βλ. Psillos (1999, 81-90).

2. Είδη απαγωγής και εξηγητικές αρετές

Είδη απαγωγής

Στο Schurz (2008) γίνεται μια προσπάθεια χαρτογράφησης των διαφόρων ειδών καινοφανών απαγωγών[6]. Κάθε απαγωγή αποτελεί μια συναγωγή στην καλύτερη εξήγηση, υπό την έννοια ότι είτε εισάγει νέες έννοιες και μοντέλα είτε επιλέγει την καλύτερη εξήγηση από ένα προϋπάρχον σύνολο. Όμως μεταξύ των διαφόρων απαγωγών υπάρχουν σημαντικές διαφορές ανάλογα με το είδος των τεκμηρίων που λαμβάνονται υπόψη, τη μορφή των απαγωγικών συμπερασμάτων και το γνωσιακό μηχανισμό που χρησιμοποιείται κατά τη συναγωγή τους. Έτσι, προκύπτουν τέσσερις γενικές κατηγορίες απαγωγών, που οι δυο πρώτες αφορούν κυρίως επιλεκτικές απαγωγές, ενώ οι υπόλοιπες περιγράφουν δημιουργικές απαγωγές.

Η πρώτη γενική κατηγορία αφορά τις γεγονοτικές απαγωγές [factual abductions]. Σε αυτές, τόσο το προς εξήγηση γεγονός όσο και η υπόθεση που θα επιλεγεί αποτελούν καθορισμένα γεγονότα [singular facts]. Η λογική δομή τους είναι:

	Αν ισχύει Ax τότε θα πρέπει Bx	Νόμος
2.1	Γνωρίζουμε ότι έχει συμβεί το γεγονός Be	Τεκμήριο
	Μια καλή εξήγηση είναι ότι Ae	Συμπέρασμα

Ουσιαστικά πρόκειται για μια παραλλαγή του κλασσικού απαγωγικού σχήματος που πρωτοδιατυπώθηκε από τον Peirce. Με τη σειρά της διαιρείται σε τρεις υποκατηγορίες, τις γεγονοτικές απαγωγές παρατηρήσιμων, τις πρωτοβάθμιες υπαρκτικές και τις γεγονοτικές απαγωγές μη παρατηρήσιμων.

Οι γεγονοτικές απαγωγές παρατηρήσιμων συνίστανται στην εξήγηση κάποιου γεγονότος που έχει ήδη παρατηρηθεί από κάποια αιτία που είναι δυνάμει παρατηρήσιμη. Για παράδειγμα, από την παρατήρηση των κίτρινων φύλλων ενός δέντρου μπορεί να συναχθεί η υπόθεση ότι το ριζικό του σύστημα βρίσκεται για μεγάλο χρονικό διάστημα

[6] Επιλέχθηκε η κατάταξη του Schurz έναντι αυτής του Hoffman καθώς διακρίνει τις απαγωγές πρωτίστως σε επιλεκτικές και δημιουργικές.

σε συνθήκες αυξημένης υγρασίας, κάτι το οποίο είναι εύκολο να διαπιστωθεί. Η λογική δομή τέτοιων επιχειρημάτων είναι:

$$\begin{array}{ll} & \forall x(Ax \to Bx) \\ \textbf{2.2} & Be \\ \hline & Ae \end{array}$$

Οι πρωτοβάθμιες υπαρκτικές διαφέρουν από τις γεγονοτικές στο ότι ο νόμος μπορεί να περιέχει μια μεταβλητή που να μην είναι γνωστή η τιμή της καθ' όλη τη διάρκεια της απαγωγής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα υπαρκτικές αποφάνσεις. Το κλασσικο παράδειγμα του Schurz είναι πως από την ύπαρξη αποτυπωμάτων σε μια ερημική παραλία συνάγεται το συμπέρασμα πως κάποιος βρισκόταν εκεί το προηγούμενο διάστημα, χωρίς όμως να μπορεί να γίνει γνωστή η ταυτότητά του. Δηλαδή το συμπέρασμα έγκειται στην επιβεβαίωση της ύπαρξης κάποιου αντικειμένου που πληρεί τις ιδιότητες που απαιτούνται χωρίς να είναι δυνατό να αποδοθεί σε αυτό η τιμή μιας σταθεράς. Η τυπική διατύπωση αυτου του συλλογισμού είναι:

$$\begin{array}{ll} & \forall x \forall y(Axy \to Bx) \\ \textbf{2.3} & Be \\ \hline & \exists y Aey \end{array}$$

Το παραπάνω σχήμα μπορεί να γενικευθεί για περιπτώσεις όπου υπάρχουν πολλές άγνωστες μεταβλητές, έστω $y_1, ..., y_n$. Συμβολίζοντας $\vec{y} \equiv y_1, ..., y_n$, οι προτάσεις $\forall x \forall y_1 ... \forall y_n (Axy_1 ... y_n \to Bx)$ και $\forall x \forall \vec{y}(Ax\vec{y} \to Bx)$ είναι ισοδύναμες, οπότε ο γενικευμένος συλλογισμός έχει τη μορφή:

$$\begin{array}{ll} & \forall x \forall \vec{y}(Ax\vec{y} \to Bx) \\ \textbf{2.4} & Be \\ \hline & \exists \vec{y} Ae\vec{y} \end{array}$$

Οι γεγονοτικές απαγωγές μη παρατηρήσιμων συναντώνται κυρίως στην ιστορική έρευνα. Η μη παρατηρησιμότητα του γεγονότος συνίσταται στο ότι αυτό συνέβη σε παρελθοντικό χρόνο. Αυτή η περίπτωση συνήθως δεν εξαντλείται στην εύρεση εξήγησης από έναν ή περισσότερους υποψήφιους νόμους, αλλά από την συναγωγή εξήγησης δια μέσου ενός πλέγματος νόμων που συγκροτούν μια θεωρία, η οποία με τη σειρά της αποτελεί ένα θεωρητικό μοντέλο του προς εξήγηση φαινομένου. Για παράδειγμα, αν σε μια ανασκαφή βρεθούν απολιθώματα από κοχύλια, τότε συνάγεται ότι στο απώτερο παρελθόν στο συγκεκριμένο μέρος υπήρχε κάποιο θαλάσσιο οικοσύστημα. Φυσικά, αυτό δεν αποτελεί κάποιο νόμο της γεωλογίας, ενώ και το συμπέρασμα συνιστά ένα θεωρητικό μοντέλο της γεωλογικής εξέλιξης της περιοχής, από το οποίο μπορούν να συναχθούν περαιτέρω συμπεράσματα και να εξηγηθούν νέα ευρήματα.

Η δεύτερη γενική κατηγορία επιλεκτικών απαγωγών περιλαμβάνει τις απαγωγές νόμων [law abductions]. Κατά τον Schurz τέτοιου τύπου συλλογισμοί είναι γνωστοί ήδη από τον Αριστοτέλη και χαρακτηρίζονται ως συλλογισμοί ενδιάμεσης αιτίας [hitting upon the middle][7]. Στην συνήθη μορφή τους, από ένα γενικό κανόνα όπως η απόφανση "ό,τι περιέχει ζάχαρη έχει γλυκιά γεύση" και ένα εμπειρικό κανόνα που χρήζει εξήγησης πχ "όλα τα μήλα είναι γλυκά", προκύπτει ο απαγωγικός κανόνας "όλα τα μήλα περιέχουν ζάχαρη". Σε τυπική μορφή:

	$\forall x(Ax \rightarrow Cx)$	Γενικός κανόνας
2.5	$\forall x(Bx \rightarrow Cx)$	Εμπειρικός κανόνας
	$\forall x(Bx \rightarrow Ax)$	Απαγωγικό συμπέρασμα

Η επιλεκτικότητα συνίσταται στο ότι υπάρχουν πολλοί υποψήφιοι γενικοί κανόνες, και ανάλογα με το ποιος θα επιλεγεί προκύπτει ο εμπειρικός κανόνας. Στο παραπάνω παράδειγμα αντί του "ό,τι περιέχει ζάχαρη έχει γλυκιά γεύση" θα μπορούσε να επιλεγεί ο "ό,τι περιέχει φρουκτόζη έχει γλυκιά γεύση", οπότε το συμπέρασμα θα ήταν "όλα τα μήλα περιέχουν φρουκτόζη". Άρα ανάλογα με την επιλογή κάποιου γενικού κανόνα

[7] Βλ. Ύστερα Αναλυτικά (Ι,34). Βέβαια, στον Αριστοτέλη δεν συναντάται πουθενά συλλογισμός δεύτερου τύπου που να έχει σε προκείμενες και συμπέρασμα καθολικούς ποσοδείκτες.

$\forall x(A_i x \rightarrow Cx)$ προκύπτει το ανάλογο συμπέρασμα $\forall x(Bx \rightarrow A_i x)$. Σε κάθε περίπτωση, τόσο στις γεγονοτικές απαγωγές όσο και στις απαγωγές νόμων, κρίσιμο σημείο στην απαγωγική διαδικασία είναι η επιλογή του κατάλληλου νόμου/θεωρίας/γενικού κανόνα.

Οι άλλες δυο γενικές κατηγορίες απαγωγών, οι απαγωγές θεωρητικών μοντέλων [theoretical model abductions] και οι δευτεροβάθμιες υπαρκτικές απαγωγές [second order existential abductions], αφορούν δημιουργικές απαγωγές. Οι πρώτες πραγματεύονται την εύρεση των θεωρητικών συνθηκών που περιγράφουν τις αιτίες ενός φαινομένου, στα πλαίσια μιας επιστημονικής θεωρίας, για παράδειγμα το γιατί ένα ξύλινο αντικείμενο επιπλέει στο νερό στα πλαίσια της νευτώνειας μηχανικής. Οι δεύτερες αποσκοπούν στο να εξηγήσουν μια πλειάδα εμειρικών φαινομένων ή νόμων, υποθέτοντας κάποια καινούργια ιδιότητα, έννοια ή θεωρητικό νόμο. Με δεδομένο ότι τα σύγχρονα τυπικά μοντέλα αφορούν επιλεκτικές απαγωγές, η παρουσίαση των παραπάνω κατηγοριών ξεπερνά τους στόχους της παρούσας εργασίας.

Με μια πρώτη ανάγνωση, οι γεγονοτικές απαγωγές φαίνεται να μπορούν να τυποποιηθούν, τουλάχιστον όσον αφορά τις γεγονοτικές απαγωγές παρατηρήσιμων και τις πρωτοβάθμιες υπαρκτικές καθώς και οι δυο υποκατηγορίες έχουν συγκεκριμένη λογική δομή. Στα σχήματα 2.2, 2.3 και 2.4 υπάρχει ουσιαστική διαφορά στη λογική δομή του νόμου και της παρατήρησης. Ο νόμος αποτελεί ένα τύπο που ξεκινά με τον καθολικό ποσοδείκτη, ενώ η παρατήρηση είναι μια λογική πρόταση, χωρίς ποσοδείκτες ή μεταβλητές. Κάτι αντίστοιχο δεν ισχύει για τις απαγωγές νόμων. Η τυπική μορφή είναι ελλιπής καθώς στο τυπικό σκέλος του σχήματος 2.5 δεν είναι σαφές ποιος είναι ο γενικός και ποιος ο εμπειρικός κανόνας. Η διάκρισή τους δεν μπορεί να γίνει βασιζόμενη στη λογική δομή τους καθώς και οι δυο αποτελούν καθολικές προτάσεις. Έτσι, αν δεν επιβληθεί κάποιος τρόπος αναγνώρισής τους[8], δεν είναι απαραίτητο ότι τα συμπεράσματα που θα προκύπτουν θα είναι επιθυμητά. Για παράδειγμα, από τις ίδιες προκείμενες μπορεί να προκύψουν δυο διαφορετικά συμπεράσματα:

$\forall x(Ax \rightarrow Cx)$ $\qquad\qquad$ $\forall x(Ax \rightarrow Cx)$

[8] Για παράδειγμα, οι γενικοί κανόνες να εφοδιάζονται με τον τροπικό τελεστή $\Box$ ενώ οι εμπειρικοί κανόνες με τον $\Diamond$.

$$\frac{\forall x(Bx \rightarrow Cx)}{\forall x(Bx \rightarrow Ax)} \quad \text{ή} \quad \frac{\forall x(Bx \rightarrow Cx)}{\forall x(Ax \rightarrow Bx)}$$

Δηλαδή από τις προκείμενες "ό,τι περιέχει ζάχαρη έχει γλυκιά γεύση" και "όλα τα μήλα είναι γλυκά", προκύπτει είτε "όλα τα μήλα περιέχουν ζάχαρη" είτε "ότι περιέχει ζάχαρη είναι μήλο".

Εξηγητικές αρετές

Κατά τον Ψύλλο[9] οι επιλεκτικές απαγωγές αποτιμούν την εξηγητική δύναμη της κάθε *δυνάμει* εξήγησης σε δυο επίπεδα. Στο πρώτο επίπεδο γίνεται αποτίμηση των δυνάμει εξηγήσεων με βάση τη σχέση τους με το υπόβαθρο γνώσης. Σε κάθε υποψήφια εξήγηση εμπεριέχεται μια αιτιακή-νομολογική σύνδεση μεταξύ του εξηγητέου και της εξηγούντος. Προφανώς αυτή η σύνδεση περιγράφεται στα πλαίσια αν όχι κάποιας θεωρίας, τουλάχιστον ενός συνόλου νόμων. Η καλύτερη εξήγηση οφείλει να "ταιριάζει" όσο το δυνατόν περισσότερο με το υπόβαθρο γνώσης, δηλαδή οι άρρητες προκείμενες που χρησιμοποιεί να περιλαμβάνονται σε αυτό.

Σύναλμα [consilience]: Μεταξύ δυο δυνητικών εξηγήσεων H_1 και H_2, αν το υπόβαθρο γνώσης προκρίνει την H_1 τότε αυτή θα πρέπει να προτιμηθεί ως καλύτερη, εκτός και αν υπάρχουν βάσιμοι λόγοι να αμφισβητήσουμε την προϋπάρχουσα γνώση.

Οι αιτίες αναθεώρησης της προϋπάρχουσας γνώσης υπάρχουν για λόγους ανεξάρτητους του απαγωγικού συμπερασμού. Άρα στα πλαίσια τυποποίησης της απαγωγής σε μη αμφισβητήσιμο υπόβαθρο γνώσης, η χρήση της αρετής του συνάλματος καθιστά καλύτερη την εξήγηση που προκρίνεται από το υπόβαθρο γνώσης. Το κύριο πλεονέκτημα του συνάλματος είναι ότι αποκλείει τις εξηγήσεις που χρησιμοποιούν αυθαίρετες προκείμενες ή κανονικότητες άσχετες με το αποδεκτό θεωρητικό υπόβαθρο. Για παράδειγμα, οι μικρές αποκλίσεις του Ποσειδώνα από μια ελλειπτική τροχιά

[9] Βλ. Psillos (2002)

μπορούν να εξηγηθούν είτε από το βαρυτικό πεδίο του Ουρανού είτε από την ύπαρξη μίας χωρικής ζώνης στην οποία οι βαρυτικές δυνάμεις δεν συμπεριφέρονται με το γνωστό τρόπο. Προφανώς η Νευτώνια Βαρυτική Θεωρία προκρίνει την πρώτη εξήγηση ως καλύτερη.

Πολλές φορές συμβαίνει στα πλαίσια μιας θεωρίας να υπάρχουν δυο ή περισσότερες εξηγήσεις που να ικανοποιούν την αρετή του συνάλματος. Σε αυτή την περίπτωση, οι εξηγήσεις αποτιμώνται σε ένα δεύτερο επίπεδο με βάση τα δομικά τους χαρακτηριστικά. Η παρακάτω λίστα δεν είναι εξαντλητική, αλλά περιλαμβάνει τα κυριότερα από αυτά:

Πληρότητα [completeness]: Μεταξύ δυο εξηγήσεων H_1 και H_2[10], αν η H_1 εξηγεί το σύνολο των προς εξήγηση δεδομένων ενώ η H_2 μόνο κάποια από αυτά, τότε καλύτερη είναι η H_1.

Σημαντικότητα [importance]: Μεταξύ δυο εξηγήσεων H_1 και H_2 που δεν εξηγούν το σύνολο των προς εξήγηση δεδομένων, καλύτερη είναι αυτή που εξηγεί τα σημαντικότερα από αυτά.

Οικονομία [parsimony]: Έστω δύο σύνθετες υποθέσεις H_1 και H_2 που εξηγούν όλα τα δεδομένα και οι ατομικές υποθέσεις που χρησιμοποιεί η H_1 είναι γνήσιο υποσύνολο των ατομικών υποθέσεων που περιλαμβάνονται στην H_2. Τότε καλύτερη είναι η H_1.

Ενοποιητική ισχύς [unification]: Έστω δύο σύνθετες υποθέσεις H_1 και H_2 που εξηγούν όλα τα δεδομένα και με την H_1 να εξηγεί τα δεδομένα κάνοντας χρήση λιγότερων ατομικών υποθέσεων. Τότε η H_1 είναι καλύτερη.

[10] Κάθε κριτήριο μπορεί να εφαρμοστεί σε περισσότερες από δυο εξηγήσεις, αλλά για λόγους απλότητας των ορισμών συγκρίνονται μόνο δύο.

Ακρίβεια [precision]: Έστω δύο σύνθετες υποθέσεις H_1 και H_2 που εξηγούν όλα τα δεδομένα. Αν η H_1 εξηγεί τα δεδομένα με μεγαλύτερη ακρίβεια, πιθανά υποθέτοντας κάποιο αιτιακό/νομολογικό μηχανισμό, τότε είναι καλύτερη.

Η πληρότητα είναι η απλούστερη στην τυποποίηση αρετή και περιλαμβάνεται στο σύνολο των σύγχρονων μοντέλων εξαιτίας της ευκολίας στον έλεγχό της. Η σημαντικότητα εφαρμόζεται μόνο στις περιπτώσεις μη πλήρων εξηγήσεων. Το βασικό πρόβλημα στην τυποποίησή της είναι ότι πρέπει να υπάρχει μια αποτίμηση των προς εξήγηση δεδομένων, με βάση τη σημαντικότητά τους. Κάθε ζεύγος δεδομένων πρέπει να μπορεί να συγκριθεί, ώστε κάθε φορά να προκύπτει η καλύτερη εξήγηση που θα αφορά τα σημαντικότερα εξ αυτών[11].

Η αρχή της οικονομίας κωδικοποιεί την απαίτηση η καλύτερη εξήγηση να περιλαμβάνει το μικρότερο δυνατό υποσύνολο υποθέσεων. Στόχος της είναι να προκρίνει τις λιγότερο "φλύαρες" εξηγήσεις, με την έννοια ότι μια εξήγηση που χρησιμοποιεί κάποιες υποθέσεις είναι πιο εύλογη έναντι της αντίστοιχης που περιλαμβάνει τις ίδιες υποθέσεις μαζί με κάποιες νέες. Η ελκυστικότητα των οικονομικών εξηγήσεων οφείλεται στο ότι αφενός είναι πιο πιθανό να συντρέχουν ορισμένες από τις προκείμενες παρά το σύνολό τους και αφετέρου ένα υπερσύνολο προκείμενων μπορεί να αμφισβητηθεί ευκολότερα έναντι του υποσυνόλου του. Για παράδειγμα, έστω ότι κάποιο βράδυ ο Bob φτάνει σπίτι του και παρατηρεί ότι η λάμπα της εξώπορτας είναι σβηστή, ενώ πριν φύγει την είχε ανάψει. Τόσο η εξήγηση {η λάμπα κάηκε κατά το διάστημα απουσίας του} όσο και η {έχει καταστραφεί η σχετική ασφάλεια} εξηγούν πλήρως τη σβηστή λάμπα, το ίδιο όμως ισχύει και για την {η λάμπα κάηκε κατά το διάστημα της απουσίας του και κατά το ίδιο διάστημα καταστράφηκε η σχετική ασφάλεια}. Και οι τρεις υποθέσεις εξηγούν τη σβηστή λάμπα, όμως οι δύο πρώτες χρησιμοποιούν υποσύνολα των υποθέσεων της τρίτης. Ακριβώς επειδή είναι λιγότερο πιθανό να συμβούν ταυτόχρονα οι δυο ατομικές εξηγήσεις, επιλέγονται ως καλύτερες έναντι της σύζευξής τους.

Η αρετή της ενοποιητικής ισχύος αποτελεί μια αυστηροποίηση της αρχής της οικονομίας. Ειδικότερα, προκρίνεται ως καλύτερη η εξήγηση που περιέχει τις λιγότερες ατομικές υποθέσεις, ανεξάρτητα από τη σχέση που μπορεί να έχουν μεταξύ τους.

[11] Για μια πιο αναλυτική πραγμάτευση της σημαντικότητας βλ. Παράρτημα Α.

Ουσιαστικά, έτσι κωδικοποιείται η ανάγκη για υπαγωγή των φαινομένων στις λιγότερες δυνατές πρώτες αρχές.

Πρόταση: Κάθε εξήγηση που είναι ενοποιητικά ισχυρή, είναι κατ ανάγκην και οικονομική. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Απόδειξη: Έστω εξήγηση H που περιλαμβάνει τις ατομικές εξηγήσεις $\{h_1,...,h_k\}$ με $k \in \mathbb{N}$, και είναι ενοποιητικά ισχυρή. Αν δεν είναι οικονομική τότε θα υπάρχει ένα γνήσιο υποσύνολο της H το οποίο θα είναι εξήγηση, έστω H' και $H' \subset H$. Προφανώς στην H' θα περιέχονται κάποιες, αλλά όχι όλες οι ατομικές υποθέσεις $\{h_1,...,h_k\}$. Αυτό θα έχει ως απότέλεσμα η πληθικότητα του συνόλου των ατομικών εξηγήσεων της H' να είναι αυστηρά μικρότερη από τον αριθμό k. Άρα τελικά η H' είναι οικονομικότερη της H. Άτοπο.
Για το αντίστροφο, έστω οικονομικές εξηγήσεις $H_1 = \{h_1, h_2, h_3\}$ και $H_2 = \{h_3, h_4\}$, όπου h_i ατομικές υποθέσεις. Προφανώς η H_2 ικανοποιεί το κριτήριο της ενοποιητικής ισχύος έναντι της H_1 καθώς χρησιμοποιεί λιγότερες υποθέσεις, όμως δεν είναι οικονομικότερη καθώς δεν ισχύει $H_2 \subset H_1$.

Στα σύγχρονα τυπικά μοντέλα τυποποιείται η οικονομία, ενώ σε κάποια από αυτά γίνονται νύξεις για επέκτασή τους όσον αφορά την ενοποιητική ισχύ. Η αρετή της ακρίβειας δεν εξετάζεται σε αυτά καθώς σε αυστηρά ορισμένες πρωτοβάθμιες ή τροπικές γλώσσες παραμένει ανοικτό πρόβλημα το τι συνιστά ακριβή εξήγηση.

Συμπερασματικά, παρ' ότι η παραπάνω λίστα δεν είναι εξαντλητική, επιτρέπει να κατασκευαστεί ένα μοτίβο για τον απαγωγικό συμπερασμό. Αρχικά οι δυνητικές εξηγήσεις ελέγχονται με βάση την αρετή του συνάλματος. Από αυτές, εξηγήσεις είναι μόνο όσες προκρίνονται από το υπόβαθρο γνώσης. Στη συνέχεια εξετάζονται όσον αφορά την πληρότητα. Αν καμία από αυτές δεν είναι πλήρης, τότε η καλύτερη προκύπτει από την εφαρμογή του κριτηρίου της σημαντικότητας. Αν πάλι, προκύψουν δύο ή περισσότερες πλήρεις εξηγήσεις, τότε η καλύτερη επιλέγεται με βάση τα κριτήρια της οικονομίας, της ενοποιητικής ισχύος ή κάποιο άλλο, ανάλογα με το είδος του προβλήματος.

3. Τροπικό πλαίσιο πολλαπλών κόσμων

Η προσέγγιση των πολλαπλών κόσμων αναπτύχθηκε στις αρχές της τρέχουσας δεκαετίας από τους Soler-Toscano, Fernandez-Duque και Nepomuceno-Fernandez[12]. Εκκινούν από τον κλασσικό ορισμό της Aliseda, όπου *απαγωγικό πρόβλημα καινοφανών παρατηρήσεων* χαρακτηρίζεται η εύρεση εξήγησης α, έτσι ώστε να εξηγείται ένα παρατηρηθέν φαινόμενο φ από ένα σύνολο προτάσεων Θ. Ουσιαστικά το Θ συνιστά το υπόβαθρο γνώσης και θα πρέπει από αυτό να μην αποδεικνύεται καμία από τις προτάσεις φ και $\neg\varphi$:

3.1 $\Theta \nvdash \varphi$

3.2 $\Theta \nvdash \neg\varphi$

Με την **3.1** εξασφαλίζεται ότι το πρόβλημα είναι γνήσια απαγωγικό και όχι κάποιο ψευδοπρόβλημα, καθώς αν το γεγονός έπεται από το υπόβαθρο γνώσης δεν απαιτείται καμία εξήγηση. Αντίστοιχα η **3.2** εξασφαλίζει ότι η παρατήρηση φ είναι καινοφανής και δεν αντικρούει καμία από τις προτάσεις του υπόβαθρου γνώσης, καθώς σε αυτή την περίπτωση θα είχαμε *απαγωγικό πρόβλημα ανώμαλων παρατηρήσεων*.

Λύση του απαγωγικού προβήματος θεωρείται κάθε τύπος α που ικανοποιεί τις:

3.3	$\Theta, \alpha \vdash \varphi$	Απαίτηση παραγωγής
3.4	$\Theta \cup \{\alpha\}$ να είναι συνεπές	Απαίτηση συνέπειας
3.5	$\alpha \nvdash \varphi$	Απαίτηση καλής εξήγησης

Και οι τρεις απαιτήσεις είναι εύλογες και αποτελούν το μικρότερο δυνατό σύνολο κριτηρίων που πρέπει να ικανοποιεί μια εξήγηση. Η **3.3** εξασφαλίζει πως η α αποτελεί εξήγηση, καθώς από αυτή και το υπόβαθρο γνώσης παράγεται το καινοφανές γεγονός. Η **3.4** απαιτεί την συνέπεια μεταξύ εξήγησης και υπόβαθρου γνώσης. Αν η α ήταν

[12] Βλ. Nepomuceno-Fernandez et al (2010).

ασυνεπής με το Θ, τότε θα μπορούσε να αποδειχθεί οποιαδήποτε πρόταση καθώς από αντιφατικά σύνολα προτάσεων αποδεικνύονται τα πάντα. Επίσης, δεν θα είχε καμία γνωσιακή αξία η επέκταση του υπόβαθρου γνώσης σε ένα ασυνεπές σύνολο. Τέλος η **3.5** δεν επιτρέπει τις εξηγήσεις που κάνουν λήψη του ζητουμένου. Για παράδειγμα υποψήφιες εξηγήσεις για το γεγονός φ μπορεί να είναι το ίδιο το γεγονός φ ή οποιοσδήποτε άλλος τύπος από τον οποίο έπεται το φ. Προφανώς τέτοιες εξηγήσεις δεν είναι καλές και αποκλείονται από την απαίτηση της καλής εξήγησης.

Πλέον το εξηγητικό μοντέλο ορίζεται ως η πεντάδα:

3.6 $\mathfrak{M}=<L, W, \Lambda, \mathfrak{R}, \pi>$

όπου L είναι μια οποιαδήποτε τυπική γλώσσα, W ένα μη κενό αριθμήσιμο σύνολο κόσμων, Λ ένα μη κενό σύνολο υποσυνόλων του 2^L, π μια συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε κόσμο w μια λογική $\pi(w)$ και $\mathfrak{R} \subseteq W \times W$ η σχέση πρόσβασης μεταξύ των στοιχείων του W. Η κεντρική ιδέα είναι πως κάθε κόσμος αποτελεί ένα σύνολο προτάσεων. Ο αντιλήπτορας [agent] ανάλογα με το γνωσιακό του υπόβαθρο βρίσκεται σε έναν από αυτούς, για παράδειγμα στον w_0. Οι δυνατές επεκτάσεις της λογικής του καθορίζονται από το ποιοι κόσμοι συνδέονται με τον w_0 δια μέσου της σχέσης $\mathfrak{R}$. Στην περίπτωση της απαγωγής καινοφανών παρατηρήσεων, η σχέση $\mathfrak{R}$ θα πρέπει να είναι μονοτονική προκειμένου με τις κατάλληλες επεκτάσεις ο αντιλήπτορας να συμπεριλαμβάνει στο γνωσιακό υπόβαθρο την κατάλληλη εξήγηση α. Μια τέτοια σχέση είναι του υποσυνόλου:

3.7 $\forall w, v \in W\ (wRv \Leftrightarrow \pi(w) \subseteq \pi(v))$

Δηλαδή από τον κόσμο w είναι προσβάσιμος ο κόσμος v αν και μόνο αν ο v περιέχει τις ίδιες ή και περισσότερες προτάσεις από τον w.

Προκειμένου να οριστεί το απαγωγικό πρόβλημα, ορίζεται μεταγλώσσα L_M:

$L_M := a \mid \alpha \,\&\, \beta \mid \sim \alpha \mid \Box^+ \alpha \mid \Box^- \alpha$, όπου $a \in L$ και $\alpha, \beta \in L_M$.

Επειδή το σύνολο $\{\&, \sim\}$ είναι επαρκές, με προφανή τρόπο ορίζονται οι σύνδεσμοι ∇ και $\supset$ για την διάζευξη και την λογική συνεπαγωγή αντίστοιχα. Επίσης με τον συνήθη τρόπο ορίζονται οι τροπικότητες $\Diamond^+$ και $\Diamond^-$:

$\Diamond^+ \alpha := \sim \Box^+ \sim \alpha$

$\Diamond^- \alpha := \sim \Box^- \sim \alpha$

Ενώ η σημασιολογία των συνδέσμων σύζευξης και άρνησης είναι η συνήθης, ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει αυτή των $\Box^+$ και $\Box^-$:

3.8 $\mathfrak{M}, w \vDash \Box^+ \alpha \;\Leftrightarrow\; \forall v$ αν ισχύει wRv τότε $\mathfrak{M}, v \vDash \alpha$.

3.9 $\mathfrak{M}, w \vDash \Box^- \alpha \;\Leftrightarrow\; \forall v$ αν ισχύει vRw τότε $\mathfrak{M}, v \vDash \alpha$.

Ουσιαστικά ο τύπος $\Box^+ \alpha$ αληθεύει σε κάποιον κόσμο w αν και μόνο αν αληθεύει σε κάθε κόσμο που είναι προσβάσιμος από τον w. Αντίστοιχα ο τύπος $\Box^- \alpha$ αληθεύει σε κάποιον κόσμο w αν και μόνο αν αληθεύει σε κάθε κόσμο που έχει πρόσβαση στον w[13]. Ο τύπος $\Diamond^+ \alpha$ απαιτεί την ύπαρξη ενός κόσμου προσβάσιμου από τον w στον οποίο να αληθεύει το α και ο $\Diamond^- \alpha$ έναν κόσμο που να έχει πρόσβαση στον w και στον οποίο να αληθεύει το α .

Πλέον, το απαγωγικό πρόβλημα ορίζεται ως εξής:

3.10 $\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond^+ \varphi$

[13] Οι περιπτώσεις όπου το σύνολο των κόσμων που είναι προσβάσιμοι από τον w ή έχουν πρόσβαση στον w είναι κενό, δεν έχει κανένα ενδιαφέρον καθώς από τον ορισμό της σχέσης R, ισχύει πάντα wRw.

3.11 $\mathfrak{M}, w \vDash \lozenge^{+} \sim \varphi$

Ο κόσμος w στον οποίο βρίσκεται ο αντιλήπτορας, πρέπει να έχει πρόσβαση τουλάχιστον σε ένα κόσμο που ισχύει το γεγονός φ και σε έναν που ισχύει η άρνησή του. Δηλαδή το υπόβαθρο γνώσης, όπως αυτό κωδικοποιείται στις προτάσεις που είναι αληθείς στον w, μπορεί να επεκταθεί έτσι ώστε να περιλαμβάνει είτε το φ είτε την απουσία του. Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζεται ότι το φ είναι γνήσια μη αναμενόμενο γεγονός.

Πρόταση: Οι **3.10** και **3.11** χαρακτηρίζουν το *απαγωγικό πρόβλημα καινοφανών παρατηρήσεων* στο συγκεκριμένο τροπικό πλαίσιο.

Απόδειξη: Αρκεί να δειχθεί ότι η φ δεν έπεται από ούτε και αντικρούει τις προτάσεις του υποβάθρου γνώσης. Αν υποθέσουμε ότι η φ έπεται από το υπόβαθρο γνώσης $\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$, τότε εφόσον η σχέση πρόσβασης έχει οριστεί ως σχέση υποσυνόλων μεταξύ κόσμων, θα ισχύει κατ ανάγκην και $\mathfrak{M}, v \vDash \varphi$ για κάθε v για τον οποίο wRv. Άρα θα ισχύει και $\mathfrak{M}, w \vDash \Box^{+} \varphi$. Άτοπο καθώς η **3.11** απαιτεί να υπάρχει τουλάχιστον ένας κόσμος μετά τον w που να μην ισχύει η φ. Αν υποθέσουμε ότι η φ αντικρούει το υπόβαθρο γνώσης $\mathfrak{M}, w \vDash \sim \varphi$, τότε με παρόμοιο συλλογισμό καταλήγουμε πως $\mathfrak{M}, w \vDash \Box^{+} \sim \varphi$. Άτοπο καθώς η **3.10** απαιτεί να υπάρχει τουλάχιστον ένας κόσμος μετά τον w που να ισχύει η φ.■

Πλέον, *λύση του απαγωγικού προβλήματος* θεωρείται κάθε τύπος α που ικανοποιεί τις:

3.12 $\mathfrak{M}, w \vDash \Box^{+}(\alpha \supset \varphi)$ Απαίτηση παραγωγής

3.13	$\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond^{+} \alpha$	Απαίτηση συνέπειας
3.14	$\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond^{-} \Diamond^{+} (\alpha \& \sim \varphi)$	Απαίτηση καλής εξήγησης

Πρόταση: Οι **3.12-3.14** είναι ισοδύναμες των **3.3-3.5** αντίστοιχα, στο συγκεκριμένο τροπικό πλαίσιο.

Απόδειξη: Επειδή η σχέση πρόσβασης έχει οριστεί ως σχέση υποσυνόλου, ισχύει πάντα wRw. Άρα από την **3.12** έπεται ότι $\mathfrak{M}, w \vDash (\alpha \supset \varphi)$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το $\mathfrak{M}, w \cup \{\alpha\} \vDash \varphi$ που από τα θεωρήματα ορθότητας και πληρότητας της τροπικής λογικής είναι ισοδύναμη της $\mathfrak{M}, w \cup \{\alpha\} \vdash \varphi$, την αντίστοιχη της **3.5**.

Αν το υπόβαθρο γνώσης ήταν ασυνεπές με την εξήγηση α τότε θα ίσχυε $\mathfrak{M}, w \vDash \sim \alpha$ άρα και $\mathfrak{M}, w \vDash \Box^{+} \sim \alpha$, δηλαδή σε κάθε επόμενο του w ισχύει $\sim \alpha$. Άτοπο γιατί από την **3.13** έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας κόσμος v για τον οποίο ισχύει wRv και όπου αληθεύει το α.

Η απαίτηση καλής εξήγησης εξασφάλιζε πως το α δεν αποτελεί λήψη του ζητουμένου. Με βάση την **3.14** υπάρχει κάποιος κόσμος v προηγούμενος του w, ο οποίος έχει έναν επόμενο v' που παράγει τους τύπους α και $\sim \varphi$. Από τον ορισμό της σχέσης πρόσβασης, ο v' μπορεί να είναι οποιοσδήποτε κόσμος δηλαδή οποιοδήποτε συνεπές σύνολο προτάσεων. Για παράδειγμα μπορεί να ταυτίζεται τετριμμένα κάθε φορά ο v με τον κενό κόσμο, οπότε ο v' δύναται να είναι οποιοσδήποτε περιέχει μια τουλάχιστον πρόταση. Έστω ότι ο $\mathfrak{M}, v' \vDash \alpha$ και $\mathfrak{M}, v' \vDash \sim \varphi$ και συγχρόνως η εξήγηση α δεν είναι καλή, δηλαδή $\alpha \vDash \varphi$. Τότε $\mathfrak{M}, v' \vDash \sim \varphi$, άρα ο v' είναι ασυνεπής, πράγμα το οποίο είναι άτοπο.■

Από τις **3.10-3.15** προκύπτει ότι ο τύπος:

3.16 $(\Diamond^{+}\varphi)\,\&\,(\Diamond^{+}\sim\varphi)\,\&\,(\Box^{+}(\alpha\supset\varphi))\,\&\,(\Diamond^{+}\alpha)\,\&\,(\Diamond^{-}\Diamond^{+}(\alpha\,\&\sim\varphi))$

Αν επαληθεύεται σε ένα μοντέλο $\mathfrak{M}$ για κάποιον κόσμο w, τότε ο φ αποτελεί απαγωγικό πρόβλημα καινοφανών παρατηρήσεων και ο α είναι μια καλή και συνεπής εξήγηση από την οποία μπορεί να προκύψει ο φ.

Τυπικά, το πλαίσιο που περιγράφηκε είναι ένα μεταβατικό και αυτοπαθές πλαίσιο που χαρακτηρίζεται από τα αξιώματα **S4**[14]:

K $\Box^{+}(\alpha\supset\beta)\supset(\Box^{+}\alpha\rightarrow\Box^{+}\beta)$

T $\Box^{+}\alpha\supset\alpha$

4 $\Box^{+}\alpha\supset\Box^{+}\Box^{+}\alpha$

Το **K** είναι κλασσικό αξίωμα και ισχύει σε κάθε τροπικό πλαίσιο. Το **T** εφοδιάζει το πλαίσιο με την αυτοπάθεια, δηλαδή για κάθε κόσμο w να ισχύει wRw. Το **4** αφορά την μεταβατικότητα και ισοδυναμεί με το ότι για κάθε w_1, w_2, w_3, αν ισχύει w_1Rw_2 και w_2Rw_3, τότε θα ισχύει και w_1Rw_3. Τα **T** και **4** χαρακτηρίζουν μονοσήμαντα τις ιδιότητες της σχέσης υποσυνόλου $\subseteq$. Επιπλέον, στο πλαίσιο ισχύει ο συμπερασματικός κανόνας **RN**:

RN $$\frac{\alpha}{\Box^{+}\alpha}$$

Τέλος οι τροπικότητες $\Box^{+}$ και $\Box^{-}$ συνδέονται με τα αξιώματα:

BA1 $\alpha\supset\Box^{+}\Diamond^{-}\alpha$

BA2 $\alpha\supset\Box^{-}\Diamond^{+}\alpha$

[14] Όπου **S4=K+T+4**.

Οι Soler-Toscano, Fernandez-Duque και Nepomuceno-Fernandez υποστηρίζουν πως το συγκεκριμένο μοντέλο πιθανά να μπορεί να τυποποιήσει το *απαγωγικό πρόβλημα ανώμαλων παρατηρήσεων*, χωρίς όμως να περιγραφουν τον τρόπο. Μια δυνατή τυποποίηση μπορεί να προκύψει εκκινώντας από τον ορισμό των ανώμαλων παρατηρήσεων:

Ορισμός: Έστω υπόβαθρο γνώσης Θ. Μία παρατήρηση φ θα χαρακτηρίζεται ανώμαλη αν ισχύει ότι $\Theta \vdash \neg\varphi$

Δηλαδή μία παρατήρηση χαρακτηρίζεται ανώμαλη αν από το υπόβαθρο γνώσης παράγεται η άρνησή της. Σε αυτή την περίπτωση, προκύπτει μια φανερή ασυνέπεια μεταξύ θεωρίας και παρατηρήσεων. Το σύνολο $\Theta \cup \{\varphi\}$ είναι ασυνεπές. Προκειμένου να εξαλειφθεί η ασυνέπεια, απαιτείται να αφαιρεθεί κάποια ή κάποιες προτάσεις από το υπόβαθρο γνώσης έτσι ώστε για το νέο σύνολο Θ'[15], να ισχύει $\Theta' \cup \{\varphi\}$ συνεπές. Στη συνέχεια γίνεται προσπάθεια να βρεθεί κατάλληλη εξήγηση α που να ικανοποιεί τις **3.3-3.5** για το νέο υπόβαθρο Θ'. Σε αυτή την περίπτωση, το απαγωγικό πρόβλημα ορίζεται ως εξής:

3.17 $\mathfrak{M}, w \vDash \neg\varphi$

Λύση του απαγωγικού προβλήματος θεωρείται κάθε τύπος α που ικανοποιεί την:

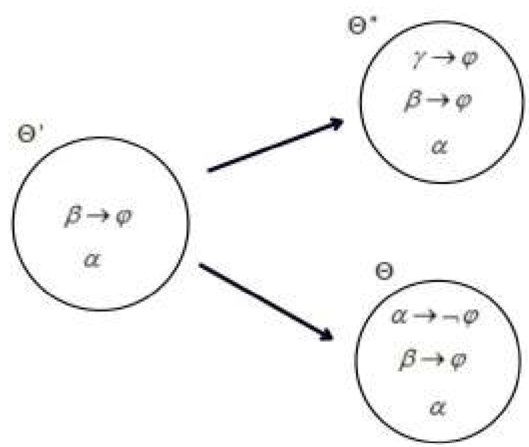
3.18 $\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond^{-}\Diamond^{+}(\Box^{+}(\alpha \supset \varphi)\ \&\ \Diamond^{+}\ \alpha\ \&\ \Diamond^{-}\Diamond^{+}(\alpha \& \sim\varphi))$

Η **3.18** περιλαμβάνει τη σύζευξη των τριών απαιτήσεων **3.12-3.14**, εφοδιασμένες με τους τροπικούς τελεστές $\Diamond^{-}\Diamond^{+}$. Αυτός είναι ένας τρόπος να περιγραφεί η διαδικασία οπισθοχώρησης σε ένα υποσύνολό και η συνακόλουθη επέκταση σε κάποιο νέο στο

[15] για το οποίο $\Theta' \subset \Theta$.

οποίο θα αναζητηθεί η εξήγηση α. Ο πρώτος τελεστής $\Diamond^-$ δηλώνει την ύπαρξη ενός κόσμου με σύνολο προτάσεων Θ' που να είναι προηγούμενος του Θ, άρα και υποσύνολό του. Ο τελεστής $\Diamond^+$ απαιτεί να υπάρχει κάποιος επόμενος του Θ', έστω ο Θ'', που να είναι υπερσύνολό του και στον οποίον να ισχύουν οι τρεις απαιτήσεις. Προφανώς ο κόσμος του Θ'' θα πρέπει να είναι διαφορετικός από τον κόσμο του Θ, διαφορετικά θα παραμένει το απαγωγικό πρόβλημα ανώμαλων παρατηρήσεων.

Για παράδειγμα, έστω $\Theta = \{\alpha \rightarrow \neg\varphi, \beta \rightarrow \varphi, \alpha\}$ και παρατήρηση φ. Η φ είναι ανώμαλη παρατήρηση για το υπόβαθρο γνώσης και το σύνολο $\Theta \cup \{\varphi\}$ ασυνεπές. Ένας τρόπος να λυθεί η ασυνέπεια είναι να διαγραφεί η προκείμενη $\alpha \rightarrow \neg\varphi$ και στη συνέχεια να προστεθεί η $\gamma \rightarrow \varphi$ ώστε να οδηγηθούμε στην εξήγηση γ. Φυσικά αυτή δεν είναι η μόνη δυνατή λύση. Θα μπορούσε να διαγραφεί κάποια άλλη αρχή, για παράδειγμα η α και να μην προστεθεί καμία, οπότε ο τύπος β θα ήταν μια καλή εξήγηση. Σχηματικά:



4. Στοχοκατευθυνόμενες αποδείξεις

Οι στοχοκατευθυνόμενες αποδείξεις στην τυποποίηση της απαγωγής πρωτοχρησιμοποιήθηκαν από τον Batens το 2006[16]. Στην συνέχεια εξελίχθηκαν έτσι ώστε να ικανοποιούν μια περιορισμένη εκδοχή της απαίτησης της ενοποιητικής ισχύος καθώς οι λογικές που θεμελιώθηκαν, παρήγαγαν εξηγήσεις με μια υπόθεση[17]. Το άκρως ενδιαφέρον χαρακτηριστικό του προγράμματος είναι πως για πρώτη φορά εμφανίζεται η ανάγκη να διαφοροποιηθούν οι διάφορες καταστάσεις της γνώσης. Πιο συγκεκριμένα, η απαγωγή είναι μια φαλλιμπιλιστική μέθοδος, οπότε τα συμπεράσματά της δεν μπορεί να έχουν την ίδια γνωσιακή αξία με αυτά της παραγωγής. Οι υποθέσεις που επιλέγονται ως καλύτερες δεν είναι κατ' ανάγκην αληθείς. Θα πρέπει, λοιπόν, να υπάρχει δυνατότητα οι εξηγήσεις που θα επιλεγούν να μπορούν να ενσωματωθούν στο υπόβαθρο γνώσης με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε αν αργότερα παρατηρηθεί κάτι που τις αμφισβητεί όπως ένα αντιπαράδειγμα, να είναι δυνατό να διαχωριστούν από τις πιο βέβαιες γνώσεις. Άρα απαιτείται η γνωσιακή κατάσταση των απαγωγικών συμπερασμάτων να διαφέρει από αυτή της βέβαιης γνώσης.

Σε αυτό το σημείο εισάγονται[18] οι τροπικές γλώσσες, που δίνουν μια τέτοια δυνατότητα. Ειδικότερα, οι δυο συνήθεις τελεστές μπορούν να νοηματοδοτηθούν ως εξής: κάθε πρόταση του υποβάθρου γνώσης και κάθε παρατηρησιακή απόφανση θα συμβολίζονται με $\Box\alpha$ και θα διαβάζονται ως "κατ' ανάγκην ισχύει ότι α" ενώ κάθε απαγωγικό συμπέρασμα θα γράφεται ως $\Diamond\alpha$ και θα αντιστοιχεί στο ότι "το α είναι δυνατό". Η πληρέστερη τροπική προσέγγιση στοχοκατευθυνόμενων αποδείξεων περιγράφεται στο Gauderis (2012), όπου ως απαγωγή ορίζεται το σχήμα:

Προκείμενη	$\Box\ \forall x(A(x) \rightarrow B(x))$
Προκειμενη	$\Box\ B(a)$
Συμπέρασμα	$\Diamond\ A(a)$

[16] Βλ. Batens (2006).
[17] Ενδεικτικά βλ Meheus (2010).
[18] Βλ. Meheus et al (2008).

Δηλαδή, ο απαγωγικός συμπερασμός λαμβάνει χώρα όταν παρατηρείται ένα γεγονός $B(a)$ που μπορεί να παραχθεί από τον καθολικό νόμο $\forall x(A(x) \to B(x))$, οπότε σαν συμπέρασμα προκύπτει η επιβεβαίωση της προκείμενης [affirming the consequent].

Έστω L γλώσσα της πρωτοβάθμιας λογικής, εφοδιασμένη με τους συνδέσμους και ποσοδείκτες $\{\to, \neg, \wedge, \vee, \exists, \forall\}$. Η L_M αποτελεί την τροπική επέκταση της L:

$L_M \coloneqq a \,|\Box a \,|\, \neg\alpha \,|\, \alpha \wedge \beta \,|\, \alpha \vee \beta \,|\, \alpha \to \beta \,|\, a \leftrightarrow b \,|\, \top$, όπου $a \in L$, $\alpha, \beta \in L_M$.

Εξ ορισμού, η L_M αποτελείται από τροπικούς τύπους πρώτου βαθμού. Κάθε τύπος μπορεί να περιέχει οποιονδήποτε αυθαίρετο αριθμό τροπικών τελεστών, με μόνο περιορισμό ότι κανείς από αυτούς δεν μπορεί να βρίσκεται μέσα στην εμβέλεια κάποιου άλλου. Έτσι, ο τύπος **4.1** είναι καλά σχηματισμένος, ενώ ο **4.2**[19] δεν ανήκει στην L_M.

4.1 $\quad \Box\alpha \to \Box(\alpha \vee \beta)$

4.2 $\quad \Box\alpha \to \Box\Box\alpha$

Η λογική που θα χρησιμοποιηθεί στις στοχοκατευθυνόμενες αποδείξεις περιλαμβάνει τα κλασσικά αξιώματα του πρωτοβάθμιου κατηγορηματικού λογισμού μαζί τα παρακάτω:

K $\quad \Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$

D $\quad \Box a \to \neg\Box\neg a$

Το **K** είναι κλασσικό αξίωμα και ισχύει σε κάθε τροπικό πλαίσιο. Το **D** εξασφαλίζει την σειριακότητα του μοντέλου, καθώς κάθε κόσμος στον οποίο θα ισχύει κάποιο τύπος α θα πρέπει να έχει κάποιον επόμενο με τον οποίο να συνδέεται με τη σχέση πρόσβασης R. Μάλιστα, αυτό θα ισχύει τετριμμένα, καθώς σε κάθε τυχαίο κόσμο w ισχύει η ταυτολογία $\alpha \vee \neg\alpha$. Αν ο w έχει κάποιον επόμενο τότε ικανοποιεί την ιδιότητα της σειριακότητας. Αν δεν έχει, τότε θα ισχύει $\Box(\alpha \vee \neg\alpha)$, άρα και από το **D** $\neg\Box\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$

[19] Το γνωστό θεώρημα **4**.

το οποίο ισοδυναμεί με την ύπαρξη ενός w' τέτοιου ώστε Rww', στον οποίο να αληθεύει ο $\alpha \vee \neg\alpha$. Επιπροσθέτως, το αξίωμα **D** εξασφαλίζει την συνέπεια μεταξύ του υποβάθρου γνώσης και των προς εξήγηση γεγονότων. Για παράδειγμα, το **D** αποτρέπει την υϊοθέτηση ασυνεπών συνόλων όπως το $\{\neg P(a), \forall x P(x)\}$, όπου ο νόμος $\forall x P(x)$ παραβιάζεται από την παρατήρηση $\neg P(a)$. Επιπλέον, η λογική εφοδιάζεται με τον συμπερασματικό κανόνα **RN**:

RN $$\frac{\alpha}{\Box\alpha}$$

Τέλος, ο τελεστής $\Diamond$ ορίζεται με το συνήθη τρόπο:

BA $\Diamond a \leftrightarrow \neg\Box\neg a$

Το κύριο πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι οι δυναμικές αποδείξεις της. Πιο συγκεκριμένα, κάθε γραμμή της απόδειξης αποτελείται από 4 στήλες. Οι πρώτες τρεις περιέχουν τον αριθμό της γραμμής, τον τύπο και την δικαιολόγησή του. Η τέταρτη περιλαμβάνει την συνθήκη υπό την οποία ο τύπος αληθεύει. Η συνθήκη συνίσταται σε μια ή περισσότερες προτάσεις, οι οποίες θα πρέπει να είναι ψευδείς προκειμένου να είναι ορθή η συναγωγή του τύπου. Το σύνολο των νέων[20] προτάσεων που πρέπει να είναι ψευδείς ώστε ο τύπος β να είναι αληθής θα συμβολίζεται με Θ και η σύζευξή τους με $\Theta^{\wedge}$. Έστω Γ το σύνολο των προκείμενων του απαγωγικού προβλήματος, που περιλαμβάνει τις προτάσεις του υπόβαθρου γνώσης και όλους τους τύπους που αντιστοιχούν στα γεγονότα που εχουν παρατηρηθεί. Πλέον η αποδεικτική θεωρία εφοδιάζεται με τους γενικούς κανόνες:

[20] Όπου "νέες" οι προτάσεις που δεν κληρονομούνται από κάποιο προηγούμενο βήμα της απόδειξης.

$$\textbf{PREM} \qquad \begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ \hline \alpha & \varnothing \end{array} \qquad \text{όπου } \alpha \in \Gamma$$

$$\textbf{RU} \qquad \begin{array}{cc} \alpha_1 & \Delta_1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \Delta_n \\ \hline \beta & \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n \end{array} \qquad \text{όπου } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$$

$$\textbf{RC} \qquad \begin{array}{cc} \alpha_1 & \Delta_1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \Delta_n \\ \hline \beta & \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n \cup \Theta \end{array} \qquad \text{όπου } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta \vee \Theta^{\vee}$$

Ο κανόνας **PREM** επιτρέπει την εμφάνιση οποιασδήποτε πρότασης του υπόβαθρου γνώσης ή παρατήρησης, σε κάθε σημείο της απόδειξης χωρίς καμία συνθήκη. Ουσιαστικά, αυτού του τύπου οι προκείμενες αντιμετωπίζονται όπως τα αξιώματα στις κλασσικές αποδείξεις. Με χρήση του κανόνα **RU** είναι δυνατή η συναγωγή οποιασδήποτε πρότασης β προκύπτει παραγωγικά από ένα σύνολο προκειμένων $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Η συνθήκη $\Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n$ δεν είναι κενή μόνο όταν κάποιο ή κάποια από τα στοιχεία του $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ είναι απαγωγικοί συμπερασμοί. Η απαγωγική διαδικασία τυποποιείται από τον κανόνα **RC**. Ειδικότερα, κάθε απαγωγικό συμπέρασμα β είναι δυνατόν να προκύψει παραγωγικά από τις προκείμενες $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ εφόσον δεν ικανοποιείται ένα σύνολο συνθηκών Θ. Ο τρόπος κατασκευής του Θ καθορίζει τις εξηγητικές αρετές που ικανοποιεί το β. Έστω ότι το υπόβαθρο γνώσης περιέχει την γενίκευση $\forall x(A_1(x) \wedge ... \wedge A_n(x) \to B(x))$ και έχει παρατηρηθεί ότι $B(a)$. Η επιθυμητή εξήγηση θα πρέπει να ικανοποιεί τις αρετές:

	Σύνολο συνθηκών	Εξηγητική αρετή
4.3	$\Box(\forall x(A_1(x) \wedge ... \wedge A_n(x) \to B(x)) \wedge B(a) \wedge \neg(A_1(a) \wedge ... \wedge A_n(a)))$	Συνέπεια
4.4	$\Box \forall x B(x)$	Αποκλεισμός Ταυτολογιών
4.5	$\Box(\forall x(A_2(x) \wedge ... \wedge A_n(x) \to B(x))) \vee \Box(\forall x(A_1(x) \wedge A_3(x) ... \wedge A_n(x) \to B(x))) \vee ... \vee \Box(\forall x(A_1(x) \wedge ... \wedge A_{n-1}(x) \to B(x)))$	Οικονομία

Η **4.3** αποκλείει την ύπαρξη ασυνεπών με το υπόβαθρο γνώσης εξηγήσεων. Έστω ότι το σύνολο των προκειμένων περιλαμβάνει μεταξύ άλλων τους τύπους $\forall x(A_1(x) \wedge ... \wedge A_n(x) \to B(x))$ και $B(a)$. Τότε μέρος της απόδειξης μπορεί να είναι:

1	$\Box\ \forall x(A_1(x) \wedge ... \wedge A_n(x) \to B(x))$	PREM	$\varnothing$
2	$\Box\ B(a)$	PREM	$\varnothing$
3	$\Diamond(A_1(a) \wedge ... \wedge A_n(a))$	1,2,RC	$\Box(\forall x(A_1(x) \wedge ... \wedge A_n(x) \to B(x)) \wedge B(a) \wedge \neg(A_1(a) \wedge ... \wedge A_n(a)))$

Η συνθήκη στο απαγωγικό βήμα 3 ορίζει πως αυτό αποτελεί συνεπή εξήγηση όσο δεν προκύπτει ο τύπος $\neg(A_1(a) \wedge ... \wedge A_n(a))$, δηλαδή όσο δεν εμφανίζεται κάποιο αντιπαράδειγμα. Σε περίπτωση που σε επόμενο βήμα αποδειχθεί πως κάποια από τις $A_i(a)$ είναι ψευδής, τότε το βήμα 3 καθίσταται άκυρο καθώς επαληθεύεται η συνθήκη του. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην μπορεί να χρησιμοποιηθεί περαιτέρω στην απόδειξη. Σε περίπτωση που ο τύπος $\neg(A_1(a) \wedge ... \wedge A_n(a))$ αποτελεί προκείμενη κάποιου επόμενου βήματος, τότε και αυτό με τη σειρά του είναι άκυρο γιατί έχει κληρονομήσει την συνθήκη του 3 η οποία πλέον δεν ισχύει. Άρα σε περίπτωση που κάποια συνθήκη επαληθευθεί, καθίσταται άκυρο το βήμα στο οποίο εμφανίζεται μαζί με το σύνολο του αποδεικτικού κλάδου που το χρησιμοποιεί.

Η **4.4** απαιτεί σε κάθε απαγωγικό συλλογισμό το προς εξήγηση γεγονός να μην είναι ταυτολογία. Για παράδειγμα, ο τύπος $B(a) \vee \neg B(a)$ είναι τετριμμένα αληθής, οπότε από τον ορισμό της υλικής συνεπαγωγής προκύπτει ότι $\forall x(A(x) \rightarrow (B(x) \vee \neg B(x)))$ για κάθε κατηγόρημα A. Άρα χωρίς την **4.4**, το $\Diamond A(a)$ θα ήταν δικαιολογημένο συμπέρασμα. Προφανώς τέτοιες εξηγήσεις πρέπει να αποκλειστούν, καθώς μια ταυτολογία δεν χρειάζεται εξήγηση. Με χρήση της **4.4**, σε κάθε απαγωγικό βήμα προστίθεται η συνθήκη αποκλεισμού των ταυτολογιών. Έτσι, στο παραπάνω παράδειγμα η συνθήκη του συμπεράσματος θα είναι $\forall x(B(x) \vee \neg B(x))$. Όμως αυτή ικανοποιείται πάντα, οπότε το απαγωγικό βήμα καθίσταται άκυρο.

Τέλος η **4.5** τυποποιεί την απαίτηση της οικονομίας ακυρώνοντας συμπεράσματα που χρησιμοποιούν περισσότερες ατομικές εξηγήσεις από όσες χρειάζονται. Ειδικότερα, μια γενίκευση της μορφής $\forall x(A_1(x) \wedge ... \wedge A_n(x) \rightarrow B(x))$ περιλαμβάνει n προκείμενες. Έστω ότι κάποια από αυτές, για παράδειγμα η $A_i(x)$, δεν έχει καμία εξηγητική δύναμη, δηλαδή είναι περιττή. Τότε ο τύπος $\forall x(A_1(x) \wedge ... \wedge A_{i-1}(x) \wedge A_{i+1}(x) \wedge ... \wedge A_n(x) \rightarrow B(x))$ θα είναι εξίσου αληθής με την αρχική γενίκευση. Εφοδιάζοντας το απαγωγικό βήμα με τον έλεγχο των n νόμων όπου κάθε φορά έχει αποκλειστεί μια διαφορετική προκείμενη $A_i(x)$, αποφεύγονται οι μη οικονομικές εξηγήσεις, καθώς αν δεν γίνει αληθής κανένας από αυτούς τότε όλες οι $A_i(x)$ προσφέρουν ουσιωδώς στην εξήγηση του $B(x)$. Έτσι αποφεύγεται η ενδυνάμωση του ηγούμενου [strengthening the antecedent]. Πλέον, η απαγωγή ορίζεται στα πλαίσια του παραπάνω αποδεικτικού συστήματος από τον κανόνα **RC**, όπου το σύνολο συνθηκών Θ ορίζεται από τις προτάσεις που προκύπτουν από τις **4.3**-**4.5** για την εκάστοτε προκείμενη. Ένας τύπος είναι οριστικά αποδείξιμος αν σε κάθε δυνατή επέκταση της απόδειξης, δεν αποδεικνύεται καμία από τις συνθήκες του.

5. Κριτική αποτίμηση μοντέλου πολλαπλών κόσμων

Το πλαίσιο των Soler-Toscano, Fernandez-Duque και Nepomuceno-Fernandez μπορεί να τυποποιήσει αρκετά είδη απαγωγής. Θεωρητικά, οι γεγονοτικές απαγωγές σχηματοποιούνται ως:

5.1

$$\frac{\forall x(Ax \rightarrow Bx) \quad Be}{Ae}$$

Τυπικά, ο νόμος $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$ περιέχεται στο υπόβαθρο γνώσης, οπότε θα αποτελεί μέλος του συνόλου προτάσεων που θα ανήκουν στον w. Έστω ότι το προς εξήγηση γεγονός είναι καινοφανές, άρα ούτε αυτό ούτε η άρνησή του θα περιέχονται ή θα παράγονται στον w. Σε διαφορετική περίπτωση, αν $w \vDash Be$ τότε είτε το Be αποτελεί μέλος του w είτε παράγεται από τα μέλη του, σε κάθε περίπτωση δεν χρήζει εξήγησης. Αν, πάλι, $w \vDash \neg Be$ τότε το Be αποτελεί αντικρουόμενη παρατήρηση. Με δεδομένο ότι είναι καινοφανές θα ισχύει:

5.2 $\quad \mathfrak{M}, w \vDash \Diamond^{+} Be$

5.3 $\quad \mathfrak{M}, w \vDash \Diamond^{+} \sim Be$

Άρα το Be είναι ένα γνήσιο απαγωγικό πρόβλημα καινοφανών παρατηρήσεων. Επιπροσθέτως, οι λύσεις τέτοιων προβλημάτων μπορούν να ικανοποιούν τις τρεις απαιτήσεις. Επειδή στον w ισχύει ότι $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$ και κάθε επόμενος αποτελεί υπερσύνολο του w, εύκολα δείχνεται ότι εκεί ανήκει η πρόταση $\forall x(Ax \supset Bx)$. Η απαίτηση της συνέπειας ορίζει πως πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένας συνεπής κόσμος επόμενος του w, που να περιέχει την εξήγηση Ae. Τέλος, θα πρέπει να είναι εφικτό σε κάποιον κόσμο να ισχύει η εξήγηση Ae και να μην έχει εμφανιστεί το γεγονός Be. Τα παραπάνω κωδικοποιούνται ως εξής:

5.4	$\mathfrak{M}, w \vDash \Box^{+} \forall x(Ax \supset Bx)$	Απαίτηση παραγωγής
5.5	$\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond^{+}\ Ae$	Απαίτηση συνέπειας
5.6	$\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond^{-} \Diamond^{+}(Ae \& \sim Be)$	Απαίτηση καλής εξήγησης

Με παρόμοιο τρόπο τυποποιούνται οι πρωτοβάθμιες υπαρκτικές καινοφανών. Ο γενικευμένος συλλογισμός:

5.7

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x \forall \vec{y}(Ax\vec{y} \rightarrow Bx) \\ Be\end{array}}{\exists \vec{y} Ae\vec{y}}$$

τυποποιείται ως εξής. Στον κόσμο w ανήκουν οι νόμοι της μορφής $\forall x \forall \vec{y}(Ax\vec{y} \rightarrow Bx)$. Εφόσον το Be είναι καινοφανές, τότε η εμφάνισή του θα είναι απαγωγικό πρόβλημα στον w, δηλαδή θα ισχύουν οι **5.2**, **5.3**. Οι τρεις εξηγητικές αρετές θα αντιστοιχούν στις:

5.8	$\mathfrak{M}, w \vDash \Box^{+} \forall x \forall \vec{y}(Ax\vec{y} \rightarrow Bx)$	Απαίτηση παραγωγής
5.9	$\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond^{+}\ \exists \vec{y} Ae\vec{y}$	Απαίτηση συνέπειας
5.10	$\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond^{-} \Diamond^{+}(\exists \vec{y} Ae\vec{y} \& \sim Be)$	Απαίτηση καλής εξήγησης

Εξαιτίας της διάκρισης μεταξύ του υπόβαθρου γνώσης και του συνόλου παρατηρήσεων, είναι δυνατόν να τυποποιηθούν οι απαγωγές νόμων.

	$\forall x(Ax \rightarrow Cx)$	Γενικός κανόνας
5.11	$\forall x(Bx \rightarrow Cx)$	Εμπειρικός κανόνας

$$\overline{\forall x(Bx \to Ax)} \qquad \text{Απαγωγικό συμπέρασμα}$$

Ο γενικός κανόνας $\forall x(Ax \to Cx)$ θα εμπεριέχεται στο υπόβαθρο γνώσης όπως αυτό τυποποιείται στον w. Προφανώς από αυτόν δεν προκύπτει ο εμπειρικός κανόνας, άρα ο τελευταίος αποτελεί γνήσιο απαγωγικό πρόβλημα:

5.12 $\mathfrak{M}, w \vDash \lozenge^{+} \forall x(Bx \to Cx)$

5.13 $\mathfrak{M}, w \vDash \lozenge^{+} \sim \forall x(Bx \to Cx)$

Προκειμένου το πρόβλημα να αποκτήσει τυπική μορφή Aliseda[21], εφαρμόζεται η παρακάτω τεχνική. Από το ότι $\mathfrak{M}, w \vDash \forall x(Ax \to Cx)$ έπεται ο τύπος $\mathfrak{M}, w \vDash \forall x((Bx \to Ax) \to (Bx \to Cx))$ και τελικά $\mathfrak{M}, w \vDash \forall x(Bx \to Ax) \to \forall x(Bx \to Cx)$. Άρα το σχήμα **5.11** λαμβάνει τη μορφή:

	$\forall x(Bx \to Ax) \to \forall x(Bx \to Cx)$	Γενικός κανόνας
5.14	$\forall x(Bx \to Cx)$	Εμπειρικός κανόνας
	$\overline{\forall x(Bx \to Ax)}$	Απαγωγικό συμπέρασμα

Πλέον, οι τρεις απαιτήσεις μπορούν να μετασχηματιστουν στις:

5.15	$\mathfrak{M}, w \vDash \square^{+}(\forall x(Bx \to Ax) \supset \forall x(Bx \to Cx))$	Απαίτηση παραγωγής
5.16	$\mathfrak{M}, w \vDash \lozenge^{+} \ \forall x(Bx \to Ax)$	Απαίτηση συνέπειας
5.17	$\mathfrak{M}, w \vDash \lozenge^{-} \lozenge^{+}(\forall x(Bx \to Ax) \& \sim \forall x(Bx \to Cx))$	Απαίτηση καλής εξήγησης

[21] Δηλαδή η δομή του να είναι παρόμοια με αυτή του σχήματος 5.1.

Οι απαγωγές αντικρουόμενων δεδομένων δεν μπορούν να τυποποιηθούν με αντίστοιχο τρόπο, καθώς πριν το απαγωγικό βήμα θα πρέπει υποχρεωτικά να γίνει αναθεώρηση του υπόβαθρου γνώσης. Κατά την αναθεώρηση είναι πιθανό να διαγραφούν ένας ή περισσότεροι νόμοι, οπότε το νέο υπόβαθρο γνώσης θα αποτελεί γνήσιο υποσύνολο του παλιού. Η διαδικασία διαγραφής νόμων δεν είναι τετριμένη, ούτε στηρίζεται στα δομικά χαρακτηριστικά τους. Οι πληροφορίες που απαιτούνται υπερβαίνουν την απλή λογική δομή των παραπάνω μοντέλων. Το μόνο σημείο που φαίνεται να μπορεί να λάβει λογική μορφή είναι ο χαρακτηρισμός τους, που στην περίπτωση γεγονοτικών απαγωγών και πρωτοβάθμιων υπαρκτικών θα είναι της μορφής:

5.18 $\mathfrak{M}, w \vDash \neg Be$

ενώ στις απαγωγές νόμων θα γίνεται:

5.19 $\mathfrak{M}, w \vDash \neg \forall x(Bx \to Cx)$

Αντίστροφα, μετά τη διαγραφή των αναγκαίων νόμων ο απαγωγικός συμπερασμός θα περιλαμβάνεται σε κάποιον από τα προηγούμενα ήδη, οπότε θα μπορεί να τυποποιηθεί. Άρα με την εξαίρεση της υποκατηγορίας των γεγονοτικών απαγωγών μή παρατηρήσιμων, το μοντέλο των πολλαπλών κόσμων μπορεί να συμπεριλάβει όλα τα είδη επιλεκτικών απαγωγών κατά Schurz.

Το συγκεκριμένο πλαίσιο, παρά την πλούσια δομή του, επιτρέπει την υιοθέτηση κακών εξηγήσεων, δηλαδή τύπων που δεν ικανοποιούν την αρετή του συνάλματος. Έστω κόσμος w, με $w = \{\alpha \to \varphi\}$. Ο τύπος φ αποτελεί απαγωγικό πρόβλημα για τον w, καθώς δεν παράγεται σε αυτόν και ταυτόχρονα μπορεί να παραχθεί είτε ο ίδιος είτε η άρνησή του σε κάποιον επόμενο. Για παράδειγμα, αν $w_1 = w \cup \{\varphi\}$ και $w_2 = w \cup \{\neg\varphi\}$, ισχύει wRw_1 και wRw_2, οπότε: $\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond^+ \varphi$ και $\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond^+ \sim \varphi$. Δυνατή λύση θα είναι ο τύπος α, καθώς ικανοποιεί τις τρεις απαιτήσεις. Επειδή στον w ισχύει ο τύπος $\alpha \to \varphi$, θα ισχύει και σε κάθε επόμενο, οπότε και $\mathfrak{M}, w \vDash \Box^+(\alpha \supset \varphi)$. Επίσης ο κόσμος

$w' = w \cup \{\alpha\}$ αποτελεί συνεπή επέκταση του w, άρα $\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond^{+} \alpha$. Τέλος στον κόσμο $w'' = \{\alpha\}$ δεν αποδεικνύεται ο τύπος φ αλλά ισχύει ο a, οπότε $\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond^{-} \Diamond^{+} (\alpha \& \sim \varphi)$.

Όμως στο υπάρχον πλαίσιο, είναι εφικτό στον κόσμο w να γίνει ενδυνάμωση του ηγούμενου, δηλαδή $\mathfrak{M}, w \vDash (\alpha \wedge \gamma) \to \varphi$, όπου γ *σχεδόν* οποιοσδήποτε τυχαίος τύπος. Σε αυτή την περίπτωση το φ παραμένει απαγωγικό πρόβλημα. Αν ο τύπος $\alpha \wedge \gamma$ ικανοποιεί τις τρεις απαιτήσεις, τότε θα αποτελεί νόμιμη εξήγηση. Η απαίτηση της παραγωγής ικανοποιείται τετριμμένα. Άρα αρκεί η προσθήκη του γ στον w αφενός να μην οδηγεί σε κάποια αντίφαση και αφετέρου να υπάρχει κόσμος στον οποίο να μην μπορεί να παραχθεί μόνο από το γ το προς εξήγηση δεδομένο φ. Επομένως η $\alpha \wedge \gamma$ θα αποτελεί εξήγηση εξίσου καλή με την α, οποιαδήποτε και αν είναι η ερμηνεία του γ.

Προφανώς αυτό συμβαίνει διότι το συγκεκριμένο πλαίσιο δεν καταφέρνει να τυποποιήσει την αρετή του συνάλματος. Αν το υπόβαθρο γνώσης ταυτιστεί με τις προτάσεις που περιλαμβάνονται στον w και όχι γενικά με το σύνολο των προτάσεων που μπορούν να αποδειχθούν σε αυτόν, τότε μεταξύ των δυνητικών εξηγήσεων α και $\alpha \wedge \gamma$ προκρίνεται η πρώτη. Ο τύπος α ταιριάζει περισσότερο στο σύνολο $\{\alpha \to \varphi\}$ έναντι του $\alpha \wedge \gamma$, ακριβώς όπως η πρόταση {έχει καταστραφεί η σχετική ασφάλεια} εξηγεί καλύτερα την σβηστή λάμπα έναντι της {έχει καταστραφεί η σχετική ασφάλεια και όλο το πρωί είχε έντονη ηλιοφάνεια}. Άρα στο πλαίσιο των πολλαπλών κόσμων επιτρέπονται μη συναλματικές εξηγήσεις.

Επιπλέον, με τον συγκεκριμένο ορισμό των απαγωγικών λύσεων, επιτρέπονται οι μη οικονομικές εξηγήσεις. Ειδικότερα, έστω ότι $w = \{\alpha \to \varphi, \beta \to \varphi\}$. Επειδή η πρόταση φ δεν παράγεται στον w θα ισχύει $\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond^{+} \varphi$ και $\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond^{+} \sim \varphi$, δηλαδή θα υπάρχουν w_1, w_2 έτσι ώστε $\mathfrak{M}$, $w_1 \vDash \varphi$, $\mathfrak{M}$, $w_2 \vDash \sim \varphi$, wRw_1 και wRw_2. Για παράδειγμα, μπορεί $w_1 = w \cup \{\varphi\}$ και $w_2 = w \cup \{\neg\varphi\}$. Άρα η εμφάνιση του γεγονότος φ αποτελεί για τον w απαγωγικό πρόβλημα. Από τους τύπους $\alpha \to \varphi$ και $\beta \to \varphi$ αποδεικνύεται ο τύπος $(\alpha \wedge \beta) \to \varphi$. Με ένα αντίστοιχο επιχείρημα με προηγούμενα, προκύπτει ότι οι τύποι α, β και $\alpha \wedge \beta$ αποτελούν δυνατές λύσεις. Ισχύει τετριμμένα ότι $\mathfrak{M}, w \vDash \alpha \to \varphi$,

$\mathfrak{M}, w \vDash \beta \to \varphi$ και $\mathfrak{M}, w \vDash (\alpha \wedge \beta) \to \varphi$. Επειδή η R είναι σχέση υποσυνόλου μεταξύ κόσμων, κάθε επόμενος του w θα περιέχει υποχρεωτικά τις $\alpha \to \varphi$, $\beta \to \varphi$ και $(\alpha \wedge \beta) \to \varphi$ άρα θα ισχύει η **3.12**: $\mathfrak{M}, w \vDash \Box^{+}(\alpha \supset \varphi)$, $\mathfrak{M}, w \vDash \Box^{+}(\beta \supset \varphi)$ και $\mathfrak{M}, w \vDash \Box^{+}((\alpha \wedge \beta) \supset \varphi)$. Επίσης, οι τύποι α, β και $\alpha \wedge \beta$ επεκτείνουν κατά συνεπές τρόπο τον w, άρα θα υπάρχουν κόσμοι w_3, w_4 και w_5 με wRw_3, wRw_4, wRw_5, $\mathfrak{M}, w_3 \vDash \alpha$, $\mathfrak{M}, w_4 \vDash \beta$ και $\mathfrak{M}, w_5 \vDash \alpha \wedge \beta$. Οπότε ισχύει η **3.13**: $\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond^{+}\alpha$, $\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond^{+}\beta$ και $\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond^{+}(\alpha \wedge \beta)$. Τέλος, υπάρχουν κόσμοι w_6, w_7 και w_8 όπου δεν ισχύει ο τύπος φ και ταυτόχρονα ισχύουν οι α, β και $\alpha \wedge \beta$ αντίστοιχα. Για παράδειγμα, $w_6 = \{\alpha\}$, $w_7 = \{\beta\}$ και $w_8 = \{\alpha \wedge \beta\}$. Αρα ικανοποιείται η απαίτηση της καλής εξήγησης: $\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond^{-}\Diamond^{+}(\alpha \& \sim \varphi)$, $\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond^{-}\Diamond^{+}$ $(\beta \& \sim \varphi)$ και $\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond^{-}\Diamond^{+}((\alpha \wedge \beta) \& \sim \varphi)$. Και οι τρεις τύποι α, β και $\alpha \wedge \beta$ αποτελούν νόμιμες λύσεις του, όμως η τρίτη παραβιάζει την αρχή της οικονομίας καθώς οι υποθέσεις που χρησιμοποιούν οι εξηγήσεις α και β είναι γνήσιο υποσύνολο των αντίστοιχων της $\alpha \wedge \beta$.

Από τη σχετική πρόταση του δεύτερου κεφαλαίου, έπεται ότι αν ένα μοντέλο τυποποιεί το κριτήριο της ενοποιητικής ισχύος, τότε κατ' ανάγκην όλες οι εξηγήσεις που θα προκύπτουν θα είναι οικονομικές. Αντίστροφα, αν δεν ικανοποιεί το κριτήριο της οικονομίας τότε δεν θα παράγει ενοποιητικά ισχυρές εξηγήσεις. Άρα στο συγκεκριμένο πλαίσιο οι εξηγήσεις δεν θα ικανοποιούν την αρετή της ενοποιητικής ισχύος. Αυτό γίνεται εμφανές και από το ότι παράγονται εξηγήσεις χωρίς το κριτήριο του συνάλματος: στο προηγούμενο παράδειγμα, η εξήγηση α έχει μεγαλύτερη ενοποιητική ισχύ έναντι της $\beta \wedge \gamma$[22] καθώς χρησιμοποιεί μικρότερο αριθμό υποθέσεων, αλλά θεωρούνται εξίσου καλές.

Άρα το πλαίσιο των Soler-Toscano, Fernandez-Duque και Nepomuceno-Fernandez χρησιμοποιεί μια πλούσια δομή με τέσσερις τροπικότητες η οποία ενώ εφαρμόζεται σε κόσμους εφοδιασμένους με οποιαδήποτε λογική γλώσσα δεν καταφέρνει

[22] Όπου πάλι ο γ σχεδόν οποιοσδήποτε τυχαίος τύπος.

να τυποποιήσει τις αρχές της οικονομίας και της ενοποιητικής ισχύος. Εξηγήσεις που περιέχουν παραπάνω πληροφορία, που μπορεί κάποιες φορές να είναι τελείως άσχετη με το προς εξήγηση γεγονός, θεωρούνται εξίσου καλές με τις οικονομικές. Στο πρώτο παράδειγμα, ο β μπορεί να είναι οποιοσδήποτε τύπος[23] και παρ΄ όλα αυτά η εξήγηση $\alpha \wedge \beta$ θεωρείται καλη. Αντίστοιχα, μια αρχή που αποτελείται από n συζευγμένους ατομικούς τύπους θεωρείται εξίσου καλή με οποιαδήποτε άλλη έχει m, ανεξάρτητα από την σχέση των n και m.

[23] Αρκεί φυσικά, να μην καθιστά τον w ασυνεπή.

6. Κριτική αποτίμηση προσέγγισης στοχοκατευθυνόμενων αποδείξεων

Τα πλεονεκτήματα των στοχοκατευθυνόμενων αποδείξεων είναι πολλαπλά. Αρχικά, το αποδεικτικό σύστημα που χρησιμοποιείται είναι δυναμικό. Έτσι, επιτρέπεται να παραχθούν κάποια απαγωγικά συμπεράσματα που αργότερα θα αναθεωρηθούν, προλαμβάνοντας τυχόν ασυνέπειες στο σώμα της απόδειξης. Για παράδειγμα, αν σε κάποιο ύστερο σημείο της απόδειξης προκύψει μια πρόταση $\Box\neg B(a)$ που αντικρούει κάποιον προηγούμενο τύπο $\Diamond B(a)$, τότε διαγράφεται το βήμα στο οποίο εμφανίστηκε ο $\Diamond B(a)$ μαζί με όλα όσα τον χρησιμοποιούν ως προκείμενη. Επιπροσθέτως, είναι επιθυμητή η διάκριση μεταξύ της βεβαιότητας των προτάσεων του υπόβαθρου γνώσης και της δυνατότητας των αποτελεσμάτων των απαγωγικών συμπερασμών, όπως τυποποιείται από τους τελεστές $\Box$ και $\Diamond$ αντίστοιχα. Με αυτόν τον τρόπο καταδεικνύεται η αναιρεσιμότητα [defeasibility] των συμπερασμάτων.

Επίσης, το συγκεκριμένο μοντέλο μπορεί να αφομοιώσει αρκετά είδη επιλεκτικών απαγωγών. Ειδικότερα, το σχήμα **2.2** των επιλεκτικών απαγωγών παρατηρήσιμων μπορεί να σχηματοποιηθεί ως εξής:

	$\Box\ \forall x(A(x) \to B(x))$	Προκείμενη
6.1	$\Box\ B(a)$	Προκειμενη
	$\Diamond\ A(a)$	Συμπέρασμα

Αντίστοιχα, για σύνθετες εξηγητικές υποθέσεις, το απαγωγικό σχήμα θα ορίζεται:

	$\Box\ \forall x(A_1(x) \wedge \ldots \wedge A_n(x) \to B(x))$	Προκείμενη
6.2	$\Box\ B(a)$	Προκειμενη
	$\Diamond(\ A_1(a) \wedge \ldots \wedge A_n(a)\ )$	Συμπέρασμα

Το συμπέρασμα $\Diamond A(a)$ θα προκύπτει αν δεν ικανοποιείται κανένας από τους τύπους **4.3-4.5**.

Οι πρωτοβάθμιες υπαρκτικές μπορούν να προκύψουν στα πλαίσια των στοχοκατευθυνόμενων αποδείξεων με μια παραλλαγή της μορφής **2.3**:

6.3
$$\frac{\begin{array}{l}\Box \forall x(\exists y A(x,y) \rightarrow B(x)) \\ \Box\ B(a)\end{array}}{\Diamond\ \exists y A(a,y)}$$

Για σύνθετες εξηγητικές υποθέσεις, το παραπάνω σχήμα θα γίνεται:

6.4
$$\frac{\begin{array}{l}\Box \forall x(\exists y(A_1(x,y) \wedge \ldots \wedge A_n(x,y)) \rightarrow B(x)) \\ \Box\ B(a)\end{array}}{\Diamond\ \exists y(A_1(a,y) \wedge \ldots \wedge A_n(a,y))}$$

Σε αυτή την περίπτωση, οι συνθήκες **4.3-4.5** μετασχηματίζονται στις:

	Σύνολο συνθηκών	Εξηγητική αρετή
6.5	$\Box \forall x(\exists y(A_1(x,y) \wedge \ldots \wedge A_n(x,y)) \rightarrow B(x)) \wedge$ $B(a) \wedge \neg(\exists y(A_1(x,y) \wedge \ldots \wedge A_n(x,y))$	Συνέπεια
6.6	$\Box \forall x B(x)$	Αποκλεισμός Ταυτολογιών
6.7	$\Box(\forall x(\exists y(A_2(x,y) \wedge \ldots \wedge A_n(x,y)) \rightarrow B(x))) \vee$ $\Box(\forall x(\exists y(A_1(x,y) \wedge A_3(x,y) \wedge \ldots \wedge A_n(x,y)) \rightarrow B(x))) \vee$ $\ldots \vee\ \Box(\forall x(\exists y(A_1(x,y) \wedge \ldots \wedge A_{n-1}(x,y)) \rightarrow B(x)))$	Οικονομία

Προφανώς για περιπτώσεις απλών εξηγήσεων, η αρετή της οικονομίας καθίσταται ανούσια οπότε δεν χρειάζεται να συμπεριληφθεί στο σύνολο των συνθηκών.

Από την άλλη πλευρά, το μοντέλο του Gauderis δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στις απαγωγές νόμων. Επειδή τόσο ο γενικός κανόνας οσο και ο εμπειρικός κανόνας αποτελούν γνωστά δεδομένα, θα πρέπει να είναι εφοδιασμένα με τον τροπικό τελεστή $\Box$. Όμως σε αυτή την περίπτωση επειδή οι δυο κανόνες έχουν την ίδια λογική και βρίσκονται στο ίδιο σύνολο προκείμενων, είναι δυνατό να προκύψουν δυο διαφορετικά συμπεράσματα[24]. Η χρήση των τροπικών τελεστών δεν διαχωρίζει το υπόβαθρο γνώσης από τα προς εξήγηση δεδομένα, με αποτέλεσμα κάθε κανόνας να μπορεί να θεωρηθεί υποψήφιος για εξηγητέο. Ακόμα και στην απλή περίπτωση ενικών εξηγητικών υποθέσεων, το πρόβλημα παραμένει:

$$\frac{\Box\,\forall x(A(x)\to C(x)) \qquad \Box\,\forall x(B(x)\to C(x))}{\Diamond\,\forall x(B(x)\to A(x))} \qquad \text{ή} \qquad \frac{\Box\,\forall x(A(x)\to C(x)) \qquad \Box\,\forall x(B(x)\to C(x))}{\Diamond\,\forall x(A(x)\to B(x))}$$

Το ίδιο συμβαίνει ακόμα και αν χρησιμοποιηθεί η περιορισμένη μορφή του γενικού νόμου. Με δεδομένο ότι στο τυπικό επίπεδο οι δυο κανόνες δεν έχουν κάποια δομική διαφορά, είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί η περιορισμένη μορφή του εμπειρικού κανόνα:

$$\frac{\Box\,\forall x((B(x)\to A(x))\to(B(x)\to C(x))) \qquad \Box\,\forall x(B(x)\to C(x))}{\Diamond\,\forall x(B(x)\to A(x))} \qquad \text{ή} \qquad \frac{\Box\,\forall x(A(x)\to C(x)) \qquad \Box\,\forall x((A(x)\to B(x))\to(A(x)\to C(x)))}{\Diamond\,\forall x(A(x)\to B(x))}$$

Άρα οι απαγωγές νόμων δεν μπορούν να τυποποιηθούν στο συγκεκριμένο πλαίσιο, γιατί δεν υπάρχει διαχωρισμός μεταξύ του συνόλου προτάσεων που αναπαριστά το υπόβαθρο γνώσης και των προς εξήγηση δεδομένων. Όλα θεωρούνται ως ισοδύναμα δεδομένα, γνωστά εκ των προτέρων.

Το συγκεκριμένο πλαίσιο απαγορεύει την υϊοθέτηση κακών εξηγήσεων. Κάθε λύση που προκύπτει με χρήση στοχοκατευθυνόμενων αποδείξεων, εξαιτίας της συνθήκης

[24] Βλ. κεφάλαιο 2.

4.5 θα αποκλείει τις άσχετες εξηγητικές υποθέσεις. Για παράδειγμα, έστω απαγωγή παρατηρήσιμων όπου $\Theta = \{\forall x(A(x) \rightarrow \Phi(x))\}$ και παρατήρηση $\Phi(\alpha)$. Τότε η απόδειξη μπορεί να γίνει:

1	$\Box\forall x(A(x) \rightarrow \Phi(x))$	PREM	
2	$\Box\Phi(\alpha)$	PREM	
3	$\Box\forall x((A(x) \wedge \Gamma(x)) \rightarrow \Phi(x))$	1,2,RU	
4	$\Diamond(A(\alpha) \wedge \Gamma(\alpha))$	2,3,RC	$\{(\Box\forall x((A(x) \wedge \Gamma(x)) \rightarrow \Phi(x)) \wedge \Phi(\alpha) \wedge \neg(A(\alpha) \wedge \Gamma(\alpha))) \vee \Box\forall x\Phi(x) \vee \Box\forall x(A(x) \rightarrow \Phi(x)) \vee \Box\forall x(\Gamma(x) \rightarrow \Phi(x))\}$

Ο τύπος $\Diamond(A(\alpha) \wedge \Gamma(\alpha))$ δεν είναι οριστικά αποδείξιμος, καθώς η συνθήκη $\Box\forall x(A(x) \rightarrow \Phi(x))$ ικανοποιείται ήδη από το πρώτο βήμα της απόδειξης. Άρα σε οποιοδήποτε βήμα της απόδειξης και αν υπάρξει συμπέρασμα με άσχετη εξηγητική υπόθεση με χρήση του κανόνα RC, δεν θα είναι οριστικά αποδείξιμο καθώς θα είναι δυνατό να αποδειχθεί κάποια από τις συνθήκες. Η συνθήκη που τυποποιεί την εξηγητική αρετή της οικονομίας αποτρέπει τις εξηγήσεις με άσχετες υποθέσεις.

Όμως, αυτό εμπεριέχει ένα σημαντικό κόστος όσον αφορά τον χαρακτηρισμό μιας εξήγησης ως καλύτερης. Κάθε σύνθετη εξήγηση[25] θα αποκλείεται ως φλύαρη καθώς πάντα θα είναι δυνατό να αποδειχθεί κάποια από τις συνθήκες που την περιορίζουν. Αυτό σημαίνει πως αν η πραγματική εξήγηση είναι σύνθετη, δεν θα είναι ποτέ η καλύτερη. Μάλιστα, δεν θα είναι ούτε καν καλή καθώς εξηγήσεις κατά Gauderis είναι μόνο όσες είναι οριστικά αποδείξιμες στο παρόν πλαίσιο. Αν το υπόβαθρο γνώσης συνίσταται στο $\Theta = \{\Box\forall x(\mathrm{A}(x) \rightarrow \Phi(x)), \Box\forall x(\mathrm{B}(x) \rightarrow \Phi(x))\}$ και έχει παρατηρηθεί $\Phi(\alpha)$. Τότε:

1	$\Box\ \forall x(\mathrm{A}(x) \rightarrow \Phi(x))$	PREM	$\varnothing$

[25] όπου σύνθετη, οποιαδήποτε εξήγηση αποτελείται από τη σύζευξη ατομικών εξηγήσεων.

2	$\Box\ \forall x(\mathrm{B}(x) \rightarrow \Phi(x))$	PREM	$\varnothing$
3	$\Box\ \Phi(\alpha)$	PREM	$\varnothing$
4	$\Diamond\ \mathrm{A}(\alpha)$	1,3,RC	$\{(\Box(\forall x(\mathrm{A}(x) \rightarrow \Phi(x)) \wedge \Phi(\alpha) \wedge \neg \mathrm{A}(\alpha))) \vee \Box \forall x \Phi(x)\}$
5	$\Diamond\ \mathrm{B}(\alpha)$	2,3,RC	$\{(\Box(\forall x(\mathrm{B}(x) \rightarrow \Phi(x)) \wedge \Phi(\alpha) \wedge \neg \mathrm{B}(\alpha))) \vee \Box \forall x \Phi(x)\}$
6	$\Diamond\ \mathrm{A}(\alpha) \wedge \Diamond\ \mathrm{B}(\alpha)$	4,5	$\{(\Box(\forall x(\mathrm{A}(x) \rightarrow \Phi(x)) \wedge \Phi(\alpha) \wedge \neg \mathrm{A}(\alpha))) \vee \Box \forall x \Phi(x)$, $(\Box(\forall x(\mathrm{B}(x) \rightarrow \Phi(x)) \wedge \Phi(\alpha) \wedge \neg \mathrm{B}(\alpha))) \vee \Box \forall x \Phi(x)\}$
7	$\Box \forall x((\mathrm{A}(x) \wedge \mathrm{B}(x)) \rightarrow \Phi(x))$	1,RU	$\varnothing$
8	$\Diamond\ (\mathrm{A}(\alpha) \wedge \mathrm{B}(\alpha))$	3,7,RC	$\{(\Box(\forall x((\mathrm{A}(x) \wedge \mathrm{B}(x)) \rightarrow \Phi(x)) \wedge \Phi(\alpha) \wedge \neg(\mathrm{A}(a) \wedge \mathrm{B}(\alpha)))) \vee \Box \forall x \Phi(x) \vee \Box \forall x(\mathrm{A}(x) \rightarrow \Phi(x)) \vee \Box \forall x(\mathrm{B}(x) \rightarrow \Phi(x))\}$

Από τα βήματα 1...5 δεν μπορεί να προκύψει άμεσα ο τύπος $\Diamond(\mathrm{A}(\alpha) \wedge \mathrm{B}(\alpha))$ που ουσιαστικά αντιστοιχεί σε μια σύνθετη εξήγηση. Το μόνο που μπορεί να συναχθεί είναι η πρόταση $\Diamond\ \mathrm{A}(\alpha) \wedge \Diamond\ \mathrm{B}(\alpha)$ υπό τις συνθήκες που περιγράφονται στο βήμα 6, από την οποία δεν παράγεται στο δεδομένο πλάισιο ο ζητούμενος τύπος[26]. Ο μόνος τρόπος να παραχθεί η σύζευξη των δυο εξηγήσεων είναι σε κάποια από τις προκείμενες 1,2 να γίνει ισχυροποίηση του ηγούμενου, όπως συμβαίνει στο βήμα 7. Έτσι, με χρήση του κανόνα RU θα προκύπτει απαγωγικά το ζητούμενο συμπέρασμα. Αξίζει να σημειωθεί πως όποια από τις δύο προκείμενες και αν χρησιμοποιηθεί, οι συνθήκες υπό τις οποίες ο συλλογισμός θα αληθεύει θα είναι οι ίδιες. Όμως, ο τύπος του βήματος 8 δεν είναι οριστικά αποδείξιμος, καθώς μπορούν να αποδειχθούν κάποιες από τις προτάσεις του

[26] καθώς ενώ ισχύει $\Diamond(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Diamond\, \alpha \wedge \Diamond\, \beta$, δεν ισχύει το αντίστροφο.

συνόλου Δ, οι $\Box\, \forall x(\mathrm{A}(x) \to \Phi(x))$ και $\Box\, \forall x(\mathrm{B}(x) \to \Phi(x))$, που αποτελούν προκείμενες.

Άρα η εξηγητική αρετή της ελαχιστικότητας μπορεί να υποκαταστήσει την αρετή του συνάλματος, αποκλείοντας άσχετες εξηγητικές υποθέσεις. Όμως έτσι αποκλείεται το σύνολο των σύνθετων εξηγήσεων, ανεξάρτητα από το αν οι υποθέσεις που περιέχονται σε αυτές έχουν κάποιο ουσιαστικό ρόλο στην εξηγητική διαδικασία. Με τη χρήση της οικονομίας χωρίς να έχει προηγηθεί η αρετή του συνάλματος αποκλείονται καλές εξηγήσεις. Αν, πάλι, δεν χρησιμοποιηθεί καθόλου η οικονομία τότε οποιαδήποτε εξήγηση προκύψει με ενδυνάμωση του ηγούμενου κάποιου νόμου θα θεωρείται καλή. Ουσιαστικά η αρετή της οικονομίας είναι "όλα ή τίποτα", δηλαδή είτε θα αποκλείει το σύνολο των σύνθετων εξηγήσεων είτε όλες θα είναι το ίδιο καλές.

Το συγκεκριμένο πρόβλημα δεν περιορίζεται μόνο στην προσέγγιση του Gauderis, αλλά αφορά το σύνολο των μοντέλων που αξιοποιούν το κριτήριο της οικονομίας χωρίς προηγουμένως να έχουν εφαρμόσει την αρετή του συνάλματος. Για παράδειγμα, η Aliseda τυποποιεί[27] την οικονομία ως:

6.8 η εξήγηση α είναι *ελαχιστική* Απαίτηση ελαχιστικότητας

όπου *ελαχιστική* είναι κάθε εξήγηση α για την οποία δεν υπάρχει εξήγηση α' έτσι ώστε $\Theta \cup \alpha' \vdash \varphi$ και $\alpha' \subset \alpha$. Έτσι, κάθε μοντέλο που ικανοποιεί τις **3.3-3.5** και **6.8** θα αποκλείει σύνθετες εξηγήσεις, με αποτέλεσμα κάποιες φορές η πραγματική εξήγηση να μην προκύπτει ποτέ ως καλύτερη.

[27] Βλ. Aliseda et al. (2006).

7. Η αρετή του συνάλματος

Προκειμένου να οριστεί στα μοντέλα τύπου Aliseda η εξηγητική αρετή του συνάλματος, απαιτούνται κάποιοι ορισμοί:

Ορισμός: Ένα σύνολο Σ θα ονομάζεται *δυνάμει* εξήγηση αν ικανοποιεί τις **3.3-3.5**.

Ορισμός: Η εξήγηση h, όπου h ένα στοιχείο του Σ, θα ονομάζεται *άσχετη* αν κάθε δυνάμει εξήγηση που την περιεχει, παραμένει εξήγηση ακόμα και αν αφαιρεθεί το h από αυτή. Δηλαδή, h άσχετη αν και μόνο αν $\forall\Sigma$ τέτοιο ώστε Σ δυνάμει και $h \in \Sigma$, ισχύει $\Theta \cup \Sigma - \{h\} \vDash \varphi$.

Προκειμένου να τυποποιηθεί σε αυτό το μοντέλο η αρχή της οικονομίας, πρέπει να εφοδιαστεί με την απαίτηση:

7.1	το Σ δεν περιέχει άσχετες εξηγήσεις, δηλαδή $\forall h \in \Sigma$ $\exists \Sigma'$ τέτοια ώστε Σ, Σ' ικανοποιούν τις **3.3-3.5**, $h \in \Sigma'$ και $\Theta \cup \Sigma' - \{h\} \nvDash \varphi$.	Απαίτηση Συνάλματος

ορισμός: *καλή* εξήγηση είναι κάθε δυνάμει εξήγηση που ικανοποιεί την **7.1**.

Η κατασκευή του χώρου των καλών εξηγήσεων αρκεί να ικανοποιεί τις **3.3-3.5** και **7.1**, καθώς τότε αποκλείονται εξηγήσεις-συζεύξεις προτάσεων που κάποιες από αυτές δεν συμβάλλουν στην εξηγητική διαδικασία. Αν απαιτείται η εύρεση της ελάχιστης εξήγησης, τότε μπορεί να εφαρμοστεί η **6.8** είτε στις καλές εξηγήσεις, είτε απευθείας στις δυνάμει, καθώς κάθε ελαχιστική εξήγηση είναι κατ' ανάγκην καλή ενώ το αντίθετο δεν ισχύει.

Αντίστοιχα, για την προσέγγιση του Gauderis μία πιθανή λύση φαίνεται να είναι η αντικατάσταση της αρχής της οικονομίας **4.5** με κάποια άλλη που να βασίζεται στην εξής διαφορά: για τις σύνθετες καλές εξηγήσεις μπορεί να αποδειχθούν όλοι οι νόμοι που χρησιμοποιούν ατομικές εξηγήσεις που περιέχονται σε αυτές, κάτι το οποίο δεν ισχύει για όσες έχουν και άσχετες προτάσεις. Στο παραπάνω παράδειγμα, για την καλή εξήγηση $\Diamond(\mathrm{A}(\alpha) \wedge \mathrm{B}(\alpha))$ αποδεικνύονται οι $\Box \forall x(\mathrm{A}(x) \rightarrow \Phi(x))$ και $\Box \forall x(\mathrm{B}(x) \rightarrow \Phi(x))$, ενώ για την κακή $\Diamond(\mathrm{A}(\alpha) \wedge \Gamma(\alpha))$ παράγεται η $\Box \forall x(\mathrm{A}(x) \rightarrow \Phi(x))$, αλλά όχι η $\Box \forall x(\Gamma(x) \rightarrow \Phi(x))$. Έστω $\Gamma(x)$ τυχαίο κατηγόρημα που δεν εξηγεί το γεγονός $\Phi(a)$. Με δεδομένο ότι τέτοια ασυσχέτιστα με το γεγονός κατηγορήματα δεν προκαλούν την εμφάνιση ή την απουσία του, μπορεί να υποτεθεί πως υπάρχουν εμφανίσεις της ιδιότητας Φ που συνοδεύονται από την απουσία της Γ, έστω σε ένα αντικείμενο β για το οποίο $\Phi(\beta) \wedge \neg\Gamma(\beta)$. Άρα $\exists x(\Phi(x) \wedge \neg\Gamma(x))$ ή ισοδύναμα $\exists x \neg(\Phi(x) \rightarrow \Gamma(x))$. Σε αυτή την περίπτωση ο τύπος $\neg\forall x(\Phi(x) \rightarrow \Gamma(x))$ είναι αποδείξιμος.

Ευρύτερα, έστω ότι στη γλώσσα L_M για κάθε διατεταγμένη δυάδα κατηγορημάτων $< \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 >$ ισχύει είτε $\forall x(\mathrm{A}_1(x) \rightarrow \mathrm{A}_2(x))$ είτε $\exists x(\mathrm{A}_1(x) \wedge \neg\mathrm{A}_2(x))$. Δηλαδή είτε από την εμφάνιση της ιδιότητας A_1 έπεται η εμφάνιση της A_2 είτε υπάρχει αντιπαράδειγμα που εμφανίζεται το A_1 ενώ είναι γνωστό το $\neg\mathrm{A}_2$. Σε αυτή την περίπτωση είναι δυνατό να διαχωριστούν οι καλές εξηγήσεις από τις κακές, καθώς για κάθε κακή που περιέχει το τυχαίο κατηγόρημα A_k θα είναι δυνατό να αποδειχθεί ο τύπος $\Box\neg\forall x(\mathrm{A}_k(x) \rightarrow \Phi(x))$.

	Σύνολο συνθηκών	Εξηγητική αρετή
7.2	$(\Box\neg\forall x(\mathrm{A}_1(x) \rightarrow \Phi(x))) \vee$ $(\Box\neg\forall x(\mathrm{A}_2(x) \rightarrow \Phi(x))) \vee \ldots \vee$ $(\Box\neg\forall x(\mathrm{A}_n(x) \rightarrow \Phi(x)))$	Σύναλμα

Άρα οι καλές εξηγήσεις θα είναι οι τύποι που προκύπτουν με εφαρμογή του κανόνα RC και δεν είναι δυνατό σε οποιαδήποτε επέκταση της απόδειξης να αποδειχθεί κάποιος από τους τύπους που θα περιέχονται στη συνθήκη τους η οποία με τη σειρά της είναι η διάζευξη των **4.3**, **4.4** και **7.2**. Στο προηγούμενο παράδειγμα, το υπόβαθρο γνώσης Θ θα περιέχει τις προτάσεις $\Theta = \{\Box\forall x(\mathrm{A}(x) \to \Phi(x)),$ $\Box\forall x(\mathrm{B}(x) \to \Phi(x)), \Box\exists x(\Gamma(x) \wedge \neg\Phi(x)), \Box\Phi(\alpha)\}$. Η παραπάνω απόδειξη θα μπορεί να συνεχιστεί από το ένατο βήμα ως εξής:

9α	$\Diamond(\mathrm{A}(\alpha) \wedge \mathrm{B}(\alpha))$	3,7,RC	$\{(\Box(\forall x((\mathrm{A}(x) \wedge \mathrm{B}(x)) \to \Phi(x)) \wedge$ $\Phi(\alpha) \wedge \neg(\mathrm{A}(a) \wedge \mathrm{B}(\alpha)))) \vee$ $\Box\forall x\Phi(x) \vee \Box\neg\forall x(\mathrm{A}(x) \to \Phi(x)) \vee$ $\Box\neg\forall x(\mathrm{B}(x) \to \Phi(x))\}$
10α	$\Diamond(\mathrm{A}(\alpha) \wedge \Gamma(\alpha))$	3,8,RC	$\{(\Box(\forall x((\mathrm{A}(x) \wedge \Gamma(x)) \to \Phi(x)) \wedge$ $\Phi(\alpha) \wedge \neg(\mathrm{A}(a) \wedge \Gamma(\alpha)))) \vee$ $\Box\forall x\Phi(x) \vee \Box\neg\forall x(\mathrm{A}(x) \to \Phi(x)) \vee$ $\Box\neg\forall x(\Gamma(x) \to \Phi(x))\}$
11α	$\Box\exists x(\Gamma(x) \wedge \neg\Phi(x))$	PREM	$\varnothing$
12α	$\Box\neg\forall x(\Gamma(x) \to \Phi(x))$	11α, RU	$\varnothing$

Οπότε, ο τύπος $\Diamond(\mathrm{A}(\alpha) \wedge \Gamma(\alpha))$ δεν θα είναι οριστικά αποδείξιμος, καθώς στο βήμα 12α αποδεικνύεται ένας από τους τύπους της συνθήκης, ο $\Box\neg\forall x(\Gamma(x) \to \Phi(x))$. Αντίστροφα, ο $\Diamond(\mathrm{A}(\alpha) \wedge \mathrm{B}(\alpha))$ είναι οριστικά αποδείξιμος, καθώς με τις συγκεκριμένες προκείμενες κανείς από τους τύπους της συνθήκης του δεν παράγεται.

Η συγκεκριμένη απαίτηση, ενώ φαίνεται "φλύαρη" η προσθήκη προτάσεων της μορφής $\Box\exists x(\Gamma(x) \wedge \neg\Phi(x))$ για κάθε κατηγόρημα για το οποίο δεν υπάρχει κάποιος νόμος της μορφής $\Box\forall x(\Gamma(x) \to \Phi(x))$, είναι αρκετά εύλογη όσον αφορά τη συνήθη επιστημονική πρακτική. Στο παράδειγμα της καμένης λάμπας, η πρόταση {όλο το πρωινό είχε έντονη ηλιοφάνεια} δεν αποτελεί καλή εξήγηση καθώς γνωρίζουμε πως είναι δυνατό η λάμπα να λειτουργεί ακόμα και αν προηγήθηκε ένα πρωινό με έντονη ηλιοφάνεια. Αντίθετα η πρόταση {η λάμπα κάηκε κατά το διάστημα απουσίας του} είναι καλή εξήγηση γιατί δεν είναι δυνατό μια καμένη λάμπα να φεγγοβολεί. Άρα το υπόβαθρο γνώσης περιέχει τουλάχιστον ένα αντιπαράδειγμα πρωινού με ηλιοφάνεια και λάμπας που λειτουργεί.

Άλλωστε στις συνήθεις γλώσσες και τις ερμηνείες τους, το σύνολο των κατηγορημάτων είναι πεπερασμένο. Επίσης είναι γνωστό εκ των προτέρων το ποια από αυτά σχετίζονται είτε θετικά είτε αρνητικά. Άρα προτάσεις της μορφής $\Box\exists x(\Gamma(x) \wedge \neg\Phi(x))$ ή $\Box\forall x(\Gamma(x) \rightarrow \Phi(x))$ θα περιέχονται για κάποια από αυτά. Αν πάλι δεν υπάρχει κάποια σύνδεση μεταξύ δυο κατηγορημάτων, δηλαδή δεν γνωρίζουμε κάποιο παράδειγμα ή αντιπαράδειγμα που η εμφάνιση του ενός έπεται την εμφάνιση του άλλου, τότε η υπόθεση πως ένα από αυτά μπορεί να εξηγεί το άλλο είναι απολύτως ορθή ως απαγωγικός συμπερασμός. Στο πλαίσιο του Gauderis το συμπέρασμα $\Diamond\Gamma a$ είναι νόμιμο καθώς αφενός ορίζει δυνατότητα και όχι αναγκαιότητα και αφετέρου εφόσον δεν υπάρχει κάποιο αντιπαράδειγμα που να αποκλείει την ύπαρξη του νόμου $\forall x(\Gamma(x) \rightarrow \Phi(x))$. Είναι πιθανό σε κάποιο επόμενο στάδιο της έρευνας ο συγκεκριμένος νόμος να αποτελέσει μέρος του υπόβαθρου γνώσης, οπότε το $\Diamond\Gamma a$ δεν μπορεί να αποκλειστεί εξαρχής ως κακή εξήγηση. Επομένως με χρήση των συνθηκών **4.3**, **4.4**, **7.2** επιτρέπεται η συναγωγή σύνθετων καλών εξηγήσεων. Καμία καλή εξήγηση δεν αποκλείεται, ενώ απορρίπτονται όλες οι κακές. Αν, πάλι, η καλύτερη εξήγηση ταυτιστεί με την οικονομικότερη, τότε μπορεί να εφαρμοστεί η **4.5** στις καλές εξηγήσεις που προέκυψαν.

8. Επίλογος

Η απαγωγή αποτελεί την κυριότερη ενισχυτική μέθοδο συναγωγής. Στη σημερινή της μορφή πρωτοεμφανίστηκε στο έργο του Peirce. Σήμερα υπάρχουν πολλαπλές διακρίσεις με βάση τη μορφή της, τη σχέση των δεδομένων με το υπόβαθρο γνώσης και το είδος των δεδομένων που κάθε φορά πρέπει να εξηγηθεί. Η κύρια διάκριση αφορά τις επιλεκτικές και τις δημιουργικές απαγωγές, όπου οι πρώτες διαχωρίζονται επιπλέον σε απαγωγές καινοφανών και αντικρουόμενων. Η βασική κατηγορία απαγωγών με την οποία ασχολήθηκε η συντριπτική πλειονότητα των ερευνητών είναι οι επιλεκτικές απαγωγές καινοφανών. Από τα μέσα της δεκαετίας του 80 επιχειρείται η τυποποίηση του συγκεκριμένου απαγωγικού συλλογισμού, αρχικά με αλγόριθμους πολυπλοκότητας NP και προτασιακές γλώσσες[28]. Στη συνέχεια η έρευνα στράφηκε σε πιο σύνθετες γλώσσες για να καταλήξει την τελευταία δεκαετία στα τροπικά μοντέλα.

Στόχος κάθε φορά ήταν η εύρεση της καλύτερης εξήγησης, οτιδήποτε και αν αυτό σήμαινε. Παράλληλα, στη φιλοσοφία της επιστήμης είχε ξεκινήσει ήδη από τη δεκαετία του 60 η συζήτηση για το τι συνιστά εξήγηση και τελικά ποια κριτήρια οφείλει να ικανοποιεί η *καλύτερη*. Σήμερα είναι κοινά αποδεκτό πως κάθε εξήγηση οφείλει να ικανοποιεί το κριτήριο στου συνάλματος και οι καλύτερες εξ αυτών πιθανά να προκρίνονται με την επιπλέον χρήση κάποιων από τις αρετές της οικονομίας, της ακρίβειας, της ενοποιητικής ισχύος, της πληρότητας και της σημαντικότητας. Η συντριπτική πλειονότητα των τροπικών μοντέλων μπορεί να χωριστεί σε δυο κλάσεις: σε αυτά που ικανοποιούν το κριτήριο της πληρότητας και σε αυτά που ικανοποιούν τις αρετές της πληρότητας και της οικονομίας. Τα πρώτα επιτρέπουν την παραγωγή κακών εξηγήσεων που δεν ικανοποιούν το κριτήριο του συνάλματος και δεν προκρίνονται από το υπόβαθρο γνώσης. Τα δεύτερα αποφεύγουν αυτό το πρόβλημα με κόστος την αδυναμία παραγωγής σύνθετων εξηγήσεων όπου η κάθε υπόθεσή τους να αποτελεί εξήγηση per se.

Επιλέχθηκε ενδεικτικά ένα μοντέλο από κάθε κλάση και ειδικότερα από την πρώτη αυτό των Soler-Toscano, Fernandez-Duque και Nepomuceno-Fernandez και από τη δεύτερη η προσέγγιση του Gauderis. Παράλληλα με την κατάδειξη του προβλήματος

[28] Ενδεικτικά βλ. Regia et al. (1983).

εξετάστηκε το κατά πόσον αυτά μπορούν να τυποποιήσουν κάποιες από τις επιλεκτικές απαγωγές καινοφανών. Το πρώτο μοντέλο φαίνεται να μπορεί να ανταποκριθεί σε περιπτώσεις γεγονοτικών, πρωτοβάθμιων υπαρκτικών και στις απαγωγές νόμων. Ειδικά για τις απαγωγές νόμων, αυτό συμβαίνει καθώς υπάρχει σαφής διάκριση μεταξύ του συνόλου που κωδικοποιεί την προϋπάρχουσα γνώση και του προς εξήγηση δεδομένου που στη συγκεκριμένη περίπτωση αποτελεί κάποια παρατηρημένη κανονικότητα. Αντίστοιχα, το μοντέλο του Gauderis δεν μπορεί να τυποποιήσει τις απαγωγές νόμων επειδή τόσο το υπόβαθρο γνώσης όσο και η προς εξήγηση κανονικότητα ανήκουν στο σύνολο των προκείμενων, προηγούμενοι από τον τελεστή της αναγκαιότητας, άρα δεν υπάρχει τρόπος διαχωρισμού τους.

Ταυτόχρονα, προτάθηκε ένας τρόπος τυποποίησης των επιλεκτικών απαγωγών αντικρουώμενων γεγονότων για το μοντέλο των πολλαπλών κόσμων, βασιζόμενο στην αρχική ιδέα των Soler-Toscano, Fernandez-Duque και Nepomuceno-Fernandez. Στο τελευταίο κεφάλαιο, με τη βοήθεια των ορισμών της *δυνάμει* και της *κακής* εξήγησης, περιγράφηκε η αρετή του συνάλματος στα πλαίσια του μοντέλου του Gauderis και εξετάστηκε κατά πόσον λύνει το πρόβλημα του αποκλεισμού σύνθετων εξηγήσεων. Στο πρώτο παράρτημα, παραθέτονται κάποιες αδρές κατευθύνσεις σχετικά με το πως μπορεί να τυποποιηθεί η αρετή της σημαντικότητας. Τέλος στο δεύτερο παράρτημα επεκτείνεται η ιδέα της μεταγλώσσας προκειμένου να τυποποιηθεί μια περιορισμένη εκδοχή της ενοποιητικής ισχύος στο πλαίσιο των πολλαπλών κόσμων.

Συμπερασματικά, οι σύγχρονες προσεγγίσεις της απαγωγής κωδικοποιούν επιτυχώς την αρετή της πληρότητας και σε κάποιες περιπτώσεις της οικονομίας. Όμως αν δεν έχει προηγηθεί η εξέταση της αρετής του συνάλματος, τότε είτε το σύνολο των καλύτερων εξηγήσεων θα περιέχει κακές εξηγήσεις, είτε θα αποκλείονται οι σύνθετες. Σε κάθε περίπτωση, θα πρέπει να προηγείται το σύναλμα. Επιπλέον, η φιλοσοφική συζήτηση δεν χρειάζεται να περιορίζεται αυστηρά σε αυτες, αντίθετα καλό θα είναι να κατευθυνθεί και προς την τυποποίηση άλλων εξηγητικών αρετών, καθώς σε διαφορετική περίπτωση τα τυπικά μοντέλα θα υπολείπονται των πραγματικών απαγωγών.

Παράρτημα Α

Σημαντικότητα

Η σημαντικότητα αποτελεί μία από τις βασικότερες εξηγητικές αρετές. Με βάση τον ορισμό της, αναγκαία συνθήκη για τη σύγκριση εξηγήσεων είναι καμία από αυτές να μην ικανοποιεί το κριτήριο της πληρότητας. Σε αντίθετη περίπτωση, η εξήγηση που θα είναι πλήρης προφανώς θα υπερτερεί έναντι των υπολοίπων, καθώς θα εξηγεί όλα τα δεδομένα, άρα από το κριτήριο της πληρότητας θα είναι η καλύτερη. Έστω, λοιπόν, ότι τα προς εξήγηση δεδομένα αποτελούν ένα σύνολο $D = \{d_1, ..., d_n\}$ ενώ οι δυνατές εξηγήσεις περιλαμβάνονται στο $H = \{h_1, ..., h_m\}$, όπου $n, m \in \mathbb{N}$. Κάθε εξηγητική υπόθεση h_k θα εξηγεί ένα ή περισσότερα μέλη του D. Αυτό μπορεί να τυποποιηθεί με μια συνάρτηση $F : H \to P(D) - \{D, \varnothing\}$ που θα αντιστοιχεί σε κάθε h_k ένα γνήσιο μή κενό υποσύνολο του D. Οι τιμές $F(h_k) = D$ και $F(h_k) = \varnothing$ δεν παρουσιάζουν ενδιαφέρον γιατί η πρώτη είναι ο ορισμός της πλήρους εξήγησης και η δεύτερη περιγράφει ψευδοεξηγήσεις καθώς τελικά δεν εξηγούν κανένα τεκμήριο.

Προκειμένου να οριστεί η σημαντικότητα, θα πρέπει να προϋπάρχει μια κατάταξη των μελών του D με βάση το πόσο "σημαντικά" είναι, ό,τι και αν σημαίνει αυτό. Για παράδειγμα, κάποιες φορές κατά τη διαδικασία της ιατρικής διάγνωσης ως σημαντικότερα τεκμήρια αξιολογούνται τα αποτελέσματα των πιο αξιόπιστων τεστ έναντι των υπολοίπων, ενώ σε άλλες η σημαντικότητα αξιολογείται με τη μελέτη της χειρότερης περίπτωσης[29]. Σε κάθε περίπτωση, κάθε δυο μέλη του D οφείλουν να είναι συγκρίσιμα με την έννοια ότι πρέπει είτε κάποιο από τα δύο να είναι πιο σημαντικό είτε να είναι το ίδιο σημαντικά. Αυτό μπορεί να συμβεί δια μέσου κάποιου τελεστή αποτίμησης $T : P(D) - \{D, \varnothing\} \to \mathbb{N}$, όπου κάθε μη κενό γνήσιο υποσύνολο του D θα αντιστοιχείται σε ένα φυσικό αριθμό.

Στην περίπτωση μονοσυνόλων, ο τελεστής θα ορίζεται ως εξής: $T(\{d_i\}) = n$, όπου $n \in \mathbb{N}$. Έτσι, για δύο τυχαία τεκμήρια d_i, d_j αν το d_i είναι σημαντικότερο του d_j

[29] Η περίφημη worst-case study, όπου δεδομένα που πιθανά να υποδηλώνουν μια σοβαρότερη ασθένεια αξιολογούνται ως σημαντικότερα έναντι των υπολοίπων.

θα ισχύει $T(\{d_i\}) > T(\{d_j\})$, αν το d_i είναι λιγότερο σημαντικό από το d_j θα ισχύει $T(\{d_i\}) < T(\{d_j\})$, ενώ αν βρίσκονται στα ίδια επίπεδα σημαντικότητας $T(\{d_i\}) = T(\{d_j\})$. Όσον αφορά τα πολυσύνολα ο ορισμός του τελεστή εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως το είδος των τεκμηρίων, την αξιοπιστία τους κλπ. Στο προηγούμενο παράδειγμα, αν η σημαντικότητα ταυτιστεί με την αξιοπιστία τότε για μια οικογένεια δεδομένων $\bigcup_{i\in I}\{d_i\}$ με $I \subset \{1,...,n\}$ ο τελεστής μπορεί να οριστεί ως $T(\bigcup_{i\in I}\{d_i\}) = \sum_{i\in I} T(\{d_i\})$. Με αυτό τον τρόπο, θα αποτιμώνται ως σημαντικότερα τα πολλά σχετικά αξιόπιστα δεδομένα έναντι του ενός αξιόπιστου. Αν πάλι, η σημαντικότητα ορίζεται με βάση το χειρότερο δυνατό ενδεχόμενο, τότε ο τελεστής θα μπορεί να οριστεί ως $T(\bigcup_{i\in I}\{d_i\}) = \max_{i\in I}\{T(\{d_i\})\}$. Πλέον, σε κάθε τυχαία υπόθεση h_k που εξηγεί ένα υποσύνολο τεκμηρίων $\bigcup_{i\in I}\{d_i\}$ θα αντιστοιχεί ένας βαθμός "καλοσύνης" [goodness] $rank(h_k)$ που θα ορίζεται ως εξής:

$$rank(h_k) = T(F(h_k)) = T(\bigcup_{i\in I}\{d_i\})$$

Καλύτερη εξήγηση, με την έννοια ότι εξηγεί τα σημαντικότερα από τα προς εξήγηση δεδομένα, θα είναι αυτή που θα έχει τον μεγαλύτερο βαθμό.

Παράδειγμα: Έστω διαγνωστικό πρόβλημα, όπου για τον ασθενή υπάρχουν τα εξής εμπειρικά τεκμήρια και υποθέσεις:

d_1 := καρκινικός δείκτης αιματολογικής εξέτασης

d_2 := ακτινογραφία θώρακος

d_3 := αξονική τομογραφία θώρακος

d_4 := μαγνητική τομογραφία θώρακος

h_1 := ο ασθενής πάσχει από λέμφωμα τύπου Α

h_2 := ο ασθενής πάσχει από λέμφωμα τύπου Β

Επίσης, έστω ότι η h_1 είναι συμβατή με τα $\{d_1, d_2, d_3\}$, ενώ η h_2 με το $\{d_4\}$, και οι βαθμοί σημαντικότητας των $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ είναι αντίστοιχα $\{1,3,5,7\}$. Με δεδομένο ότι καμία από τις μεθόδους δεν προσφέρει απόλυτη βεβαιότητα, ίσως να είναι καλύτερο η διάγνωση να βασιστεί στον αθροιστικό τελεστή που συνεκτιμά το πλήθος των τεκμηρίων με το βαθμό σημαντικότητάς τους. Τότε:

$$rank(h_1) = \sum_{i=1\ldots3} T(\{d_i\}) = T(\{d_1\}) + T(\{d_2\}) + T(\{d_3\}) = 9$$

$$rank(h_2) = T(\{d_4\}) = 7$$

οπότε η h_1 είναι καλύτερη εξήγηση έναντι της h_2. Από την άλλη πλευρά, θα μπορούσε αντί της μαγνητικής τομογραφίας ο ασθενής να υποβληθεί σε βιοψία, μια εξέταση που προσφέρει απόλυτο βαθμό βεβαιότητας. Έστω $d_4' :=$ βιοψία και $T(\{d_4'\}) = 10$. Σε αυτή την περίπτωση, εξαιτίας της απόλυτης βεβαιότητας προτιμότερο είναι ο τελεστής να οριστεί ως μεγιστικός[30]:

$$rank(h_1) = \max_{i=1\ldots3}\{T(\{d_i\})\} = \max\{T(\{d_1\}), T(\{d_2\}), T(\{d_3\})\} = 5$$

$$rank(h_2) = T(\{d_4'\}) = 10$$

Άρα είναι καταρχήν εφικτό στα πλαίσια ενός αλγορίθμου να τυποποιηθεί η αρετή της σημαντικότητας για τεκμήρια που κατοικούν σε ένα καλά διατεταγμενο χώρο. Το βασικό ανοικτό ερώτημα αφορά τον τρόπο ορισμού του τελεστή αποτίμησης στην περίπτωση δύο ή περισσότερων τεκμηρίων. Μάλιστα, είναι εφικτό ο τελεστής να επεκταθεί κατάλληλα έτσι ώστε να περιλαμβάνει τις πλήρεις εξηγήσεις ως ακραίες περιπτώσεις. Ειδικότερα, $\tilde{F} : H \rightarrow P(D)$, $\tilde{T} : P(D) \rightarrow \mathbb{N}$, με:

[30] Αξίζει να σημειωθεί πως σε μια τέτοια περίπτωση και ο αθροιστικός τελεστής θα μπορούσε να καταλήξει σε παρόμοια συμπεράσματα, υπό τη συνθήκη ότι οι απόλυτα αξιόπιστες εξετάσεις εφοδιάζονται με ένα πολύ μεγαλύτερο βαθμό σημαντικότητας έναντι των υπολοίπων.

$$\tilde{T}(\bigcup_{i\in I}\{d_i\}) = T(\bigcup_{i\in I}\{d_i\}) \text{ για } \bigcup_{i\in I}\{d_i\} \neq \varnothing, \bigcup_{i\in I}\{d_i\} \neq D$$

$$\tilde{T}(\bigcup_{i\in I}\{d_i\}) = \max_{\forall I\subset D}\{\bigcup_{i\in I}\{d_i\}\} + 1 \text{ για } \bigcup_{i\in I}\{d_i\} = D$$

$$\tilde{T}(\bigcup_{i\in I}\{d_i\}) = 0 \text{ για } \bigcup_{i\in I}\{d_i\} = \varnothing .$$

Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζεται ότι αν κάποια υπόθεση εξηγεί όλα τα δεδομένα, θα έχει τον μεγαλύτερο δυνατό βαθμό σημαντικότητας από τις άλλες, ενώ αν δεν εξηγεί κανένα η σημαντικότητά της θα είναι 0, άρα και θα υπολείπεται όλων των άλλων.

Παράρτημα Β

Περιορισμένη ενοποιητική ισχύς στο μοντέλο πολλαπλών κόσμων

Το πλαίσιο των πολλαπλών κόσμων, παρά την πλούσια δομή του, επιτρέπει την υιοθέτηση μη οικονομικών εξηγήσεων, άρα και εξηγήσεων που δεν έχουν την απαιτούμενη ενοποιητική ισχύ. Καταρχήν εισάγεται μια δευτεροβάθμια μεταγλώσσα L_M :

Σταθερές:	Κάθε τύπος της L θα είναι σταθερά στην L_M .
Κατηγορήματα:	Κάθε κόσμος w_i θα είναι μονομελές κατηγόρημα W_i με ερμηνεία το σύνολο των προτάσεων που είναι αληθείς σε αυτόν.
Παράμετροι:	$\forall$, $\exists$

Οι προτασιακοί σύνδεσμοι της L_M θα είναι οι $\sim$, $\supset$, ∇, $\&$ για την άρνηση, τη συνεπαγωγή, τη διάζευξη και τη σύζευξη αντίστοιχα. Η κεντρική ιδέα είναι ότι σε κάθε πρόταση α της γλώσσας που είναι αληθής σε κάποιον κόσμο w_i, δηλαδή $\mathcal{M}, w_i \vdash \alpha$, θα αντιστοιχηθεί ένας τύπος της μεταγλώσσας $W_i\alpha$.

Πλέον, οι **3.10-3.14** μεταγράφονται στη μεταγλώσσα ως εξής:

Β.1	$W_0 \lozenge \varphi$	Απαγωγικό πρόβλημα
Β.2	$W_0 \lozenge \neg \varphi$	
Β.3	$W_0(\alpha \to \varphi)$	Απαίτηση παραγωγής
Β.4	$W_0(\lozenge \alpha)$	Απαίτηση συνέπειας
Β.5	$\exists W(W\alpha \,\&\, W\neg\varphi)$	Απαίτηση καλής εξήγησης

Η απαίτηση της ενοποιητικής ισχύος ορίζει πως καλύτερη εξήγηση είναι αυτή που χρησιμοποιεί τις λιγότερες δυνατές ατομικές υποθέσεις. Ένας περιορισμός της είναι η ταύτιση καλύτερης εξήγησης με αυτές που θα έχουν ακριβώς ένα ατομικό τύπο.

Ορισμός: Έστω εξηγήσεις $\alpha_1,...,\alpha_n$. Θα θεωρούνται *καλύτερες* όσες αποτελούνται από ένα ατομικό τύπο.

Σε ψευδογλώσσα τυποποιείται ως εξής:

	Ψευδογλώσσα		Τυπική μορφή
B.6	$w_0 R w$		$\forall x(W_0 x \supset Wx)$
B.7	$\neg\exists v$	$w_0 R v$	$\forall x(W_0 x \supset Vx)$
B.8		vRw	$\forall x(Vx \supset Wx)$

Η **B.6** εξασφαλίζει ότι ο w στον οποίο θα βρίσκεται η εξήγηση α, αποτελεί επέκταση του υποβάθρου γνώσης και οι **B.7**, **B.8** ότι δεν υπάρχει ενδιάμεσος κόσμος, άρα η εξήγηση είναι ατομική. Επομένως, για την εξήγηση α και τον κόσμο w στον οποίο βρίσκεται θα πρέπει να ισχύει η πρόταση:

B.9
$$W_0 \Diamond \varphi \;\&\; W_0 \Diamond \neg \varphi \;\&\; W_0(\alpha \rightarrow \varphi) \;\&\; W_0(\Diamond \alpha) \;\&\; \exists W(W\alpha \,\&\, W\neg\varphi) \;\&$$
$$(\forall x(W_0 x \supset Wx) \;\&\; \sim \exists V\,(\forall x(W_0 x \supset Vx) \;\&\; \forall x(Vx \supset Wx)))$$

Αυτός ο περιορισμός, μικραίνει πολύ το εύρος εφαρμογής της. Για παράδειγμα, αν $\alpha_1 \equiv h_1 \wedge h_2$ και $\alpha_2 \equiv h_3 \wedge h_4 \wedge h_5$, η περιορισμένη αρχή δεν μπορεί να επιλέξει κάποια από αυτές ενώ είναι σαφές πως η α_2 έχει μεγαλύτερη ενοποιητική ισχύ. Από την άλλη πλευρά, αν στο παράδειγμα υπήρχε και μια ατομική εξήγηση $\alpha_3 \equiv h_6$, η απαίτηση περιορισμένης ενοποιητικής ισχύος θα την προέκρινε ως καλύτερη έναντι των α_1 και α_2. Η κεντρική ιδέα είναι ότι οι ατομικές εξηγήσεις πρέπει να βρίσκονται σε κάποιον w, επόμενο του w_0, τέτοιο ώστε να μην υπάρχει κανείς ανάμεσά τους. Οπότε αν υπάρχει ατομική εξήγηση αυτή θα πρέπει να είναι στον αμέσως επόμενο του w_0.

Βιβλιογραφία

Aliseda, A. (1997): *Seeking Explanations: Abduction in Logic*. Philosophy of Science and Artificial Intelligence. Amsterdam: University of Amsterdam.

Aliseda, A. (2003): "Mathematical Reasoning vs Abductive Reasoning: a Structural Approach", *Synthese* **134**: 25-44.

Aliseda, A. et al (2006): "Towards Abductive Reasoning in First-order Logic", *Logic Journal of the IGPL* **14**: 287-304.

Batens, D. (2006): "A Universal Logic Approach to Adaptive Logics", *Logica Universalis* **1**: 221-242.

Beirlaen, M. & Aliseda, A. (2014): "A Conditional Logic for Abduction", *Synthese* **15***:* 3733-3758.

Boyd, R. (1984): "The Current Status of Scientific Realism", in (1984) J. Leplin (ed.), *Scientific Realism*, Berkeley: University of California Press.

Falappa, M. A. et all (2002): "Explanations, Belief Revision and Defeasible Reasoning", *Artificial Intelligence* **141**: 1-28.

Flach, P. A. (1996): "Abduction and Induction: Syllogistic and Inferential Perspectives", 12th European Conference on Artificial Intelligence: 31 - 35..

Gabbay, D. et al (2008): "Cut-Based Abduction" *Logic Journal of the IGPL* **16**: 537-560.

Gauderis, T. (2012): "Modelling Abduction in Science by Means of a Modal Adaptive Logic", *Foundations of Science* **18**: 611-624.

Harman, G. H. (1965): "The Inference to the Best Explanation", *The Philosophical Review* **74**: 88-95.

Hoffman M. H. G. (2010): "Theoretic Transformations and a New Classification of Abductive Inferences", Transactions of the Charles S. Peirce Society.

Magnani, L. (2004): "Model-Based and Manipulative Abduction in Science", *Foundation of Science* **9**: 219-247.

Meheus, J. et al (2008): "Ampliative Abductive Logics and the Foundation of Logic-Based Approaches to Abduction", in (2008) Magnani et al. (ed.), *Logical and Computational Aspects of Model-Based Reasoning*, Springer.

Meheus, J. & Batens, D. (2006): "A Formal Logic for Abductive Reasoning", *Logic Journal of the IGPL* **14**: 221-236.

Meheus, J. & Provijn, D. (2006): "Abduction through Semantic Tableaux versus Abduction Through Goal-Directed Proofs", *Theoria* **22**: 295-304.

Nepomuceno-Fernandez et al (2010): "A Modal Framework for Modelling Abductive Reasoning", *Logic Journal of the IGPL* **20**: 438-444.

Nepomuceno-Fernandez et al (2012): "A DEL Approach to Abductive reasoning: Abductive Problem and Abductive Solution", *Journal of Applied Logic* **11**: 505-522.

Nepomuceno-Fernandez et al (2013): "An Epistemic and Dynamic Approach to Abductive Reasoning: Selecting the Best Explanation", *Logic Journal of the IGPL* **21**: 943-961.

Pollock, J. L. (1987): "Defeasible Reasoning", *Cognitive Science* **11**: 481-518.

Psillos, S. (1999): *Scientific Realism: How Science Tracks Truth*, New York: Routledge.

Psillos, S. (2002): "Simply the Best: A Case for Abduction".

Regia, J. et all. (1983): "Diagnostic Expert Systems Based on a Set Covering Model", *International Journal of Man-Machine Studies* **19**: 437-460.

Schurz, G. (2008): "Patterns of abduction", *Synthese* **164**: 201-234.

Soler-Toscano F. et al (2006): "Model-Based Abduction via Dual Resolution", *Logic Journal of the IGPL* **14**: 305-319.