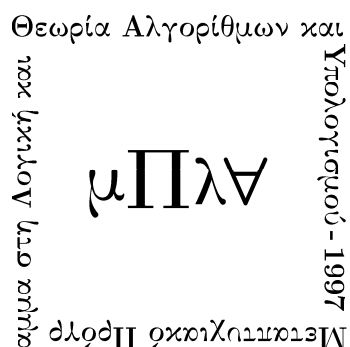


Ελένη Γ. Καλυβιανάκη

ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ
ΦΥΣΙΚΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

Μελέτη Τοπικότητας στη Θεωρία του Προσδιορισμού Αναφοράς

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ



Σεπτέμβριος 2007

Διαπανεπιστημιακό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
στη Λογική, Θεωρία Αλγορίθμων και Υπολογισμού (μΠΛΥ)
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τα λεξικά ξέρουν όλες τις ιστορίες
που γράφουμε και που θα γράψουμε
στο μέλλον, απλώς τις έχουν ξεχάσει.
Ο δικός μας ρόλος είναι να τους
τις θυμίζουμε.

Βασίλης Αλεξάκης

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ολόψυχα τον επιβλέποντα καθηγητή μου, καθ. Γιάννη Ν. Μοσχοβάκη, για τις ατέλειωτες ώρες που έχει αφιερώσει στη δουλειά αυτή, την ανεξάντλητη υπομονή του απέναντι στην, πολλές φορές, στενοκεφαλιά και το πείσμα μου καθώς και τη συνεχή ενθάρρυνση και επιμονή του. Νομίζω ότι εκτός της ανεκτίμητης επιστημονικής του διδασκαλίας, το παράδειγμα «τρόπου ζωής» που μου μετέφερε είναι το σημαντικότερο κέρδος από αυτή τη διαδικασία.

Θα πρέπει να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στο Διαπανεπιστημιακό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη στη Λογική, Θεωρία Αλγορίθμων και Υπολογισμού» (μΠΛΥ) για την ευκαιρία σπουδών που μου έδωσε. Ευχαριστώ θερμά όλο το επιστημονικό αλλά και διοικητικό προσωπικό που δούλεψε αλλά και δουλεύει για τη λειτουργία του.

Υπήρξαν αρκετοί άνθρωποι που στη διάρκεια των σπουδών μου με βοήθησαν και τους ευχαριστώ όλους. Ευχαριστώ την καθ. Joan Rand Moschovakis για τη ζεστή φιλοξενία της σε διάφορες ευκαιρίες αλλά και τις κατά καιρούς ενθαρρυντικές και εύστοχες παρατηρήσεις της σε διάφορες στιγμές αυτής της διαδρομής. Θα πρέπει επίσης να ξεχωρίσω και να ευχαριστήσω τον καθ. Γιάννη Στεφάνου για την προθυμία του να απαντάει σε όλες τις ερωτήσεις μου καθώς και τους καθ. Fritz Hamm και David Kaplan για το χρόνο που μου αφιέρωσαν. Ευχαριστώ επίσης το Τμ. Μαθηματικών του U.C.L.A. για τη φιλοξενία του τον Απρίλιο-Μάιο 2005. Τέλος, ευχαριστώ για την άψογη συνεργασία τα μέλη της Τριμελούς Επιτροπής: καθ. Κ. Δημητρακόπουλο και καθ. Γ. Κολέτσο καθώς και τα υπόλοιπα μέλη της Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής: καθ. Ελ. Κυρούση, καθ. Αντ. Μελά, καθ. Γ. Στεφάνου, καθ. Αθ. Τζουβάρα και καθ. Στ. Ψύλλο.

Η διατριβή συγχρηματοδοτήθηκε στα πλαίσια του ΕΠΕΑΕΚ από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και Εθνικούς Πόρους.

Η έναρξη ενός διδακτορικού διπλώματος αποτελεί έναρξη μίας περιπέτειας στην οποία ο υποψήφιος συμπαρασύρει χωρίς τη δική τους διάθεση τους κοινωνικούς του ανθρώπους, τους φίλους και τα μέλη της οικογένειάς του. Η

περιπέτεια αυτή για τον ίδιο έχει τις λύπες και τις χαρές της αλλά για αυτούς έχει μάλλον μόνο αγωνία και ανάγκη για επίδειξη απέραντης υπομονής. Κάποιος μου είχε πει κάποτε ότι μέχρι να τελειώσει κανείς το διδακτορικό του, έχει «χάσει» φίλους και οικογένεια· θέλω να πιστεύω ότι αυτό δε συνέβη σε μένα.

Θα πρέπει να ευχαριστήσω λοιπόν τους γονείς μου γιατί, εκτός των άλλων, ποτέ μέχρι τώρα δεν αμφισβήτησαν τις επιλογές μου αλλά, αντίθετα και στις δικές τους απόψεις πολλές φορές, συμπαραστάθηκαν σε αυτές με όλη τους την καρδιά. Σε όλη τη διαδρομή, ήταν πάντα κοντά μου επίσης η αδελφή μου η οποία άκουγε υπομονετικά σε ατέλειωτες ώρες τηλεφωνικών συζητήσεων από το μουντό Cambridge τα παράπονα και τις αγωνίες μου. Της εύχομαι ολόψυχα σύντομα να φτάσει και αυτή στο τέλος της δικής της περιπέτειας.

Δε μπορώ παρά να αναγνωρίσω επίσης την υπομονή και τη στήριξη σε πολλά επίπεδα του συντρόφου μου N., συνοδοιπόρο σε αυτή τη διαδρομή, τις οποίες εύχομαι να έχω τη μεγαλοψυχία να ανταποδώσω στο μέλλον.

Τέλος, να ευχαριστήσω ένα πιστό «φίλο» ο οποίος με το καθαρό του βλέμμα ήταν πάντα έτοιμος να με ακούει «με προσοχή» να εξηγώ κομμάτια αυτής της διατριβής.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	1
1 Τυπικές Θεωρίες Νοήματος	5
1.1 Gottlob Frege: Οι Απαρχές	5
1.2 Ο λ-λογισμός με Τύπους	9
1.3 Richard Montague: Τυπική Σημασιολογία	11
1.3.1 LIL: Γλώσσα της Εντασιακής Λογικής	12
1.3.2 Παραδείγματα από τη Φυσική Γλώσσα στην LIL	15
1.4 David Kaplan: η Λογική των Δεικτικών Εκφράσεων	17
1.5 Θεωρία Προσδιορισμού Αναφοράς: Αλγοριθμική Τυπική Σημασιολογία	19
1.5.1 Συντακτικό και Σημασιολογία της L_{ar}^λ	19
1.5.2 Αναφορική Συνωνυμία και Τοπικό Νόημα	25
1.6 Δύο Έννοιες Νοήματος σε Πλαίσιο	28
2 Τοπικότητα των Αντικειμένων με Τύπους	33
2.1 Οι Εξαρτώμενοι από την Κατάσταση Τύποι της L_{ar}^λ	33
2.2 Τοπικά Αντικείμενα	35
2.3 Δείκτες Τοπικότητας του Τύπου $\tilde{\sigma}$	43
2.4 Συναφής Συνάρτηση ως προς Δείκτη	47
3 Τοπικότητα Όρων	59
3.1 Τοπικοί Όροι	59
3.2 Κλειστές Απόδειξεις Τοπικότητας	62
3.3 Η Μέγιστα Τοπική Κλειστή Απόδειξη Τοπικότητας ενός Όρου	72
4 Τυπικές Συναφείς Συναρτήσεις Όρων	85
4.1 Μία Επέκταση της L_{ar}^λ	86
4.2 Τυπικές Τοπικά Συναφείς Συναρτήσεις Τοπικών Όρων	88
4.3 Τυπικές Συναφείς Συναρτήσεις Γενικών Όρων	93

5	Αλγοριθμικό Αντικειμενικό Περιεχόμενο	103
5.1	Αντικειμενική Κανονική Μορφή και Αντικειμενική Συνωνυμία .	104
5.2	Αντικειμενικό Περιεχόμενο και η Λογική των Δεικτικών Εκφράσεων	110
5.3	Μελλοντική Δουλειά	112
	Βιβλιογραφία	115
	Γλωσσάριο Αγγλικών Όρων	119
	Ευρετήριο Όρων	121

Εισαγωγή

Όπως κάθε άλλο σύστημα συμβόλων, χρησιμοποιούμε τις εκφράσεις της φυσικής γλώσσας (τα σύμβολα) για να «μιλήσουμε για», να αναφερθούμε σε αντικείμενα του κόσμου γύρω μας. Επικοινωνούμε μέσω μιας γλώσσας αν ξέρουμε τον τρόπο που εκτελείται αυτή η αντιστοίχιση. Ο Gottlob Frege (Ενότητα 1.1) υποστήριξε ότι οι εκφράσεις της φυσικής γλώσσας εκτός από την αναφορά τους, έχουν επίσης και νόημα το οποίο καθορίζει την αναφορά αλλά δεν εξαντλείται σε αυτήν.

Η τυπική σημασιολογία, όπως οριοθετήθηκε από τον Richard Montague (Ενότητα 1.3), επιχειρεί να μελετήσει τη σημασιολογία της φυσικής γλώσσας με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που κανείς μελετά τη σημασιολογία κάθε τυπικής γλώσσας στην Μαθηματική Λογική. Τα αποτελέσματα είναι μοντελοθεωρητικές θεωρίες νοήματος των συνθηκών αλήθειας όπου για κάθε όρο της γλώσσας τόσο το νόημα όσο και η αναφορά ορίζονται τυπικά.

Το πλαίσιο αναφοράς είναι αναπόσπαστο μέρος της χρήσης της γλώσσας. Στον προφορικό ή τον γραπτό λόγο, συνήθως ερμηνεύουμε και επομένως, καταλαβαίνουμε τη γλώσσα ως προς ένα πλαίσιο το οποίο μας επιτρέπει να αποδώσουμε καθορισμένες αναφορές σε γλωσσικές εκφράσεις. Για παράδειγμα, το δεικτικό ‘εγώ’ αναφέρεται κάθε φορά στο άτομο το οποίο εκφέρει την πρόταση στην οποία εμφανίζεται. Στις τυπικές θεωρίες νοήματος, η αναφορά ενός όρου ορίζεται σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο ενώ το νόημά του καθορίζει την αντίστοιχη αναφορά σε κάθε πλαίσιο.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό αυτών των θεωριών είναι ότι τηρούν την Αρχή της Σύνθεσης (*Compositionality Principle*): «Το νόημα ενός συνόλου είναι συνάρτηση των νοημάτων των μερών του και του τρόπου του συντακτικού συνδυασμού τους» (όπως αναφέρεται στην Εισαγωγή του [24]). Με αυτόν τον τρόπο, εξηγούμε πώς αυτός που μιλεί μια γλώσσα μπορεί να καταλάβει μία καινούργια πρόταση που δεν έχει ακούσει ποτέ πριν ή πώς αυξάνεται η γνώση του για τη γλώσσα.

Η δουλειά που παρουσιάζεται εδώ αναπτύσσεται στη Θεωρία Προσδιορισμού Αναφοράς (*Theory of Referential Intentions*) (Ενότητα 1.5). Είναι μια

τυπική θεωρία νοήματος η οποία εντάσσεται στη Φρεγκεανή παράδοση αλλά την ίδια στιγμή, εισάγει μία εντελώς καινούργια διάσταση στην τυπική σημασιολογία. Η βασική ιδέα είναι ότι ([22])

...το νόημα ενός όρου A μπορεί να απεικονιστεί πιστά από τον προσδιορισμό αναφοράς του, $\text{int}(A)$, ένα (αφηρημένο, ιδεατό, όχι απαραίτητα υλοποιήσιμο) αλγόριθμο ο οποίος υπολογίζει την υποδήλωση [αναφορά] του A .

Το νόημα μίας πρότασης σε αυτή τη θεωρία καθορίζει τα μέρη που χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε την υποδήλωσή της, κωδικοποιεί τον τρόπο που εκτελείται αυτός ο υπολογισμός και, μέσω αυτής της διαδικασίας, προσδιορίζει την υποδήλωσή της. Αυτή η δομική έννοια νοήματος παράγει ένα λογισμό αναφορικής συνωνυμίας ο οποίος κάνει λεπτές διακρίσεις μεταξύ αντίστοιχων γλωσσικών εκφράσεων που ξεπερνούν τις αναφορές τους ή ακόμα και τις αναφορές τους σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο. Στη Θεωρία Προσδιορισμού Αναφοράς, αποδίδουμε δύο είδη νοήματος σε μία πρόταση A : το *σφαιρικό της νόημα*, δηλαδή τον αλγόριθμο που υπολογίζει την υποδήλωση της A (Αλήθεια ή Ψεύδος) σε κάθε πιθανό πλαίσιο αναφοράς και το *τοπικό της νόημα* σε ένα πλαίσιο το οποίο είναι ο αλγόριθμος που υπολογίζει την υποδήλωση της A σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο.

Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε σε αυτή τη διατριβή είναι η διερεύνηση μιας έννοιας δομικού νοήματος σε πλαίσιο μιας πρότασης το οποίο να υπολογίζει την υποδήλωση σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο αναφοράς απευθείας από τα αντίστοιχα νοήματα σε πλαίσιο των μερών της πρότασης που χρειάζονται για αυτόν τον υπολογισμό. Ο στόχος είναι να ορίσουμε μία σημασιολογική τιμή για κάθε πρόταση σε ένα πλαίσιο αναφοράς, το *αντικειμενικό της περιεχόμενο (factual content)* το οποίο εκφράζει τυπικά **το τι λέει μία πρόταση για τον κόσμο σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο**. Έτσι, σε ένα πλαίσιο αναφοράς όπου οι λέξεις 'Γιάννης' και 'αυτός' αναφέρονται στο ίδιο πρόσωπο, οι προτάσεις 'Ο Γιάννης τρέχει' και 'Αυτός τρέχει' θα πρέπει να έχουν το ίδιο αντικειμενικό περιεχόμενο παρόλο που δεν είναι τοπικά συνώνυμες· από την άλλη μεριά, αν η έκφραση 'ο αδελφός της Μαρίας' αναφέρεται επίσης στο ίδιο πρόσωπο, το αντικειμενικό περιεχόμενο της πρότασης 'Ο αδελφός της Μαρίας τρέχει' διαφέρει διότι εκφράζει πρόσθετα δεδομένα για τον κόσμο.

Βασική ιδέα της προσέγγισης που υιοθετήθηκε εδώ είναι ο τυπικός ορισμός και η μελέτη μίας έννοιας **τοπικότητας (locality)** η οποία εξηγεί τον τρόπο που συνδυάζονται τα νοήματα σε πλαίσιο των μερών μίας πρότασης. Η ερμηνεία κάθε σταθεράς της γλώσσας καθορίζει κατά πόσο η τιμή της σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο εξαρτάται μόνο από τις τιμές των ορισμάτων της σε αυτό το πλαίσιο ή από τις τιμές τους και σε άλλα πλαίσια. Για παράδειγμα,

μπορούμε να συγκρίνουμε το ρήμα ‘τρέχω’ και τον προτασιακό τελεστή ‘αναγκαία’. Ο στόχος είναι στη συνέχεια να προσδιορίσουμε μία μέγιστα τοπική ερμηνεία κάθε πρότασης που σέβεται τη συμπεριφορά τοπικότητας των σταθερών που εμφανίζονται σε αυτήν, αλλά την ίδια στιγμή, ο υπολογισμός της υποδήλωσης οποιουδήποτε από τους υποόρους της σε ένα πλαίσιο περιορίζεται στις τιμές των ορισμάτων της σε αυτό το πλαίσιο *όσο περισσότερο γίνεται*. Έτσι, εν τέλει, από τη μαθηματική πλευρά, αυτή η δουλειά αποτελεί μια μελέτη της τοπικότητας στη Θεωρία Προσδιορισμού Αναφοράς.

Η διατριβή οργανώνεται σε πέντε κεφάλαια ως εξής. Στο Κεφάλαιο 1, παρουσιάζουμε με λεπτομέρεια μερικές τυπικές θεωρίες νοήματος που ακολουθούν τις πρωτοποριακές ιδέες του G. Frege εστιάζοντας την προσοχή μας στη μελέτη του νοήματος σε πλαίσιο. Εισάγουμε επίσης την τυπική γλώσσα L_{ar}^λ , τη γλώσσα της Θεωρίας Προσδιορισμού Αναφοράς, η οποία οριοθετεί τεχνικά το χώρο στον οποίο αναπτύσσεται αυτή η δουλειά. Στο Κεφάλαιο 2, εισάγονται οι βασικές ιδέες της τοπικότητας για τα αντικείμενα της δομής ερμηνείας της L_{ar}^λ ενώ στο Κεφάλαιο 3, αυτές οι ιδέες αναπτύσσονται σε μία μελέτη της συμπεριφοράς τοπικότητας των όρων. Σε αυτό το κεφάλαιο, δείχνουμε επίσης ότι υπάρχει μία μέγιστα τοπική ερμηνεία για κάθε όρο. Στο Κεφάλαιο 4, ορίζουμε τυπικά στην L_{ar}^λ για κάθε όρο A ένα νέο όρο ο οποίος αντικατοπτρίζει τη συμπεριφορά τοπικότητας του A . Τέλος, στο Κεφάλαιο 5, για κάθε όρο A , χρησιμοποιούμε αυτό το νέο όρο υπό την μέγιστα τοπική ερμηνεία του για να ορίσουμε το αντικειμενικό περιεχόμενο του A σε κάθε πλαίσιο αναφοράς.

Επομένως, το βασικό αντικείμενο της δουλειάς μας δεν εισάγεται τυπικά παρά μόνο στο τελευταίο κεφάλαιο της διατριβής. Στην πραγματικότητα, αν και το αντικειμενικό περιεχόμενο είναι διαισθητικά μία καθαρή έννοια για απλά παραδείγματα στη φυσική γλώσσα, ο ακριβής ορισμός του αποδείχτηκε αρκετά περίπλοκος, ειδικά, δεδομένου ότι μελετήθηκε εδώ στα πλαίσια μίας γενικής έννοιας τοπικότητας.

Κεφάλαιο 1

Τυπικές Θεωρίες Νοήματος

Στην παράδοση της τυπικής σημασιολογίας, το νόημα στη φυσική γλώσσα απεικονίζεται τυπικά από διάφορες μαθηματικές έννοιες σε μια προσπάθεια να οριστούν αυστηρά οι Φρεγκεανοί όροι *σημασία* και *υποδήλωση*. Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζουμε τις έννοιες του σφαιρικού και τοπικού νοήματος όπως ορίζονται στη δουλειά του R. Montague (Ενότητα 1.3) και σε αυτήν του D. Kaplan (Ενότητα 1.4) καθώς και στη Θεωρία Προσδιορισμού Αναφοράς (Ενότητα 1.5). Το τελευταίο αυτό μέρος αποτελεί και το τεχνικό εργαλείο της διατριβής κι επομένως, παρουσιάζεται με περισσότερες λεπτομέρειες.

Στην Ενότητα 1.2, υπάρχει μία σύντομη επισκόπηση του λ-λογισμού με τύπους ο οποίος είναι το βασικό εργαλείο των θεωριών που παρουσιάζονται εδώ ενώ στην Ενότητα 1.6, σχολιάζουμε τα βασικά αποτελέσματα του [13] όπου ορίζονται, εκτός της έννοιας του σφαιρικού νοήματος, δύο έννοιες νοήματος σε πλαίσιο — τοπικό νόημα και αντικειμενικό περιεχόμενο — σε μία «αλγοριθμική» επέκταση της λογικής του Montague. Σε όλο το κεφάλαιο, εστιάζουμε την προσοχή μας στους διαφορετικούς τρόπους που ορίζεται και χρησιμοποιείται το νόημα σε πλαίσιο.

Το κεφάλαιο ξεκινά με μία σύντομη αναφορά στις ιδέες του G. Frege — εκεί απ' όπου ξεκίνησαν όλα.

1.1 Gottlob Frege: Οι Απαρχές

Στο [6], ο G. Frege αντιμετωπίζει τη φυσική γλώσσα ως ένα σύστημα συμβολισμών και επιδιώκει να την κατανοήσει όπως θα έκανε με κάθε άλλο τυπικό σύστημα μέσω της λογικής ανάλυσης. Αυτό το είδος της αφαίρεσης ως προς τη φυσική γλώσσα δεν είναι προφανές αλλά δεν αποτελεί έκπληξη για κάποιον του οποίου το βασικό ενδιαφέρον είναι η λογική θεμελίωση των μαθηματικών.

Πρώτα απ' όλα, τα «σύμβολα» της φυσικής γλώσσας χρησιμοποιούνται από τους ομιλητές για να αναφερθούν (*refer*) στον κόσμο σε όλη του την πολυπλοκότητα. Ο Frege ισχυρίζεται ωστόσο ότι, εκτός από την αναφορά κάθε συμβόλου (την υποδήλωσή του, *Bedeutung*¹) (*denotation*), υπάρχει επίσης και η *σημασία του* (*Sinn, sense*), «που περιλαμβάνει τον τρόπο της παρουσίας» ([6]: σελ. 57)². Επομένως, για να δανειστούμε ένα κλασικό παράδειγμα, οι δύο φράσεις 'ο Αποσπερίτης' και 'ο Αυγερινός' έχουν την ίδια αναφορά: αναφέρονται και οι δύο στον πλανήτη Αφροδίτη. Ωστόσο, οι δύο φράσεις δεν έχουν την ίδια σημασία, γεγονός που εξηγεί γιατί η πρόταση 'ο Αποσπερίτης ταυτίζεται με τον Αυγερινό' λέει κάτι μη τετριμμένο για τον κόσμο.

Ο γνώστης μίας γλώσσας ξέρει τις σημασίες των «ονομάτων» ή συμβόλων και με τη μεσολάβησή τους είναι σε θέση να προσδιορίσει τις υποδηλώσεις τους (αν υπάρχουν). Αν και οι σημασίες δεν είναι τυπικά ορισμένες³, ο Frege δίνει έμφαση στον αντικειμενικό τους ρόλο σε αντίθεση με τον υποκειμενικό των «ιδεών». Συνοψίζοντας σε μία φράση: «ένα κύριο όνομα (...) εκφράζει τη σημασία του, δηλώνει ή υποδηλώνει την αναφορά του» ([6]: σελ. 61).

Το επόμενο βήμα του Frege στη μελέτη της σημασιολογίας της φυσικής γλώσσας είναι οι δηλωτικές προτάσεις (*declarative sentences*) (προτάσεις, για συντομία). Πρώτα απ' όλα, ο Frege θεωρεί ότι αποτελούνται από μέρη με τον ίδιο τρόπο όπως οι μαθηματικές προτάσεις μπορούν να αναλυθούν σε μία συνάρτηση και τα ορίσματά της. Με τα δικά του λόγια ([3]: σελ. 31)

Οι προτάσεις γενικά, όπως οι ισότητες ή οι ανισότητες στην Ανάλυση, μπορεί να φανταστεί κανείς ότι διασπώνται σε δύο μέρη: το ένα πλήρες από μόνο του, και το άλλο έχοντας ανάγκη συμπληρώματος, ή 'μη κορεσμένο'. Έτσι, για παράδειγμα, η πρόταση

'Ο Καίσαρας κατέκτησε τη Γαλατία'

διασπάται σε 'ο Καίσαρας' και 'κατέκτησε τη Γαλατία'. Το δεύτερο μέρος είναι 'μη κορεσμένο' — περιλαμβάνει μία κενή θέση: μόνο όταν αυτή η θέση συμπληρωθεί από ένα κύριο όνομα, ή μία

¹Στο [6], ο όρος «*Bedeutung*» μεταφράζεται ως «νόημα» («*meaning*») αλλά θα χρησιμοποιήσουμε εδώ τον όρο «υποδήλωση» αντί αυτού, αφήνοντας τον όρο «νόημα» για πιο γενική χρήση.

²Σε όλα τα αποσπάσματα που παρατίθενται σε αυτό το κεφάλαιο, ο αριθμός της σελίδας παραπέμπει στο αντίστοιχο αγγλικό κείμενο. Η απόδοση του [6] που χρησιμοποιείται εδώ βασίζεται αλλά δεν ακολουθεί πιστά την ελληνική μετάφρασή του ως «Νόημα και Αναφορά», στο Περιοδικό «Δευκαλίων», Τεύχος 17, 1977.

³Είναι ίσως διότι «ό,τι είναι λογικά απλό δεν μπορεί να έχει ένα κανονικό ορισμό» ([5], σελ. 193).

έκφραση που αντικαθιστά ένα κύριο όνομα, εμφανίζεται μία ολοκληρωμένη σημασία. Εδώ επίσης δίνω το όνομα 'συνάρτηση' σε αυτό που αντιπροσωπεύει αυτό το 'μη κορεσμένο' μέρος. Σε αυτή την περίπτωση το όρισμα είναι ο Καίσαρας.

Δεύτερον, μία πρόταση ως σύνολο, όπως ένα «όνομα», έχει σημασία και αναφορά. Η σημασία της είναι μία «σκέψη»: «(...) όχι το υποκειμενικό ενέργημα του σκέπτεσθαι, αλλά το αντικειμενικό περιεχόμενό του, που μπορεί να είναι κοινό κτήμα πολλών ανθρώπων» ([6]: σελ. 62). Η υποδήλωσή της είναι μία τιμή αλήθειας (Αλήθεια ή Ψεύδος) η οποία μαζί με τη σημασία της αποφέρει γνώση.

Τα συστατικά μέρη μιας πρότασης συνεισφέρουν με τις υποδηλώσεις τους στην υποδήλωση της πρότασης. Ο Frege δηλώνει ρητά ότι όταν ένα μέρος μίας πρότασης αντικατασταθεί από μία φράση με την ίδια υποδήλωση, τότε η υποδήλωση της πρότασης παραμένει ίδια παρόλο που η σημασία της μπορεί να αλλάξει.

Υπάρχει μία έντονη αντιπαράθεση ([11], [23]) κατά πόσον ο Frege πιστεύει σε μία ανάλογη ιδιότητα αντικατάστασης (*substitution property*) για τις σημασίες και κατά πόσον αυτή η ιδιότητα, η οποία διατυπώνεται σαφώς για τις υποδηλώσεις, συνεπάγεται την Αρχή της Σύνθεσης για τις υποδηλώσεις ή τις σημασίες, ειδικά σε σχέση με την Αρχή του Πλαισίου⁴ (*Context Principle*) ([4]), η οποία, ωστόσο, διατυπώθηκε αρκετά νωρίτερα. Είναι δίκαιο να πούμε ότι η ιδιότητα αντικατάστασης για τις σημασίες δεν διατυπώνεται σαφώς στο [6] αλλά υπάρχουν αποσπάσματα όπου υπονοείται με κάποιο τρόπο για παράδειγμα, ([6]: σελ. 62-63)

Αν επρόκειτο μόνο για τη σημασία της πρότασης, τη σκέψη, δεν θα ήταν ανάγκη να ασχοληθούμε με την υποδήλωση ενός μέρους της πρότασης: μόνο η σημασία, και όχι η υποδήλωση του τμήματος, έχει σχέση με το νόημα ολόκληρης της πρότασης.

Ένα πράγμα που αξίζει να αναφέρουμε είναι ότι η αντικατάσταση ενός μέρους μίας πρότασης από μία άλλη έκφραση με την ίδια σημασία προϋποθέτει ότι έχει οριστεί και χρησιμοποιείται κάποιου είδους σχέσης ισοδυναμίας μεταξύ των σημασιών. Αυτό δεν είναι δυνατόν να γίνει στο Frege διότι οι σημασίες δεν είναι τυπικά ορισμένες, αν και δηλώνει ότι η ίδια σημασία μπορεί να εκφραστεί με διάφορους τρόπους και επομένως, αυτή η πιθανότητα υπάρχει ([5]: σελ. 46).

⁴Σύμφωνα με την Αρχή του Πλαισίου, η οποία χαρακτηρίζεται ως τέτοια από τους μελετητές του Frege και όχι τον ίδιο τον Frege, η αναφορά (υποδήλωση, *Bedeutung*) των λέξεων θα πρέπει να καθορίζεται στο πλαίσιο μίας πρότασης και όχι μεμονωμένα.

Ποιός είναι ο ρόλος του πλαισίου αναφοράς στη Φρεγκεανή σημασιολογία; Δεν είναι εύκολο να πούμε και πρέπει κανείς να είναι προσεκτικός στο να μη προσπαθεί να βρει απαντήσεις στο Frege σε ερωτήσεις που τέθηκαν αρκετές δεκαετίες μετά τη δουλειά του. Παρ' όλα αυτά, ο Frege προϋποθέτει σαφώς ότι μία πρόταση εξετάζεται πάντα ως προς ένα πλαίσιο αναφοράς — συνήθως τα τρέχοντα σημεία χρόνου, τόπου κλπ. Η υποδήλωση μίας πρότασης είναι Αλήθεια ή Ψεύδος ακριβώς επειδή το πλαίσιο αναφοράς υπονοείται πάντα στη χρήση της φυσικής γλώσσας. Ένα χωρίο στο [7] ([25]: σελ. 40), αν και έχει γραφτεί πολύ αργότερα από το [6], είναι διαφωτιστικό:

Επομένως ο χρόνος της εκφοράς είναι μέρος της έκφρασης της σκέψης. Αν κάποιος θέλει να πει σήμερα ό,τι εξέφρασε χθες χρησιμοποιώντας τη λέξη 'σήμερα', θα αντικαταστήσει αυτή τη λέξη με τη 'χθες'. Αν και η σκέψη είναι η ίδια, η λεκτική της έκφραση πρέπει να είναι διαφορετική για να ακυρωθεί η αλλαγή της σημασίας η οποία θα πραγματοποιούνταν από τους διαφορετικούς χρόνους της εκφοράς.

Επομένως, σύμφωνα με το Frege, η εκφορά του 'Σήμερα βρέχει' μία συγκεκριμένη μέρα εκφράζει τη ίδια σκέψη (την ίδια σημασία) με την εκφορά του 'Χθες έβρεξε' την επόμενη μέρα. Έχουν, φυσικά, την ίδια υποδήλωση αλλά, επιπροσθέτως, εκφράζουν την ίδια σκέψη. Ο Frege στρέφει την προσοχή του εδώ σε μία σχέση συνωνυμίας μεταξύ δύο σημασιολογικών τιμών η οποία είναι διαισθητικά ελκυστική και κοντά στην εμπειρία μας.

Ένα άλλο παράδειγμα που αναφέρεται στο [7] είναι αυτό μίας εκφοράς που περιλαμβάνει το δεικτικό 'εγώ'. Γίνεται η σύγκρισή της με μία αντίστοιχη εκφορά όπου αντί του 'εγώ', αναφέρεται το όνομα του ομιλητή, δηλαδή 'Dr Gustav Lauben'. Σε αυτή την περίπτωση, η σχέση συνωνυμίας δεν είναι καθόλου σαφής γιατί τόσο η σημασία του 'εγώ' όσο και η σημασία του κυρίου ονόματος δεν προσδιορίζονται τετριμμένα και περιλαμβάνουν και την αντίληψη του ομιλητή για αυτά.

Συνοψίζοντας, στη Φρεγκεανή σημασιολογία, η υποδήλωση και η σημασία μίας πρότασης εξετάζονται πάντα ως προς ένα πλαίσιο αναφοράς. Το ενδιαφέρον του Frege είναι κυρίως στο νόημα σε πλαίσιο αφού η Αλήθεια ή το Ψεύδος μιας πρότασης μπορούν να καθοριστούν μόνο αν εξετάσουμε την πρόταση σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο και για να εκφράσουμε την ίδια σημασία σε δύο διαφορετικά πλαίσια μπορεί να χρειαστεί να εκφέρουμε δύο διαφορετικές προτάσεις.

1.2 Ο λ-λογισμός με Τύπους

Η γένεση του λ-λογισμού (λ-calculus) στη δεκαετία του '30 από τον Alonzo Church αποτέλεσε μέρος της αναζήτησης για τη θεμελίωση των μαθηματικών. Ο λ-λογισμός χρησιμοποιείται ως ένα γενικό πλαίσιο μελέτης των συναρτήσεων όπου μία συνάρτηση δεν περιορίζεται σε ένα σύνολο ζευγών ορίσματος-τιμής αλλά αντίθετα «εκφράζεται» από τον τρόπο που παράγονται αυτά τα ζεύγη. Σε αυτήν την ενότητα, γίνεται μία σύντομη παρουσίαση του λ-λογισμού στη μορφή που θα χρησιμοποιηθεί τόσο στη δουλειά του R. Montague όσο και στη Θεωρία Προσδιορισμού Αναφοράς.

Οι τύποι ορίζονται αναδρομικά από ένα σύνολο βασικών τύπων και του τύπου συνάρτησης σε αυτούς. Εδώ οι βασικοί τύποι είναι: οντότητες (e), τιμές αλήθειας (t) και, πιθανόν, καταστάσεις (s), και, γενικά,

$$\tau ::= e \mid t \mid s \mid (\tau_1 \rightarrow \tau_2). \quad (1.1)$$

Υποθέτουμε ότι για κάθε τύπο, έχουμε ένα άπειρο αριθμό μεταβλητών με τύπους. Αν η x είναι μία μεταβλητή τύπου τ , χρησιμοποιούμε το συμβολισμό x^τ . Οι όροι ορίζονται αναδρομικά χρησιμοποιώντας την εφαρμογή (*application*) και την λ-αφαίρεση (*λ-abstraction*)

$$A ::= x \mid A(B) \mid \lambda(x)(B). \quad (1.2)$$

Σε κάθε όρο προσδίδουμε ένα τύπο, που συμβολίζουμε ως

$$A : \tau \iff \text{ο τύπος του } A \text{ είναι } \tau$$

σύμφωνα με τους ακόλουθους περιορισμούς:

- Αν η x έχει τύπο τ (x^τ), τότε, ως όρος $x : \tau$.
- Αν $A : (\tau_1 \rightarrow \tau_2)$ και $B : \tau_1$, τότε $A(B) : \tau_2$.
- Αν $B : \tau_2$ και $x : \tau_1$, τότε $\lambda(x)(B) : (\tau_1 \rightarrow \tau_2)$.

Οι ελεύθερες (*free*) εμφανίσεις μίας μεταβλητής x σε ένα όρο A ορίζονται από⁵:

- Αν $A \equiv x$, τότε η εμφάνιση της x είναι ελεύθερη στον A .
- Αν $A \equiv B(C)$, τότε οι ελεύθερες εμφανίσεις της x στον A είναι αυτές της x στον B και C .

⁵Γενικά, θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο « \equiv » για να δηλώσουμε τη σχέση ισότητας μεταξύ συντακτικών αντικειμένων.

- Αν $A \equiv \lambda(x)(B)$, καμία εμφάνιση της x δεν είναι ελεύθερη στον A αλλά οι ελεύθερες εμφανίσεις κάθε $y \neq x$ στον A είναι αυτές της y στον B .

Στην περίπτωση του λ -όρου, $A \equiv \lambda(x)(B)$, κάθε εμφάνιση της x στον A θεωρείται δεσμευμένη (*bound*). Ένας όρος είναι κλειστός (*closed*) αν δεν έχει ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών.

Τα τυπικά συστήματα που θα εξετάσουμε εδώ εμπλουτίζονται από σταθερές (*constants*) με τύπους (τις οποίες συμβολίζουμε συνήθως με $c : \tau$) και επομένως, γενικά, οι όροι ορίζονται αναδρομικά ως

$$A ::= x \mid c \mid A(B) \mid \lambda(x)(B). \quad (1.3)$$

Για κάθε όρο A , μπορούμε να ορίσουμε επίσης το δέντρο σχηματισμού του (*formation tree*) το οποίο είναι μία κατάλληλη απεικόνιση του τρόπου που ο όρος σχηματίζεται.

Μία κανονική δομή ενός συστήματος λ -λογισμού με τύπους περιλαμβάνει:

- (i) Μη κενά σύνολα (*σύνπαντα*) αντικειμένων βασικών τύπων (\mathbb{T}_τ) και για τους τύπους συνάρτησης, τα αντίστοιχα σύνολα συναρτήσεων ως εξής:

$$\mathbb{T}_{\tau_1 \rightarrow \tau_2} = \{f \mid f : \mathbb{T}_{\tau_1} \rightarrow \mathbb{T}_{\tau_2}\}.$$

- (ii) Αν υπάρχουν σταθερές, για κάθε σταθερά $c : \tau$, ένα αντίστοιχο αντικείμενο του ίδιου τύπου $c \in \mathbb{T}_\tau$.

Συνάρτηση ανάθεσης (*τιμών*) (*assignment*) είναι η τυχαία συνάρτηση g η οποία αντιστοιχεί σε κάθε μεταβλητή $x : \tau$ ένα αντικείμενο στο αντίστοιχο σύνολο αντικειμένων του τύπου τ ($g(x) \in \mathbb{T}_\tau$). Ορίζουμε επίσης την *ενημέρωση* (*update*) $g\{x := f\}$ μίας ανάθεσης g ως

$$g\{x := f\}(y) = \begin{cases} f, & \text{αν } y \equiv x, \\ g(y), & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Τέλος, ορίζεται σε αυτή τη δομή μία συνάρτηση υποδήλωσης τέτοια ώστε σε κάθε όρο $A : \tau$ και σε κάθε ανάθεση τιμών g στις μεταβλητές αντιστοιχεί ένα αντικείμενο στο αντίστοιχο \mathbb{T}_τ . Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\text{den}(A) : \text{Αναθέσεις} \rightarrow \mathbb{T}_\tau$$

με τις εξής αναδρομικές προτάσεις:

- $\text{den}(x)(g) = g(x)$.
- $\text{den}(c)(g) = c$.
- $\text{den}(B(C))(g) = \text{den}(B)(g)(\text{den}(C)(g))$.
- $\text{den}(\lambda(x)(B))(g) = (f \mapsto \text{den}(B)(g\{x := f\}))$,
όπου αν $x : \tau$, τότε $f \in \mathbb{T}_\tau$.

1.3 Richard Montague: Τυπική Σημασιολογία

Η δουλειά του R. Montague στη δεκαετία του '60 θεμελίωσε την *τυπική σημασιολογία της φυσικής γλώσσας* (*formal natural language semantics*): κίνητρό του ήταν η ξεκάθαρα διατυπωμένη πεποίθησή του με την οποία ξεκινάει το [16]:

Αρνούμαι να δεχτώ τον ισχυρισμό ότι υπάρχει μία σημαντική θεωρητική διαφορά μεταξύ τυπικών και φυσικών γλωσσών.

Ο Montague αναπτύσσει και υπερασπίζεται την πεποίθησή του σε μία σειρά εργασιών (που είναι συγκεντρωμένες στο [19]) που σκοπό έχουν να εφοδιάσουν την αγγλική γλώσσα με μία σημασιολογία περίπου όπως η σημασιολογία μίας οποιασδήποτε τυπικής γλώσσας της συμβολικής λογικής.

Η φυσική γλώσσα μεταφράζεται σε μία τυπική γλώσσα *Έντασιακή Λογική* (*Intensional Logic* – IL) με μία λεπτομερή διαδικασία η οποία αντιστοιχεί τους συντακτικούς της κανόνες σε κατάλληλους κανόνες σχηματισμού όρων της IL. Επομένως, κάθε φράση, κάθε πρόταση αποδίδεται από έναν όρο της IL η οποία είναι ένας λ-λογισμός με τύπους ο οποίος έχει εξοπλιστεί με τους τελεστές *έντασης* ($\hat{}$) και *έκτασης* (\sim). Η ερμηνεία των όρων της IL εξαρτάται από το πλαίσιο αναφοράς, και έτσι κάθε όρος A υποδηλώνει την *έκτασή* του (*extension*) σε κάθε δοσμένο πλαίσιο: η *ένταση* (*intension*) του A είναι η συνάρτηση η οποία αντιστοιχεί σε κάθε πλαίσιο την έκταση του A σε αυτό το πλαίσιο και δηλώνεται στην IL από τον όρο $\hat{}(A)$.

Πριν παρουσιάσουμε λεπτομερώς μία παραλλαγή του τυπικού συστήματος του Montague, θα κάνουμε μερικά γενικά σχόλια για το ιστορικό φόντο αυτής της δουλειάς και τη σχέση της με τις ιδέες του Frege. Ο Rudolf Carnap είναι ο πρώτος που απεικόνισε τυπικά την υποδήλωση και τη σημασία του Frege με την έκταση και την ένταση, αντίστοιχα, και που τυποποίησε την έννοια του πλαισίου ως *περιγραφή-κατάστασης* (*state-description*) ([1]: σελ. 9):

Μία κλάση προτάσεων στο S_I , η οποία περιλαμβάνει για κάθε ατομική πρόταση είτε την ίδια την πρόταση είτε την άρνησή της, αλλά όχι και τις δύο, και καμία άλλη πρόταση, ονομάζεται μία *περιγραφή-κατάστασης* στο S_I , διότι προφανώς δίνει μία πλήρη περιγραφή μίας πιθανής κατάστασης του σύμπαντος των ατόμων ως προς όλες τις ιδιότητες και τις σχέσεις που εκφράζονται από τα κατηγορήματα του συστήματος. Επομένως, οι περιγραφές-κατάστασης αντιπροσωπεύουν τους πιθανούς κόσμους του Leibniz ή τις πιθανές καταστάσεις πραγμάτων του Wittgenstein.

Η έκταση μίας έκφρασης είναι τώρα η υποδήλωσή της σε μία συγκεκριμένη περιγραφή-κατάστασης και η ένταση είναι η συνάρτηση από όλες τις περιγραφές-

καταστάσεων στις εκτάσεις — σε κάθε πιθανή τέτοια κατάσταση, η ένταση καθορίζει την αντίστοιχη υποδήλωση.

Η γλώσσα IL του Montague βασίζεται σε αυτές τις ιδέες αλλά στηρίζεται επίσης και στη σημασιολογία της Τροπικής Λογικής του Saul Kripke όπου η σημασιολογία των πιθανών κόσμων (*possible world semantics*) ορίζεται τυπικά με συγκεκριμένο τρόπο. Οι καταστάσεις (*states*) ή δείκτες (*indices*), όπως χρησιμοποιούνται από τον Montague, και από όλα τα άλλα συστήματα τυπικής σημασιολογίας (με πολλές αλλά όχι σημαντικές παραλλαγές), είναι πλειάδες παραμέτρων ένδειξης που αντιπροσωπεύουν τις πολλαπλές «διαστάσεις» ενός πλαισίου αναφοράς. Συνήθως, αυτές οι παράμετροι περιλαμβάνουν αλλά δεν περιορίζονται απαραίτητα σε: ένα πιθανό κόσμο, μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή, μία συγκεκριμένη τοποθεσία, τον ομιλητή κλπ. Σε κάθε περίπτωση, είναι βασική προϋπόθεση σε τέτοια συστήματα (όπως αυτά που θα παρουσιάσουμε και θα χρησιμοποιήσουμε εδώ) ότι δοσμένης μίας κατάστασης, προσδιορίζονται όλες οι διαστάσεις του πλαισίου αναφοράς της εκφοράς μίας συγκεκριμένης έκφρασης.

Τέλος, αποτελεί σημαντική πτυχή του συστήματος του Montague ότι σέβεται πλήρως την Αρχή της Σύνθεσης. Στην IL, η ένταση ενός σύνθετου όρου είναι συνάρτηση των εντάσεων των μερών του και του συντακτικού συνδυασμού τους.

Από την άλλη μεριά, όπως ισχυριζόταν ο Frege, υπάρχουν περιπτώσεις όπου για να καθορίσουμε την υποδήλωση μιας πρότασης χρειαζόμαστε, όχι την υποδήλωση, αλλά τη σημασία μιας δευτερεύουσας πρότασης, για παράδειγμα, στις προτάσεις που εκφράζουν πεποίθηση (*belief sentences*) όπως η πρόταση ‘Ο Κοπέρνικος πίστευε ότι οι τροχιές των πλανητών είναι κύκλοι’. Με άλλα λόγια, μέρος της έκτασης μίας τέτοιας πρότασης είναι η ένταση της δευτερεύουσας πρότασής της. Επομένως, για να μπορέσουμε να μείνουμε πιστοί στην Αρχή της Σύνθεσης, η ένταση μίας έκφρασης δεν είναι αρκετό να είναι μέρος της μεταγλώσσας (*metalinguage*) αλλά, αντίθετα, κανείς θα πρέπει να μπορεί να αναφερθεί σε αυτή και στη γλώσσα-αντικείμενο (*object-language*)⁶. Στην περίπτωση της IL, οι τελεστές έντασης και έκτασης είναι οι μηχανισμοί που χρησιμοποιούνται για να ορίσουμε τυπικά τις αντίστοιχες σημασιολογικές τιμές σε αυτήν.

1.3.1 LIL: Γλώσσα της Εντασιακής Λογικής

Η Γλώσσα της Εντασιακής Λογικής (*Language of Intensional Logic*, LIL) είναι μία παραλλαγή της IL που είναι πιο κοντά στη σύγχρονη αντίληψη για

⁶ Η διάκριση μεταξύ γλώσσας-αντικειμένου και μεταγλώσσας οφείλεται στον R. Carnap στο [1].

τη σημασιολογία του Montague και την ίδια στιγμή, βρίσκεται στον πυρήνα της L_{ar}^λ η οποία είναι η τυπική γλώσσα της Θεωρίας Προσδιορισμού Αναφοράς (Ενότητα 1.5)⁷.

Οι τύποι στη LIL ορίζονται αναδρομικά ως

$$\tau ::= e \mid t \mid (s \rightarrow \tau_2) \mid (\tau_1 \rightarrow \tau_2) \quad (1.4)$$

όπου οι βασικοί τύποι είναι: οντότητες (e), τιμές αλήθειας (t) και καταστάσεις (s). Παρατηρούμε ότι ο τύπος s εμφανίζεται μόνο ως το όνομα του πεδίου τιμών των τύπων συνάρτησης⁸.

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν άπειρες το πλήθος μεταβλητές κάθε τύπου (που συμβολίζουμε ως x^T). Οι όροι στη LIL είναι οι όροι του λ-λογισμού (Ενότητα 1.2) μαζί με τους όρους που σχηματίζονται από τους τελεστές έντασης και έκτασης, δηλαδή ορίζονται ως

$$A ::= x \mid c \mid A(B) \mid \lambda(x)(B) \mid \sim(A) \mid \hat{}(A) \quad (1.5)$$

όπου η x είναι μεταβλητή οποιουδήποτε τύπου, η c είναι σταθερά με τύπο και κάποιοι περιορισμοί στους τύπους πρέπει να γίνονται σεβαστοί. Σε κάθε όρο προσδίδεται ένας τύπος όπως στο λ-λογισμό με τύπους:

- Αν x^T , τότε ως όρος $x : \tau$ και αν η c έχει τύπο τ , τότε $c : \tau$.
- Αν $A : (\tau_1 \rightarrow \tau_2)$ και $B : \tau_1$, τότε $A(B) : \tau_2$.
- Αν $B : \tau_2$ και $x : \tau_1$, τότε $\lambda(x)(B) : (\tau_1 \rightarrow \tau_2)$.
- Αν $A : (s \rightarrow \tau)$, τότε $\sim(A) : \tau$.
- Αν $A : \tau$, τότε $\hat{}(A) : (s \rightarrow \tau)$.

Οι ελεύθερες και δεσμευμένες εμφανίσεις των μεταβλητών σε κάθε όρο ορίζονται ως συνήθως.

Μία δομή ερμηνείας της γλώσσας LIL περιλαμβάνει:

(i) Σύμπαντα αντικειμένων κάθε τύπου: ένα μη κενό σύνολο \mathbb{T}_e για τις οντότητες, το διμελές σύνολο των τιμών αλήθειας $\mathbb{T}_t = \{0, 1\}$ και αναδρομικά για κάθε τύπο $(\tau_1 \rightarrow \tau_2)$,

$$\mathbb{T}_{\tau_1 \rightarrow \tau_2} = \{f \mid f : \mathbb{T}_{\tau_1} \rightarrow \mathbb{T}_{\tau_2}\}.$$

⁷Η γλώσσα LIL χρησιμοποιείται επίσης στο [13] (βλέπε Ενότητα 1.6).

⁸Στο [8], ο Gallin υποστηρίζει ότι ο s δεν είναι τύπος δεδομένου ότι «...η IL προορίζονταν ως μία τυπική λογική με εντασιακά χαρακτηριστικά όπως αυτά των φυσικών γλωσσών, και στη φυσική γλώσσα δεν αναφερόμαστε ρητά στα πλαίσια χρήσης». Ο Dana Scott στο [26] υποστηρίζει με το ίδιο πνεύμα ότι «...η απάντηση είναι ότι απλώς δεν μιλάμε με αυτόν τον τρόπο.».

Οι μεταβλητές κατάστασης κυμαίνονται σε ένα μη κενό σύνολο \mathbb{T}_s και το σύνολο $\mathbb{T}_{s \rightarrow \tau}$ ορίζεται όπως παραπάνω.

(ii) Για κάθε σταθερά $c : \tau$, μία αντίστοιχη συνάρτηση $c : \mathbb{T}_s \rightarrow \mathbb{T}_\tau$.

Τώρα, σε μία δομή ερμηνείας της LIL, η συνάρτηση den_{LIL} αντιστοιχεί σε κάθε όρο $A : \tau$ το αντικείμενο

$$\text{den}_{\text{LIL}}(A) : \text{Αναθέσεις} \rightarrow (\mathbb{T}_s \rightarrow \mathbb{T}_\tau)$$

και ορίζεται από τους ακόλουθους αναδρομικούς κανόνες όπου οι a και b είναι καταστάσεις στο \mathbb{T}_s :

- $\text{den}_{\text{LIL}}(x)(g)(a) = g(x).$
- $\text{den}_{\text{LIL}}(c)(g)(a) = c(a).$
- $\text{den}_{\text{LIL}}(A(B))(g)(a) = \left(\text{den}_{\text{LIL}}(A)(g)(a) \right) \left(\text{den}_{\text{LIL}}(B)(g)(a) \right).$
- $\text{den}_{\text{LIL}}(\lambda(x)(B))(g)(a) = (f \mapsto \text{den}_{\text{LIL}}(B)(g\{x := f\})(a)),$
όπου αν $x : \sigma$, τότε το f είναι οποιοδήποτε αντικείμενο στο \mathbb{T}_σ .
- $\text{den}_{\text{LIL}}(\tilde{}(A))(g)(a) = \left(\text{den}_{\text{LIL}}(A)(g)(a) \right)(a).$
- $\text{den}_{\text{LIL}}(\hat{}(A))(g)(a) = (b \mapsto \text{den}_{\text{LIL}}(A)(g)(b)) (= \text{den}_{\text{LIL}}(A)(g)).$

Το συντακτικό και η σημασιολογία της γλώσσας IL όπως παρουσιάζονται στο [2] (σελ. 155-162) είναι σε απόλυτη αναλογία με τη LIL όπως παρουσιάζεται εδώ. Οι όροι που ορίζονται στον (1.5) είναι απλά οι *εκφράσεις με νόημα* (*meaningful expressions*) της IL. Στη σημασιολογία της IL, το σύμπαν των αντικειμένων του τύπου τ είναι το σύνολο των *Montague υποδηλώσεων* (*Montague denotations*) D_τ οι οποίες ορίζονται όπως παραπάνω ενώ οι υποδηλώσεις του τύπου $s \rightarrow \tau$ για κάθε τύπο τ είναι οι *Montague σημασίες του τύπου τ* (*Montague senses of type τ*). Επίσης, σε κάθε μη λογική σταθερά τύπου τ προσδίδεται μία Montague σημασία τύπου τ . Ανάλογα, μία συνάρτηση ανάθεσης τιμών αναθέτει σε κάθε μεταβλητή τύπου τ ένα μέλος της Montague υποδήλωσης D_τ .

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι κάθε κατάσταση είναι ένα ζεύγος από ένα πιθανό κόσμο και ένα χρονικό σημείο, $\langle W, T \rangle$, τότε είναι προφανές ότι για κάθε όρο A και κάθε $a \in \mathbb{T}_s$:

$$\text{Montague Έκταση του } A \text{ στην } a : [[A]]^{M,a,g} = \text{den}_{\text{LIL}}(A)(g)(a)$$

$$\text{Montague Ένταση του } A : [[A]]^{M,g} = \text{den}_{\text{LIL}}(A)(g).$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι για κάθε όρο A και μία κατάσταση a ,

$$\text{Montague Έκταση } (\hat{}(A)) \text{ στην κατάσταση } a = \text{Montague Ένταση}(A).$$

Ονόματα, Δεικτικά	Mary, I, she : e
Ουσιαστικά	man, book : $e \rightarrow t$
Εκτασιακά αμετάβατα ρήματα	run : $e \rightarrow t$
Εκτασιακά μεταβατικά ρήματα	love, read : $e \rightarrow (e \rightarrow t)$
Άρθρα	the : $(e \rightarrow t) \rightarrow e$
Ποσοδείκτες	every : $(e \rightarrow t) \rightarrow ((e \rightarrow t) \rightarrow t)$
(Βασικός) τελεστής αναγκαιότητας	\Box : $(s \rightarrow t) \rightarrow t$

Πίνακας 1.1: Σταθερές στη LIL.

1.3.2 Παραδείγματα από τη Φυσική Γλώσσα στην LIL

Με τον όρο *απόδοση* (*rendering*), περιγράφουμε γενικά τη διαδικασία της «μετάφρασης» εκφράσεων της φυσικής γλώσσας σε μία τυπική γλώσσα όπως η LIL.

Το πρώτο βήμα είναι πάντα η εισαγωγή ενός συνόλου σταθερών που «αντιπροσωπεύουν» λέξεις της φυσικής γλώσσας — απαρτίζουν το «τυπικό λεξιλόγιο» ως προς το οποίο αποδίδουμε τις γλωσσικές εκφράσεις. Στον Πίνακα 1.1, παρουσιάζονται μερικές τέτοιες σταθερές όπως η *run* η οποία αποδίδει το ρήμα ‘τρέχω’ ή η *man* η οποία αποδίδει το ουσιαστικό ‘άνδρας’. Όπως κάθε άλλος όρος στην LIL, οι σταθερές έχουν τύπους. Στις σταθερές που ανήκουν στην ίδια συντακτική κατηγορία προσδίδεται ο ίδιος τύπος (όλα τα αμετάβατα ρήματα έχουν τύπο $(e \rightarrow t)$) αλλά ο ίδιος τύπος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για δύο διαφορετικές συντακτικές κατηγορίες, για παράδειγμα, ο τύπος $(e \rightarrow t)$ χρησιμοποιείται τόσο για τα ουσιαστικά όσο και για τα αμετάβατα ρήματα. Γενικά, υιοθετούμε εδώ την ανάθεση των τύπων όπως αυτή γίνεται στο [13] (Ενότητα 1.6) η οποία δεν ακολουθεί πιστά τον Montague ([18]) αλλά είναι αρκετά κοντά στο [2] (βλέπε επίσης τη συζήτηση στην Ενότητα 1.6, στη σελ. 28).

Η διαδικασία απόδοσης της φυσικής γλώσσας στην LIL από τον Montague είναι πολύ ακριβής και εξειδικευμένη για κάθε κανόνα: κάθε συντακτικός κανόνας αντιστοιχίζεται σε ένα κανόνα μετάφρασης ο οποίος καθορίζει τον κατάλληλο κανόνα σχηματισμού όρων. Κάθε έκφραση ανάλογα με τη συντακτική της κατηγορία μεταφράζεται σε ένα όρο συγκεκριμένου τύπου. Επομένως, από τους κανόνες μετάφρασης, οι γλωσσικές εκφράσεις αποδίδονται σε όρους της LIL οι οποίοι αντιπροσωπεύουν κατά το μάλλον ή ήττον τον τρόπο που κανείς τις αντιλαμβάνεται σημασιολογικά. Ακολουθώντας τον Frege, η εφαρμογή συνάρτησης χρησιμοποιείται στις περισσότερες περιπτώσεις και υπάρχουν κατοπινές προσεγγίσεις όπου η χρήση της είναι αποκλειστική

(βλέπε τη σχετική συζήτηση στο [10]).

Ας εξετάσουμε τα παρακάτω απλά παραδείγματα προτάσεων της φυσικής γλώσσας και τις αντίστοιχες αποδόσεις τους στην LIL⁹.

$$\text{Η Μαρία τρέχει} \xrightarrow{\text{αποδίδεται}} \text{run}(\text{Mary}) \quad (\text{Mr})$$

$$\text{Η Μαρία διαβάζει το βιβλίο} \xrightarrow{\text{αποδίδεται}} \text{read}(\text{the}(\text{book}))(\text{Mary}) \quad (\text{Mrb})$$

Η Montague 'Ενταση της πρότασης 'Η Μαρία διαβάζει το βιβλίο' σε μία κατάσταση $a : s$ υπολογίζεται εφαρμόζοντας τον ορισμό της προηγούμενης ενότητας¹⁰:

$$\begin{aligned} & \text{den}_{\text{LIL}}(\text{read}(\text{the}(\text{book}))(\text{Mary}))(a) \\ &= \text{den}_{\text{LIL}}(\text{read})(a)(\text{den}_{\text{LIL}}(\text{the})(a)(\text{den}_{\text{LIL}}(\text{book})(a)))(\text{den}_{\text{LIL}}(\text{Mary})(a)) \\ &= \text{read}(a)(\text{the}(a)(\text{book}(a)))(\text{Mary}(a)). \end{aligned}$$

Επομένως, το νόημα της πρότασης 'Η Μαρία διαβάζει το βιβλίο' απεικονίζεται τυπικά από μία συνάρτηση (Montague 'Ενταση) η οποία σε κάθε κατάσταση (κάθε πλαίσιο αναφοράς) δίνει μία τιμή αλήθειας η οποία υπολογίζεται από τις αντίστοιχες Montague Εκτάσεις των συστατικών μερών της σε αυτή την κατάσταση.

Ας εξετάσουμε τώρα την πρόταση 'Αυτή τρέχει' (Sr) σε μία κατάσταση a όπου $\text{Mary}(a) = \text{she}(a)$, δηλαδή, η δεικτική αντωνυμία 'Αυτή' υποδηλώνει το ίδιο πρόσωπο με το όνομα 'Μαρία'. Η πρόταση αποδίδεται με ανάλογο τρόπο και η υποδήλωσή της στο a φαίνεται παρακάτω.

$$\begin{aligned} & \text{Αυτή τρέχει} \xrightarrow{\text{αποδίδεται}} \text{run}(\text{she}) \\ & \text{den}_{\text{LIL}}(\text{run}(\text{she}))(a) = \text{run}(a)(\text{she}(a)). \end{aligned}$$

Στην κατάσταση a , οι Montague Εκτάσεις των προτάσεων (Sr) και (Mr) είναι φυσικά ίσες — είναι και οι δύο είτε Αλήθεια είτε Ψεύδος. Οι Montague Εντάσεις δεν είναι ίσες συναρτήσεις εκτός αν οι συναρτήσεις $\text{Mary} : s \rightarrow e$ και $\text{she} : s \rightarrow e$ είναι ίσες που φυσικά δεν είναι η επιδιωκόμενη ερμηνεία. Επομένως, η έννοια του νοήματος σε πλαίσιο μίας πρότασης σε μία κατάσταση εξαντλείται από την 'Εκτασή της σε αυτή την κατάσταση.

⁹Οι σταθερές, που χρησιμοποιούνται κατά την απόδοση, αντιστοιχούν προφανώς στην αγγλική μετάφραση των παραδειγμάτων.

¹⁰Παραλείπουμε τις αναθέσεις τιμών δεδομένου ότι ο όρος είναι κλειστός.

1.4 David Kaplan: η Λογική των Δεικτικών Εκφράσεων

Η δουλειά του D. Kaplan εμπλουτίζει σημαντικά την παράδοση της σημασιολογίας του Montague, αλλά εδώ θα περιορίσουμε την παρουσίασή μας στην *Λογική των Δεικτικών Εκφράσεων* (*Logic of Demonstratives* – LD) ([14]). Ο Kaplan επιστράτη την προσοχή σε μερικές πολύ ενδιαφέρουσες σημασιολογικές διακρίσεις που αφορούν εκφορές και που οδηγούν στην ανάγκη για μία μη τετριμμένη έννοια νοήματος σε πλαίσιο¹¹. Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι γενικά, η θεωρία της άμεσης αναφοράς του D. Kaplan ([15]) χειρίζεται τη χρήση των δεικτικών εκφράσεων και άλλων εκφράσεων των οποίων η υποδήλωση προσδιορίζεται από το πλαίσιο (δεικτικά, *indexicals*) με τέτοιο τρόπο που ρίχνει φως στον πραγματικό τους ρόλο και επομένως, θα πρέπει να εξεταστεί σε μία μελέτη του νοήματος σε πλαίσιο.

Η τυπική γλώσσα LD «βασίζεται στην πρωτοβάθμια κατηγορηματική λογική με ισότητα και περιγραφές». Η σημασιολογία της βασίζεται σε μία διχοτόμηση του πλαισίου αναφοράς (ή κατάστασης) σε δύο ανεξάρτητα μέρη¹²: στο πλαίσιο εκφοράς (*context of utterance*) και στην πιθανή περίπτωση (*possible circumstance*) η οποία θεωρείται ως πλαίσιο αποτίμησης (*context of evaluation*).

Ένα πλαίσιο εκφοράς c στο \mathcal{C} (το σύνολο των πλαισίων) περιλαμβάνει:

- (i) έναν ομιλητή c_A στο \mathcal{U} (το σύνολο όλων των ατόμων),
- (ii) ένα χρονικό σημείο c_T στο \mathcal{T} (το σύνολο των φυσικών αριθμών, οι οποίοι θεωρούνται ως χρονικά σημεία),
- (iii) μία τοποθεσία c_P στο \mathcal{P} (το σύνολο των τοποθεσιών) και
- (iv) ένας κόσμος c_W στο \mathcal{W} (το σύνολο των κόσμων).

Από την άλλη μεριά, ένα πλαίσιο αποτίμησης είναι ένα ζεύγος από

- (i) ένα κόσμο w στο \mathcal{W} και
- (ii) ένα χρονικό σημείο t στο \mathcal{T} .

Είναι πιθανόν να έχουμε και άλλες παραμέτρους ένδειξης αν κι άλλες «διαστάσεις» μίας περίπτωσης είναι σχετικές με τη συγκεκριμένη περίπτωση στην οποία αναφερόμαστε.

Τώρα, σε μία δομή ερμηνείας της LD, \mathfrak{A} , προσδίδεται σε κάθε όρο A σε ένα

¹¹Μία σύντομη έκθεση αυτών των ιδεών μπορεί να βρει κανείς και στο [13].

¹²Υπάρχει μία παρόμοια ιδέα από τον Montague στο [17] όπου η Montague Ένταση (που απεικονίζει τυπικά το νόημα) ορίζεται ως προς ένα ζεύγος $\langle i, j \rangle$ όπου το i είναι ένας πιθανός κόσμος (ή ένας ζεύγος ενός πιθανού κόσμου και ενός χρονικού σημείου) και το j είναι ένα πλαίσιο χρήσης. Αναφέρεται ότι «Το δεύτερο όρισμα εισάγεται για να επιτρέψει να χειριστούμε, ..., τέτοια δεικτικά όπως οι δεικτικές αντωνυμίες, πρώτου και δεύτερου προσώπου αντωνυμίες ενικού αριθμού,...».

συγκεκριμένο τριμελές άνυσμα $\langle c, t, w \rangle$ μία υποδήλωση (*denotation*) η οποία ανήκει σε ένα κατάλληλο σύνολο αντικειμένων¹³

$$| A |_{\langle c, t, w \rangle}^{\mathfrak{A}}.$$

Αν ο όρος A αποδίδει μία πρόταση της φυσικής γλώσσας, η υποδήλωσή του είναι Αλήθεια ή Ψεύδος.

Ο Χαρακτήρας (*Character*) ενός όρου A , δηλαδή η συνάρτηση,

$$\text{Χαρακτήρας του } A : \mathcal{C} \rightarrow (\mathcal{T} \times \mathcal{W} \rightarrow \text{Υποδήλωση}(A))$$

απεικονίζει τυπικά το σφαιρικό νόημα του A , ενώ το Περιεχόμενο (*Content*) του A σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο εκφοράς c είναι

$$\text{Περιεχόμενο του } A \text{ σε ένα πλαίσιο } c : \mathcal{T} \times \mathcal{W} \rightarrow \text{Υποδήλωση}(A)(c).$$

Είναι επομένως φυσικό ότι

$$\text{Χαρακτήρας του } A = (c \mapsto \text{Περιεχόμενο του } A \text{ στο } c).$$

Για να αναφερθούμε σε ένα παράδειγμα στο [14], το Περιεχόμενο της πρότασης ‘Εγώ προσβλήθηκα χθες’ σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο c_1 είναι διαφορετικό από αυτό της εκφοράς της ίδιας πρότασης σε κάποιο άλλο πλαίσιο c_2 , ενώ φυσικά οι δύο προτάσεις μπορεί να έχουν την ίδια υποδήλωση (για παράδειγμα, μπορεί να είναι και οι δύο αληθείς).

Περιεχόμενο(‘Εγώ προσβλήθηκα χθες’) στο c_1

\neq Περιεχόμενο(‘Εγώ προσβλήθηκα χθες’) στο c_2 .

Η υποδήλωση των δεικτικών εξαρτάται από το πλαίσιο και συνεπώς, ο Χαρακτήρας μίας πρότασης στην οποία εμφανίζεται κάποιο δεικτικό δεν είναι σταθερή συνάρτηση.

Από την άλλη μεριά, σε ένα δοσμένο πλαίσιο c όπου το c_A είναι το άτομο που ονομάζεται ‘David Kaplan’ και η c_T είναι η 21η Απριλίου 1973, το Περιεχόμενο της ‘Εγώ προσβλήθηκα χθες’ είναι το ίδιο με το Περιεχόμενο της ‘Ο David Kaplan προσβλήθηκε στις 20 Απριλίου 1973’ σε οποιοδήποτε πλαίσιο c' .

Περιεχόμενο(‘Εγώ προσβλήθηκα χθες’) στο c

= Περιεχόμενο(‘Ο David Kaplan προσβλήθηκε στις 20 Απριλίου 1973’)

στο c' .

¹³Ως συνήθως, η υποδήλωση κάθε όρου δίνεται ως προς μία ανάθεση τιμών στις ελεύθερες μεταβλητές που εμφανίζονται σε αυτόν, αλλά παραλείπουμε σιωπηλά αυτήν την πτυχή εδώ για να εστιάσουμε την προσοχή μας σε πιο σημαντικές πλευρές της LD.

Οι δύο προτάσεις έχουν φυσικά διαφορετικούς Χαρακτήρες.

Χαρακτήρας(‘Εγώ προσβλήθηκα χθες’)

\neq Χαρακτήρας(‘Ο David Kaplan προσβλήθηκε στις 20 Απριλίου 1973’).

Τα αποτελέσματα της λογικής των δεικτικών εκφράσεων του Kaplan θα συζητηθούν ξανά στην Ενότητα 1.6 σε σύγκριση με τις δύο έννοιες του νοήματος σε πλαίσιο που εισάγονται εκεί, σε μία επέκταση της γλώσσας LIL του Montague. Τέλος, στην Ενότητα 5.2, θα εξετάσουμε ξανά τις ιδέες του Kaplan στη Θεωρία του Προσδιορισμού Αναφοράς, χρησιμοποιώντας τόσο το τοπικό νόημα όσο και την προτεινόμενη έννοια του αντικειμενικού περιεχομένου.

1.5 Θεωρία Προσδιορισμού Αναφοράς: Αλγοριθμική Τυπική Σημασιολογία

Αυτή η ενότητα είναι μία συνοπτική εισαγωγική παρουσίαση της Θεωρίας Προσδιορισμού Αναφοράς η οποία είναι το βασικό τεχνικό πλαίσιο της διατριβής. Παρουσιάζεται λεπτομερώς στο [22] (βλέπε επίσης το [20]) και παρακάτω, συνοψίζουμε το συντακτικό και τη σημασιολογία της τυπικής γλώσσας L_{ar}^λ στην οποία αναπτύσσεται η θεωρία.

1.5.1 Συντακτικό και Σημασιολογία της L_{ar}^λ

Η γλώσσα $L_{ar}^\lambda(K)$ είναι ένας λ-λογισμός με τύπους (Ενότητα 1.2) εμπλουτισμένος με ένα αναδρομικό τελεστή. Οι τύποι ορίζονται αναδρομικά από τον

$$\tau ::= e \mid t \mid s \mid (\tau_1 \rightarrow \tau_2) \quad (1.6)$$

όπου, σε αντίθεση με τους τύπους στην LIL (1.4), ο τύπος s των καταστάσεων είναι ένας κανονικός βασικός τύπος.

Το σύνολο K είναι ένα πεπερασμένο σύνολο σταθερών $c : \tau$ με τύπους. Όπως και στην LIL, εισάγουν στην $L_{ar}^\lambda(K)$ το μέρος του λεξιλογίου της φυσικής γλώσσας για το οποίο ενδιαφερόμαστε. Στον Πίνακα 1.2, παρουσιάζονται μερικές σταθερές του K και οι τύποι τους. Οι τύποι των σταθερών αποτελούν ένα υποσύνολο αυτών του (1.6) και ορίζονται από τον

$$\tilde{\sigma} ::= (s \rightarrow e) \mid (s \rightarrow t) \mid (\tilde{\sigma}_1 \rightarrow \tilde{\sigma}_2) \quad (1.7)$$

και για συντομία, $\tilde{e} ::= (s \rightarrow e)$ και $\tilde{t} ::= (s \rightarrow t)$. Παρατηρούμε ότι, σε αντίθεση με τις σταθερές στην LIL (Πίνακας 1.1), οι σταθερές στην L_{ar}^λ έχουν

Ονόματα, Δεικτικά	Mary, I, she : \tilde{e}
Ουσιαστικά	man : $\tilde{e} \rightarrow \tilde{t}$
Αμετάβατα ρήματα	run, rise : $\tilde{e} \rightarrow \tilde{t}$
Μεταβατικά ρήματα	love : $\tilde{e} \rightarrow (\tilde{e} \rightarrow \tilde{t})$
Άρθρα	the : $(\tilde{e} \rightarrow \tilde{t}) \rightarrow \tilde{e}$
(Βασικός) τελεστής αναγκαιότητας	$\Box : \tilde{t} \rightarrow \tilde{t}$

Πίνακας 1.2: Σταθερές στη $L_{ar}^\lambda(K)$.

τύπους οι οποίοι χρησιμοποιούν πλήρως τον τύπο των καταστάσεων (s) (βλέπε επίσης τη συζήτηση στην Ενότητα 2.1).

Σε αυτή τη γλώσσα, εκτός των συνηθισμένων μεταβλητών με τύπους στις οποίες μπορεί να εφαρμοστεί ο λ-τελεστής (που ονομάζονται απλές (*pure*)), υπάρχουν επίσης και οι μεταβλητές αναδρομής (*recursive*) με ένα διακριτό ρόλο που γίνεται σαφής στη χρήση του αναδρομικού τελεστή.

Οι όροι της $L_{ar}^\lambda(K)$ ορίζονται από τον

$$A ::= c \mid x \mid B(C) \mid \lambda(v)(B) \mid A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\} \quad (1.8)$$

όπου η x είναι μία μεταβλητή απλή ή αναδρομής, η v είναι μία απλή μεταβλητή και οι p_1, \dots, p_n είναι μεταβλητές αναδρομής. Σε κάθε όρο προσδίδεται ένας τύπος από αυτόν τον ορισμό και καθορίζονται οι ελεύθερες και δεσμευμένες εμφανίσεις των μεταβλητών.

Σε ό,τι αφορά στον αναδρομικό όρο, σημειώνουμε ότι

(i) οι p_1, \dots, p_n είναι διαφορετικές μεταξύ τους μεταβλητές αναδρομής και εμφανίζονται δεσμευμένες σε αυτόν,

(ii) για κάθε $i = 1, \dots, n$, $A_i, p_i : \tau_i$ και αν $A_0 : \tau$, τότε

$$A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\} : \tau,$$

(iii) και, το σύστημα $\{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}$ είναι μη κυκλικό (*acyclic*) — δηλαδή, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα φυσικό αριθμό, $\text{rank}(p_i)$, σε κάθε μεταβλητή αναδρομής p_i έτσι ώστε αν η p_j εμφανίζεται ελεύθερη στον όρο A_i , τότε $\text{rank}(p_i) > \text{rank}(p_j)$.

Στην L_{ar}^λ , ορίζουμε τη σχέση σύμπτωσης (*congruence*) ως τη μικρότερη σχέση ισοδυναμίας \equiv_c μεταξύ όρων η οποία σέβεται την αλφαριθμητική αντικατάσταση των δεσμευμένων, απλών ή αναδρομής, μεταβλητών, την εφαρμογή, την

λ-αφαίρεση και τη μη κυκλική αναδρομή και τέτοια ώστε για κάθε μετάθεση $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, για κάθε αναδρομικό όρο

$$A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\} \\ \equiv_c A_0 \text{ where } \{p_{\pi(1)} := A_{\pi(1)}, \dots, p_{\pi(n)} := A_{\pi(n)}\}.$$

Τόσο η LIL όσο και η L_{ar}^λ είναι τυπικές γλώσσες στον πυρήνα των οποίων βρίσκεται ο λ-λογισμός με τύπους (Ενότητα 1.2). Εκτός από τις διαφορές σε τύπους, στην LIL υπάρχουν δύο πρόσθετοι τελεστές, έκτασης και έντασης, ενώ στην L_{ar}^λ υπάρχει ο νέος τελεστής αναδρομής. Χωρίς να προσπαθούμε να τους συγκρίνουμε, υπάρχει μία απλή παρατήρηση που αξίζει να κάνουμε¹⁴. Ο εντασιακός τελεστής εμπλουτίζει τον λ-λογισμό κατά ένα βασικό τρόπο: με τη χρήση του, μπορεί κανείς να ορίσει τυπικά στην LIL τη σημασιολογική τιμή (Montague Ένταση) που εκφράζεται από τους όρους της. Θα δούμε στη συνέχεια ότι ο αναδρομικός τελεστής παίζει ένα ανάλογο ρόλο στην L_{ar}^λ . Αυτό είναι ένα σημαντικό χαρακτηριστικό και των δύο γλωσσών και περισσότερο αναδεικνύει παρά συσκοτίζει την ομοιότητά τους.

Τα επόμενα παραδείγματα είναι όροι της L_{ar}^λ οι οποίοι αποδίδουν προτάσεις της φυσικής γλώσσας με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως στην LIL. Παρατηρούμε ωστόσο ότι αυτοί οι όροι έχουν τώρα τύπο \tilde{t} , και όχι t .

$$H \text{ Μαρία τρέχει} \xrightarrow{\text{αποδίδεται}} \text{run}(\text{Mary}) \quad (\text{Mr})$$

$$H \text{ Μαρία διαβάζει το βιβλίο} \xrightarrow{\text{αποδίδεται}} \text{read}(\text{the}(\text{book}))(\text{Mary}) \quad (\text{Mrb})$$

Τέλος, τα παρακάτω είναι παραδείγματα δύο αναδρομικών όρων στην L_{ar}^λ πάλι με τύπο \tilde{t} .

$$\text{run}(p) \text{ where } \{p := \text{Mary}\} \\ \text{read}(p_1)(p_3) \text{ where } \{p_1 := \text{the}(p_2), p_2 := \text{book}, p_3 := \text{Mary}\}$$

Μία δομή ερμηνείας \mathcal{U} της $L_{ar}^\lambda(K)$ περιλαμβάνει:

- (i) μη κενά σύμπαντα αντικειμένων βασικών και τύπων συναρτήσεων, $\mathbb{T}_e, \mathbb{T}_t$ και \mathbb{T}_s και $\mathbb{T}_{\tau_1 \rightarrow \tau_2} = \{f \mid f : \mathbb{T}_{\tau_1} \rightarrow \mathbb{T}_{\tau_2}\}$,
- (ii) ένα αντικείμενο $c \in \mathbb{T}_\tau$ για κάθε σταθερά $c : \tau$ του συνόλου K .

Είναι χρήσιμο να υποθέσουμε ότι υπάρχουν ειδικά αντικείμενα, $er_e \in \mathbb{T}_e$ και $er_t \in \mathbb{T}_t$ τα οποία αποτελούν την τιμή «λάθος» για οντότητες και τιμές αλήθειας, αντίστοιχα. Ορίζονται βαθμιαία για όλους τους τύπους, δηλαδή, υπάρχει ένα αντικείμενο er_σ για κάθε τύπο σ , κι επομένως, μπορεί να υπολογιστεί η τιμή της υποδήλωσης για κάθε όρο.

¹⁴Βλέπε επίσης τη συζήτηση στο τέλος αυτής της ενότητας.

Στη δομή \mathcal{U} , ορίζουμε μία συνάρτηση υποδήλωσης den η οποία αντιστοιχεί αναδρομικά σε κάθε όρο $A : \tau$ και κάθε ανάθεση g στις μεταβλητές το αντικείμενο $\text{den}(A)(g) \in \mathbb{T}_\tau$:

- $\text{den}(x)(g) = g(x); \text{den}(c)(g) = c.$
- $\text{den}(A(B))(g) = \text{den}(A)(g)(\text{den}(B)(g)).$
- $\text{den}(\lambda(x)(B))(g) = (f \mapsto \text{den}(B)(g\{x := f\})),$
όπου αν $x : \tau$, τότε το f είναι οποιοδήποτε αντικείμενο στο \mathbb{T}_τ .
- $\text{den}(A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\})(g)$
 $= \text{den}(A_0)(g\{p_1 := P_1, \dots, p_n := P_n\})$
 όπου για $i = 1, \dots, n$, αν οι p_{j_1}, \dots, p_{j_m} είναι οι μεταβλητές αναδρομής με βαθμό μικρότερο από $\text{rank}(p_i)$, κάθε αντικείμενο P_i ορίζεται από

$$P_i = \text{den}(A_i)(g\{p_{j_1} := P_{j_1}, \dots, p_{j_m} := P_{j_m}\}).$$

Εκτός από τη δηλωτική σημασιολογία, θα αντιστοιχίσουμε σε κάθε μη άμεσο όρο $A : \sigma$ τον προσδιορισμό αναφοράς του (*referential intension*, $\text{int}(A)$) ο οποίος απεικονίζει τυπικά το σφαιρικό νόημα στην $\mathbb{L}_{\text{ar}}^\lambda(K)$,

$$A \mapsto \text{int}(A).$$

Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε εν συντομία με ποιο τρόπο επιτελείται αυτή η αντιστοίχιση.

Πρώτον, ονομάζουμε *μη άμεσους* (*proper*) τους όρους που δεν είναι *άμεσοι* (*immediate*). Οι άμεσοι όροι στη $\mathbb{L}_{\text{ar}}^\lambda$ αντιμετωπίζονται ως γενικευμένες μεταβλητές και δεν προσδίδεται νόημα σε αυτούς. Ορίζονται από

$$X ::= v_i \mid p(v_1, \dots, v_n) \mid \lambda(u_1, \dots, u_m)p(v_1, \dots, v_n) \quad (1.9)$$

όπου η p είναι μεταβλητή αναδρομής και οι v_1, \dots, v_n και οι u_1, \dots, u_m είναι απλές μεταβλητές. Παρατηρούμε ότι με αυτόν τον ορισμό, για κάθε μεταβλητή αναδρομής p , τόσο η ίδια η p (θεωρούμενη ως $p = \lambda(u_1, \dots, u_m)p(u_1, \dots, u_m)$) όσο και κάθε λ-όρος της μορφής $\lambda(u_1, \dots, u_m)p$ είναι άμεσοι όροι.

Δεύτερον, στην $\mathbb{L}_{\text{ar}}^\lambda$, ορίζεται μία *σχέση αναγωγής* (*reduction*, $A \Rightarrow B$) στους όρους με δέκα *κανόνες αναγωγής* (*reduction rules*) οι οποίοι παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.3. Οι κανόνες αναγωγής θεωρούνται κανόνες «μεταγλώττισης» σε αυτή τη θεωρία και αποδεικνύεται στο [22] ότι σέβονται την υποδηλωτική ισοδυναμία, η εφαρμογή τους τερματίζει πάντα και το αποτέλεσμα τους είναι μοναδικό μέχρι σύμπτωσης.

(cong) $\text{Av } A \equiv_c B, \text{ τότε } A \Rightarrow B$

(trans) $\text{Av } A \Rightarrow B \text{ and } B \Rightarrow C, \text{ τότε } A \Rightarrow C$

(rep1) $\text{Av } A \Rightarrow A' \text{ και } B \Rightarrow B', \text{ τότε } A(B) \Rightarrow A'(B')$

(rep2) $\text{Av } A \Rightarrow B, \text{ τότε } \lambda(u)(A) \Rightarrow \lambda(u)(B)$

(rep3) $\text{Av } A_i \Rightarrow B_i \text{ για } i = 0, \dots, n, \text{ τότε }$
 $A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}$
 $\Rightarrow B_0 \text{ where } \{p_1 := B_1, \dots, p_n := B_n\}$

(head) $(A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}) \text{ where }$
 $\{q_1 := B_1, \dots, q_m := B_m\}$
 $\Rightarrow A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n, q_1 := B_1, \dots, q_m := B_m\}$

(B-S) $A_0 \text{ where } \{p := (B_0 \text{ where } \{q_1 := B_1, \dots, q_m := B_m\}),$
 $p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}$
 $\Rightarrow A_0 \text{ where } \{p := B_0, q_1 := B_1, \dots, q_m := B_m,$
 $p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}$

(recap) $(A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\})(B)$
 $\Rightarrow A_0(B) \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}$

(ap) $A(B) \Rightarrow A(b) \text{ where } \{b := B\}, \text{ αν ο } B \text{ είναι μη άμεσος}$

(λ-rule) $\lambda(u)(A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\})$
 $\Rightarrow \lambda(u)(A'_0) \text{ where } \{p'_1 := \lambda(u)(A'_1), \dots, p'_n := \lambda(u)(A'_n)\}$

όπου για $(i = 1, \dots, n)$, η p'_i είναι καινούργια μεταβλητή
 αναδρομής και $A'_i \equiv A_i \{p_1 := p'_1(u), \dots, p_n := p'_n(u)\}$.

Πίνακας 1.3: Ο Λογισμός Αναγωγής

Ορίζουμε επίσης τους μη αναγώγιμους (*irreducible*) όρους ως προς αυτή τη σχέση αναγωγής.

ο όρος A είναι μη αναγώγιμος
 \iff για όλους τους όρους B , αν $A \Rightarrow B$, τότε $A \equiv_c B$. (1.10)

Θεώρημα 1.5.1. (Θεώρημα Κανονικής Μορφής) Για κάθε όρο A , υπάρχει ένας μοναδικός (μέχρι σύμπτωσης) μη αναγώγιμος αναδρομικός όρος

$$\text{cf}(A) \equiv A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}$$

τέτοιος ώστε $A \Rightarrow \text{cf}(A)$.

Η κανονική μορφή (*canonical form*, $\text{cf}(A)$) μπορεί να υπολογιστεί αποτελεσματικά από τον A , έχει την ίδια υποδήλωση με τον A , και η κεφαλή (*head*) A_0 και τα μέρη (*parts*) της A_1, \dots, A_n καθορίζουν τα βασικά υπολογιστικά «στοιχεία» που χρειάζονται για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την υποδήλωση του αρχικού όρου A .

Τώρα, ο προσδιορισμός αναφοράς (*referential intension*) του όρου A είναι μία πλειάδα συναρτήσεων

$$\text{int}(A) = (f_0, f_1, \dots, f_n)$$

που ορίζεται από την κεφαλή και τα μέρη της κανονικής μορφής, όπου

$$f_i(d_1, \dots, d_n, g) = \text{den}(A_i)(g\{p_1 := d_1, \dots, p_n := d_n\}) \quad (i = 0, \dots, n).$$

Πλειάδες συναρτήσεων όπως παραπάνω ονομάζονται *αναδρομείς* (*recursors*). Ορίζονται και χρησιμοποιούνται ως τυπικές απεικονίσεις των *ιδεατών αλγορίθμων* (*abstract algorithms*) σε μία σειρά εργασιών από τον Y. N. Moschovakis (βλέπε το [21] και παλιότερα άρθρα που αναφέρονται εκεί¹⁵).

Για κάθε όρο A , ο προσδιορισμός αναφοράς του, $\text{int}(A)$, απεικονίζει τυπικά το (*σφαιρικό*) νόημα (*global meaning*) του A σε αυτή τη θεωρία — τον ιδεατό αλγόριθμο που υπολογίζει την υποδήλωσή του, $\text{den}(A)(g)$. Επομένως, η κανονική μορφή του A ορίζει τυπικά μέσα στη γλώσσα το νόημα του A .

Σφαιρικό Νόημα του A : $\text{cf}(A)$.

¹⁵Μία σύντομη αλλά ιδιαίτερα επεξηγηματική εισαγωγή αυτών των ιδεών μπορεί να βρει κανείς και στη τελευταία ενότητα του [22].

Για παράδειγμα, το σφαιρικό νόημα της πρότασης ‘Η Μαρία διαβάζει το βιβλίο’ (Mrb) στη Θεωρία Προσδιορισμού Αναφοράς ορίζεται από την κανονική της μορφή¹⁶

$\text{read}(\text{the}(\text{book}))(\text{Mary})$

$\Rightarrow_{\text{cf}} \text{read}(p_1)(p_3)$ where $\{p_1 := \text{the}(p_2), p_2 := \text{book}, p_3 := \text{Mary}\}$.

Καθορίζει το συγκεκριμένο «βήμα με βήμα» υπολογισμό που χρειάζεται να ακολουθήσουμε για να υπολογίσουμε την υποδήλωση της πρότασης (Mrb). Παρατηρούμε ότι ο τύπος του όρου $\text{read}(\text{the}(\text{book}))(\text{Mary})$ είναι \tilde{t} και επομένως, η υποδήλωση που υπολογίζουμε μέσω της κανονικής του μορφής μας δίνει την τιμή αλήθειας του σε κάθε πιθανή κατάσταση. Το νόημα χαρακτηρίζεται ως σφαιρικό ακριβώς επειδή εκφράζει τη σημασιολογική τιμή που ξέρει κάποιος αν είναι γνώστης της γλώσσας.

Μία τελική παρατήρηση για τη σύγκριση ως προς τη σημασιολογία μεταξύ της L_{ar}^λ και του λ-λογισμού με τύπους. Πρώτα απ’ όλα, η L_{ar}^λ δεν είναι δηλωτικά πιο εκφραστική από τον λ-λογισμό με τύπους. Μπορεί να αποδειχτεί ότι κάθε όρος έχει την ίδια υποδήλωση με ένα ρητό (*explicit*) όρο, δηλαδή ένα όρο στον οποίο δεν εμφανίζεται το *where*. Από την άλλη μεριά, υπάρχουν όροι στην L_{ar}^λ οι οποίοι δεν είναι αναφορικά συνώνυμοι με κανέναν τέτοιο όρο. Η αναφορική συνωνυμία ορίζεται στην επόμενη ενότητα αλλά βασικά αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι οι όροι της L_{ar}^λ εκφράζουν περισσότερα «νόηματα» από τους όρους του λ-λογισμού (βλέπε επίσης τις παραγράφους 1.7 και 3.24-3.25 στο [22] για σχετική συζήτηση).

1.5.2 Αναφορική Συνωνυμία και Τοπικό Νόημα

Στη Θεωρία Προσδιορισμού Αναφοράς, δύο όροι είναι αναφορικά συνώνυμοι αν οι προσδιορισμοί αναφοράς τους είναι φυσικά ισομορφικοί. Ωστόσο, δε χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του *φυσικού ισομορφισμού* (*natural isomorphism*) μεταξύ αναδρομέων, αλλά αντί γι’ αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω (ισοδύναμο) ορισμό με βάση τις κανονικές μορφές.

Ορισμός 1.5.2. Για δύο όρους A και B , ο A είναι *αναφορικά συνώνυμος* (*referentially synonymous*) με τον B ($A \approx B$) αν και μόνο αν

$$A \Rightarrow_{\text{cf}} A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}$$

$$B \Rightarrow_{\text{cf}} B_0 \text{ where } \{p_1 := B_1, \dots, p_n := B_n\}$$

έτσι που για κάθε $i = 0, \dots, n$ και κάθε g , $\text{den}(A_i)(g) = \text{den}(B_i)(g)$.

¹⁶Συμβολίζουμε απλά $A \Rightarrow_{\text{cf}} B$ αν και μόνο αν $B \equiv_c \text{cf}(A)$.

Επομένως, μπορούμε να αποφασίσουμε για τη συνωνυμία μεταξύ δύο όρων με βάση την ισότητα των υποδηλώσεων των αντίστοιχων μερών και κεφαλών των κανονικών μορφών τους.

Η αναφορική συνωνυμία είναι μία δομική σχέση ισοδυναμίας η οποία μπορεί να κάνει σημασιολογικές διακρίσεις μεταξύ εκφράσεων που έχουν την ίδια υποδήλωση. Για παράδειγμα, για τις (Mr) και (Sr) όπως παραπάνω, δεδομένου ότι $Mary \neq she$,

$$\text{run}(q) \text{ where } \{q := \text{Mary}\} \not\approx \text{run}(q) \text{ where } \{q := \text{she}\},$$

κι ως εκ τούτου, $\text{run}(\text{Mary}) \not\approx \text{run}(\text{she})$.

Ας εξετάσουμε επίσης την πρόταση (Mrb) και την πρόταση ‘Η Μαρία διαβάζει το μικρό βιβλίο’. Είναι προφανές ότι

$$\begin{aligned} & \text{read}(p_1)(p_3) \text{ where } \{p_1 := \text{the}(p_2), p_2 := \text{book}, p_3 := \text{Mary}\} \\ & \not\approx \text{read}(p_1)(p_3) \text{ where } \{p_1 := \text{the}(p_2), p_2 := \text{small}(p_4), p_4 := \text{book}, p_3 := \text{Mary}\}, \end{aligned}$$

δεδομένου ότι οι δύο κανονικές μορφές δεν έχουν τον ίδιο αριθμό μερών. Η ανισότητα του αριθμού των μερών αποκαλύπτει μία σημαντική διαφορά στον υπολογισμό την οποία λαμβάνει υπ’ όψιν της η αναφορική συνωνυμία.

Μία ανάλογη σχέση συνωνυμίας στην LIL θα εξέφραζε ισότητα μεταξύ των αντίστοιχων Montague Εντάσεων των προτάσεων. Τα δομικά χαρακτηριστικά των προτάσεων όπως αυτά που περιγράφηκαν παραπάνω δεν επηρεάζουν αυτού του είδους τη συνωνυμία. Αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό της Θεωρίας Προσδιορισμού Αναφοράς το οποίο αποτελεί μία σαφή στρόφη στον τρόπο που μελετώνται και αναπτύσσονται οι θεωρίες νόηματος με συνθήκες αλήθειας.

Ας εξετάσουμε τώρα την πρόταση (Mr) όπως αυτή εκφέρεται σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο αναφοράς, στην κατάσταση $a : s$. Η υποδήλωσή της,

$$\text{den}(\text{run}(\text{Mary}))(a) = \text{run}(\text{Mary})(a),$$

είναι Αλήθεια ή Ψεύδος, ανάλογα με το αν πράγματι η οντότητα $\text{Mary}(a)$ τρέχει στην κατάσταση a . Στη Θεωρία Προσδιορισμού Αναφοράς, μπορούμε να ορίσουμε για τους όρους τύπου \tilde{t} , εκτός από την υποδήλωση, ένα μη τετριμμένο τοπικό νόημα (*local meaning*). Για να το κάνουμε αυτό, είναι βολικό να εμπλουτίσουμε τη γλώσσα με μία παράμετρο \bar{a} την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε κατάσταση a τέτοια ώστε για κάθε ανάθεση g , $\text{den}(\bar{a})(g) = g(\bar{a}) = a$. Τώρα, ορίζουμε

$$\text{Τοπικό Νόημα του } A : \tilde{t} \text{ στην κατάσταση } a \equiv \text{int}(A(\bar{a}))$$

και την αντίστοιχη σχέση τοπικής συνωνυμίας:

Ορισμός 1.5.3. Για δύο όρους A και B , ο όρος A στην κατάσταση a είναι τοπικά συνώνυμος (*locally synonymous*) με τον B στην κατάσταση b αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} A(\bar{a}) &\Rightarrow_{\text{cf}} A_0(\bar{a}) \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\} \\ B(\bar{b}) &\Rightarrow_{\text{cf}} B_0(\bar{b}) \text{ where } \{p_1 := B_1, \dots, p_n := B_n\} \end{aligned}$$

έτσι που για κάθε g , $\text{den}(A_0)(g)(\bar{a}) = \text{den}(B_0)(g)(\bar{b})$ και για κάθε $i = 1, \dots, n$, $\text{den}(A_i)(g) = \text{den}(B_i)(g)$.

Το τοπικό νόημα της πρότασης ‘Η Μαρία κοιμάται’ στην κατάσταση a εκφράζεται από τον όρο

$$\text{sleep}(q)(\bar{a}) \text{ where } \{q := \text{Mary}\}.$$

Από τον ορισμό, είναι τοπικά συνώνυμη με την εκφορά της πρότασης ‘Η Μαρία ξεκουράζεται’ στην ίδια κατάσταση a , δηλαδή,

$$\text{sleep}(q)(\bar{a}) \text{ where } \{q := \text{Mary}\} \approx \text{relax}(q)(\bar{b}) \text{ where } \{q := \text{Mary}\},$$

αν και μόνο αν για κάθε ανάθεση g ,

$$\text{sleep}(g(p))(a) = \text{relax}(g(p))(a),$$

δηλαδή, αν το σύνολο των ατόμων που κοιμάται στην κατάσταση a είναι το ίδιο με το σύνολο των ατόμων που ξεκουράζονται στη ίδια κατάσταση.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι στην κατάσταση a , $\text{Mary}(a) = \text{she}(a)$, και ας θεωρήσουμε ξανά τις εκφορές των δύο προτάσεων (Mr) και (Sr). Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι δύο εκφορές είναι τοπικά συνώνυμες; Η απάντηση είναι αρνητική,

$$\text{run}(q)(\bar{a}) \text{ where } \{q := \text{Mary}\} \not\approx \text{run}(q)(\bar{a}) \text{ where } \{q := \text{she}\},$$

δεδομένου ότι $\text{Mary} \neq \text{she}$. Παρατηρούμε ότι ο τοπικός προσδιορισμός αναφοράς των δύο εκφορών εξαρτάται από το σφαιρικό νόημα των σταθερών Mary και she . Γενικά, η τοπική συνωνυμία μεταξύ δύο εκφορών σε κάποια κατάσταση είναι μία δομική έννοια συνωνυμίας που δεν περιορίζεται στην ισότητα των υποδηλώσεων των αντίστοιχων μερών σε αυτή την κατάσταση.

Η ανάγκη μίας πρόσθετης έννοιας νοήματος η οποία να λαμβάνει υπ’ όψιν της την ισότητα των υποδηλώσεων των μερών της κανονικής μορφής ενός όρου σε κάποια κατάσταση οδηγεί στη μελέτη του αντικειμενικού περιεχομένου που είναι το αντικείμενο αυτής της διατριβής (βλέπε την Εισαγωγή και το Κεφάλαιο 5 για σχετική συζήτηση). Αυτό προσεγγίζεται εδώ όχι ως συμπλήρωμα στο τοπικό νόημα αλλά σαν έννοια ομολογής σε αυτό με στόχο μία ολοκληρωμένη θεωρία του νοήματος σε πλαίσιο.

1.6 Δύο Έννοιες Νοήματος σε Πλαίσιο

Σε αυτήν την τελευταία ενότητα του κεφαλαίου, θα εξερευνήσουμε τη δυνατότητα να εμπλουτίσουμε τη γλώσσα Ty_2 , ένα λ -λογισμό με δύο ειδών τύπους που παρουσιάζεται στο [8], με τον τελεστή αναδρομής, να ορίσουμε προσδιορισμούς αναφοράς σε αυτήν και στη συνέχεια, να εκμεταλλευτούμε τους τύπους των όρων αυτής της γλώσσας για να ορίσουμε, εκτός του σφαιρικού και του τοπικού νοήματος, μια μη τετριμμένη έννοια αντικειμενικού περιεχομένου¹⁷.

Η γλώσσα Ty_2 σχηματίζεται από τη μετάφραση κάθε όρου A της LIL και κάθε μεταβλητής κατάστασης u σε ένα όρο $A^{G,u}$ του ίδιου τύπου όπως στη LIL, όπου, ωστόσο, η μεταβλητή κατάστασης u αναφέρεται ρητώς,

$$A : \tau \text{ και μία μεταβλητή κατάσταση } u \mapsto A^{G,u} : \tau.$$

Στη συνέχεια, δεν θα εστιάσουμε την προσοχή μας στη μετάφραση αλλά θα παρουσιάσουμε απευθείας τη νέα αυτή γλώσσα και θα τη συγκρίνουμε με τις LIL και L_{ar}^λ .

Οι τύποι της Ty_2 είναι οι τύποι της L_{ar}^λ (1.6), δηλαδή, σε αντίθεση με την LIL, οι καταστάσεις αποτελούν ένα βασικό τύπο. Όπως στην Ενότητα 1.2, οι όροι ορίζονται ως

$$A ::= x \mid c^G \mid A(B) \mid \lambda(x)(B). \quad (1.11)$$

Σημασιολογικά, ερμηνεύουμε τους όρους της Ty_2 (οι οποίοι αποτελούν υποσύνολο των όρων της L_{ar}^λ) σε μία δομή ερμηνείας όπως αυτή της L_{ar}^λ με τη συνάρτηση υποδήλωσης να ορίζεται ως συνήθως. Επομένως, αντίθετα με την LIL, οι όροι στην Ty_2 είναι τέτοιοι ώστε για κάθε όρο $A : \tau$ και κάθε ανάθεση τιμών g στις μεταβλητές, $\text{den}(A)(g) \in \mathbb{T}_\tau$.

Ας εξετάσουμε τώρα ξανά τις σταθερές της LIL που παρουσιάστηκαν στον Πίνακα 1.1. Παρουσιάσαμε εκεί μόνο σταθερές που είναι εκτασιακές για να μπορέσουμε να εστιάσουμε την προσοχή μας στη διαδικασία απόδοσης αλλά αυτές οι σταθερές δεν είναι παρά μόνο ένα υποσύνολο των σταθερών της φυσικής γλώσσας. Ο Montague πίστευε, στην πραγματικότητα, ότι τα εντασιακά φαινόμενα αποτελούν τον κανόνα και γι'αυτό όρισε την εφαρμογή συνάρτησης μέσω της Montague έντασης του ορίσματος. Δεν ακολουθούμε αυτή την ιδέα στην LIL αλλά προτιμούμε να δίνουμε διαφορετικούς τύπους στις σταθερές σύμφωνα με τον τρόπο που χειρίζονται τα ορίσματά τους¹⁸. Για παράδειγμα, παρατηρείστε τον τύπο της σταθεράς *rise* στον Πίνακα 1.4.

¹⁷ Αυτή η δουλειά παρουσιάζεται λεπτομερώς στο [13]. Επίσης, το [12] αποτελεί μία σύντομη αναφορά σε αυτήν μαζί με κάποια προκαταρκτικά αποτελέσματα αυτής της διατριβής.

¹⁸ Δεν είναι πια αλήθεια ότι οι σταθερές της ίδιας συντακτικής κατηγορίας έχουν όμοιους τύπους.

Εκτασιακά αμετάβατα ρήματα	$\text{run} : e \rightarrow t$
Εντασιακά αμετάβατα ρήματα	$\text{rise} : (s \rightarrow e) \rightarrow t$
Εκτασιακά μεταβατικά ρήματα	$\text{love} : e \rightarrow (e \rightarrow t)$
(Βασικός) τελεστής αναγκαιότητας	$\Box : (s \rightarrow t) \rightarrow t$
«de dicto» τροπικός τελεστής	$\text{Yesterday} : (s \rightarrow t) \rightarrow t$
«de re» τροπικός τελεστής	$\text{Yesterday}_1 : (s \rightarrow (e \rightarrow t)) \rightarrow (e \rightarrow t)$

Πίνακας 1.4: Περισσότερες σταθερές στην LIL.

Τώρα, για κάθε σταθερά $c : \tau$ στην LIL, εισάγουμε στην Ty_2 την $c^G : s \rightarrow \tau$ η οποία είναι τέτοια ώστε $\text{den}(c^G) = c$. Η Gallin-μετάφραση κάθε σταθεράς $c : \tau$ σε μία κατάσταση u στην Ty_2 είναι η $c^G(u) : \tau$, ώστε για κάθε ανάθεση g τέτοια ώστε $g(u) = a$,

$$\text{den}(c^{G,u})(g\{u := a\}) = \text{den}(c^G(u))(g\{u := a\}) = c(a) = \text{den}_{\text{LIL}}(c)(g)(a).$$

Γενικά, για κάθε όρο $A : \tau$ της LIL, $A^{G,u} : \tau$, και για κάθε ανάθεση g τέτοια ώστε $g(u) = a$,

$$\text{den}(A^{G,u})(g) = \text{den}_{\text{LIL}}(A)(g)(a).$$

Η ιδέα είναι ότι για κάθε A και κάθε κατάσταση a , η Gallin-μετάφραση του $A^{G,u}$ ορίζει τυπικά στην Ty_2 την υποδήλωσή του στην LIL στην a .

Σχηματίζουμε τώρα την $L_{\text{ar}}^{\lambda, G}$ με την προσθήκη στην Ty_2 άπειρων το πλήθος μεταβλητών αναδρομής για κάθε τύπο τ , και με την επέκταση του ορισμού των όρων με την προσθήκη του αναδρομικού τελεστή ως εξής

$$A ::= x \mid p \mid c^G \mid A(B) \mid \lambda(x)(B) \mid A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}. \quad (1.12)$$

Να σημειωθεί ότι η $L_{\text{ar}}^{\lambda, G}$ συμβολίζεται στο [13] απλά ως L_{ar}^{λ} διότι η αρχική γλώσσα L_{ar}^{λ} (Ενότητα 1.5) δεν παρουσιάζεται εκεί. Εισάγουμε αυτό το νέο συμβολισμό για να αποφύγουμε οποιαδήποτε σύγχυση αν και θα πρέπει να είναι φανερό ότι, αν εξαιρέσουμε τους τύπους των σταθερών, οι δύο γλώσσες είναι βασικά οι ίδιες.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε στην $L_{\text{ar}}^{\lambda, G}$ για κάθε όρο A της LIL, εκτός από το σφαιρικό και το τοπικό του νόημα, ένα πρόσθετο νόημα σε πλαίσιο, το αντικειμενικό του περιεχόμενο (*factual content*). Έχουμε ήδη επισημάνει ότι για κάθε όρο A της LIL, η Gallin-μετάφρασή του $A^{G,u}$ ως προς μία μεταβλητή

κατάστασης u ορίζει τυπικά την υποδήλωση του A σε μία κατάσταση. Τώρα, η αφαίρεση ως προς όλες τις καταστάσεις της Gallin-μετάφρασης του A ορίζει τυπικά την υποδήλωση του A και επομένως, η κανονική μορφή αυτού του όρου ορίζει τον αλγόριθμο που υπολογίζει την υποδήλωση του A . Δηλαδή,

$$\text{Σφαιρικό Νόημα του } A : \quad \text{cf}(\lambda(u)A^{G,u}).$$

Όπως στην Ενότητα 1.5.2, με εφαρμογή, έχουμε απλά για κάθε όρο A της LIL και μία κατάσταση a

$$\text{Τοπικό Νόημα της } A \text{ στην κατάσταση } a : \quad \text{cf}(\lambda(u)(A^{G,u})(\bar{a})).$$

Παρατηρούμε ότι αυτός ο ορισμός ισχύει για όρους της LIL οποιουδήποτε τύπου και όχι μόνο για όρους τύπου \tilde{t} όπως αναφέρεται στην Ενότητα 1.5.2.

Δεδομένου ότι η β -αναγωγή δεν διατηρεί την αναφορική συνωνυμία, γενικά

$$\lambda(u)(A^{G,u})(\bar{a}) \not\approx A^{G,u}\{u := \bar{a}\},$$

η κανονική μορφή του $A^{G,u}\{u := \bar{a}\} \equiv A^{G,\bar{a}}$ ορίζει μία εναλλακτική έννοια νοήματος σε πλαίσιο του A στη $\mathcal{L}_{\text{ar}}^{\lambda,G}$,

$$\text{Αντικειμενικό Περιεχόμενο του } A \text{ στην κατάσταση } a : \quad \text{cf}(A^{G,\bar{a}}).$$

Για παράδειγμα, στην περίπτωση της απλής πρότασης (Mr) ως όρο της LIL, οι τρεις έννοιες νοήματος ορίζονται από τις παρακάτω κανονικές μορφές:

$$\text{Σφαιρικό Νόημα :} \quad \lambda(u)(\text{run}^G(u)(q(u))) \text{ where } \{q := \lambda(u)\text{Mary}^G(u)\}$$

$$\text{Τοπικό Νόημα στην } a : \quad \lambda(u)(\text{run}^G(u)(q(u)))(\bar{a}) \text{ where } \{q := \lambda(u)\text{Mary}^G(u)\}$$

$$\text{Αντικειμενικό Περιεχόμενο στην } a : \quad \text{run}^G(\bar{a})(q') \text{ where } \{q' := \text{Mary}^G(\bar{a})\}$$

Αν σε μία κατάσταση a , $\text{she}^G(a) = \text{Mary}^G(a)$, αυτή η έννοια του αντικειμενικού περιεχομένου «παράγει» την αναμενόμενη συνωνυμία μεταξύ των εκφορών των (Mr) και (Sr).

$$\text{run}^G(\bar{a})(q') \text{ where } \{q' := \text{Mary}^G(\bar{a})\} \approx \text{run}^G(\bar{a})(q') \text{ where } \{q' := \text{she}^G(\bar{a})\}.$$

Ισχύει ωστόσο ξανά ότι οι δύο εκφορές δεν είναι τοπικά συνώνυμες

$$\begin{aligned} & \lambda(u)(\text{run}^G(u)(q(u)))(\bar{a}) \text{ where } \{q := \lambda(u)\text{Mary}^G(u)\} \\ & \not\approx \lambda(u)(\text{run}^G(u)(q(u)))(\bar{a}) \text{ where } \{q := \lambda(u)\text{she}^G(u)\}, \end{aligned}$$

γεγονός που συμφωνεί με τη διαίσθησή μας ότι αυτές οι δύο προτάσεις κομίζουν την ίδια πληροφορία για τον κόσμο σε αυτό το συγκεκριμένο πλαίσιο

αναφοράς αλλά ο υπολογισμός αυτής της πληροφορίας περιλαμβάνει διαφορετικά βασικά υπολογιστικά στοιχεία.

Ας εξετάσουμε τώρα το πιο ενδιαφέρον παράδειγμα ‘Εγώ προσβλήθηκα χθες’ από τον Kaplan. Στην LIL, αποδίδεται ως¹⁹

$$\text{Εγώ προσβλήθηκα χθες} \xrightarrow{\text{αποδίδεται}} \text{Yesterday}_1(\wedge(\text{be_insulted}))(l)$$

όπου $\text{be_insulted} : e \rightarrow t$. Το προτεινόμενο αντικειμενικό περιεχόμενο σε κάθε κατάσταση a ορίζεται από

$$\text{Yesterday}_1^G(\bar{a})(p)(q) \text{ where } \{p := \lambda(u)\text{be_insulted}^G(u), q := I^G(\bar{a})\}$$

και, αν σε μία κατάσταση b , εκφέρεται από ένα διαφορετικό πρόσωπο ($I^G(a) \neq I^G(b)$), τότε

$$\begin{aligned} &\text{Yesterday}_1^G(\bar{a})(p)(q) \text{ where } \{p := \lambda(u)\text{be_insulted}^G(u), q := I^G(\bar{a})\} \\ &\approx \text{Yesterday}_1^G(\bar{b})(p)(q) \text{ where } \{p := \lambda(u)\text{be_insulted}^G(u), q := I^G(\bar{b})\}. \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι η $\text{DavidKaplan} : e$ είναι μία σταθερά στην LIL η οποία υποδηλώνει τον David Kaplan και ο $\text{on20April1973} : ((s \rightarrow (e \rightarrow t)) \rightarrow (e \rightarrow t))$ είναι ένας εντασιακός τελεστής που προσδιορίζει το χρόνο. Είναι τετριμμένο ότι αν ο χρόνος στην κατάσταση a είναι η 21η Απριλίου 1973 και ο ομιλητής είναι ο David Kaplan, τότε σε οποιαδήποτε κατάσταση b , όπου η $\text{DavidKaplan}^G(\bar{b})$ υποδηλώνει τον David Kaplan,

$$\begin{aligned} &\text{Yesterday}_1^G(\bar{a})(p)(q) \text{ where } \{p := \lambda(u)\text{be_insulted}^G(u), q := I^G(\bar{a})\} \\ &\approx \text{on20April1973}^G(\bar{b})(p)(q) \text{ where} \\ &\quad \{p := \lambda(u)\text{be_insulted}^G(u), q := \text{DavidKaplan}^G(\bar{b})\}. \end{aligned}$$

Εκτός από τον Kaplan και τις ιδέες του σε ό,τι αφορά στο νόημα σε πλαίσιο, στο [13] υπάρχει μια πιο γενική συζήτηση για τις σχέσεις μεταξύ των τριών εννοιών νοήματος που έχουν οριστεί για τους όρους στην LIL. Θα επιστρέψουμε σε μερικά από αυτά τα θέματα στο Κεφάλαιο 5 για τους όρους της L_{ar}^λ και με τη βοήθεια της προτεινόμενης έννοιας του αντικειμενικού περιεχομένου που θα οριστεί εκεί.

¹⁹Η λέξη ‘χθες’ αποδίδεται εδώ από τη σταθερά Yesterday_1 και όχι από τη Yesterday δεδομένου ότι η ύπαρξη του δεικτικού ‘εγώ’ μας αναγκάζει να χρησιμοποιήσουμε την «de re» εκδοχή της.

Κεφάλαιο 2

Τοπικότητα των Αντικειμένων με Τύπους

Σε αυτό το κεφάλαιο, εισάγουμε τις βασικές έννοιες για την *τοπικότητα* των αντικειμένων στη δομή ερμηνείας της γλώσσας L_{ar}^λ (Ενότητα 1.5.1). Κατ' αρχάς, προσδιορίζουμε τα αντικείμενα που ερμηνεύουν όρους οι οποίοι αποδίδουν εκφράσεις της φυσικής γλώσσας και επομένως, αποτελούν τα αντικείμενα των οποίων η συμπεριφορά τοπικότητας μας ενδιαφέρει. Στην L_{ar}^λ , αυτά τα αντικείμενα έχουν τύπους όπως στον (1.7) και αυτό προσδιορίζεται με ακρίβεια στην Ενότητα 2.1.

Στην Ενότητα 2.2, ορίζουμε τα *τοπικά αντικείμενα* — οι τιμές τους σε μια κατάσταση εξαρτώνεται μόνο από τις τιμές των ορισμάτων τους σε αυτήν την κατάσταση. Χαρακτηρίζονται από τις *τοπικά συναφείς* συναρτήσεις των οποίων τις ιδιότητες παρουσιάζουμε εδώ.

Στην Ενότητα 2.3, οι έννοιες των προηγούμενων ενοτήτων γενικεύονται για όλα τα αντικείμενα των όρων που προέρχονται από τη φυσική γλώσσα και η τοπικότητα αναπτύσσεται σε όλη της την πολυπλοκότητα. Εισάγονται οι *δείκτες τοπικότητας* — συμβολοσειρές που κωδικοποιούν τη συμπεριφορά τοπικότητας των αντικειμένων — και με τη χρήση τους, η έννοια μιας (γενικής) *συναφούς* συνάρτησης ενός αντικειμένου.

2.1 Οι Εξαρτώμενοι από την Κατάσταση Τύποι της L_{ar}^λ

Οι τύποι της γλώσσας L_{ar}^λ ορίστηκαν από τον (1.6) στο Κεφάλαιο 1 από την αναδρομή

$$\tau ::= e \mid t \mid s \mid (\tau_1 \rightarrow \tau_2). \quad (2.1)$$

Για να ορίσουμε την τοπικότητα, θα εστιάσουμε την προσοχή μας σε μερικά ενδιαφέροντα υποσύνολα αυτών των τύπων. Πρώτα απ' όλα, οι *απλοί* (*pure*) ή *ελεύθεροι κατάστασης* (*state-free*) τύποι είναι οι τύποι της L_{ar}^λ χωρίς το βασικό τύπο s ,

$$\sigma := e \mid t \mid (\sigma_1 \rightarrow \sigma_2). \quad (2.2)$$

Δεν είναι ασυνήθιστο να χρησιμοποιεί κανείς αυτούς τους τύπους στην απόδοση των εκφράσεων της φυσικής γλώσσας μια και συχνά θεωρείται δεδομένο ότι οποιαδήποτε ερμηνεία πραγματοποιείται σε μία συγκεκριμένη κατάσταση, την «τρέχουσα κατάσταση» (βλέπε επίσης την υποσημείωση 8 στη σελίδα 13). Οι τύποι που χρησιμοποιεί ο Montague βασίζονται σε αυτή την ιδέα και ο τύπος s εμφανίζεται μόνο σε τύπους της μορφής $(s \rightarrow \tau)$ οι οποίοι χρησιμοποιούνται για να οριστεί η Montague Ένταση ενός όρου στη LIL (βλέπε τον (1.4) στην Ενότητα 1.3).

Από την άλλη μεριά, οι *εξαρτώμενοι από την κατάσταση* (*state-dependent*) τύποι της L_{ar}^λ που ορίζονται στον (1.7), είναι οι τύποι όλα τα μέρη των οποίων εξαρτώνται από τις καταστάσεις.

$$\tilde{\sigma} := (s \rightarrow e) \mid (s \rightarrow t) \mid (\tilde{\sigma}_1 \rightarrow \tilde{\sigma}_2). \quad (2.3)$$

Αυτά τα δύο υποσύνολα των τύπων της L_{ar}^λ σχετίζονται πολύ πιο στενά απ' ό,τι φαίνεται με την πρώτη ματιά. Ο επόμενος απλός μετασχηματισμός προσθέτει καταστάσεις ομοιόμορφα στους απλούς τύπους ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός αφαιρεί καταστάσεις από τους εξαρτώμενους από την κατάσταση τύπους. Για κάθε απλό τύπο σ , αντιστοιχούμε αναδρομικά ένα εξαρτώμενο από την κατάσταση τύπο $\tilde{\sigma}$ με

$$\begin{aligned} \tilde{e} &:= (s \rightarrow e) \\ \tilde{t} &:= (s \rightarrow t), \text{ και} \\ \text{αν } \sigma &\equiv (\sigma_1 \rightarrow \sigma_2), \text{ τότε } \tilde{\sigma} := (\tilde{\sigma}_1 \rightarrow \tilde{\sigma}_2). \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, αν $\tilde{\sigma} \equiv (\tilde{e} \rightarrow \tilde{t}) \rightarrow (\tilde{e} \rightarrow \tilde{t})$, τότε ο αντίστοιχος απλός τύπος σ είναι $(e \rightarrow t) \rightarrow (e \rightarrow t)$. Και αν για παράδειγμα, $\sigma \equiv (t \rightarrow t) \rightarrow (e \rightarrow (e \rightarrow t))$ ο αντίστοιχος τύπος $\tilde{\sigma}$ είναι $(\tilde{t} \rightarrow \tilde{t}) \rightarrow (\tilde{e} \rightarrow (\tilde{e} \rightarrow \tilde{t}))$.

Οι σταθερές της γλώσσας $L_{ar}^\lambda(K)$ στον Πίνακα 1.2 έχουν εξαρτώμενους από την κατάσταση τύπους. Οι όροι που αποδίδουν εκφράσεις της φυσικής γλώσσας σχηματίζονται από αυτές τις σταθερές και επομένως, οι τύποι τους είναι ακριβώς οι τύποι στον (2.3). Θα γίνει προφανές στις επόμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου ότι η μελέτη μας θα περιοριστεί σε συναρτήσεις εξαρτώμενων από την κατάσταση τύπων (και στο Κεφάλαιο 3 σε όρους με ανάλογους τύπους).

Τέλος, ως συνήθως, ορίζουμε για κάθε τύπο στον (2.1)

$$\tau_1 \times \tau_2 \rightarrow \tau_3 \equiv \tau_1 \rightarrow (\tau_2 \rightarrow \tau_3)$$

το οποίο μπορούμε να γενικεύσουμε για οποιοδήποτε αριθμό τύπων¹. Με βάση αυτό, μπορούμε εναλλακτικά να ορίσουμε τη γενική μορφή ενός όρου τ της γλώσσας L_{ar}^λ ως

$$\tau \equiv \tau_1 \times \dots \times \tau_n \rightarrow \tau_0$$

όπου τ_1, \dots, τ_n είναι οποιαδήποτε τύποι και $\tau_0 \equiv e \mid t \mid s$. Επίσης, αντιστοιχούμε ένα φυσικό αριθμό, το *επίπεδο* (*level*) του τ ($\text{level}(\tau)$) σε κάθε τύπο τ , ως εξής

$$\begin{aligned} \text{level}(e) &= \text{level}(t) = \text{level}(s) = 0 \\ \text{level}(\tau_1 \times \dots \times \tau_n \rightarrow \tau_0) &= \max(\text{level}(\tau_1), \dots, \text{level}(\tau_n)) + 1. \end{aligned}$$

Σε ό,τι αφορά στους εξαρτώμενους από την κατάσταση τύπους, η γενική τους μορφή είναι

$$\tilde{\sigma} \equiv \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0 \quad \text{όπου } \tilde{\sigma}_0 \equiv \tilde{e} \mid \tilde{t} \quad (2.4)$$

όπου $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_n$ είναι εξαρτώμενοι από την κατάσταση τύποι. Οι βασικοί εξαρτώμενοι από την κατάσταση τύποι είναι επιπέδου 1 ($\text{level}(\tilde{e}) = \text{level}(\tilde{t}) = 1$) ενώ για κάθε τύπο $\tilde{\sigma}_1 \rightarrow \tilde{\sigma}_2$, $\text{level}(\tilde{\sigma}_1 \rightarrow \tilde{\sigma}_2) \geq 2$.

2.2 Τοπικά Αντικείμενα

Μία συνάρτηση $f : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0$ εξαρτώμενου από την κατάσταση τύπου μπορεί να χαρακτηριστεί από το κατά πόσον η τιμή της $f(f_1, \dots, f_n, a)$ σε μια κατάσταση $a : s$ εξαρτάται ή όχι από τις τιμές των ορισμάτων της $f_i : \tilde{\sigma}_i$ ($i = 1, \dots, n$) σε καταστάσεις διαφορετικές από την a . Θα δείξουμε ότι αυτή είναι μία απτή έννοια **τοπικότητας** (**locality**) και πρώτα, θα εξετάσουμε σε αυτή την ενότητα την περίπτωση όπου η τιμή της f στην a δεν εξαρτάται από τις τιμές των ορισμάτων της σε άλλες καταστάσεις διαφορετικές από την a .

¹ Αυτή είναι η μέθοδος Schönfinkelization ή Currying σύμφωνα με την οποία μία n -μελής συνάρτηση μπορεί να αναχθεί σε μία συνάρτηση της οποίας τα ορίσματα είναι μονομελείς συναρτήσεις. Χρησιμοποιείται στην απόδοση της φυσικής γλώσσας (βλέπε [10]) για να μπορέσουμε να εκφράσουμε με πιο άμεσο τρόπο το συντακτικό. Σε αυτή την προσέγγιση, θα εκμεταλλευτούμε την ισοδυναμία των δύο θεωρήσεων και θα χρησιμοποιούμε συνήθως τα αντικείμενα στην κανονική δομή της L_{ar}^λ ως συναρτήσεις πολλών μεταβλητών των οποίων οι τιμές είναι αντικείμενα βασικών τύπων.

Παράδειγμα 2.2.1. Έστω το αντικείμενο $love : \tilde{\epsilon} \times \tilde{\epsilon} \rightarrow \tilde{\iota}$ που ερμηνεύει στην L_{ar}^λ τη σταθερά $love$. Για οποιαδήποτε δύο αντικείμενα $f_1, f_2 : \tilde{\epsilon}$ και οποιαδήποτε κατάσταση $a : s$, η συνάρτηση $love$ ορίζεται ως

$$love(f_1, f_2, a) = 1 \iff \text{o/η } f_2(a) \text{ αγαπά τον/την } f_1(a) \text{ στην κατάσταση } a.$$

Όπως είναι φυσικό, ο υπολογισμός της τιμής της $love(f_1, f_2, a)$ χρειάζεται μόνο τις τιμές των f_1 και f_2 στην κατάσταση a . Με άλλα λόγια, για κάθε δύο ζεύγη ορισμάτων $(f_1, f_2 : \tilde{\epsilon})$ και $(f'_1, f'_2 : \tilde{\epsilon})$ και κάθε κατάσταση a , αν $f_1(a) = f'_1(a)$ και $f_2(a) = f'_2(a)$, τότε $love(f_1, f_2, a) = love(f'_1, f'_2, a)$.

Το αντικείμενο $love$ είναι μόνο ένα παράδειγμα τοπικού αντικειμένου και ο χαρακτηρισμός αυτός θα γίνει αυστηρός με τη χρήση της τοπικά συναφούς συνάρτησης.

Ορισμός 2.2.2. (Τοπικά Συναφής Συνάρτηση ενός Αντικειμένου) Για κάθε $f : \tilde{\sigma}$, ορίζουμε τι σημαίνει για τη συνάρτηση

$$f' : s \rightarrow \sigma$$

να είναι τοπικά συναφής της f (*local associate*) αναδρομικά στο επίπεδο του $\tilde{\sigma}$.

(i) Αν $f : \tilde{\sigma}_0$, τότε η f' είναι τοπικά συναφής συνάρτηση της f αν και μόνο αν $f' = f$.

(ii) Αν $f : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0$, τότε η $f' : s \times \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n \rightarrow \sigma_0$ είναι τοπικά συναφής συνάρτηση της f αν και μόνο αν για κάθε $f_i : \tilde{\sigma}_i$, $a : s$,

$$f(f_1, \dots, f_n, a) = f'(a, f'_1(a), \dots, f'_n(a))$$

όπου για $i = 1, \dots, n$, κάθε $f'_i : s \rightarrow \sigma_i$ είναι τοπικά συναφής συνάρτηση της f_i .

Ένα αντικείμενο $f : \tilde{\sigma}$ είναι τοπικό (*local*) αν έχει μία τοπικά συναφή συνάρτηση.

Ο ορισμός της συνάρτησης $love$ που παρουσιάσαμε παραπάνω ουσιαστικά περιγράφει την ύπαρξη μίας τοπικά συναφούς συνάρτησης για αυτήν και επομένως, το αντικείμενο $love$ είναι τοπικό. Είναι επίσης προφανές από τον ορισμό ότι όλα τα αντικείμενα τύπου $\tilde{\epsilon}$ και $\tilde{\iota}$ (αντικείμενα τύπου επιπέδου ένα) είναι τοπικά και ότι έχουν μοναδικές τοπικά συναφείς συναρτήσεις.

Παράδειγμα 2.2.3. Επίσης, άλλα τετριμμένα τοπικά αντικείμενα με οποιουδήποτε επιπέδου τύπο είναι οι σταθερές συναρτήσεις, δηλαδή, κάθε συνάρτηση $f : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0$ τέτοια ώστε για κάθε f_1, \dots, f_n κατάλληλων τύπων και για κάθε $a : s$,

$$f(f_1, \dots, f_n, a) = b$$

για κάποιο $b : \sigma_0$. Η συνάρτηση $f' : s \times \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n \rightarrow \sigma_0$ τέτοια ώστε για κάθε g_1, \dots, g_n κατάλληλων τύπων και κάθε $a : s$,

$$f'(a, g_1, \dots, g_n) = b$$

είναι προφανώς τοπικά συναφής της f .

Αν η f' είναι τοπικά συναφής τόσο της f_1 όσο και της f_2 τότε οι συναρτήσεις f_1 και f_2 είναι ίσες σε όλα τα τοπικά ορίσματα. Από την άλλη, ο ορισμός της τοπικά συναφούς συνάρτησης δεν ορίζει την $f' : s \rightarrow \sigma$ — απλώς καθορίζει μερικές από τις τιμές της. Ο ορισμός αυτός δεν θέτει κανένα περιορισμό στις τιμές της f' σε ορίσματα τα οποία δεν είναι κι αυτά τιμές τοπικά συναφών συναρτήσεων των ορισμάτων της f . Γενικά, ένα τοπικό αντικείμενο $f : \tilde{\sigma}$ με $\text{level}(\tilde{\sigma}) \geq 2$ έχει πολλές τοπικά συναφείς συναρτήσεις των οποίων η σχέση περιγράφεται στην ακόλουθη προφανή πρόταση.

Πρόταση 2.2.4. *Αν οι f_1 και f_2 είναι τοπικά συναφείς συναρτήσεις της $f : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0$, τότε, για κάθε $a : s$ και για οποιαδήποτε τοπικά αντικείμενα $g_i : \tilde{\sigma}_i$ και τοπικά συναφείς τους συναρτήσεις $g'_i : s \rightarrow \sigma_i$, ($i = 1, \dots, n$),*

$$f_1(a, g'_1(a), \dots, g'_n(a)) = f_2(a, g'_1(a), \dots, g'_n(a)).$$

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα μη τοπικού (*non local*) αντικειμένου.

Παράδειγμα 2.2.5. Το πιο προφανές είναι ο προτασιακός τελεστής $\Box : \tilde{t} \rightarrow \tilde{t}$ τον οποίο ερμηνεύουμε ως «αναγκαία πάντα», δηλαδή για κάθε $f : \tilde{t}$ και κάθε κατάσταση $a : s$,

$$\Box(f, a) = 1 \iff \forall b : s, f(b) = 1.$$

Για να οδηγηθούμε σε αντίφαση, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μία συνάρτηση $f' : s \times t \rightarrow t$ τέτοια ώστε για κάθε $f : \tilde{t}$ και κάθε $a : s$, $\Box(f, a) = f'(f(a), a)$. Έστω επίσης δύο αντικείμενα f_1 και f_2 , τέτοια ώστε στην κατάσταση a , $f_1(a) = f_2(a) = 1$ αλλά $\Box(f_1, a) = 1$, $\Box(f_2, a) = 0$ γιατί υπάρχει μία άλλη κατάσταση $b : s$ τέτοια ώστε $f_2(b) = 0$.

Τώρα, ενώ $f'(f_1(a), a) = f'(f_2(a), a)$, θα πρέπει να ισχύει $f'(f_1(a), a) = 1$ και $f'(f_2(a), a) = 0$ το οποίο είναι άτοπο.

Αποδείξαμε ότι το αντικείμενο \Box δεν είναι τοπικό χρησιμοποιώντας μία ιδέα η οποία μπορεί να γενικευτεί και χρησιμοποιείται στο παρακάτω λήμμα *Συνθήκης Τοπικότητας (Locality Condition)*.

Λήμμα 2.2.6. (Συνθήκη Τοπικότητας -LC) *Ένα αντικείμενο $f : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0$ είναι τοπικό αν και μόνο αν ισχύει η εξής συνθήκη: Για δύο n -άδες (f_1, \dots, f_n) και (g_1, \dots, g_n) τοπικών αντικειμένων κατάλληλων τύπων*

και αντίστοιχων τοπικά συναφών συναρτήσεων (f'_1, \dots, f'_n) και (g'_1, \dots, g'_n) , και για κάθε $a : s$, αν, για $i = 1, \dots, n$, $f'_i(a) = g'_i(a)$, τότε

$$f(f_1, \dots, f_n, a) = f(g_1, \dots, g_n, a).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη είναι με επαγωγή στο επίπεδο του τύπου της f .

(\implies) Έστω ότι η f' είναι τοπικά συναφής συνάρτηση του τοπικού αντικειμένου $f : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0$. Τότε, για κάθε $a : s$ και για οποιεσδήποτε n -άδες τοπικών αντικειμένων κατάλληλων τύπων (f_1, \dots, f_n) και (g_1, \dots, g_n) και τοπικά συναφείς τους συναρτήσεις (f'_1, \dots, f'_n) και (g'_1, \dots, g'_n) τέτοιες ώστε για $i = 1, \dots, n$, $f'_i(a) = g'_i(a)$,

$$\begin{aligned} f(f_1, \dots, f_n, a) &= f'(a, f'_1(a), \dots, f'_n(a)) \\ &= f'(a, g'_1(a), \dots, g'_n(a)) = f(g_1, \dots, g_n, a). \end{aligned}$$

(\impliedby) Αν $f : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0$, ορίζουμε την $f' : s \times \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n \rightarrow \sigma_0$ ως εξής

$$f'(a, b_1, \dots, b_n) = \begin{cases} f(f_1, \dots, f_n, a), & \text{αν για } i = 1, \dots, n, \text{ υπάρχουν τοπικά} \\ & \text{αντικείμενα } f_1, \dots, f_n \text{ τέτοια ώστε} \\ & f'_i(a) = b_i, \\ er_{\sigma_0}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η συνάρτηση f' είναι καλά ορισμένη, αφού από την υπόθεση, ακόμα και αν για κάποιο i , υπάρχουν δύο τοπικά αντικείμενα f_i και g_i και τοπικά συναφείς τους συναρτήσεις f'_i και g'_i αντίστοιχα, τέτοιες ώστε $b_i = f'_i(a)$ και $b_i = g'_i(a)$ για κάποιο a , ισχύει ότι

$$f(f_1, \dots, f_i, \dots, f_n, a) = f(f_1, \dots, g_i, \dots, f_n, a).$$

Η συνάρτηση f' είναι προφανώς τοπικά συναφής της f και επομένως, η f είναι τοπική. \dashv

Γενικά, οι τιμές των τοπικά συναφών συναρτήσεων ενός τοπικού αντικειμένου f μπορούν να διαφέρουν μόνο σε ορίσματα τα οποία δεν είναι τιμές τοπικά συναφών συναρτήσεων των ορισμάτων της f . Αν δώσουμε μία συγκεκριμένη τιμή στην f σε αυτά τα ορίσματα, τότε μπορούμε να ορίσουμε μία ιδιαίτερη, «προτιμητέα» τοπικά συναφή συνάρτηση της f .

Ορισμός 2.2.7. Αν η συνάρτηση $f : \tilde{\sigma}$ είναι τοπική, μία τοπικά συναφής της $f_* : s \rightarrow \sigma$ είναι μία προτιμητέα τοπικά συναφής συνάρτηση της f (*preferred local associate of f*) αν και μόνο αν

- (i) Αν $f : \tilde{\sigma}_0$, τότε $f_* = f$.
(ii) Αν $f : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0$, τότε η $f_* : \mathbf{s} \times \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n \rightarrow \sigma_0$ είναι τέτοια ώστε για κάθε $a : \mathbf{s}$ και για κάθε $b_1 : \sigma_1, \dots, b_n : \sigma_n$, αν δεν υπάρχουν τοπικές συναρτήσεις $f_i : \tilde{\sigma}_i$ με τοπικά συναφείς f'_i τέτοιες ώστε $b_i = f'_i(a)$, τότε

$$f_*(a, b_1, \dots, b_n) = er_{\sigma_0}.$$

Πρόταση 2.2.8. Αν η $f : \tilde{\sigma}$ είναι τοπική, τότε έχει μία μοναδική προτιμητέα τοπικά συναφή συνάρτηση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη είναι με επαγωγή στο $\text{level}(\tilde{\sigma})$.

- (i) Αν $f : \tilde{\sigma}_0$, τότε $f_* = f$ και προφανώς είναι μοναδική.
(ii) Έστω ότι η $f' : \mathbf{s} \times \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n \rightarrow \sigma_0$ είναι μία τοπικά συναφής συνάρτηση ενός τοπικού αντικειμένου $f : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f_*(a, b_1, \dots, b_n) = \begin{cases} f'(a, b_1, \dots, b_n), & \text{αν, για } i = 1, \dots, n, \text{ υπάρχουν τοπικές} \\ & f_1, \dots, f_n \text{ τέτοιες ώστε } f'_i(a) = b_i, \\ er_{\sigma_0}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η συνάρτηση f_* είναι τοπικά συναφής της f αφού για οποιαδήποτε τοπικά αντικείμενα f_1, \dots, f_n κατάλληλων τύπων με τοπικά συναφείς f'_1, \dots, f'_n και για κάθε $a : \mathbf{s}$,

$$f(f_1, \dots, f_n, a) = f'(a, f'_1(a), \dots, f'_n(a)) = f_*(a, f'_1(a), \dots, f'_n(a)).$$

Επίσης, έπεται άμεσα από τον ορισμό ότι η συνάρτηση f_* είναι προτιμητέα τοπικά συναφής της f .

Έστω τώρα ότι η $f'_* : \mathbf{s} \times \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n \rightarrow \sigma_0$ είναι μία άλλη προτιμητέα τοπικά συναφής συνάρτηση της f . Εξετάζουμε τις παρακάτω περιπτώσεις σχετικά με τα ορίσματα των f_* και f'_* .

Για κάθε $a : \mathbf{s}$ και κάθε b_1, \dots, b_n κατάλληλων τύπων τέτοια ώστε υπάρχουν τοπικές συναρτήσεις f_1, \dots, f_n και τοπικά συναφείς αυτών f'_1, \dots, f'_n , αντίστοιχα, τέτοιες ώστε $f'_i(a) = b_i$, για $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} f_*(a, b_1, \dots, b_n) &= f'(a, b_1, \dots, b_n) \\ &= f(f_1, \dots, f_n, a) \\ &= f'_*(a, f'_1(a), \dots, f'_n(a)) = f'_*(a, b_1, \dots, b_n), \end{aligned}$$

διότι η f'_* είναι τοπικά συναφής της f .

Από την άλλη, για κάθε $a : s$ για κάθε άλλα b_1, \dots, b_n κατάλληλων τύπων,

$$f_*(a, b_1, \dots, b_n) = er_{\sigma_0} = f'_*(a, b_1, \dots, b_n),$$

διότι η f'_* είναι προτιμητέα τοπικά συναφής της f . →

Τέλος, το επόμενο θεώρημα συνοψίζει μερικές βασικές ιδιότητες των τοπικών αντικειμένων και των τοπικά συναφών τους συναρτήσεων.

Θεώρημα 2.2.9. (i) (**Προβολή**) Αν η $f : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_i$ είναι μία συνάρτηση προβολής τέτοια ώστε

$$f(f_1, \dots, f_n) = f_i,$$

τότε η f είναι τοπική και η $f' : s \times \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n \rightarrow \sigma_i$ που ορίζεται για κάθε $a : s$ ως

$$f'(a, y_1, \dots, y_n) = y_i$$

είναι τοπικά συναφής της.

(ii) (**Εφαρμογή σε Τοπικές Τιμές**) Αν οι $f : \tilde{\tau}_1 \times \dots \times \tilde{\tau}_n \rightarrow \tilde{\sigma}$ και $y_1 : \tilde{\tau}_1, \dots, y_n : \tilde{\tau}_n$ είναι τοπικές με τοπικά συναφείς f' και y'_1, \dots, y'_n αντίστοιχα, τότε η $f(y_1, \dots, y_n)$ είναι επίσης τοπική και η $(f(y_1, \dots, y_n))' : s \rightarrow \sigma$ που ορίζεται για κάθε $a : s$ ως

$$(f(y_1, \dots, y_n))'(a) = f'(a, y'_1(a), \dots, y'_n(a))$$

είναι τοπικά συναφής της.

(iii) (**Σύνθεση**) Αν οι $g : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \times \tilde{\sigma} \rightarrow \tilde{\rho}$ και $h : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}$ είναι τοπικές με τοπικά συναφείς g' και h' αντίστοιχα, και

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n, h(x_1, \dots, x_n)),$$

τότε η f είναι επίσης τοπική και η συνάρτηση $f' : s \times \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n \rightarrow \rho$ που ορίζεται για κάθε $a : s$ ως

$$f'(a, y_1, \dots, y_n) = g'(a, y_1, \dots, y_n, h'(a, y_1, \dots, y_n))$$

είναι τοπικά συναφής της.

(iv) (**λ-αφαίρεση**) Αν η $f : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \times \tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\rho}$ είναι τοπική με τοπικά συναφής f' και

$$g(x_1, \dots, x_n) = \lambda(x)f(x_1, \dots, x_n, x),$$

τότε η g είναι τοπική και η συνάρτηση $g' : s \times \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n \rightarrow (\tau \rightarrow \rho)$ που ορίζεται ως

$$g'(a, h_1, \dots, h_n) = \lambda(h)f'(a, h_1, \dots, h_n, h)$$

είναι τοπικά συναφής της.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Έστω $f : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_i$ μία συνάρτηση προβολής, τέτοια ώστε για f_1, \dots, f_n κατάλληλων τύπων, $f(f_1, \dots, f_n) = f_i$.

Έστω ότι $\tilde{\sigma}_i \equiv \tilde{\sigma}_i^1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_i^m \rightarrow \tilde{\sigma}_0$. Αρκεί να δείξουμε, σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.2, ότι για οποιαδήποτε τοπικά αντικείμενα $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ με τοπικά συναφείς συναρτήσεις τους $x'_1, \dots, x'_n, x'_{n+1}, \dots, x'_{n+m}$ και κάθε $a : s$,

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}, a) \\ = f'(a, x'_1(a), \dots, x'_n(a), x'_{n+1}(a), \dots, x'_{n+m}(a)). \end{aligned}$$

Το ζητούμενο ισχύει αφού

$$\begin{aligned} f'(a, x'_1(a), \dots, x'_n(a), x'_{n+1}(a), \dots, x'_{n+m}(a)) \\ = x'_i(a)(x'_{n+1}(a), \dots, x'_{n+m}(a)) \\ = x_i(x_{n+1}, \dots, x_{n+m}, a) \\ = f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}, a). \end{aligned}$$

(ii) Έστω ότι $\tilde{\sigma} \equiv \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_m \rightarrow \tilde{\sigma}_0$. Αρκεί να δείξουμε, σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.2, ότι για οποιαδήποτε τοπικά αντικείμενα x_1, \dots, x_m κατάλληλων τύπων και τοπικά συναφείς συναρτήσεις τους x'_1, \dots, x'_m και κάθε $a : s$,

$$(f(y_1, \dots, y_n))(x_1, \dots, x_m, a) = (f(y_1, \dots, y_n))'(a, x'_1(a), \dots, x'_m(a)).$$

Το ζητούμενο ισχύει αφού

$$\begin{aligned} (f(y_1, \dots, y_n))'(a, x'_1(a), \dots, x'_m(a)) \\ = (f'(a, y'_1(a), \dots, y'_n(a)))(x'_1(a), \dots, x'_m(a)) \\ = f'(a, y'_1(a), \dots, y'_n(a), x'_1(a), \dots, x'_m(a)) \\ = f(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m, a) \\ = (f(y_1, \dots, y_n))(x_1, \dots, x_m, a). \end{aligned}$$

(iii) Έστω ότι $\tilde{\rho} \equiv \tilde{\rho}_1 \times \dots \times \tilde{\rho}_m \rightarrow \tilde{\rho}_0$. Αρκεί να δείξουμε, σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.2, ότι για οποιαδήποτε τοπικά αντικείμενα $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ με κατάλληλους τύπους και τοπικά συναφείς συναρτήσεις τους $x'_1, \dots, x'_n, x'_{n+1}, \dots, x'_{n+m}$ και κάθε $a : s$,

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}, a) \\ = f'(a, x'_1(a), \dots, x'_n(a), x'_{n+1}(a), \dots, x'_{n+m}(a)). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την περίπτωση (ii) αυτού του θεωρήματος, το ζητούμενο ισχύει αφού

$$\begin{aligned}
 & f'(a, x'_1(a), \dots, x'_{n+m}(a)) \\
 &= g'(a, x'_1(a), \dots, x'_n(a), h'(a, x'_1(a), \dots, x'_n(a)), x'_{n+1}(a), \dots, x'_{n+m}(a)) \\
 &= g'(a, x'_1(a), \dots, x'_n(a), (h(x_1, \dots, x_n))'(a), x'_{n+1}(a), \dots, x'_{n+m}(a)) \\
 &= g(x_1, \dots, x_n, h(x_1, \dots, x_n), x_{n+1}, \dots, x_{n+m}, a) \\
 &= f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}, a).
 \end{aligned}$$

(iv) Έστω ότι $\tilde{\rho} \equiv \tilde{\rho}_1 \times \dots \times \tilde{\rho}_m \rightarrow \tilde{\rho}_0$. Αρκεί να δείξουμε, σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.2, ότι για οποιαδήποτε τοπικά αντικείμενα $x_1, \dots, x_n, x, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ κατάλληλων τύπων και τοπικά συναφείς συναρτήσεις τους $x'_1, \dots, x'_n, x', x'_{n+1}, \dots, x'_{n+m}$ και κάθε $a : s$,

$$\begin{aligned}
 & g(x_1, \dots, x_n, x, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}, a) \\
 &= g'(a, x'_1(a), \dots, x'_n(a), x'(a), x'_{n+1}(a), \dots, x'_{n+m}(a))
 \end{aligned}$$

Το ζητούμενο ισχύει αφού

$$\begin{aligned}
 & g'(a, x'_1(a), \dots, x'_n(a), x'(a), x'_{n+1}(a), \dots, x'_{n+m}(a)) \\
 &= (\lambda(h)f'(a, x'_1(a), \dots, x'_n(a), h))(x'(a), x'_{n+1}(a), \dots, x'_{n+m}(a)) \\
 &= f'(a, x'_1(a), \dots, x'_n(a), x'(a), x'_{n+1}(a), \dots, x'_{n+m}(a)) \\
 &= f(x_1, \dots, x_n, x, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}, a) \\
 &= g(x_1, \dots, x_n, x, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}, a). \quad \dashv
 \end{aligned}$$

Η ενότητα τελειώνει με ένα προφανές πόρισμα της περίπτωσης της λ-αφαίρεσης του θεωρήματος.

Πόρισμα 2.2.10. Αν η $f : \tilde{\tau}$ είναι τοπική με τοπικά συναφή f' και για $x_i : \tilde{\sigma}_i$,

$$g = \lambda(x_1) \dots \lambda(x_n)f,$$

τότε η g είναι επίσης τοπική και η συνάρτηση $g' : s \times \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n \rightarrow \tau$ που ορίζεται για κάθε $a : s$ ως

$$g'(a) = \lambda(z_1) \dots \lambda(z_n)(f'(a))$$

είναι τοπικά συναφής της.

2.3 Δείκτες Τοπικότητας του Τύπου $\tilde{\sigma}$

Τα τοπικά αντικείμενα είναι μόνο μερικά από τα αντικείμενα που ερμηνεύουν σταθερές της φυσικής γλώσσας. Όπως η συνάρτηση \square , υπάρχουν φυσικά παραδείγματα αντικειμένων που δεν είναι τοπικά και μπορεί ακόμα και να παρουσιάζουν διαφορετική συμπεριφορά τοπικότητας σε κάθε ένα από τα ορίσματά τους.

Το βασικό χαρακτηριστικό της προσέγγισης της τοπικότητας που υιοθετείται εδώ είναι ότι δεν προϋποθέτει καμία ομοιόμορφη, τοπική ή μη τοπική, συμπεριφορά των αντικειμένων ή ακόμα και των ορισμάτων ενός αντικειμένου. Συνεπώς, υπάρχει η ανάγκη μίας κατάλληλης περιγραφής αυτής της συμπεριφοράς η οποία θα οριστεί αυστηρά, κατά τρόπο παρόμοιο με αυτόν των τοπικών αντικειμένων της Ενότητας 2.2.

Παράδειγμα 2.3.1. Έστω η συνάρτηση $former : (\tilde{e} \rightarrow \tilde{t}) \times \tilde{e} \rightarrow \tilde{t}$ η οποία ερμηνεύει τη σταθερά $former$. Για κάθε $f_1 : \tilde{e} \rightarrow \tilde{t}$ και $f_2 : \tilde{e}$ και για κάθε $a : s$, η συνάρτηση αυτή ορίζεται ως εξής

$$former(f_1, f_2, a) = 1 \iff \text{o/η/το } f_2(a) \text{ έχει την ιδιότητα } f_1 \text{ σε κάποια κατάσταση } b, \text{ προγενέστερη στο χρόνο της } a$$

Για παράδειγμα, η πρόταση ‘Ο Γιάννης είναι πρώην υπουργός’ αποδίδεται στην L_{ar}^λ με τον όρο $former(minister, John)$. Η υποδήλωσή της σε κάποια κατάσταση $a : s$ εξαρτάται από την υποδήλωση της σταθεράς $minister$ σε άλλες καταστάσεις οι οποίες υποδεικνύουν μία χρονική στιγμή στο παρελθόν σε σχέση με την a ενώ στην περίπτωση της υποδήλωσης της σταθεράς $John$, χρειάζεται μόνο η τιμή της στην κατάσταση a .

Ο τύπος $(\tilde{e} \rightarrow \tilde{t}) \times \tilde{e} \rightarrow \tilde{t}$ της συνάρτησης $former$ εκφράζει τυπικά ότι η συνάρτηση αυτή περιμένει το πρώτο όρισμά της να είναι τύπου $(\tilde{e} \rightarrow \tilde{t})$ ενώ το δεύτερο τύπου \tilde{e} . Ορίζουμε, στη συνέχεια, έναν αντίστοιχο φορμαλισμό για κάθε τύπο, έναν κλειστό δείκτη τοπικότητας του τύπου $\tilde{\sigma}$, τέτοιο ώστε, για παράδειγμα στην περίπτωση της συνάρτησης $former$, να εκφράζει το γεγονός ότι οποιοδήποτε όρισμα τύπου $(\tilde{e} \rightarrow \tilde{t})$ χρησιμοποιείται από την $former$ μη τοπικά, το οποίο συμβολίζουμε με το ψηφίο 1, ενώ κάθε όρισμα τύπου \tilde{e} χρησιμοποιείται τοπικά, και το συμβολίζουμε με 0. Ο δείκτης της $former$ εκφράζει επίσης τον τρόπο με τον οποίο οποιοδήποτε πρώτο της όρισμα χρησιμοποιεί τα δικά του ορίσματα τύπου \tilde{e} — περιγράφει, επομένως, πλήρως τη συμπεριφορά τοπικότητας του αντικειμένου.

\tilde{t}, \tilde{e}	l
$\tilde{t} \rightarrow \tilde{t}$	$\langle l \vdash 0 \rangle, \langle l \vdash 1 \rangle$
$\tilde{e} \times \tilde{e} \rightarrow \tilde{t}$	$\langle l \vdash 0, l \vdash 0 \rangle, \langle l \vdash 1, l \vdash 1 \rangle,$ $\langle l \vdash 1, l \vdash 0 \rangle, \langle l \vdash 0, l \vdash 1 \rangle$
$(\tilde{e} \rightarrow \tilde{t}) \times \tilde{e} \rightarrow \tilde{t}$	$\langle \langle l \vdash 0 \rangle \vdash 0, l \vdash 0 \rangle, \langle \langle l \vdash 1 \rangle \vdash 1, l \vdash 1 \rangle$ $\langle \langle l \vdash 1 \rangle \vdash 0, l \vdash 0 \rangle, \langle \langle l \vdash 0 \rangle \vdash 1, l \vdash 0 \rangle$ $\langle \langle l \vdash 0 \rangle \vdash 0, l \vdash 1 \rangle, \langle \langle l \vdash 1 \rangle \vdash 1, l \vdash 0 \rangle$ $\langle \langle l \vdash 1 \rangle \vdash 0, l \vdash 1 \rangle, \langle \langle l \vdash 0 \rangle \vdash 1, l \vdash 1 \rangle$

Πίνακας 2.1: Παραδείγματα κλειστών δεικτών τοπικότητας εισόδου.

Ορισμός 2.3.2. (Κλειστός Δείκτης Τοπικότητας του Τύπου $\tilde{\sigma}$) Ένας κλειστός δείκτης τοπικότητας του τύπου $\tilde{\sigma}$ (*closed locality index of type $\tilde{\sigma}$*) είναι μία ακολουθία της μορφής

$$\ell \vdash t$$

δύο ανεξαρτήτων μερών: ενός κλειστού δείκτη τοπικότητας εισόδου ℓ του τύπου $\tilde{\sigma}$ (*closed locality input index of type $\tilde{\sigma}$*) και ενός κλειστού δείκτη τοπικότητας εξόδου (*closed locality output index*) t .

Ένας κλειστός δείκτης τοπικότητας εξόδου t είναι μία σταθερά δείκτη (*index constant*) η οποία ορίζεται ως

$$t := 0 \mid 1.$$

Ένας κλειστός δείκτης τοπικότητας εισόδου ℓ του τύπου $\tilde{\sigma}$ ορίζεται με αναδρομή στο $\text{level}(\tilde{\sigma})$ ως εξής:

Αν $\tilde{\sigma} \equiv \tilde{\sigma}_0$, $\ell := l$, όπου το l είναι ένα σταθερό σύμβολο.

Αν $\tilde{\sigma} \equiv \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0$, ένας κλειστός δείκτης τοπικότητας εισόδου ℓ του τύπου $\tilde{\sigma}$ είναι μία έκφραση

$$\ell := \langle \ell_1 \vdash t_1, \dots, \ell_n \vdash t_n \rangle$$

όπου ℓ_1, \dots, ℓ_n είναι κλειστοί δείκτες τοπικότητας εισόδου των τύπων $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_n$ αντίστοιχα και t_1, \dots, t_n είναι σταθερές δείκτη.

Στον Πίνακα 2.1, παρουσιάζονται όλοι οι πιθανοί κλειστοί δείκτες τοπικότητας εισόδου μερικών τύπων με χαμηλό επίπεδο.

Επίσης, γενικά, παρατηρούμε ότι σύμφωνα με τον τρόπο που αντιλαμβανόμαστε τα ανύσματα,

$$\langle \ell_1 \vdash t_1, \dots, \ell_n \vdash t_n \rangle \vdash t \equiv \langle \ell_1 \vdash t_1, \langle \ell_2 \vdash t_2, \dots, \ell_n \vdash t_n \rangle \rangle \vdash t.$$

Τέλος, υπάρχουν κάποιοι κλειστοί δείκτες ειδικού ενδιαφέροντος για κάθε τύπο.

Ορισμός 2.3.3. Αν όλες οι σταθερές δείκτη ενός κλειστού δείκτη τοπικότητας (εισόδου) είναι ίσες με 1, τότε ο δείκτης ονομάζεται *κανονικός* (*standard*) ενώ αν όλες οι σταθερές δείκτη είναι ίσες με 0, ο δείκτης ονομάζεται *τοπικός* (*local*).

Τώρα, είναι φυσικό να γενικεύσουμε τον ορισμό του κλειστού δείκτη τοπικότητας με τη χρήση δυαδικών μεταβλητών.

Ορισμός 2.3.4. Ένας δείκτης τοπικότητας του τύπου $\tilde{\sigma}$ (*locality index of type $\tilde{\sigma}$*) ορίζεται όπως στον Ορισμό 2.3.2 όπου ο δείκτης τοπικότητας εξόδου t είναι τώρα ένα σύμβολο δείκτη (*index token*) το οποίο ορίζεται ως

$$t ::= 0 \mid 1 \mid b$$

όπου b είναι μεταβλητή δείκτη (*index variable*).

Έπεται ότι αν αντικαταστήσουμε οποιαδήποτε εμφάνιση κάθε μεταβλητής δείκτη b σε ένα δείκτη τοπικότητας ℓ του τύπου $\tilde{\sigma}$ με τις σταθερές 0 ή 1, η συμβολοσειρά που θα σχηματιστεί είναι ένας κλειστός δείκτης τοπικότητας του ίδιου τύπου. Τυπικά,

Ορισμός 2.3.5. Αντικατάσταση (*substitution*) είναι η τυχαία συνάρτηση

$$\rho : \{\text{Μεταβλητές Δείκτη}\} \rightarrow \{0, 1\} \cup \{\text{Μεταβλητές Δείκτη}\}.$$

Επεκτείνουμε απλά την $\rho(\ell)$ αντικαθιστώντας όλες τις μεταβλητές δείκτη b που εμφανίζονται σε ένα δείκτη τοπικότητας εισόδου ℓ με $\rho(b)$. Αντίστοιχα, *αποτίμηση* (*evaluation*) ρ' είναι μία ειδική περίπτωση αντικατάστασης τέτοια ώστε

$$\rho' : \{\text{Μεταβλητές Δείκτη}\} \rightarrow \{0, 1\}.$$

Για κάθε τύπο $\tilde{\sigma}$, υπάρχει ένας δείκτης τοπικότητας με μεταβλητές δείκτη τέτοιος ώστε κάθε δείκτης τοπικότητας αυτού του τύπου μπορεί να παραχθεί από μία αντικατάσταση των μεταβλητών δείκτη που εμφανίζονται σε αυτόν.

Λήμμα 2.3.6. (Παραμετρικός Δείκτης Τοπικότητας) Για κάθε τύπο $\tilde{\sigma}$, υπάρχει ένας δείκτης τοπικότητας (εισόδου), ο οποίος ονομάζεται παραμετρικός (generic), τέτοιος ώστε όλα τα σύμβολα δείκτη που εμφανίζονται σε αυτόν είναι μεταβλητές και καμία μεταβλητή δεν εμφανίζεται περισσότερα από μία φορά. Επιπλέον:

- (i) Κάθε δείκτης τοπικότητας (εισόδου) του τύπου $\tilde{\sigma}$ μπορεί να παραχθεί από τον παραμετρικό δείκτη από μία κατάλληλη αντικατάσταση των μεταβλητών του.
- (ii) Είναι μοναδικός μέχρι αλφαριθμητικής παραλλαγής των μεταβλητών δείκτη που εμφανίζονται σε αυτόν.
- (iii) Κάθε άλλος δείκτης τοπικότητας (εισόδου) του τύπου $\tilde{\sigma}$ που έχει την ιδιότητα (i) είναι μία αλφαριθμητική παραλλαγή του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη είναι με επαγωγή στο $\text{level}(\tilde{\sigma})$.

Αν $\tilde{\sigma} \equiv \tilde{\sigma}_0$, τότε ο παραμετρικός δείκτης τοπικότητας είναι ο $\ell \mapsto b$ όπου b είναι μεταβλητή δείκτη.

Αν $\tilde{\sigma} \equiv \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0$, έστω ότι ℓ_1, \dots, ℓ_n είναι παραμετρικοί δείκτες τοπικότητας εισόδου των τύπων $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_n$ αντίστοιχα με ξένες μεταξύ τους μεταβλητές δείκτη. Ο παραμετρικός δείκτης τοπικότητας του τύπου $\tilde{\sigma}$ είναι

$$\ell \equiv \langle \ell_1 \mapsto b_1, \dots, \ell_n \mapsto b_n \rangle \mapsto b$$

όπου οι b_1, \dots, b_n, b είναι διαφορετικές μεταξύ τους καινούργιες μεταβλητές δείκτη.

Για να δείξουμε την ιδιότητα (i), αρκεί να θεωρήσουμε για κάθε δείκτη τοπικότητας $\langle \ell'_1 \mapsto t_1, \dots, \ell'_n \mapsto t_n \rangle \mapsto t$ του τύπου $\tilde{\sigma}$ μία αντικατάσταση ρ τέτοια ώστε $\rho(\ell_i) = \ell'_i$, $\rho(b_i) = t_i$ και $\rho(b) = t$ ($i = 1, \dots, n$). Η ρ είναι καλά ορισμένη διότι κάθε μεταβλητή δείκτη εμφανίζεται μόνο μία φορά.

Για να δείξουμε την ιδιότητα (ii), έστω ότι ο $\ell' \equiv \langle \ell'_1 \mapsto b'_1, \dots, \ell'_n \mapsto b'_n \rangle \mapsto b'$ είναι ένας άλλος παραμετρικός δείκτης τοπικότητας του τύπου $\tilde{\sigma}$. Είναι προφανές ότι η αντικατάσταση ρ τέτοια ώστε $\rho(\ell') = \ell$ είναι μία αλφαριθμητική μετονομασία των μεταβλητών δείκτη του ℓ .

Για να δείξουμε την ιδιότητα (iii), έστω ότι ο $\ell' \equiv \langle \ell'_1 \mapsto t'_1, \dots, \ell'_n \mapsto t'_n \rangle \mapsto t'$ είναι ένας δείκτης τοπικότητας του τύπου $\tilde{\sigma}$ για τον οποίο ισχύει η ιδιότητα (i). Τότε, υπάρχει μία αντικατάσταση ρ τέτοια ώστε $\rho(\ell') = \ell$. Τώρα, αφού ισχύει η ιδιότητα (i) για το δείκτη ℓ , υπάρχει μία αντικατάσταση ρ' τέτοια ώστε $\rho'(\ell) = \ell'$. Επομένως, ισχύει ότι $\rho(\rho'(\ell)) = \ell$. Δηλαδή, η ρ είναι η αντίστροφη της ρ' κι επομένως, ο δείκτης ℓ' είναι αλφαριθμητική παραλλαγή του ℓ . \dashv

2.4 Συναφής Συνάρτηση ενός Αντικειμένου ως προς ένα Κλειστό Δείκτη Τοπικότητας Εισόδου του Τύπου του

Έστω ότι $\langle l \vdash b_1, l \vdash b_2 \rangle$ είναι ο παραμετρικός δείκτης τοπικότητας εισόδου ενός αντικειμένου $f : \tilde{e} \times \tilde{e} \rightarrow \tilde{t}$. Στον Πίνακα 2.1, φαίνεται ότι υπάρχουν τέσσερις πιθανοί κλειστοί δείκτες τοπικότητας εισόδου για αυτό το αντικείμενο. Όπως έχουμε αναφέρει, οι δύο διαφορετικές σταθερές δείκτη, 0 και 1, συμβολίζουν την τοπική και μη τοπική χρήση, αντίστοιχα, του ορίσματος το οποίο συνοδεύουν.

Για παράδειγμα, το αντικείμενο f , αν το θεωρήσουμε ως προς τον κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου $\langle l \vdash 0, l \vdash 1 \rangle$, χρησιμοποιεί το πρώτο του όρισμα με δείκτη τοπικότητας εισόδου l (μία και έχει τύπο επιπέδου ένα) τοπικά και το δεύτερο μη τοπικά. Καθένας από τους τρεις άλλους πιθανούς κλειστούς δείκτες τοπικότητας εισόδου του f εκφράζει μία διαφορετική συμπεριφορά του f ως προς τον τρόπο που ο υπολογισμός του σε μία συγκεκριμένη κατάσταση a χρησιμοποιεί τις τιμές των ορισμάτων σε διαφορετικές καταστάσεις από την a . Αν $f = \text{love}$, τότε ο δείκτης τοπικότητας εισόδου που θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε για να εκφράσουμε τη συμπεριφορά τοπικότητάς του όπως την περιγράψαμε στο Παράδειγμα 2.2.1, είναι φυσικά ο $\langle l \vdash 0, l \vdash 0 \rangle$.

Οι δείκτες τοπικότητας εισόδου είναι πιο περίπλοκοι αν εξετάσουμε αντικείμενα με τύπο επίπεδου μεγαλύτερο από δύο. Ο παραμετρικός δείκτης τοπικότητας εισόδου του τύπου $(\tilde{e} \rightarrow \tilde{t}) \rightarrow \tilde{t}$ είναι $\langle \langle l \vdash b_2 \rangle \vdash b_1 \rangle$ και ένα από τα κλειστά στιγμιότυπά του είναι ο $\langle \langle l \vdash 0 \rangle \vdash 1 \rangle$. Ο δείκτης αυτός υποδεικνύει ότι ένα αντικείμενο αυτού του τύπου χρησιμοποιεί το πρώτο (και μοναδικό) όρισμά του μη τοπικά αλλά μόνο όταν το ίδιο το όρισμα χρησιμοποιεί το δικό του όρισμα τοπικά. Ένα άλλο κλειστό στιγμιότυπο του παραμετρικού του δείκτη τοπικότητας εισόδου είναι το $\langle \langle l \vdash 1 \rangle \vdash 1 \rangle$ το οποίο εκφράζει τη μη τοπική χρήση του πρώτου ορίσματος του αντικειμένου όταν, αντίθετα, το ίδιο το όρισμα χρησιμοποιεί το δικό του όρισμα μη τοπικά.

Οι δείκτες τοπικότητας εισόδου περιγράφουν τη συμπεριφορά τοπικότητας των αντικειμένων και των ορισμάτων τους χωρίς να προϋποθέτουν καμία δεδομένη μεταχείριση οποιαδήποτε είδους. Όλοι οι διαφορετικοί συνδυασμοί επιτρέπονται σε μια προσπάθεια να κατανοήσουμε την τοπικότητα όσο καλύτερα γίνεται. Στην Ενότητα 2.2, ορίσαμε τα τοπικά αντικείμενα με τη χρήση των τοπικά συναφών συναρτήσεων και τώρα, θα ορίσουμε μία γενικευμένη έννοια *συναφούς συνάρτησης* ενός αντικειμένου ως προς ένα κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου του τύπου του. Πρώτα, θα χρειαστούμε ένα απλό μετασχηματισμό με τον οποίο αντιστοιχούμε σε κάθε εξαρτώμενο από την κα-

\tilde{e}	l	$s \rightarrow e$
$\tilde{e} \times \tilde{e} \rightarrow \tilde{t}$	$\langle l \vdash 0, l \vdash 0 \rangle$	$s \rightarrow (e \times e \rightarrow t)$
	$\langle l \vdash 1, l \vdash 1 \rangle$	$s \rightarrow (\tilde{e} \times \tilde{e} \rightarrow t)$
	$\langle l \vdash 0, l \vdash 1 \rangle$	$s \rightarrow (e \times \tilde{e} \rightarrow t)$
$(\tilde{e} \rightarrow \tilde{t}) \times \tilde{e} \rightarrow \tilde{t}$	$\langle \langle l \vdash 0 \rangle \vdash 0, l \vdash 0 \rangle$	$s \rightarrow ((e \rightarrow t) \times e \rightarrow t)$
	$\langle \langle l \vdash 1 \rangle \vdash 1, l \vdash 1 \rangle$	$s \rightarrow ((s \rightarrow (\tilde{e} \rightarrow t)) \times \tilde{e} \rightarrow t)$
	$\langle \langle l \vdash 0 \rangle \vdash 1, l \vdash 0 \rangle$	$s \rightarrow ((s \rightarrow (e \rightarrow t)) \times e \rightarrow t)$

Πίνακας 2.2: Παραδείγματα συναφών τύπων.

τάσταση τύπο $\tilde{\sigma}$ και κάθε κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου ℓ τον *συναφή* τύπο $(\tilde{\sigma})_*^\ell$ ο οποίος θα είναι ο τύπος της τιμής της αντίστοιχης συναφούς συνάρτησης σε μία κατάσταση.

Ορισμός 2.4.1. Για κάθε τύπο $\tilde{\sigma}$ και κάθε κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου ℓ του τύπου $\tilde{\sigma}$, ορίζουμε αναδρομικά στο επίπεδο $\text{level}(\tilde{\sigma})$ τον *συναφή* τύπο (*associate type*) $(\tilde{\sigma})_*^\ell$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\sigma}_0)_*^l &::= \sigma_0 \\
 (\tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0)_*^{\langle \ell_1 \vdash t_1, \dots, \ell_n \vdash t_n \rangle} &::= \tau_1 \times \dots \times \tau_n \rightarrow \sigma_0, \\
 \text{όπου } \tau_i &::= \begin{cases} (\tilde{\sigma}_i)_*^{\ell_i}, & \text{αν } t_i = 0 \\ s \rightarrow (\tilde{\sigma}_i)_*^{\ell_i}, & \text{αν } t_i = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Στον Πίνακα 2.2, παρουσιάζουμε μερικούς τύπους και τους αντίστοιχους τύπους της μορφής $(s \rightarrow \text{συναφής τύπος})$ ως προς συγκεκριμένους κλειστούς δείκτες τοπικότητας εισόδου. Παρατηρείστε ότι κάθε φορά αν ο κλειστός δείκτης τοπικότητας εισόδου ℓ είναι ο τοπικός, τότε

$$(\tilde{\sigma})_*^\ell \equiv \sigma.$$

Από την άλλη μεριά, για τον κανονικό δείκτη τοπικότητας εισόδου οποιουδήποτε τύπου, μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.4.2. Για κάθε τύπο $\tilde{\sigma}$, αν ℓ είναι ο κανονικός κλειστός δείκτης τοπικότητας εισόδου του, και

$$\text{Stand}(\tilde{\sigma}) ::= s \rightarrow (\tilde{\sigma})_*^\ell,$$

τότε

$$\text{Stand}(\tilde{\sigma}_0) := \tilde{\sigma}_0$$

$$\text{Stand}(\tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0) := s \times \text{Stand}(\tilde{\sigma}_1) \times \dots \times \text{Stand}(\tilde{\sigma}_n) \rightarrow \sigma_0.$$

Για παράδειγμα, δείτε τους συναφείς τύπους ως προς τους κανονικούς δείκτες που παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.2.

Ορισμός 2.4.3. (Συναφής Συνάρτηση ενός Αντικειμένου ως προς ένα Κλειστό Δείκτη Εισόδου του Τύπου του) Για κάθε $f : \tilde{\sigma}$ και κάθε κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου ℓ του τύπου του, ορίζουμε αναδρομικά ως προς το επίπεδο του $\tilde{\sigma}$ τι σημαίνει για την

$$f' : s \rightarrow (\tilde{\sigma})_*^\ell$$

να είναι συναφής της f ως προς τον ℓ (*associate of f with respect to ℓ*).

(i) Αν $f : \tilde{\sigma}_0$ και $\ell \equiv l$, τότε η $f' : s \rightarrow \sigma_0$ είναι συναφής συνάρτηση της f αν και μόνο αν $f' = f$.

(ii) Αν $f : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0$ και $\ell \equiv \langle \ell_1 \vdash t_1, \dots, \ell_n \vdash t_n \rangle$, τότε η $f' : s \rightarrow (\tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0)_*^\ell$ είναι συναφής συνάρτηση της f ως προς τον ℓ αν και μόνο αν για κάθε $f_i : \tilde{\sigma}_i$ και κάθε $a : s$,

$$f(f_1, \dots, f_n, a) = f'(a, F_1, \dots, F_n),$$

όπου, για $i = 1, \dots, n$,

$$F_i := \begin{cases} f'_i(a), & \text{αν } t_i = 0, \\ f'_i, & \text{αν } t_i = 1 \end{cases}$$

και $f'_i : s \rightarrow (\tilde{\sigma}_i)_*^{\ell_i}$ είναι συναφής συνάρτηση της f_i ως προς τον ℓ_i .

Ένας κλειστός δείκτης τοπικότητας εισόδου ℓ του τύπου $\tilde{\sigma}$ είναι ένας κλειστός δείκτης τοπικότητας εισόδου ενός αντικειμένου $f : \tilde{\sigma}$ αν και μόνο αν υπάρχει μία συναφής συνάρτηση της f ως προς τον ℓ .

Επομένως, με αυτόν τον ορισμό, ένα αντικείμενο $f : \tilde{\sigma}$ είναι τοπικό αν και μόνο αν έχει μία συναφή συνάρτηση ως προς τον τοπικό κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου του $\tilde{\sigma}$.

Τώρα, οι συναφείς συναρτήσεις ενός αντικειμένου ως προς τον ίδιο κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου σχετίζονται όπως και στην περίπτωση των τοπικών.

Πρόταση 2.4.4. Έστω το αντικείμενο $f : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0$ και οι συναφείς του συναρτήσεις f_1 και f_2 ως προς τον δείκτη $\ell \equiv \langle \ell_1 \vdash t_1, \dots, \ell_n \vdash t_n \rangle$. Τότε, για οποιαδήποτε αντικείμενα f_1, \dots, f_n τέτοια ώστε για $i = 1, \dots, n$, η f'_i είναι συναφής συνάρτηση της f_i ως προς τον ℓ_i και κάθε $a : s$,

$$f_1(a, F_1, \dots, F_n) = f_2(a, F_1, \dots, F_n),$$

όπου

$$F_i = \begin{cases} f'_i(a), & \text{αν } t_i \equiv 0, \\ f'_i, & \text{αν } t_i \equiv 1. \end{cases}$$

Για να εξετάσουμε αν ένα αντικείμενο έχει μία συναφή συνάρτηση ως προς ένα τυχόντα κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου του τύπου του, χρησιμοποιούμε μία πιο γενική εκδοχή του Λήμματος Συνθήκης Τοπικότητας (Λήμμα 2.2.6).

Λήμμα 2.4.5. (Γενική Συνθήκη Τοπικότητας - GLC) Ένα αντικείμενο $f : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0$ έχει μία συναφή συνάρτηση ως προς τον δείκτη $\ell \equiv \langle \ell_1 \vdash t_1, \dots, \ell_n \vdash t_n \rangle$ αν και μόνο αν ισχύει η εξής συνθήκη: Για δύο n -άδες (f_1, \dots, f_n) και (g_1, \dots, g_n) και αντίστοιχες συναφείς συναρτήσεις f'_1, \dots, f'_n και g'_1, \dots, g'_n τέτοιες ώστε για $i = 1, \dots, n$, οι f'_i και g'_i είναι συναφείς συναρτήσεις των f_i και g_i ως προς τον δείκτη ℓ_i , αντίστοιχα, και για κάθε $a : s$, αν για $i = 1, \dots, n$, είτε $f'_i(a) = g'_i(a)$ (αν $t_i \equiv 0$) είτε $f'_i = g'_i$ (αν $t_i \equiv 1$), τότε $f(f_1, \dots, f_n, a) = f(g_1, \dots, g_n, a)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη είναι με επαγωγή στο επίπεδο του τύπου του f .

(\implies) Έστω ότι το αντικείμενο $f : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0$ έχει συναφή συνάρτηση ως προς τον δείκτη $\ell \equiv \langle \ell_1 \vdash t_1, \dots, \ell_n \vdash t_n \rangle$. Έστω επίσης ότι για $i = 1, \dots, n$, το f_i είναι ένα αντικείμενο που έχει μία συναφή συνάρτηση f'_i ως προς τον ℓ_i , τότε για κάθε $a : s$

$$F_i = \begin{cases} f'_i(a), & \text{αν } t_i \equiv 0, \\ f'_i, & \text{αν } t_i \equiv 1. \end{cases}$$

Ανάλογα, ορίζουμε και τα G_i για $i = 1, \dots, n$. Αν η f' είναι μία συναφής συνάρτηση του f ως προς τον ℓ , τότε, για κάθε $a : s$ και για οποιεσδήποτε n -άδες αντικειμένων (f_1, \dots, f_n) και (g_1, \dots, g_n) κατάλληλων τύπων τέτοια ώστε για $i = 1, \dots, n$, τα f_i και g_i έχουν συναφείς συναρτήσεις ως προς τον ℓ_i ,

$$\begin{aligned} f(f_1, \dots, f_n, a) &= f'(a, F_1, \dots, F_n) \\ &= f'(a, G_1, \dots, G_n) = f(g_1, \dots, g_n, a). \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Αν $f : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0$ και $\ell \equiv \langle \ell_1 \vdash t_1, \dots, \ell_n \vdash t_n \rangle$, έστω η συνάρτηση $f' : s \rightarrow (\tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0)_{\#}^{\ell}$, που ορίζεται ως

$$f'(a, b_1, \dots, b_n) = \begin{cases} f(f_1, \dots, f_n, a), & \text{αν για } i = 1, \dots, n, \text{ υπάρχουν} \\ & f_1, \dots, f_n \text{ με αντίστοιχες συναφείς} \\ & \text{συναρτήσεις τέτοιες ώστε } b_i = F_i, \\ er_{\sigma_0}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η συνάρτηση f' είναι καλά ορισμένη, αφού, από την υπόθεση, ακόμα κι αν για κάποιο i , υπάρχουν δύο διαφορετικά αντικείμενα f_i και g_i τέτοια ώστε $b_i = F_i$ και $b_i = G_i$ για κάποιο a , τότε

$$f(f_1, \dots, f_i, \dots, f_n, a) = f(f_1, \dots, g_i, \dots, f_n, a).$$

Τετριμμένα, η f' είναι μία συναφής συνάρτηση του f ως προς τον ℓ . \dashv

Σε ό,τι αφορά στον κανονικό δείκτη τοπικότητας εισόδου ενός αντικειμένου, δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα Γενικής Συνθήκης Τοπικότητας γιατί ισχύει το ακόλουθο.

Πρόταση 2.4.6. (i) Για κάθε αντικείμενο $f : \tilde{\sigma}$, υπάρχει μία μοναδική συναφής συνάρτησή του ως προς τον κανονικό δείκτη τοπικότητας εισόδου του τύπου του.

(ii) Για κάθε $f' : s \rightarrow (\tilde{\sigma})_{\#}^{\ell}$ όπου ℓ είναι ο κανονικός δείκτης τοπικότητας εισόδου του τύπου $\tilde{\sigma}$, υπάρχει ένα μοναδικό αντικείμενο f τέτοιο ώστε η f' είναι συναφής του f ως προς τον ℓ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη είναι με επαγωγή στο $\text{level}(\tilde{\sigma})$.

Αν $\tilde{\sigma} \equiv \tilde{\sigma}_0$, η πρόταση είναι τετριμμένη.

Έστω ότι $\tilde{\sigma} \equiv \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0$ και έστω ότι ο $\ell \equiv \langle \ell_1 \vdash 1, \dots, \ell_n \vdash 1 \rangle$ είναι ο κανονικός δείκτης τοπικότητας εισόδου του. Παρατηρούμε ότι για $i = 1, \dots, n$, ο δείκτης ℓ_i είναι ο κανονικός δείκτης τοπικότητας εισόδου του τύπου $\tilde{\sigma}_i$ αντίστοιχα.

Υποθέτουμε ότι για $i = 1, \dots, n$, ισχύει η πρόταση. Δηλαδή, για κάθε $f_i : \tilde{\sigma}_i$, υπάρχει μία μοναδική συναφής συνάρτηση f'_i ως προς τον ℓ_i και για κάθε $f'_i : \text{Stand}(\tilde{\sigma}_i)$ υπάρχει ένα μοναδικό αντικείμενο f_i τέτοιο ώστε η f'_i είναι συναφής συνάρτηση του f_i ως προς τον ℓ_i .

(i) Ορίζουμε την $f' : s \times \text{Stand}(\tilde{\sigma}_1) \times \dots \times \text{Stand}(\tilde{\sigma}_n) \rightarrow \sigma_0$ για f'_1, \dots, f'_n κατάλληλων τύπων ως εξής

$$f'(a, f'_1, \dots, f'_n) = f(f_1, \dots, f_n, a)$$

όπου για $i = 1, \dots, n$, το f_i είναι το μοναδικό αντικείμενο τέτοιο ώστε η f'_i είναι η συναφής συνάρτηση του f_i ως προς τον ℓ_i .

Προφανώς, η συνάρτηση f' είναι συναφής του f ως προς τον ℓ .

Έστω τώρα ότι υπάρχει μία άλλη συναφής συνάρτηση g του f ως προς τον ℓ και ότι υπάρχει μία n -άδα (f'_1, \dots, f'_n) τέτοια ώστε

$$f'(a, f'_1, \dots, f'_n) \neq g(a, f'_1, \dots, f'_n).$$

Επομένως, θα πρέπει να ισχύει

$$g(a, f'_1, \dots, f'_n) \neq f(f_1, \dots, f_n, a)$$

όπου για $i = 1, \dots, n$, το f_i είναι το μοναδικό αντικείμενο τέτοιο ώστε η f'_i είναι η συναφής συνάρτησή του ως προς τον ℓ_i . Δεδομένου ότι για κάθε f_i υπάρχει μία μοναδική συναφής συνάρτηση ως προς τον ℓ_i και η g είναι συναφής συνάρτηση του f ως προς τον ℓ , έχουμε αντίφαση.

(ii) Ορίζουμε το αντικείμενο $f : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0$ για f_1, \dots, f_n κατάλληλων τύπων και τις μοναδικές συναφείς τους συναρτήσεις f'_1, \dots, f'_n ως προς τους ℓ_1, \dots, ℓ_n αντίστοιχα, ως

$$f(f_1, \dots, f_n, a) = f'(a, f'_1, \dots, f'_n).$$

Το αντικείμενο f είναι καλά ορισμένο και η f' είναι συναφής συνάρτηση του f ως προς τον ℓ .

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα άλλο αντικείμενο g τέτοιο ώστε η f' είναι συναφής συνάρτησή του ως προς τον ℓ . Τότε, για κάθε f_1, \dots, f_n και τις συναφείς τους συναρτήσεις f'_1, \dots, f'_n ως προς τα ℓ_1, \dots, ℓ_n αντίστοιχα,

$$g(f_1, \dots, f_n, a) = f'(a, f'_1, \dots, f'_n) = f(f_1, \dots, f_n, a). \quad \dashv$$

Στη συνέχεια, γενικεύουμε την έννοια της προτιμητέας συναφούς συνάρτησης ενός αντικειμένου ως προς ένα κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου και αποδεικνύουμε ότι είναι μοναδική.

Πρόταση 2.4.7. *Αν το αντικείμενο $f : \tilde{\sigma}$ έχει συναφή συνάρτηση ως προς ένα κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου ℓ του τύπου του, τότε έχει μία μοναδική συναφή συνάρτηση f_*^ℓ (που ονομάζεται προτιμητέα συναφής συνάρτηση ως προς τον ℓ (preferred associate with respect to ℓ)) τέτοια ώστε:*

(i) Αν $f : \tilde{\sigma}_0$, τότε $f_*^\ell = f$.

(ii) Αν $f : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0$ και $\ell \equiv \langle \ell_1 \vdash t_1, \dots, \ell_n \vdash t_n \rangle$, τότε η $f_*^\ell : s \rightarrow (\tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0)_*^\ell$ είναι μία συναφής συνάρτηση του f ως προς τον ℓ τέτοια ώστε για κάθε $a : s$ και κάθε b_1, \dots, b_n κατάλληλων τύπων, αν

αυτά είναι τέτοια ώστε για $i = 1, \dots, n$, δεν υπάρχουν $f_i : \tilde{\sigma}_i$ με συναφείς συναρτήσεις f'_i ως προς τους ℓ_i τέτοιες ώστε

$$b_i = \begin{cases} f'_i(a), & \text{αν } t_i = 0, \\ f_i, & \text{αν } t_i = 1, \end{cases}$$

τότε

$$f_*^\ell(a, b_1, \dots, b_n) = er_{\sigma_0}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν $f : \tilde{\sigma}_0$, τότε η πρόταση ισχύει τετριμμένα.

Έστω ότι η f' είναι συναφής συνάρτηση του $f : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0$ ως προς ένα κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου $\ell \equiv \langle \ell_1 \vdash t_1, \dots, \ell_n \vdash t_n \rangle$. Έστω ότι για $i = 1, \dots, n$, η f'_i είναι μία συναφής συνάρτηση ενός αντικειμένου $f_i : \tilde{\sigma}$ ως προς τον κλειστό δείκτη εισόδου τοπικότητας ℓ_i και η F_i είναι, για κάθε $a : s$

$$F_i = \begin{cases} f'_i(a), & \text{αν } t_i \equiv 0, \\ f_i, & \text{αν } t_i \equiv 1. \end{cases}$$

Ορίζουμε την f_*^ℓ ως

$$f_*^\ell(a, b_1, \dots, b_n) = \begin{cases} f'(a, b_1, \dots, b_n), & \text{αν, για } i = 1, \dots, n, \text{ υπάρχουν } f_i \text{ τέτοια} \\ & \text{ώστε } b_i = F_i, \\ er_{\sigma_0}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η συνάρτηση f_*^ℓ είναι τετριμμένα μία συναφής συνάρτηση του f ως προς τον ℓ αφού για f_1, \dots, f_n κατάλληλων τύπων με αντίστοιχες συναφείς συναρτήσεις και κάθε $a : s$,

$$f(f_1, \dots, f_n, a) = f'(a, F_1, \dots, F_n) = f_*^\ell(a, F_1, \dots, F_n).$$

Από τον ορισμό της, η f_*^ℓ είναι επίσης μία προτιμητέα συναφής συνάρτηση του f .

Τώρα, έστω ότι η g_*^ℓ είναι μία άλλη προτιμητέα συναφής συνάρτηση του f ως προς τον δείκτη ℓ . Τότε, ισχύει είτε ότι

$$f_*^\ell(a, b_1, \dots, b_n) = er_{\sigma_0} = g_*^\ell(a, b_1, \dots, b_n),$$

είτε ότι

$$\begin{aligned} f_*^\ell(a, b_1, \dots, b_n) &= f'(a, b_1, \dots, b_n) \\ &= f(f_1, \dots, f_n, a) = g_*^\ell(a, b_1, \dots, b_n). \end{aligned} \quad \dashv$$

Τέλος, οι ιδιότητες των συναφών συναρτήσεων περιγράφονται στο επόμενο θεώρημα το οποίο αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος 2.2.9.

Θεώρημα 2.4.8. (i) (Προβολή) Αν το $f : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_i$ είναι τέτοιο ώστε

$$f(f_1, \dots, f_n) = f_i,$$

και ο δείκτης $\ell \equiv \langle \ell_1 \vdash t_1, \dots, \ell_i \vdash t_i, \dots, \ell_n \vdash t_n, \ell_i \rangle$ είναι ένας κλειστός δείκτης τοπικότητας εισόδου του τύπου του, τότε η f' η οποία ορίζεται για κάθε $a : s$ ως

$$f'(a, z_1, \dots, z_n) = \begin{cases} z_i, & \text{αν } t_i \equiv 0 \\ z_i(a), & \text{αν } t_i \equiv 1 \end{cases}$$

είναι συναφής συνάρτηση του f ως προς τον ℓ .

(ii) (Εφαρμογή) Αν η f' είναι συναφής συνάρτηση του $f : \tilde{\tau}_1 \times \dots \times \tilde{\tau}_k \rightarrow \tilde{\sigma}$ ως προς τον $\langle m_1 \vdash s_1, \dots, m_k \vdash s_k, \ell \rangle$ και για $i = 1, \dots, k$, y'_i είναι συναφής συνάρτηση του $y_i : \tilde{\tau}_i$ ως προς τον m_i , τότε η συνάρτηση $(f(y_1, \dots, y_k))'$ που ορίζεται για κάθε $a : s$ ως

$$(f(y_1, \dots, y_k))'(a) = f'(a, Y_1, \dots, Y_k)$$

όπου

$$Y_i = \begin{cases} y'_i(a), & \text{αν } s_i \equiv 0, \\ y'_i, & \text{αν } s_i \equiv 1, \end{cases}$$

είναι συναφής συνάρτηση της $f(y_1, \dots, y_k)$ ως προς τον ℓ .

(iii) (Σύνθεση) Έστω ότι

$$f(x_1, \dots, x_k) = g(x_1, \dots, x_k, h(x_1, \dots, x_k)),$$

όπου $g : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_k \times \tilde{\sigma} \rightarrow \tilde{\rho}$ και $h : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_k \rightarrow \tilde{\sigma}$ και έστω ότι η g' είναι συναφής συνάρτηση της g ως προς τον $\langle m_1 \vdash s_1, \dots, m_k \vdash s_k, \ell_0 \vdash t_0, \ell \rangle$ και η h' είναι συναφής συνάρτηση της h ως προς τον $\langle m_1 \vdash s_1, \dots, m_k \vdash s_k, \ell_0 \rangle$. έστω επίσης ότι για $j = 1, \dots, k$, $t_0 \leq s_j$, και έστω η συνάρτηση f' η οποία ορίζεται για κάθε $a : s$ ως

$$f'(a, z_1, \dots, z_k) = g'(a, z_1, \dots, z_k, H(z_1, \dots, z_k)),$$

όπου

$$H(z_1, \dots, z_k) = \begin{cases} h'(a, z_1, \dots, z_k), & \text{αν } t_0 \equiv 0 \\ (b \mapsto h'(b, z_1, \dots, z_k)), & \text{αν } t_0 \equiv 1. \end{cases}$$

Τότε, η f' είναι συναφής συνάρτηση της f ως προς τον δείκτη

$$\langle m_1 \vdash s_1, \dots, m_k \vdash s_k, \ell \rangle.$$

(iv) (**λ-αφαίρεση**) Αν η f' είναι συναφής συνάρτηση του αντικειμένου $f : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \times \tilde{\sigma} \rightarrow \tilde{\rho}$ ως προς τον $\langle m_1 \mapsto s_1, \dots, m_n \mapsto s_n, m \mapsto s, \ell \rangle$ και

$$g(x_1, \dots, x_n) = \lambda(x)f(x_1, \dots, x_n, x),$$

τότε η συνάρτηση g' που ορίζεται ως

$$g'(a, z_1, \dots, z_n) = \lambda(z)f'(a, z_1, \dots, z_n, z)$$

είναι συναφής συνάρτηση της g ως προς τον δείκτη

$$\langle m_1 \mapsto s_1, \dots, m_n \mapsto s_n, m \mapsto s, \ell \rangle.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Παρατηρούμε ότι για $j = 1, \dots, n$, αν $t_j \equiv 0$, τότε $z_j : (\tilde{\sigma}_j)_*^{\ell_j}$ ενώ αν $t_j \equiv 1$, $z_j : s \rightarrow (\tilde{\sigma}_j)_*^{\ell_j}$. Έστω ότι $\ell_i \equiv \langle \ell_{n+1} \mapsto t_{n+1}, \dots, \ell_{n+k} \mapsto t_{n+k} \rangle$.

Υποθέτουμε ότι τα $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}$ είναι αντικείμενα κατάλληλων τύπων και οι x'_1, \dots, x'_{n+k} είναι συναφείς συναρτήσεις τους ως προς τους δείκτες $\ell_1, \dots, \ell_{n+k}$, αντίστοιχα. Έστω ότι για $j = 1, \dots, n+k$,

$$X_j = \begin{cases} x'_j(a), & \text{αν } t_j \equiv 0 \\ x'_j, & \text{αν } t_j \equiv 1 \end{cases}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$f(x_1, \dots, x_{n+k}, a) = f'(a, X_1, \dots, X_{n+k}).$$

Αν $t_i \equiv 0$, τότε το ζητούμενο ισχύει αφού

$$\begin{aligned} f'(a, X_1, \dots, x'_i(a), \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+k}) &= x'_i(a)(X_{n+1}, \dots, X_{n+k}) \\ &= x_i(x_{n+1}, \dots, x_{n+k}, a) \\ &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+k}). \end{aligned}$$

Αν $t_i \equiv 1$, ομοίως,

$$\begin{aligned} f'(a, X_1, \dots, x'_i, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+k}) &= x'_i(a)(X_{n+1}, \dots, X_{n+k}) \\ &= x_i(x_{n+1}, \dots, x_{n+k}, a) \\ &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+k}). \end{aligned}$$

(ii) Έστω $\tilde{\sigma} \equiv \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0$ και $\ell \equiv \langle \ell_1 \mapsto t_1, \dots, \ell_n \mapsto t_n \rangle$.

Για οποιαδήποτε αντικείμενα x_1, \dots, x_n κατάλληλων τύπων με συναφείς συναρτήσεις x'_1, \dots, x'_n ως προς τους δείκτες ℓ_1, \dots, ℓ_n αντίστοιχα, και για κάθε $a : s$, αν, για κάθε $i = 1, \dots, n$,

$$X_i = \begin{cases} x'_i(a), & \text{αν } t_i \equiv 0, \\ x'_i, & \text{αν } t_i \equiv 1, \end{cases}$$

τότε

$$\begin{aligned} (f(y_1, \dots, y_k))(x_1, \dots, x_n, a) &= f(y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_n, a) \\ &= f'(a, Y_1, \dots, Y_k, X_1, \dots, X_n) \\ &= (f(y_1, \dots, y_k))'(a, X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.4.3, η $(f(y_1, \dots, y_k))'$ είναι συναφής συνάρτηση της $f(y_1, \dots, y_k)$ ως προς τον ℓ .

(iii) Παρατηρούμε ότι για $j = 1, \dots, k$, αν $s_j \equiv 0$, τότε $z_j : (\tilde{\sigma}_j)_*^{m_j}$ ενώ αν $s_j \equiv 1$, $z_j : s \rightarrow (\tilde{\sigma}_j)_*^{m_j}$.

Τώρα, έστω ότι $\tilde{\rho} \equiv \tilde{\rho}_1 \times \dots \times \tilde{\rho}_n \rightarrow \tilde{\rho}_0$ και $\ell \equiv \langle \ell_1 \mapsto t_1, \dots, \ell_n \mapsto t_n \rangle$.

Έστω επίσης ότι τα $h_1, \dots, h_k, x_1, \dots, x_n$ είναι αντικείμενα κατάλληλων τύπων με συναφείς συναρτήσεις $h'_1, \dots, h'_k, x'_1, \dots, x'_n$ ως προς τους δείκτες $m_1, \dots, m_k, \ell_1, \dots, \ell_n$ αντίστοιχα και έστω ότι για $i = 1, \dots, n$ και $j = 1, \dots, k$,

$$X_i = \begin{cases} x'_i(a), & \text{αν } t_i \equiv 0, \\ x'_i, & \text{αν } t_i \equiv 1 \end{cases} \text{ και } H_j = \begin{cases} h'_j(a), & \text{αν } s_j \equiv 0, \\ h'_j, & \text{αν } s_j \equiv 1. \end{cases}$$

Αν $t_0 \equiv 0$, τότε, για κάθε $a : s$, χρησιμοποιώντας την περίπτωση (ii),

$$\begin{aligned} f'(a, H_1, \dots, H_k, X_1, \dots, X_n) &= g'(a, H(H_1, \dots, H_k), X_1, \dots, X_n) \\ &= g'(a, h'(a, H_1, \dots, H_k), X_1, \dots, X_n) \\ &= g'(a, (h(h_1, \dots, h_k))'(a), X_1, \dots, X_n) \\ &= g(hz_1, \dots, h_k, (h(h_1, \dots, h_k)), x_1, \dots, x_n, a) \\ &= f(h_1, \dots, h_k, x_1, \dots, x_n, a). \end{aligned}$$

Αν $t_0 \equiv 1$, τότε για $j = 1, \dots, k$, $s_j \equiv 1$, και χρησιμοποιώντας ξανά την περίπτωση (ii),

$$\begin{aligned} f'(a, h'_1, \dots, h'_k, X_1, \dots, X_n) &= g'(a, h'_1, \dots, h'_k, b \mapsto h'(b, h'_1, \dots, h'_k), X_1, \dots, X_n) \\ &= g'(a, h'_1, \dots, h'_k, b \mapsto (h(h_1, \dots, h_k))'(b), X_1, \dots, X_n) \\ &= g'(a, h'_1, \dots, h'_k, (h(h_1, \dots, h_k))', X_1, \dots, X_n) \\ &= g(h_1, \dots, h_k, h(h_1, \dots, h_k), x_1, \dots, x_n, a) \\ &= f(h_1, \dots, h_k, x_1, \dots, x_n, a). \end{aligned}$$

Και στις δυο περιπτώσεις, από τον Ορισμό 2.4.3, η f' είναι συναφής συνάρτηση της f ως προς τον δείκτη $\langle m_1 \mapsto s_1, \dots, m_k \mapsto s_k, \ell \rangle$.

Παρατηρούμε ότι ο περιορισμός $t_0 \leq s_j$ είναι απαραίτητος για να ορίσουμε την f' στην περίπτωση που $t_0 \equiv 1$. Διαισθητικά, η f' ορίζεται στην a από τη σύνθεση των g' και h' και αν $t_0 \equiv 1$, χρειάζεται να υπολογίσει τη συναφή συνάρτηση $(h(z_1, \dots, z_k))'$ και δεν αρκεί η τιμή της στο a . Επομένως, για κάθε z_j , χρειάζεται την συναφή του συνάρτησης και όχι μόνο την τιμή της συναφούς στην κατάσταση a .

(iv) Παρατηρούμε ότι για $j = 1, \dots, n$, αν $s_j \equiv 0$, τότε $z_j : (\tilde{\sigma}_j)_*^{m_j}$ ενώ για $s_j \equiv 1$, $z_j : s \rightarrow (\tilde{\sigma}_j)_*^{m_j}$, και αν $s \equiv 0$, τότε $z : (\tilde{\sigma})_*^m$ ενώ αν $s \equiv 1$, τότε $z : s \rightarrow (\tilde{\sigma})_*^m$.

Έστω ότι $\tilde{\rho} \equiv \tilde{\rho}_1 \times \dots \times \tilde{\rho}_k \rightarrow \tilde{\rho}_0$ και $\ell \equiv \langle \ell_1 \mapsto t_1, \dots, \ell_k \mapsto t_k \rangle$.

Τώρα για κάθε $y_1, \dots, y_n, h_0, h_1, \dots, h_k$ κατάλληλων τύπων με συναφείς συναρτήσεις $y'_1, \dots, y'_n, h'_0, h'_1, \dots, h'_k$ ως προς τους $m_1, \dots, m_n, \ell_1, \dots, \ell_k$ αντίστοιχα, αν $j = 1, \dots, n$ και $i = 0, \dots, k$,

$$Y_j = \begin{cases} y'_j(a), & \text{αν } s_j \equiv 0, \\ y'_j, & \text{αν } s_j \equiv 1, \end{cases} \quad H_i = \begin{cases} h'_i(a), & \text{αν } t_i \equiv 0, \\ h'_i, & \text{αν } t_i \equiv 1, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g(a, Y_1, \dots, Y_n, H_0, H_1, \dots, H_k) &= (\lambda(z)f'(a, Y_1, \dots, Y_n, z))(H_0, H_1, \dots, H_k) \\ &= f'(a, Y_1, \dots, Y_n, H_0, H_1, \dots, H_k) \\ &= f(y_1, \dots, y_n, h_0, h_1, \dots, h_k, a) \\ &= g(y_1, \dots, y_n, h_0, h_1, \dots, h_k, a). \end{aligned}$$

Επομένως, η g' είναι συναφής συνάρτηση της g ως προς τον δείκτη εισόδου $\langle m_1 \mapsto s_1, \dots, m_n \mapsto s_n, m \mapsto s, \ell \rangle$. \dashv

Το παρακάτω πόρισμα αποτελεί γενίκευση του Πορίσματος 2.2.10.

Πόρισμα 2.4.9. Αν η f' είναι συναφής συνάρτηση της $f : \tilde{\tau}$ ως προς τον m και για $x_i : \tilde{\sigma}_i$,

$$g = \lambda(x_1) \dots \lambda(x_n)f,$$

και ο $\ell \equiv \langle \ell_1 \mapsto t_1, \dots, \ell_n \mapsto t_n, m \rangle$ είναι ένας κλειστός δείκτης τοπικότητας εισόδου του τύπου της, τότε η συνάρτηση g' που ορίζεται για κάθε $a : s$ ως

$$g'(a) = \lambda(z_1) \dots \lambda(z_n)(f'(a))$$

είναι μία συναφής συνάρτηση της g ως προς τον ℓ .

Κεφάλαιο 3

Τοπικότητα Όρων

Στο Κεφάλαιο 2, περιγράψαμε με αυστηρό τρόπο τη συμπεριφορά τοπικότητας των αντικειμένων με τύπους. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα χρησιμοποιήσουμε αυτές τις έννοιες για να μελετήσουμε τον χαρακτήρα τοπικότητας των όρων της γλώσσας L_{ar}^λ .

Στην Ενότητα 3.1, ορίζουμε τους τοπικούς όρους και τη σχέση τους με τα τοπικά αντικείμενα. Για τους γενικούς όρους, ο ορισμός της συναφούς συνάρτησης της υποδήλωσης ενός όρου $A : \tilde{\sigma}$ ως προς ένα κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου δεν είναι προφανής μια και θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν μας τις αλληλεξαρτήσεις τοπικότητας μεταξύ των υποόρων του A . Στην Ενότητα 3.2, αυτό γίνεται συγκεκριμένο με τη χρήση των κλειστών αποδείξεων τοπικότητας που είναι δέντρα σχηματισμού όρων με κατάλληλη σήμανση.

Στην Ενότητα 3.3, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το βασικό τεχνικό αποτέλεσμα της διατριβής, την ύπαρξη μίας μέγιστα τοπικής κλειστής απόδειξης τοπικότητας ενός όρου A η οποία αντιπροσωπεύει την «πιο τοπική» δυνατή συμπεριφορά τοπικότητας του A . Θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το αποτέλεσμα στο Κεφάλαιο 5 για να ορίσουμε το αντικειμενικό περιεχόμενο σε κάθε κατάσταση του όρου A .

3.1 Τοπικοί Όροι

Η δηλωτική σημασιολογία της L_{ar}^λ αντιστοιχεί ένα αντικείμενο $\text{den}(A) \in T_{\tilde{\sigma}}$ σε κάθε κλειστό όρο $A : \tilde{\sigma}$. Θα ήταν αρκετό να χαρακτηρίσουμε ως τοπικούς τους όρους των οποίων η υποδήλωση είναι ένα τοπικό αντικείμενο; Αν και δελεαστική, η ιδέα αυτή δεν είναι σωστή — όλοι οι όροι τύπου $\tilde{\tau}$ οι οποίοι αποδίδουν προτάσεις της φυσικής γλώσσας θα ήταν τοπικοί σύμφωνα με αυτόν τον «ορισμό». Οποιαδήποτε μελέτη της τοπικότητας των όρων που δεν

μπορεί να κάνει διάκριση μεταξύ των όρων $\text{run}(\text{John}) : \tilde{t}$ και $\Box(\text{run}(\text{John})) : \tilde{t}$ είναι, κατά ένα ουσιαστικό τρόπο, ελλιπής και δεν μπορεί να έχει οποιαδήποτε χρησιμότητα.

Οι σταθερές του συνόλου K αποτελούν τον πυρήνα των όρων της γλώσσας $L_{\text{ar}}^\lambda(K)$ που αποδίδουν εκφράσεις της φυσικής γλώσσας. Οι συμπεριφορές τοπικότητας των σταθερών δίνονται από την ερμηνεία τους και αυτές, με τη σειρά τους, χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά των όρων στους οποίους εμφανίζονται. Αυτό εκφράζεται στον παρακάτω ορισμό και δικαιολογείται από το λήμμα που τον ακολουθεί.

Ορισμός 3.1.1. (Τοπικός Όρος) Ένας όρος A είναι τοπικός (*local*) αν η υποδήλωση οποιασδήποτε σταθεράς που εμφανίζεται σε αυτόν είναι τοπικό αντικείμενο.

Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, ο όρος $\text{run}(\text{John})$ είναι τοπικός ενώ οι όροι $\Box(\text{run}(\text{John}))$ και $\text{former}(\text{minister}, \text{John})$ δεν είναι. Από την άλλη μεριά, ένας όρος χωρίς σταθερές είναι πάντα τοπικός — μία περίπτωση που έχει λίγο ενδιαφέρον για τη δουλειά μας εδώ.

Πρόταση 3.1.2. Αν ένας όρος $A : \tilde{\sigma}$ είναι τοπικός και οι ελεύθερες μεταβλητές του είναι στη λίστα $x_1 : \tilde{\sigma}_1, \dots, x_n : \tilde{\sigma}_n$, τότε η συνάρτηση

$$f_A(h_1, \dots, h_n) = \text{den}(A)(g\{x_1 := h_1, \dots, x_n := h_n\})$$

είναι τοπικό αντικείμενο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη είναι με επαγωγή στους κανόνες σχηματισμού των όρων της L_{ar}^λ και χρησιμοποιεί τις ιδιότητες των τοπικών αντικειμένων στο Θεώρημα 2.2.9.

(1) $A \equiv c$. Τότε,

$$f_c(h_1, \dots, h_n) = \text{den}(c)(g\{x_1 := h_1, \dots, x_n := h_n\}) = c.$$

Αφού το c είναι τοπικό, από το Πρόσχημα 2.2.10, το αντικείμενο f_c είναι επίσης τοπικό.

(2) $A \equiv x : \tilde{\sigma}$, όπου η x είναι μεταβλητή απλή ή αναδρομής. Αν $x \equiv x_i$, τότε

$$f_x(h_1, \dots, h_n) = \text{den}(x)(g\{x_1 := h_1, \dots, x_i := h_i, \dots, x_n := h_n\}) = h_i.$$

Από το Θεώρημα 2.2.9, οι συναρτήσεις προβολής είναι τοπικές, και επομένως η f_x είναι τοπική.

(3) $A \equiv B(C)$. Έστω ότι οι ελεύθερες μεταβλητές των B και C είναι στην κοινή λίστα x_1, \dots, x_n . Από την επαγωγική υπόθεση, η πρόταση ισχύει για τα B και C , δηλαδή, οι f_B και f_C είναι τοπικές, και

$$f_{B(C)}(h_1, \dots, h_n) = f_B(h_1, \dots, h_n, f_C(h_1, \dots, h_n)).$$

Σύμφωνα με την περίπτωση της σύνθεσης στο Θεώρημα 2.2.9, η $f_{B(C)}$ είναι τοπική.

(4) $A \equiv \lambda(v)(B)$. Έστω ότι οι ελεύθερες μεταβλητές του B είναι στη λίστα x_1, \dots, x_n, v . Από την επαγωγική υπόθεση, η f_B είναι τοπική, και

$$\begin{aligned} f_{\lambda(v)(B)}(h_1, \dots, h_n) &= \text{den}(\lambda(v)(B))(g\{x_1 := h_1, \dots, x_n := h_n\}) \\ &= \left(h \mapsto \text{den}(B)(g\{x_1 := h_1, \dots, x_i := h_i, \dots, x_n := h_n, v := h\}) \right). \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την περίπτωση της λ-αφαίρεσης στο Θεώρημα 2.2.9, η $f_{\lambda(v)(B)}$ είναι τοπική.

(5) $A \equiv A_0$ where $\{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}$. Έστω ότι οι ελεύθερες μεταβλητές όλων των A_i είναι στην κοινή λίστα των x_1, \dots, x_m και p_1, \dots, p_n . Από την επαγωγική υπόθεση, η πρόταση ισχύει για τους όρους A_0, A_1, \dots, A_n , δηλαδή, οι $f_{A_0}, f_{A_1}, \dots, f_{A_n}$ είναι τοπικές.

Για οποιαδήποτε αντικείμενα h_1, \dots, h_m κατάλληλων τύπων

$$\begin{aligned} f_A(h_1, \dots, h_m) &= \text{den}(A_0)(g\{x_1 := h_1, \dots, x_m := h_m, p_1 := P_1, \dots, p_n := P_n\}) \\ &= f_{A_0}(h_1, \dots, h_m, P_1, \dots, P_n), \end{aligned}$$

όπου κάθε P_i ορίζεται αναδρομικά στο βαθμό $\text{rank}(p_i)$ όπως στην Ενότητα 1.5.1.

Χρησιμοποιώντας μία πιο γενική μορφή της περίπτωσης της σύνθεσης του Θεωρήματος 2.2.9, η f_A είναι τοπική αν τα αντικείμενα P_1, \dots, P_n ως συναρτήσεις των h_1, \dots, h_m είναι τοπικά. Θα αποδείξουμε με επαγωγή στο βαθμό rank του p_i ότι η συνάρτηση P_i είναι τοπική.

(i) $\text{rank}(p_i) = 0$. Τότε, για κάθε h_1, \dots, h_m κατάλληλων τύπων

$$P_i(h_1, \dots, h_m) = f_{A_i}(h_1, \dots, h_m)$$

η οποία είναι τοπική από την επαγωγική υπόθεση της πρότασης.

(ii) $\text{rank}(p_i) = k \geq 1$. Από την επαγωγική υπόθεση, όλες οι συναρτήσεις P_{j_1}, \dots, P_{j_r} όπου οι βαθμοί όλων των p_{j_1}, \dots, p_{j_r} είναι μικρότεροι από k , είναι τοπικές. Τότε, για h_1, \dots, h_m κατάλληλων τύπων

$$P_i(h_1, \dots, h_m) = f_{A_i}(h_1, \dots, h_m, P_{j_1}, \dots, P_{j_r}),$$

και επομένως, η P_i είναι επίσης τοπική, σύμφωνα με την περίπτωση της σύνθεσης του Θεωρήματος 2.2.9. \dashv

3.2 Κλειστές Αποδείξεις Τοπικότητας

Στην περίπτωση των γενικών όρων, θα εξετάσουμε σε αυτή την ενότητα τον τρόπο που η συναφής συνάρτηση της υποδήλωσης ενός όρου A ως προς ένα κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου ℓ του τύπου του εξαρτάται από τις συναφείς συναρτήσεις των υποόρων του. Θα πρέπει να καταλάβουμε τις εξαρτήσεις τοπικότητας των δεικτών τοπικότητας που σέβονται και ακολουθούν τους κανόνες σχηματισμού των όρων της L_{ar}^λ .

Παράδειγμα 3.2.1. Έστω ο κλειστός όρος $\text{former}(\text{president}) : \tilde{e} \rightarrow \tilde{t}$ και ο κλειστός δείκτης τοπικότητας εισόδου $\ell \equiv \langle l \vdash 0 \rangle$ του τύπου του. Αν $\ell_1 \equiv \langle \langle l \vdash t_1 \rangle \vdash 1, \ell \rangle$ και $\ell_2 \equiv \langle l \vdash t_3 \rangle$ είναι κλειστοί δείκτες τοπικότητας εισόδου των αντικειμένων former και president , αντίστοιχα, τότε, αν θεωρήσουμε τις αντίστοιχες συναφείς τους συναρτήσεις, σύμφωνα με την περίπτωση εφαρμογής του Θεωρήματος 2.4.8, για κάθε $a : s$

$$(\text{former}(\text{president}))_*^\ell(a) = (\text{former})_*^{\ell_1}(a, (\text{president})_*^{\ell_2}).$$

Επομένως, θα πρέπει να ισχύει $t_1 \equiv t_3$ και ο δείκτης τοπικότητας εξόδου του president θα πρέπει να είναι ίσος με 1. Ο περιορισμός είναι αρκετά φυσικός αφού το $\langle l \vdash t_1 \rangle$ είναι το κομμάτι του ℓ_1 το οποίο περιγράφει τον τρόπο που το πρώτο όρισμα του former χειρίζεται το δικό του όρισμα και επομένως, θα πρέπει να ταυτίζεται με το ℓ_2 .

Τέτοιοι περιορισμοί μιμούνται κατά ένα τρόπο τους περιορισμούς των τύπων οι οποίοι εφαρμόζονται στους κανόνες σχηματισμού των όρων της L_{ar}^λ . Θα χρησιμοποιήσουμε τα δέντρα σχηματισμού των όρων με κατάλληλες ετικέτες ως εργαλεία για την κωδικοποίηση αυτών των περιορισμών με ένα τρόπο ο οποίος θα είναι κοντά στη διαίσθησή μας για αυτούς.

Για κάθε όρο A και το δέντρο σχηματισμού του, περιγράφουμε στη συνέχεια μία σήμανσή του (κλειστή απόδειξη τοπικότητας του A) τέτοια ώστε κάθε υποόρος συνοδεύεται από ένα κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου του τύπου του. Στην περίπτωση μίας σταθεράς $c : \tilde{o}$ που εμφανίζεται στον όρο A , ενδιαφερόμαστε μόνο για τους κλειστούς δείκτες τοπικότητας εισόδου του τύπου της ως προς τους οποίους η υποδήλωσή της c έχει συναφή συνάρτηση. Αυτοί οι δείκτες ονομάζονται κλειστοί δείκτες τοπικότητας εισόδου της σταθεράς c .

Ορισμός 3.2.2. (Κλειστή Απόδειξη Τοπικότητας ενός Όρου) Κλειστή απόδειξη τοπικότητας (*closed locality proof*) (Π_A) ενός όρου A είναι η παραλλαγή του δέντρου σχηματισμού του τέτοια ώστε η ετικέτα κάθε κόμβου είναι της μορφής

$$A' : \ell \vdash t$$

όπου A' είναι ένας όρος, ο ℓ είναι ένας κλειστός δείκτης τοπικότητας εισόδου του τύπου του A' και t είναι μία σταθερά δείκτη. Λέμε ότι ο A' έχει τον δείκτη $\ell \hookrightarrow t$ στην Π_A .

Μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας ενός όρου A ορίζεται εφαρμόζοντας τους ακόλουθους κανόνες:

(LP-CON) Αν $A \equiv c$, και ο ℓ είναι ένας κλειστός δείκτης τοπικότητας εισόδου της c και t είναι οποιαδήποτε σταθερά δείκτη, τότε η

$$\Pi_c := c : \ell \hookrightarrow t$$

είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας της c .

(LP-VAR) Αν $A \equiv x$ όπου η x είναι μία απλή μεταβλητή ή μία μεταβλητή αναδρομής, ο ℓ είναι ένας κλειστός δείκτης τοπικότητας εισόδου του τύπου της x και t είναι οποιαδήποτε σταθερά δείκτη, τότε η

$$\Pi_x := x : \ell \hookrightarrow t$$

είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας της x .

(LP-APP) Αν $A \equiv B(C)$, οι Π_B και Π_C είναι αποδείξεις τοπικότητας των B και C αντίστοιχα και t' είναι σταθερά δείκτη, τότε η

$$\Pi_{B(C)} := \frac{\begin{array}{c} \Pi_B \qquad \qquad \Pi_C \\ \vdots \qquad \qquad \vdots \\ B : \langle \ell_1 \hookrightarrow t_1, \ell_2 \rangle \hookrightarrow t \quad C : \ell_1 \hookrightarrow t_1 \end{array}}{B(C) : \ell_2 \hookrightarrow t'}$$

είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του όρου $B(C)$ αν ισχύουν τα εξής:

1. Κάθε μεταβλητή, απλή ή αναδρομής, που εμφανίζεται ελεύθερη και στους δύο όρους B και C έχει τον ίδιο κλειστό δείκτη τοπικότητας και στις δύο αποδείξεις Π_B και Π_C .
2. Αν μία μεταβλητή x , απλή ή αναδρομής, η οποία εμφανίζεται ελεύθερη στον $B(C)$ έχει τον δείκτη $\ell_x \hookrightarrow t_x$ στην $\Pi_{B(C)}$, τότε $t' \leq t_x$.

(LP-λ-INTRO) Αν $A \equiv \lambda(v)(B)$, η Π_B είναι απόδειξη τοπικότητας του B , ο $\ell_0 \hookrightarrow t_0$ είναι ένας κλειστός δείκτης τοπικότητας του τύπου της v και t' είναι σταθερά δείκτη, τότε η

$$\Pi_{\lambda(v)(B)} := \frac{\begin{array}{c} \Pi_B \\ \vdots \\ B : \ell \hookrightarrow t \end{array}}{\lambda(v)(B) : \langle \ell_0 \hookrightarrow t_0, \ell \rangle \hookrightarrow t'}$$

είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του $\lambda(v)(B)$ αν ισχύουν τα εξής:

1. Αν η μεταβλητή v εμφανίζεται ελεύθερη στον B , τότε έχει τον δείκτη $\ell_0 \vdash t_0$ στην απόδειξη Π_B .
2. Αν μία μεταβλητή x , απλή ή αναδρομής, η οποία εμφανίζεται ελεύθερη στον $\lambda(v)(B)$ έχει τον δείκτη $\ell_x \vdash t_x$ στην $\Pi_{\lambda(v)(B)}$, τότε $t' \leq t_x$.

(**LP-REC**) Αν $A \equiv A_0$ where $\{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}$, $\Pi_{A_0}, \Pi_{A_1}, \dots, \Pi_{A_n}$ είναι αποδείξεις τοπικότητας των όρων A_0, A_1, \dots, A_n αντίστοιχα, τότε η

$$\Pi_A \equiv \frac{\begin{array}{ccc} \Pi_{A_0} & \Pi_{A_1} & \Pi_{A_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_0 : \ell_0 \vdash t & A_1 : \ell_1 \vdash t_1 & \dots & A_n : \ell_n \vdash t_n \end{array}}{A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\} : \ell_0 \vdash t}$$

είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του A_0 where $\{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}$ αν ισχύουν τα εξής:

1. Κάθε μεταβλητή, απλή ή αναδρομής, που εμφανίζεται ελεύθερη σε περισσότερα από ένα A_0, \dots, A_n έχει τον ίδιο κλειστό δείκτη τοπικότητας σε όλες τις εμφανίσεις της στις αντίστοιχες αποδείξεις τοπικότητας.
2. Για κάθε $i = 1, \dots, n$, η μεταβλητή p_i έχει τον δείκτη $\ell_i \vdash t_i$ σε οποιαδήποτε απόδειξη Π_{A_j} στην οποία εμφανίζεται ελεύθερη.
3. Αν μία μεταβλητή x , απλή ή αναδρομής, η οποία εμφανίζεται ελεύθερη στον όρο A έχει τον δείκτη $\ell_x \vdash t_x$ στην απόδειξη Π_A , τότε $t \leq t_x$.

Αν Π_A είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του όρου A , τότε ο κόμβος με ετικέτα $A : \ell \vdash t$ είναι η *ρίζα* (root) της απόδειξης και η $A : \ell \vdash t$ είναι η *ετικέτα ρίζας* της. Αν $A' : \ell' \vdash t'$ είναι η ετικέτα ενός κόμβου στην απόδειξη Π_A , η κλειστή απόδειξη τοπικότητας με ετικέτα ρίζας $A' : \ell' \vdash t'$ είναι η *υποαπόδειξη* (subproof) του όρου A' η οποία ορίζεται από την Π_A (Συμβολισμός: $\Pi_A^{A'}$).

Είναι χρήσιμο να κάνουμε μερικές παρατηρήσεις και να δώσουμε μερικά παραδείγματα αποδείξεων τοπικότητας με σκοπό να αποσαφηνίσουμε τον ορισμό και να εξηγήσουμε τους περιορισμούς που επιβάλλονται από αυτόν.

Πρώτα απ' όλα, σε αντίθεση με όλους τους άλλους κανόνες όπου ο δείκτης εξόδου της ετικέτας ρίζας δεν προσδιορίζεται, στον κανόνα (LP-REC), ο δείκτης εξόδου του αναδρομικού όρου ταυτίζεται με τον δείκτη εξόδου της κεφαλής. Γενικά, ο δείκτης εξόδου ενός όρου κωδικοποιεί τον τοπικό ή μη

$$\begin{array}{c}
\text{and} : \langle l \vdash 0, l \vdash 0 \rangle \vdash 0 \quad \frac{c_1 : \langle l \vdash 1 \rangle \vdash 0 \quad x : l \vdash 1}{c_1(x) : l \vdash 0} \quad \frac{c_2 : \langle l \vdash 1 \rangle \vdash 0 \quad x : l \vdash 1}{c_2(x) : l \vdash 0} \\
\hline
\text{and}(c_1(x)) : \langle l \vdash 0 \rangle \vdash 0 \quad c_2(x) : l \vdash 0 \\
\hline
\text{and}(c_1(x), c_2(x)) : l \vdash 0 \\
\hline
\lambda(x)\text{and}(c_1(x), c_2(x)) : \langle l \vdash 1 \rangle \vdash 0
\end{array}$$

Σχήμα 3.1: Μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του όρου $\lambda(x)\text{and}(c_1(x), c_2(x))$

τοπικό τρόπο με τον οποίο θα χρησιμοποιηθεί. Ας υποθέσουμε ότι ο δείκτης εξόδου ενός αναδρομικού όρου είναι ίσος με 1 ενώ ο δείκτης εξόδου της κεφαλής του είναι ίσος με 0. Τότε, παρόλο που ο υπολογισμός της υποδήλωσης ενός αναδρομικού όρου ορίζεται από τον υπολογισμό της υποδήλωσης της κεφαλής του, ο δεύτερος χρησιμοποιείται τοπικά ενώ ο πρώτος χρησιμοποιείται μη τοπικά.

Δεύτερον, από μία απλή επισκόπηση των κανόνων και ειδικά, από τους περιορισμούς που επιβάλλονται από τους (LP-APP) και (LP-REC) σύμφωνα με τους οποίους κάθε ελεύθερη εμφάνιση μίας μεταβλητής στις αντίστοιχες υποαποδείξεις έχει τον ίδιο κλειστό δείκτη τοπικότητας, ισχύει ότι:

Πρόταση 3.2.3. Σε μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας ενός όρου A , όλες οι ελεύθερες εμφανίσεις μίας απλής μεταβλητής ή μίας μεταβλητής αναδρομής x έχουν τον ίδιο κλειστό δείκτη τοπικότητας.

Παράδειγμα 3.2.4. Έστω ότι $A \equiv \lambda(x)\text{and}(c_1(x), c_2(x))$ είναι ένας όρος όπου $\text{and} : \tilde{\tau} \times \tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\tau}$ και οι σταθερές c_1 και c_2 είναι και οι δύο τύπου $\tilde{\epsilon} \rightarrow \tilde{\tau}$. Έστω ότι η c_1 έχει μόνο ένα κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου, $\langle l \vdash 1 \rangle$, ενώ η c_2 έχει και τους δύο $\langle l \vdash 0 \rangle$ και $\langle l \vdash 1 \rangle$ και η σταθερά and είναι τοπική. Στο Σχήμα 3.1, παρουσιάζεται μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του A η οποία σέβεται τους δοσμένους κλειστούς δείκτες τοπικότητας εισόδου των σταθερών.

Παρατηρούμε ότι επειδή η σταθερά c_1 έχει δείκτη $\langle l \vdash 1 \rangle$, όλες οι ελεύθερες εμφανίσεις της x στον υποόρο $\text{and}(c_1(x), c_2(x))$ θα πρέπει να έχουν δείκτη τοπικότητας $l \vdash 1$ κι επομένως, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον δείκτη εισόδου $\langle l \vdash 1 \rangle$ για τη σταθερά c_2 . Αλλά γιατί η μεταβλητή x πρέπει να έχει τον ίδιο δείκτη και στις δύο εμφανίσεις της; Η απάντηση είναι αρκετά απλή — αν η x είναι μία απλή μεταβλητή, για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα (LP-λ-INTRO) σε ένα όρο A στον οποίο εμφανίζεται, θα πρέπει να υπάρχει ένας μοναδικός δείκτης για αυτήν σε όλες τις εμφανίσεις της στον A .

$$\begin{array}{c}
\text{love} : \langle l \hookrightarrow 0, l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 0 \quad p : l \hookrightarrow 0 \\
\hline
\text{love}(p) : \langle l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 0 \quad p : l \hookrightarrow 0 \\
\hline
\text{love}(p, p) : l \hookrightarrow 0 \quad \text{John} : l \hookrightarrow 0 \\
\hline
\text{love}(p, p) \text{ where } \{p := \text{John}\} : l \hookrightarrow 0
\end{array}$$

Σχήμα 3.2: Μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του αναδρομικού όρου $\text{love}(p, p) \text{ where } \{p := \text{John}\}$.

Αυτός ο δείκτης καθορίζει τον δείκτη του πρώτου ορίσματος του νέου όρου $\lambda(x)(A)$ και σίγουρα εξαρτάται από τον τρόπο που η ίδια η x συμπεριφέρεται όσον αφορά την τοπικότητα στον A .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η p είναι μία μεταβλητή αναδρομής. Τότε, ανάλογα, η p πρέπει να έχει τον ίδιο δείκτη για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα (LP-REC) ο οποίος δεσμεύει τις εμφανίσεις της.

Παράδειγμα 3.2.5. Ας εξετάσουμε τον όρο $\text{love}(p, p) \text{ where } \{p := \text{John}\}$ και την κλειστή απόδειξη τοπικότητάς του που παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.2. Σύμφωνα με τον αντίστοιχο περιορισμό του κανόνα (LP-REC), το μέρος του αναδρομικού όρου John πρέπει να έχει τον ίδιο κλειστό δείκτη τοπικότητας με τη μεταβλητή p αφού στον αναδρομικό όρο έχουμε την ανάθεση $p := \text{John}$. Επομένως, όταν θα χρειαστεί να εφαρμόσουμε τον κανόνα (LP-REC), η μεταβλητή p πρέπει να έχει τον ίδιο δείκτη σε όλες τις εμφανίσεις της — σε αυτό το παράδειγμα, τον $l \hookrightarrow 0$.

Σε αντίθεση με τις μεταβλητές και τους δείκτες τους που περιγράφονται στην Πρόταση 3.2.3, αν μία σταθερά c εμφανίζεται σε δύο διαφορετικά σημεία σε ένα όρο A , τότε μπορεί να έχει δύο διαφορετικούς κλειστούς δείκτες τοπικότητας εισόδου του τύπου της, αρκεί να είναι και οι δύο τέτοιοι ώστε η υποδήλωσή της c να έχει συναφή συνάρτηση ως προς αυτούς.

Παράδειγμα 3.2.6. Στο Σχήμα 3.3, παρουσιάζεται το παράδειγμα ενός όρου ο οποίος χρησιμοποιώντας «συντονισμό» (co-ordination) όπως παρουσιάζεται στο [22], αποδίδει την πρόταση ‘Η θερμοκρασία και η υγρασία αυξάνονται’¹. Σε αυτή την απόδειξη, η σταθερά the έχει δύο διαφορετικούς δείκτες τοπικότητας εισόδου.

¹Υποθέτουμε ότι η σταθερά $\text{temp} : \tilde{e} \rightarrow \tilde{t}$ αποδίδει τη λέξη ‘θερμοκρασία’ και η σταθερά $\text{humid} : \tilde{e} \rightarrow \tilde{t}$ τη λέξη ‘υγρασία’.

$$\begin{array}{c}
\frac{\text{the} : \langle \langle l \vdash 0 \rangle \vdash 1 \rangle \vdash 0 \quad \text{temp} : \langle l \vdash 0 \rangle \vdash 1}{x : \langle l \vdash 1 \rangle \vdash 0 \quad \text{the}(\text{temp}) : l \vdash 1} \quad \frac{\text{the} : \langle \langle l \vdash 0 \rangle \vdash 0 \rangle \vdash 0 \quad \text{humid} : \langle l \vdash 0 \rangle \vdash 0}{\text{the}(\text{humid}) : l \vdash 1} \\
\frac{\text{and} : \langle l \vdash 0, l \vdash 0 \rangle \vdash 0 \quad x(\text{the}(\text{temp})) : l \vdash 0}{\text{and}(x(\text{the}(\text{temp}))) : \langle l \vdash 0 \rangle \vdash 0} \quad \frac{x : \langle l \vdash 1 \rangle \vdash 0 \quad \text{the}(\text{humid}) : l \vdash 1}{x(\text{the}(\text{humid})) : l \vdash 1} \\
\frac{\text{and}(x(\text{the}(\text{temp}))), x(\text{the}(\text{humid}))) : l \vdash 0}{\lambda(x)\text{and}(x(\text{the}(\text{temp})), x(\text{the}(\text{humid}))) : \langle \langle l \vdash 1 \rangle \vdash 0 \rangle \vdash 0} \quad \text{rise} : \langle l \vdash 1 \rangle \vdash 0 \\
\frac{\lambda(x)\text{and}(x(\text{the}(\text{temp})), x(\text{the}(\text{humid}))) : \langle \langle l \vdash 1 \rangle \vdash 0 \rangle \vdash 0 \quad \text{rise} : \langle l \vdash 1 \rangle \vdash 0}{\lambda(x)(\text{and}(x(\text{the}(\text{temp})), x(\text{the}(\text{humid}))))(\text{rise}) : l \vdash 0}
\end{array}$$

Σχήμα 3.3: Μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του όρου $\lambda(x)(\text{and}(x(\text{the}(\text{temp})), x(\text{the}(\text{humid}))))(\text{rise})$.

Τώρα, παρατηρείστε ότι και στους τρεις κανόνες, (LP-APP), (LP-λ-INTRO) και (LP-REC), υπάρχει ένας κοινός περιορισμός:

Πρόταση 3.2.7. Όλες οι ελεύθερες εμφανίσεις μίας απλής μεταβλητής ή μίας μεταβλητής αναδρομής x σε μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του όρου A με ετικέτα ρίζας $A : l \vdash 1$ έχουν δείκτη τοπικότητας εξόδου 1.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από μια απλή επισκόπηση των κανόνων. \dashv

Η σημασία αυτού του περιορισμού εξηγείται στην περίπτωση του κανόνα (LP-APP) στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 3.2.8. Ας εξετάσουμε την κλειστή υποαπόδειξη τοπικότητας του όρου $\text{rise}(\text{the}(x))$ που παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.4. Δεδομένου ότι το αντικείμενο rise χρησιμοποιεί το πρώτο του όρισμα μη τοπικά, ο μόνος κλειστός δείκτης τοπικότητας εισόδου της σταθεράς rise είναι ο $\langle l \vdash 1 \rangle$. Η εφαρμογή του κανόνα (LP-APP) στο σημείο (*) επιβάλλει ο δείκτης τοπικότητας εξόδου του $\text{the}(x)$ να είναι το 1. Τώρα, η μεταβλητή x εμφανίζεται ελεύθερη στην υποαπόδειξη του $\text{the}(x)$ και σύμφωνα με τον περιορισμό του κανόνα (LP-APP), ο δείκτης τοπικότητας εξόδου της θα πρέπει επίσης να είναι ίσος με 1.

Η ιδέα είναι απλή — η μεταβλητή x είναι στην εμβέλεια ενός μη τοπικού υποόρου του A (σε αυτήν την περίπτωση του rise) και αυτό σημαίνει ότι δεν είναι δυνατόν η ίδια η x να «χαρακτηρισθεί» με τέτοιο τρόπο που συμβολίζει τη τοπική χρήση της. Αν επρόκειτο να δεσμεύσουμε την εμφάνισή της εφαρμόζοντας τον λ-τελεστή, ο νέος όρος θα πρέπει να χρησιμοποιεί το πρώτο του όρισμα μη τοπικά. Επομένως, ο όρος $\lambda(x)\text{rise}(\text{the}(x))$ έχει δείκτη τοπικότητας εισόδου $\langle \langle l \vdash 0 \rangle \vdash 1 \rangle$.

$$\begin{array}{c}
\text{the} : \langle \langle l \vdash 0 \rangle \vdash 1 \rangle \vdash 0 \quad x : \langle l \vdash 0 \rangle \vdash 1 \\
\hline
(*) \frac{\text{rise} : \langle l \vdash 1 \rangle \vdash 0 \quad \text{the}(x) : l \vdash 1}{\text{rise}(\text{the}(x)) : l \vdash 0} \\
\hline
\lambda(x)\text{rise}(\text{the}(x)) : \langle \langle l \vdash 0 \rangle \vdash 1 \rangle \vdash 0
\end{array}$$

Σχήμα 3.4: Μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του όρου $\lambda(x)\text{rise}(\text{the}(x))$.

Ο πλήρης τεχνικός ρόλος των περιορισμών που επιβάλλονται από όλους τους κανόνες θα γίνει ακόμα πιο σαφής στο Κεφάλαιο 4 όπου οι κλειστές αποδείξεις τοπικότητας θα χρησιμοποιηθούν για να ορίσουμε τυπικά τις συναφείς συναρτήσεις της υποδήλωσης ενός όρου A .

Έστω τώρα ότι η Π_A είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας ενός όρου A με ετικέτα ρίζας $A : \ell \vdash t$. Το ερώτημα που έπεται είναι απλό: η συνάρτηση υποδήλωσης του A έχει συναφή συνάρτηση ως προς τον δείκτη ℓ ; Σύμφωνα με τον ορισμό της κλειστής απόδειξης τοπικότητας ενός όρου A , αν μία σταθερά c εμφανίζεται στον A , σε κάθε απόδειξη του όρου, έχει δείκτη εισόδου τέτοιο ώστε η υποδήλωσή της έχει συναφή συνάρτηση ως προς αυτόν. Επομένως, ομοίως με την περίπτωση των τοπικών όρων, η απάντηση είναι θετική και αυτό αποδεικνύεται στο παρακάτω θεώρημα το οποίο αποτελεί γενίκευση της Πρότασης 3.1.2.

Θεώρημα 3.2.9. (Συναφής Συνάρτηση της Υποδήλωσης ενός Όρου ως προς μία Κλειστή Απόδειξη Τοπικότητας) Έστω ότι η Π_A είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας ενός όρου A με ετικέτα ρίζας

$$A : \ell \vdash t.$$

Αν οι ελεύθερες μεταβλητές του A είναι στη λίστα $x_1 : \tilde{\sigma}_1, \dots, x_n : \tilde{\sigma}_n$ και για $i = 1, \dots, n$, η x_i έχει δείκτη $\ell_i \vdash t_i$ στην Π_A , τότε η συνάρτηση f που ορίζεται ως

$$f(h_1, \dots, h_n) = \text{den}(A)(g\{x_1 := h_1, \dots, x_n := h_n\})$$

έχει συναφή συνάρτηση ως προς τον κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου

$$\langle \ell_1 \vdash t_1, \dots, \ell_n \vdash t_n, \ell \rangle.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη είναι με επαγωγή στον A και χρησιμοποιεί τις ιδιότητες των συναφών συναρτήσεων στο Θεώρημα 2.4.8.

(1) $A \equiv c$. Τότε, αν $\Pi_c \equiv c : \ell \vdash t$,

$$f_c(h_1, \dots, h_n) = \text{den}(c)(g\{x_1 := h_1, \dots, x_n := h_n\}) = c$$

και από την υπόθεση και το Πρόρισμα 2.4.9, η συνάρτηση αυτή έχει συναφή συνάρτηση ως προς τον δείκτη $\langle \ell_1 \vdash t_1, \dots, \ell_n \vdash t_n, \ell \rangle$ όπου για $i = 1, \dots, n$, ο ℓ_i είναι ένας κλειστός δείκτης τοπικότητας εισόδου του τύπου της x_i .

(2) $A \equiv x : \tilde{\sigma}$ όπου η x είναι μία απλή μεταβλητή ή μεταβλητή αναδρομής και για κάποιο i , $x_i \equiv x$. Έστω ότι $\Pi_x \equiv x : \ell \vdash t$, και

$$f_x(h_1, \dots, h_n) = \text{den}(x)(g\{x_1 := h_1, \dots, x_i := h_i, \dots, x_n := h_n\}) = h_i.$$

Σύμφωνα με την περίπτωση (i) του Θεωρήματος 2.4.8, αν, για $i = 1, \dots, n$, ο ℓ_i είναι ένας κλειστός δείκτης τοπικότητας εισόδου του τύπου της x_i , η f_x έχει μία συναφή συνάρτηση ως προς τον δείκτη $\langle \ell_1 \vdash t_1, \dots, \ell_n \vdash t_n, \ell_i \rangle$.

(3) $A \equiv B(C)$. Έστω ότι οι B και C έχουν και οι δύο ελεύθερες μεταβλητές στην κοινή λίστα x_1, \dots, x_n . Έστω επίσης ότι η $\Pi_{B(C)}$ είναι κλειστή απόδειξη τοπικότητας του όρου $B(C)$ με ετικέτα ρίζας $B(C) : \ell \vdash t'$ και για $i = 1, \dots, n$, κάθε μεταβλητή x_i έχει δείκτη $\ell_i \vdash t_i$.

$$\Pi_{B(C)} : \frac{\begin{array}{c} \Pi_B \\ \vdots \\ B : \langle \ell_0 \vdash t_0, \ell \rangle \vdash t \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi_C \\ \vdots \\ C : \ell_0 \vdash t_0 \end{array}}{B(C) : \ell \vdash t'}$$

Σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση, ο $\langle \ell_1 \vdash t_1, \dots, \ell_n \vdash t_n, \ell_0 \vdash t_0, \ell \rangle$ είναι ένας κλειστός δείκτης εισόδου της f_B , και ο $\langle \ell_1 \vdash t_1, \dots, \ell_n \vdash t_n, \ell_0 \rangle$ είναι δείκτης της f_C , και

$$f_{B(C)}(h_1, \dots, h_n) = f_B(h_1, \dots, h_n, f_C(h_1, \dots, h_n)).$$

Από την Πρόταση 3.2.7, πληρούνται όλες οι υποθέσεις της περίπτωσης της σύνθεσης του Θεωρήματος 2.4.8 κι επομένως, έπεται ότι η $f_{B(C)}$ έχει μία συναφή συνάρτηση ως προς τον δείκτη $\langle \ell_1 \vdash t_1, \dots, \ell_n \vdash t_n, \ell \rangle$.

(4) $A \equiv \lambda(v)(B)$. Έστω ότι η $\Pi_{\lambda(v)(B)}$ είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του όρου $\lambda(v)(B)$, για $i = 1, \dots, n$, κάθε x_i έχει δείκτη $\ell_i \vdash t_i$ σε αυτήν και αν η v εμφανίζεται ελεύθερη στην Π_B , τότε έχει δείκτη $\ell_0 \vdash t_0$.

$$\Pi_{\lambda(v)(B)} \equiv \frac{\begin{array}{c} \Pi_B \\ \vdots \\ B : \ell \vdash t \end{array}}{\lambda(v)(B) : \langle \ell_0 \vdash t_0, \ell \rangle \vdash t'}$$

Από την επαγωγική υπόθεση, ο $\langle \ell_1 \vdash t_1, \dots, \ell_n \vdash t_n, \ell_0 \vdash t_0, \ell \rangle$ είναι κλειστός δείκτης τοπικότητας εισόδου της f_B , και

$$\begin{aligned} f_{\lambda(v)(B)}(h_1, \dots, h_n) &= \text{den}(\lambda(v)(B))(g\{x_1 := h_1, \dots, x_n := h_n\}) \\ &= (h \mapsto f_B(h_1, \dots, h_n, h)). \end{aligned}$$

Επομένως, σύμφωνα με την περίπτωση της λ-αφαίρεσης του Θεωρήματος 2.4.8, η $f_{\lambda(v)(B)}$ έχει συναφή συνάρτηση ως προς τον κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου $\langle \ell_1 \vdash t_1, \dots, \ell_n \vdash t_n, \ell_0 \vdash t_0, \ell \rangle$.

(5) $A \equiv A_0$ where $\{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}$. Έστω ότι οι ελεύθερες μεταβλητές όλων των A_i είναι στη λίστα $x_1, \dots, x_m, p_1, \dots, p_n$ και έστω ότι τα i, k κυμαίνονται στις τιμές $1, \dots, n$ και το j στις $1, \dots, m$. Έστω ότι η Π_A είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του A .

$$\Pi_A \equiv \frac{\begin{array}{ccc} \Pi_{A_0} & \Pi_{A_1} & \Pi_{A_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}}{A_0 : \ell_0 \vdash t \quad A_1 : \ell_1 \vdash t_1 \dots \quad A_n : \ell_n \vdash t_n \quad A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\} : \ell_0 \vdash t}$$

Για κάθε h_1, \dots, h_m κατάλληλων τύπων,

$$f_A(h_1, \dots, h_m) = f_{A_0}(h_1, \dots, h_m, P_1, \dots, P_n)$$

όπου κάθε P_i ορίζεται αναδρομικά στο βαθμό $\text{rank}(p_i)$ ως συνάρτηση των h_1, \dots, h_m όπως στην Ενότητα 1.5.1.

Αν κάθε x_j έχει δείκτη $\ell_{x_j} \vdash t_{x_j}$, τότε από την επαγωγική υπόθεση, η f_{A_0} έχει συναφή συνάρτηση ως προς το δείκτη $\langle \ell_{x_j} \vdash t_{x_j}, \ell_i \vdash t_i, \ell_0 \rangle$. Σύμφωνα με μία πιο γενική μορφή της περίπτωσης της σύνθεσης του Θεωρήματος 2.4.8, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε P_i έχει μία συναφή συνάρτηση ως προς τον δείκτη $\langle \ell_{x_j} \vdash t_{x_j}, \ell_k \vdash t_k, \ell_i \rangle$ όπου $\text{rank}(p_k) < \text{rank}(p_i)$. Η απόδειξη είναι με επαγωγή στον $\text{rank}(p_i)$.

(i) $\text{rank}(p_i) = 0$. Έπεται άμεσα από την επαγωγική υπόθεση του θεωρήματος.

(ii) $\text{rank}(p_i) \geq 1$. Έστω ότι οι μεταβλητές p_{r_1}, \dots, p_{r_k} έχουν βαθμό μικρότερο από τον $\text{rank}(p_i)$. Τότε, από την επαγωγική υπόθεση, οι P_{r_1}, \dots, P_{r_k} έχουν συναφείς συναρτήσεις ως προς κατάλληλους δείκτες τοπικότητας. Τότε, για κάθε h_1, \dots, h_m

$$P_i(h_1, \dots, h_m) = f_{A_i}(h_1, \dots, h_m, P_{r_1}, \dots, P_{r_k}).$$

Δεδομένου ότι η f_{A_i} έχει συναφή συνάρτηση ως προς τον κλειστό δείκτη $\langle \ell_{x_j} \vdash t_{x_j}, \ell_{r_1} \vdash t_{r_1}, \dots, \ell_{r_k} \vdash t_{r_k}, \ell_i \rangle$, ξανά σύμφωνα με την περίπτωση της

$$\begin{array}{c}
\text{former} : \langle \langle l \vdash 0 \rangle \vdash 1, l \vdash 0 \rangle \vdash 0 \quad \text{minister} : \langle l \vdash 0 \rangle \vdash 1 \\
\hline
\text{former}(\text{minister}) : \langle l \vdash 0 \rangle \vdash 0 \quad \text{John} : l \vdash 0 \\
\hline
\text{former}(\text{minister}, \text{John}) : l \vdash 0
\end{array}$$

Σχήμα 3.5: Μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του $\text{former}(\text{minister}, \text{John})$.

σύνθεσης του Θεωρήματος 2.4.8 και την επαγωγική υπόθεση για τις P_{r_1}, \dots, P_{r_k} , η P_i έχει συναφή συνάρτηση ως προς τον $\langle \ell_{x_j} \vdash t_{x_j}, \ell_i \rangle$.

Παρατηρούμε ότι η Πρόταση 3.2.7 εξασφαλίζει κι εδώ ότι μπορούμε πράγματι να εφαρμόσουμε την περίπτωση της σύνθεσης του Θεωρήματος 2.4.8 σε όλες τις περιπτώσεις. \dashv

Σύμφωνα με αυτό το θεώρημα, δοσμένων κλειστών δεικτών τοπικότητας εισόδου ℓ_c για κάθε σταθερά c που εμφανίζεται σε ένα όρο A , αν κατασκευάσουμε μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του A τέτοια ώστε οι σταθερές έχουν τους δοσμένους δείκτες, τότε η συνάρτηση υποδήλωσης του A έχει συναφή συνάρτηση ως προς τον κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου της ετικέτας ρίζας. Με άλλα λόγια, το θεώρημα περιγράφει ένα κριτήριο βάσει του οποίου η συμπεριφορά τοπικότητας ενός όρου A καθορίζεται από την συμπεριφορά τοπικότητας των σταθερών που εμφανίζονται σε αυτόν.

Παράδειγμα 3.2.10. Έστω ο όρος $A \equiv \text{former}(\text{minister}, \text{John}) : \tilde{t}$. Το γεγονός ότι υπάρχει μία συναφής συνάρτηση ως προς τον δείκτη l δεν δίνει καμία πληροφορία για τη συμπεριφορά τοπικότητας αυτού του όρου. Ας υποθέσουμε ότι οι σταθερές του όρου έχουν τους εξής δείκτες: $\text{former} : \langle \langle l \vdash 0 \rangle \vdash 1, l \vdash 0 \rangle$, $\text{minister} : \langle l \vdash 0 \rangle$ και $\text{John} : l$. Στο Σχήμα 3.5, δίνεται μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του A ως προς αυτούς.

Επιπροσθέτως, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4.8, ξέρουμε ακριβώς με ποιο τρόπο υπολογίζεται η συναφής συνάρτηση του $\text{den}(\text{former}(\text{minister}, \text{John}))(g)$ από τις συναφείς συναρτήσεις των υποδηλώσεων των υποόρων του. Αν θεωρήσουμε τις αντίστοιχες προτιμητέες ισοδύναμες συναρτήσεις, για κάθε ανάθεση g και για κάθε $a : s$,

$$\begin{aligned}
& (\text{den}(\text{former}(\text{minister}, \text{John}))(g))_*^l(a) \\
& = \text{former}_*^{\langle \langle l \vdash 0 \rangle \vdash 1, l \vdash 0 \rangle}(a, \text{minister}_*^{\langle l \vdash 0 \rangle}, \text{John}_*^l(a)).
\end{aligned}$$

Τέλος, ολοκληρώνουμε αυτή την ενότητα με μία άμεση συνέπεια του ορισμού της κλειστής απόδειξης τοπικότητας και της Πρότασης 2.4.6.

$$\begin{array}{c}
\text{former} : \langle \langle l \hookrightarrow 1 \rangle \hookrightarrow 1, l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 0 \quad \text{minister} : \langle l \hookrightarrow 1 \rangle \hookrightarrow 1 \\
\hline
\text{former}(\text{minister}) : \langle l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 0 \quad \text{John} : l \hookrightarrow 0 \\
\hline
\text{former}(\text{minister}, \text{John}) : l \hookrightarrow 0
\end{array}$$

Σχήμα 3.6: Μία εναλλακτική κλειστή απόδειξη τοπικότητας του όρου $\text{former}(\text{minister}, \text{John})$.

Πόρισμα 3.2.11. Για κάθε όρο A , υπάρχει μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας (που ονομάζεται κανονική, *standard*) τέτοια ώστε όλοι οι υποόροι έχουν τον κανονικό δείκτη τοπικότητας του τύπου τους σε αυτήν.

3.3 Η Μέγιστα Τοπική Κλειστή Απόδειξη Τοπικότητας ενός Όρου

Για κάθε όρο A , μπορεί να υπάρχουν πολλές κλειστές αποδείξεις τοπικότητας που μπορεί να διαφέρουν σε έναν ή περισσότερους δείκτες οι οποίοι εμφανίζονται στις ετικέτες των κόμβων του.

Παράδειγμα 3.3.1. Ας εξετάσουμε ξανά τον όρο $\text{former}(\text{minister}, \text{John})$ (Παράδειγμα 3.2.10) και την κλειστή απόδειξη τοπικότητάς του που παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.5. Αυτή η απόδειξη δεν είναι μοναδική — μία εναλλακτική κλειστή απόδειξη τοπικότητας αυτού του όρου φαίνεται στο Σχήμα 3.6. Και οι δύο σταθερές former και minister έχουν διαφορετικούς δείκτες σε αυτήν την απόδειξη από αυτούς που έχουν στην απόδειξη στο Σχήμα 3.5. Παρόλο που ο δείκτης τοπικότητας εισόδου της ετικέτας ρίζας είναι ο ίδιος και στις δύο, ο υπολογισμός της ισοδύναμης συνάρτησης της υποδήλωσης του όρου ως προς τις ισοδύναμες συναρτήσεις των υποόρων είναι διαφορετικός.

Τέλος, παρατηρούμε ότι ακόμα και για δοσμένους κλειστούς δείκτες τοπικότητας εισόδου των σταθερών που εμφανίζονται σε ένα όρο A , αν υπάρχει μία απόδειξη του A ως προς αυτούς, υπάρχει η περίπτωση να υπάρχουν περισσότερες από μία.

Τώρα, είναι φυσικό να αναρωτηθεί κανείς αν μπορούμε να συγκρίνουμε δύο τυχούσες κλειστές αποδείξεις τοπικότητας ενός όρου A και κατά πόσο υπάρχει τρόπος να εκφράσουμε όλες τις κλειστές αποδείξεις τοπικότητας ενός όρου A με κατάλληλη σήμανση του δέντρου σχηματισμού του. Απάντηση στο πρώτο ερώτημα αποτελεί ο ορισμός μίας μερικής διάταξης μεταξύ των κλειστών αποδείξεων τοπικότητας ενός όρου. Βασίζεται στη φυσική διάταξη

των δύο σταθερών δείκτη 0 και 1, δηλαδή τη $0 < 1$, και στην αντίστοιχη μερική διάταξη μεταξύ δύο δεικτών τοπικότητας του ίδιου τύπου που ακολουθεί.

Ορισμός 3.3.2. Για δύο κλειστούς δείκτες τοπικότητας ℓ και ℓ' του ίδιου τύπου $\tilde{\sigma}$, ο ℓ είναι μικρότερος από ή ίσος με (*less than or equal to*) τον ℓ' ($\ell \leq \ell'$) (ή ο ℓ είναι πιο τοπικός από (*more local than*) τον ℓ') αν:

- (i) Αν $\tilde{\sigma} \equiv \tilde{\sigma}_0$, $l \vdash t \leq l \vdash t'$ αν και μόνο αν $t \leq t'$.
- (ii) Αν $\tilde{\sigma} \equiv \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}_0$,

$$\langle \ell_1 \vdash t_1, \ell_2 \rangle \vdash t \leq \langle \ell'_1 \vdash t'_1, \ell'_2 \rangle \vdash t'$$

αν και μόνο αν $\ell_1 \vdash t_1 \leq \ell'_1 \vdash t'_1$, $\ell_2 \leq \ell'_2$ και $t \leq t'$.

Για παράδειγμα, αν $\tilde{\sigma} \equiv \tilde{\epsilon} \times \tilde{\epsilon} \rightarrow \tilde{\tau}$, $\ell_1 \equiv \langle l \vdash 0, l \vdash 0 \rangle$ και $\ell_2 \equiv \langle l \vdash 1, l \vdash 0 \rangle$, τότε $\ell_1 \leq \ell_2$. Η ιδέα είναι ότι για οποιοδήποτε αντικείμενο f του τύπου $\tilde{\sigma}$, αν το f έχει το δείκτη ℓ_1 , τότε η συμπεριφορά τοπικότητας που εκφράζει αυτός ο δείκτης είναι «πιο τοπική» από αυτήν που εκφράζεται από τον ℓ_2 . Η συνάρτηση f υπό τον δείκτη ℓ_1 μεταχειρίζεται περισσότερα ορίσματα τοπικά (ή σε άλλες περιπτώσεις, τα ορίσματά της μεταχειρίζονται τα δικά τους ορίσματα πιο τοπικά κ.λ.π.) απ' όσα η ίδια συνάρτηση μεταχειρίζεται υπό τον ℓ_2 .

Παρατηρούμε ότι η διάταξη μεταξύ δεικτών τοπικότητας του ίδιου τύπου που ορίστηκε παραπάνω είναι μερική — αν, για παράδειγμα, $\ell_1 \equiv \langle l \vdash 0, l \vdash 1 \rangle$ και $\ell_2 \equiv \langle l \vdash 1, l \vdash 0 \rangle$, τότε ούτε $\ell_1 \leq \ell_2$ ούτε $\ell_2 \leq \ell_1$.

Η μερική διάταξη μεταξύ δεικτών γενικεύεται σε μία μερική διάταξη μεταξύ δύο κλειστών αποδείξεων τοπικότητας Π_1 και Π_2 ενός όρου A : $\Pi_1 \leq \Pi_2$ αν και μόνο αν σε κάθε κόμβο, αν ο κόμβος στην Π_1 είναι $A' : \ell_1 \vdash t_1$ και στην Π_2 , ο αντίστοιχος κόμβος είναι $A' : \ell_2 \vdash t_2$, τότε $\ell_1 \vdash t_1 \leq \ell_2 \vdash t_2$. Ο τυπικός ορισμός δίνεται αναδρομικά:

Ορισμός 3.3.3. Για δύο κλειστές αποδείξεις τοπικότητας Π_1 και Π_2 ενός όρου A , η Π_1 είναι πιο τοπική από (*more local than*) την Π_2 ($\Pi_1 \leq \Pi_2$) αν και μόνο αν

- (i) Αν $A \equiv c$, $\Pi_1 \equiv c : \ell \vdash t$ και $\Pi_2 \equiv c : \ell' \vdash t'$, τότε $\ell \vdash t \leq \ell' \vdash t'$.
- (ii) Αν $A \equiv x$, $\Pi_1 \equiv x : \ell \vdash t$ και $\Pi_2 \equiv x : \ell' \vdash t'$, τότε $\ell \vdash t \leq \ell' \vdash t'$.
- (iii) Αν $A \equiv B(C)$, η ετικέτα ρίζας της Π_1 είναι $B(C) : \ell \vdash t$ και η ετικέτα ρίζας της Π_2 είναι $B(C) : \ell' \vdash t'$, τότε $\Pi_1^B \leq \Pi_2^B$, $\Pi_1^C \leq \Pi_2^C$ και $\ell \vdash t \leq \ell' \vdash t'$.
- (iv) Αν $A \equiv \lambda(v)(B)$, η ετικέτα ρίζας της Π_1 είναι $\lambda(v)(B) : \ell \vdash t$ και η ετικέτα ρίζας της Π_2 είναι $\lambda(v)(B) : \ell' \vdash t'$, τότε $\Pi_1^B \leq \Pi_2^B$ και $\ell \vdash t \leq \ell' \vdash t'$.
- (v) Αν $A \equiv A_0$ where $\{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}$, η ετικέτα ρίζας της Π_1 είναι $A : \ell \vdash t$ και η ετικέτα ρίζας της Π_2 είναι $A : \ell' \vdash t'$, τότε για $i = 0, \dots, n$, $\Pi_1^{A_i} \leq \Pi_2^{A_i}$ και $\ell \vdash t \leq \ell' \vdash t'$.

$$\begin{array}{c}
\frac{y : \langle l \multimap 0, l \multimap 1 \rangle \multimap 0}{y(\text{the}(x)) : \langle l \multimap 1 \rangle \multimap 0} \quad \frac{\text{the} : \langle \langle l \multimap 0 \rangle \multimap 0 \rangle \multimap 0 \quad x : \langle l \multimap 0 \rangle \multimap 0}{\text{the}(x) : l \multimap 0} \\
\\
\frac{y : \langle l \multimap 1, l \multimap 0 \rangle \multimap 0}{y(\text{the}(x)) : \langle l \multimap 0 \rangle \multimap 0} \quad \frac{\text{the} : \langle \langle l \multimap 0 \rangle \multimap 0 \rangle \multimap 1 \quad x : \langle l \multimap 0 \rangle \multimap 0}{\text{the}(x) : l \multimap 1}
\end{array}$$

Σχήμα 3.7: Δύο κλειστές αποδείξεις τοπικότητας του όρου $y(\text{the}(x))$

Επομένως, αν για δύο κλειστές αποδείξεις τοπικότητας Π_1 και Π_2 ενός όρου A , $\Pi_1 \leq \Pi_2$, τότε η Π_1 εκφράζει μία «πιο τοπική» συμπεριφορά τοπικότητας του A απ' ό τι η Π_2 . Έχουμε ήδη δει ότι η συμπεριφορά τοπικότητας του A όπως εκφράζεται από μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας εξαρτάται από τους δείκτες τοπικότητας εισόδου που έχουν οι σταθερές που εμφανίζονται σε αυτόν. Επομένως, ξέρουμε ήδη ότι αν μία σταθερά c έχει δύο δείκτες τοπικότητας εισόδου που δεν είναι συγκρίσιμοι ως προς της σχέση 'μικρότερος από ή ίσος με', τότε οι αντίστοιχες κλειστές αποδείξεις τοπικότητας του A είναι μη συγκρίσιμες ως προς τη διάταξη 'πιο τοπική από'.

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι εξετάζουμε μόνο τις κλειστές αποδείξεις τοπικότητας ενός όρου A που σχηματίζονται ως προς συγκεκριμένους κλειστούς δείκτες τοπικότητας εισόδου των σταθερών που εμφανίζονται σε αυτόν (ή ακόμα ως προς συγκρίσιμους δείκτες). Δεν είναι εν τούτοις αλήθεια ότι μπορούμε πάντα να διατάζουμε αυτές τις αποδείξεις ως προς τη σχέση 'μικρότερη από ή ίση με' (δείτε, για παράδειγμα, τις δύο κλειστές αποδείξεις τοπικότητας στο Σχήμα 3.7).

Παρ' όλα αυτά, θα δείξουμε ότι υπό ορισμένες φυσικές συνθήκες, μπορούμε να προσδιορίσουμε μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας ενός όρου A η οποία είναι μέγιστα τοπική, δηλαδή πιο τοπική από όλες τις κλειστές αποδείξεις τοπικότητάς του. Για να το κάνουμε αυτό, θα προσπαθήσουμε πρώτα να απαντήσουμε στο άλλο ερώτημα που διατυπώσαμε στη σελίδα 72 — δηλαδή, υπάρχει μία κατάλληλη σήμανση του δέντρου σχηματισμού του A που «εκφράζει» όλες τις πιθανές κλειστές αποδείξεις τοπικότητας του A ;

Ορισμός 3.3.4. (Διάγραμμα Απόδειξης Τοπικότητας ενός Όρου) Ένα διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας (*locality proof schema*) του A είναι ένα ζεύγος

$$(T_A, \text{COND}_A)$$

τέτοιο ώστε

$$T : \frac{\frac{\Box : \langle l \Downarrow b_5 \rangle \Downarrow b_6 \quad \frac{\text{run} : \langle l \Downarrow b_1 \rangle \Downarrow b_2 \quad x : l \Downarrow b_3}{\text{run}(x) : l \Downarrow b_4} (*)}{\Box(\text{run}(x)) : l \Downarrow b_7} (**)$$

$$\text{COND} = \{b_1 = b_3, b_5 = 1, b_4 = b_5, b_7 \leq b_3, b_4 \leq b_3\}$$

Σχήμα 3.8: Διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας του όρου $\Box(\text{run}(x))$.

1. το T_A είναι το δέντρο σχηματισμού του A τέτοιο ώστε κάθε υποόρος συνοδεύεται από κατάλληλη ετικέτα που περιλαμβάνει ένα δείκτη τοπικότητας του τύπου του. Τα σύμβολα δείκτη είναι όλα μεταβλητές δείκτη και καμία μεταβλητή δείκτη δεν εμφανίζεται περισσότερο από μία φορά.
2. το COND_A είναι ένα (πεπερασμένο) σύνολο ισοτήτων και ανισοτήτων της μορφής

$$b_i = b_j, \quad b_i = 1, \quad b_i \leq b_j$$

όπου οι b_i, b_j είναι μεταβλητές δείκτη που εμφανίζονται στο T_A , και

3. Για κάθε αποτίμηση $\rho : \{\text{Μεταβλητές Δείκτη}\} \rightarrow \{0, 1\}$, αν η ρ ικανοποιεί τις ισότητες και τις ανισότητες του συνόλου COND_A , τότε το δέντρο $\rho(T_A)$ είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του A .

Παρατηρούμε ότι το $\rho(T_A)$ είναι το δέντρο που σχηματίζεται αν εφαρμόσουμε την ρ σε όλες τις μεταβλητές δείκτη που εμφανίζονται στο T_A .

Παράδειγμα 3.3.5. Ας εξετάσουμε το διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας του όρου $\Box(\text{run}(x))$ (Σχήμα 3.8). Οι δείκτες τοπικότητας που συνοδεύουν τους υποόρους του όρου έχουν μόνο μεταβλητές δείκτη. Οι συνθήκες είναι τέτοιες ώστε εκφράζουν τους βασικούς περιορισμούς που επιβάλλονται από τους αντίστοιχους κανόνες των κλειστών αποδείξεων τοπικότητας που χρησιμοποιούμε.

Επομένως, η εφαρμογή του κανόνα (LP-APP) στο σημείο $(*)$ επιβάλλει τις συνθήκες $\{b_1 = b_3, b_4 \leq b_3\}$ ενώ στο $(**)$ η εφαρμογή του ίδιου κανόνα επιβάλλει τις $\{b_4 = b_5, b_7 \leq b_3\}$. Η ισότητα $\{b_5 = 1\}$ επιβάλλεται από τον κανόνα (LP-CON) για τη σταθερά \Box . Στην περίπτωση της σταθεράς run , δε χρειάζεται καμία ισότητα διότι τόσο ο $\langle l \Downarrow 0 \rangle$ όσο και ο $\langle l \Downarrow 1 \rangle$ είναι κλειστοί δείκτες τοπικότητας εισόδου της. Είναι επομένως σαφές ότι για κάθε αποτίμηση $\rho : \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\} \rightarrow \{0, 1\}$ τέτοια ώστε η ρ ικανοποιεί το COND , το δέντρο $\rho(T)$ είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του $\Box(\text{run}(x))$.

$$c : \langle l \vdash b_1, l \vdash b_2 \rangle \vdash b_3$$

$$\text{COND}_c = \{b_1 = 1\} \quad \text{or} \quad \text{COND}'_c = \{b_2 = 1\}$$

Σχήμα 3.9: Διαγράμματα απόδειξης τοπικότητας της c

Γενικά, το σύνολο των συνθηκών COND_A που περιγράφονται στον ορισμό του διαγράμματος απόδειξης τοπικότητας ενός όρου A είναι πάντα ικανοποιήσιμο από τουλάχιστον την αποτίμηση που αναθέτει την τιμή 1 σε όλες τις μεταβλητές που εμφανίζονται στο αντίστοιχο δέντρο T_A . Είναι τετριμμένο ότι μία τέτοια αποτίμηση ικανοποιεί κάθε τέτοιο σύνολο συνθηκών και το αντίστοιχο δέντρο είναι απλά η κανονική κλειστή απόδειξη τοπικότητας του όρου A . Είναι επίσης προφανές ότι για κάθε A υπάρχει τουλάχιστον ένα διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας — το διάγραμμα το οποίο είναι τέτοιο ώστε υπάρχει μία ισότητα $\{b_i = 1\}$ στο σύνολο των συνθηκών COND για κάθε μεταβλητή δείκτη b_i που εμφανίζεται στο T .

Γενικά, ένας όρος A δεν έχει ένα μοναδικό διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας. Το δέντρο T_A είναι φυσικά μοναδικό μέχρι αλφαριθμητικής μετονομασίας των μεταβλητών δείκτη που εμφανίζονται σε αυτό, αλλά το σύνολο των συνθηκών μπορεί να διαφέρει.

Παράδειγμα 3.3.6. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, μία σταθερά $c : \tilde{\epsilon} \times \tilde{\epsilon} \rightarrow \tilde{\iota}$ που έχει τρεις κλειστούς δείκτες τοπικότητας εισόδου: $\langle l \vdash 0, l \vdash 1 \rangle$, $\langle l \vdash 1, l \vdash 0 \rangle$ και φυσικά, $\langle l \vdash 1, l \vdash 1 \rangle$. Στο Σχήμα 3.9, παρουσιάζονται δύο από τα πιθανά διαγράμματα απόδειξης τοπικότητας της c .

Για να απαντήσουμε στο αρχικό μας ερώτημα, χρειάζεται να επιλέξουμε ένα διάγραμμα (T_A, COND_A) του A τέτοιο ώστε για κάθε Π_A , η ρ είναι μία αποτίμηση τέτοια ώστε $\rho(T_A) = \Pi_A$ αν και μόνο αν η ρ ικανοποιεί το COND_A .

Ορισμός 3.3.7. (Παραμετρικό Διάγραμμα Απόδειξης Τοπικότητας ενός Όρου) Ένα παραμετρικό διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας (*generic locality proof schema*) του A είναι ένα διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας (T_A, COND_A) του A τέτοιο ώστε κάθε κλειστή απόδειξη τοπικότητας του A ταυτίζεται με το $\rho(T_A)$ για κάποια αποτίμηση ρ που ικανοποιεί το COND_A .

Πρώτα, χρησιμοποιούμε αυτόν τον ορισμό στην ακόλουθη τετριμμένη πρόταση.

Πρόταση 3.3.8. Έστω ότι το (T_A, COND_A) είναι ένα παραμετρικό διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας του A . Τότε, μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας Π_1 του A είναι πιο τοπική από την Π_2 ($\Pi_1 \leq \Pi_2$) αν και μόνο

αν, δοθέντων αποτιμήσεων ρ_1 και ρ_2 οι οποίες ικανοποιούν το COND_A και $\rho_1(T_A) = \Pi_1$ και $\rho_2(T_A) = \Pi_2$, για κάθε μεταβλητή δείκτη b που εμφανίζεται στο T_A , $\rho_1(b) \leq \rho_2(b)$.

Δεύτερον, δεν είναι πάντα αλήθεια ότι ένας όρος A έχει ένα παραμετρικό διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας (δείτε για παράδειγμα τη σταθερά c στο Παράδειγμα 3.3.6). Το Θεώρημα 3.3.11 περιγράφει υπό ποιες συνθήκες ένας όρος A έχει παραμετρικό διάγραμμα αλλά στη συνέχεια, θα δείξουμε πρώτα ότι κάθε όρος A έχει το πολύ ένα.

Ορισμός 3.3.9. Δύο σύνολα ισοτήτων και ανισοτήτων, όπως αυτά στον Ορισμό 3.3.4, COND_1 και COND_2 άνω στο ίδιο (μέχρι αλφαριθμητικής μετονομασίας) σύνολο μεταβλητών δείκτη είναι *ισοδύναμα* (*equivalent*) αν, για κάθε αποτίμηση ρ , η ρ ικανοποιεί το COND_1 αν και μόνο αν μία αλφαριθμητική παραλλαγή της ρ ικανοποιεί το COND_2 .

Για παράδειγμα, τα δύο σύνολα $\{b_i = b_j, b_i = 1\}$ και $\{b'_j = 1, b'_j \leq b'_i\}$ είναι ισοδύναμα.

Πρόταση 3.3.10. Κάθε όρος $A : \tilde{\sigma}$ έχει το πολύ ένα (μέχρι αλφαριθμητικής μετονομασίας των μεταβλητών δείκτη και μέχρι ισοδύναμων συνόλων συνθηκών) παραμετρικό διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι ο όρος A έχει δύο παραμετρικά διαγράμματα απόδειξης τοπικότητας: (T_A, COND_A) και (T'_A, COND'_A) . Τότε, όπως έχουμε ήδη αναφέρει στον ορισμό του διαγράμματος απόδειξης τοπικότητας, τα T_A και T'_A είναι ταυτόσημα μέχρι αλφαριθμητικής μετονομασίας των μεταβλητών δείκτη που εμφανίζονται σε αυτά.

Τώρα, τα σύνολα COND_A και COND'_A μπορεί να περιλαμβάνουν διαφορετικές ισότητες και ανισότητες, που εμπεριέχουν ακόμα και διαφορετικές μεταβλητές δείκτη. Θα δείξουμε ωστόσο ότι αυτά είναι ισοδύναμα.

Έστω ότι η ρ είναι μία αποτίμηση των μεταβλητών δείκτη του T_A τέτοια ώστε η ρ ικανοποιεί το COND_A . Επομένως, $\rho(T_A) = \Pi_A$ όπου η Π_A είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του A . Σύμφωνα με τον ορισμό, υπάρχει μία αποτίμηση ρ' των μεταβλητών δείκτη του T'_A τέτοια ώστε ικανοποιεί το COND'_A και $\rho'(T'_A) = \Pi_A$. \dashv

Έχουμε επισημάνει ήδη ότι η συμπεριφορά τοπικότητας ενός όρου A εξαρτάται από τις συμπεριφορές τοπικότητας των σταθερών που εμφανίζονται σε αυτόν. Για να μπορέσουμε επομένως να καταλάβουμε πότε ένας όρος έχει παραμετρικό διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας, θα πρέπει να ξεκινήσουμε διερευνώντας κατά πόσο κάθε σταθερά με εξαρτώμενο από την κατάσταση τύπο στο

σύνολο K έχει ένα τέτοιο διάγραμμα. Έχουμε δει ήδη στο Παράδειγμα 3.3.6 ότι αυτό δεν συμβαίνει στη γενική περίπτωση. Με άλλα λόγια, μπορούμε πάντα να προσθέσουμε μία σταθερά στο K η οποία να μην έχει παραμετρικό διάγραμμα κι επομένως, να διαψεύσουμε κάθε τέτοιο ισχυρισμό.

Από την άλλη μεριά, θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ένας κλειστός δείκτης εισόδου ℓ μιας σταθεράς $c : \tilde{\sigma}$ δεν προσδίδεται σε αυτήν αυθαίρετα. Είναι κλειστός δείκτης τοπικότητας εισόδου της υποδήλωσής της c — δηλαδή, σύμφωνα με το Κεφάλαιο 2, η c έχει συναφή συνάρτηση ως προς αυτόν. Επομένως, στην περίπτωση της σταθεράς στο Παράδειγμα 3.3.6, αντί των δεικτών, θα έπρεπε να είχαμε προσδιορίσει τη συνάρτηση υποδήλωσής της και στη συνέχεια, να είχαμε αποδείξει ότι αυτή έχει συναφή συνάρτηση ως προς τους τρεις δοσμένους δείκτες τοπικότητας εισόδου.

Γενικά, η ερμηνεία των σταθερών του συνόλου K της γλώσσας $L_{ar}^\lambda(K)$ συνδέεται με τη συμπεριφορά τοπικότητάς τους. Είναι η υποδήλωση της σταθεράς $rise : \tilde{e} \rightarrow \tilde{t}$ που καθορίζει τη μη τοπική μεταχείριση του ορίσμάτός της η οποία «κωδικοποιείται» στον δείκτη εισόδου της $\langle l \vdash 1 \rangle$. Το παραμετρικό διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας της σταθεράς $rise$ είναι

$$T_{rise} \equiv rise : \langle l \vdash b_1 \rangle \vdash b_2, \quad COND_{rise} = \{b_1 = 1\}.$$

Η μη τοπική μεταχείριση ενός ορίσματος της υποδήλωσης μιας σταθεράς, ή με άλλα λόγια, ο «εντασιακός χαρακτήρας» της, είναι ένα γνώρισμα τοπικότητας που τη χαρακτηρίζει και σε ένα παραμετρικό διάγραμμα, αυτό εκφράζεται από τις συνθήκες της μορφής $b_i = 1$. Αντίθετα, η τοπική μεταχείριση του ορίσματος ενός αντικειμένου, δεν «επιβάλλει» την μη τοπική. Επομένως, το παραμετρικό διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας της $former$ είναι

$$T_{former} \equiv former : \langle \langle l \vdash b_1 \rangle \vdash b_2, l \vdash b_3 \rangle \vdash b_4, \quad COND_{former} = \{b_2 = 1\}.$$

Ας εξετάσουμε τώρα ένα παράδειγμα μιας σταθεράς της οποίας το παραμετρικό διάγραμμα απαιτεί τη χρήση ανισοτήτων μεταξύ των μεταβλητών δείκτη. Έστω ότι η σταθερά $eval : (\tilde{e} \rightarrow \tilde{t}) \times \tilde{e} \rightarrow \tilde{t}$ είναι τέτοια ώστε για $f_1 : \tilde{e} \rightarrow \tilde{t}, f_2 : \tilde{e}, a : s$,

$$eval(f_1, f_2, a) = 1 \iff f_1(f_2, a) = 1.$$

Για παράδειγμα, θεωρείστε την υποδήλωση των όρων $eval(rise, the(temp))$ και $eval(run, John)$. Το παραμετρικό διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας αυτής της σταθεράς είναι

$$T_{eval} \equiv eval : \langle \langle l \vdash b_1 \rangle \vdash b_2, l \vdash b_3 \rangle \vdash b_4, \quad COND_{eval} = \{b_1 \leq b_3\}.$$

Είναι ανοικτό ζήτημα κατά πόσο οι σταθερές στο σύνολο K που αποδίδουν εκφράσεις τις φυσικής γλώσσας είναι τέτοιες ώστε η συμπεριφορά τοπικότητάς τους μπορεί να περιγραφεί πλήρως με τη χρήση των συνθηκών που εισάγονται εδώ. Είναι όμως φανερό ότι αυτό μπορεί να γίνει τουλάχιστον για όλες αυτές που προέρχονται από σχετικά φυσικά παραδείγματα.

Τέλος, παρατηρούμε επίσης ότι οι ισότητες και οι ανισότητες μεταξύ των μεταβλητών δείκτη που περιλαμβάνονται στις συνθήκες ενός παραμετρικού διαγράμματος απόδειξης τοπικότητας χρησιμοποιούνται επίσης για να εκφραστούν οι περιορισμοί των αποδείξεων τοπικότητας.

Θεώρημα 3.3.11. Έστω ότι κάθε σταθερά που εμφανίζεται στον όρο A έχει παραμετρικό διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας. Τότε,

- (i) ο A έχει παραμετρικό διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας, και
- (ii) ο A έχει μία μέγιστα τοπική κλειστή απόδειξη τοπικότητας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Η απόδειξη είναι με επαγωγή στον A .

(1) $A \equiv c$. Ισχύει από την υπόθεση του θεωρήματος.

(2) $A \equiv x$. Τετριμμένα, το παραμετρικό διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας της x είναι απλά ένα ζεύγος (T_x, COND_x) όπου $T_x \equiv x : \ell \vdash t$, όπου ο $\ell \vdash t$ είναι ο παραμετρικός δείκτης τοπικότητας του τύπου της x και $\text{COND}_x = \emptyset$.

(3) $A \equiv B(C)$. Έστω ότι (T_B, COND_B) και (T_C, COND_C) είναι τα παραμετρικά διαγράμματα απόδειξης τοπικότητας των όρων B και C αντίστοιχα, με διαφορετικές μεταξύ τους μεταβλητές δείκτη. Αν ο $\ell'_2 \vdash b'$ είναι ο παραμετρικός δείκτης τοπικότητας του $B(C)$ με καινούργιες μεταβλητές δείκτη, τότε

$$T_{B(C)} := \frac{\begin{array}{cc} T_B & T_C \\ \vdots & \vdots \\ B : \langle \ell_1 \vdash b_1, \ell_2 \rangle \vdash b & C : \ell'_1 \vdash b'_1 \end{array}}{B(C) : \ell'_2 \vdash b'}$$

και το σύνολο των συνθηκών είναι

$$\begin{aligned} \text{COND}_{B(C)} &:= \text{COND}_B \cup \text{COND}_C \\ &\cup \{ \ell_1 \vdash b_1 = \ell'_1 \vdash b'_1 \} \cup \{ \ell_2 = \ell'_2 \} \\ &\cup \{ \ell_x \vdash b_x = \ell'_x \vdash b'_x \mid \text{για κάθε } x \text{ τέτοιο ώστε η } x : \ell_x \vdash b_x \\ &\quad \text{εμφανίζεται ελεύθερη στο } T_B \text{ και} \\ &\quad \text{η } x : \ell'_x \vdash b'_x \text{ στο } T_C \} \\ &\cup \{ b' \leq b_x \mid \text{για κάθε } x \text{ που εμφανίζεται ελεύθερη στο } T_{B(C)} \\ &\quad \text{με δείκτη εξόδου } b_x \}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε φορά, ο περιορισμός που επιβάλλεται από τον κανόνα εκφράζεται από ένα σύνολο συνθηκών που περιλαμβάνονται στο $\text{COND}_{B(C)}$. Για παράδειγμα, για να μπορέσουμε να έχουμε $\ell_2 = \ell'_2$, προσθέτουμε ένα σύνολο ισοτήτων μεταξύ των αντιστοίχων ζευγών των μεταβλητών δείκτη που εμφανίζονται στους ℓ_2 και ℓ'_2 .

Το ζεύγος $(T_{B(C)}, \text{COND}_{B(C)})$ είναι διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας του $B(C)$ αφού οι ισότητες και οι ανισότητες που προστίθενται στο σύνολο $\text{COND}_{B(C)}$ αντικατοπτρίζουν τους περιορισμούς του κανόνα (LP-APP) και επομένως, κάθε αποτίμηση ρ που τις ικανοποιεί είναι τέτοια ώστε η $\rho(T_{B(C)})$ είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του όρου $B(C)$.

Δείχνουμε στη συνέχεια ότι αυτό το διάγραμμα είναι παραμετρικό. Έστω μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας $\Pi_{B(C)}$ του $B(C)$ και έστω ότι οι Π_B και Π_C είναι οι υποαποδείξεις των B και C αντίστοιχα που ορίζονται από αυτήν.

$$\Pi_{B(C)} \equiv \frac{\begin{array}{cc} \Pi_B & \Pi_C \\ \vdots & \vdots \\ B : \langle \ell \hookrightarrow t_1, \ell' \rangle \hookrightarrow t & C : \ell \hookrightarrow t_1 \end{array}}{B(C) : \ell' \hookrightarrow t'}$$

Από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχουν αποτιμήσεις ρ_B και ρ_C που ικανοποιούν τα COND_B και COND_C αντίστοιχα, τέτοιες ώστε $\rho_B(T_B) = \Pi_B$ και $\rho_C(T_C) = \Pi_C$.

Έστω τώρα η αποτίμηση ρ_0 των μεταβλητών δείκτη της ετικέτας ρίζας του $T_{B(C)}$ τέτοια ώστε

$$\rho_0(\ell'_2 \hookrightarrow b') = \ell' \hookrightarrow t'.$$

Ισχυριζόμαστε ότι η αποτίμηση

$$\rho = \rho_B \cup \rho_C \cup \rho_0$$

είναι τέτοια ώστε $\rho(T_{B(C)}) = \Pi_{B(C)}$ και η ρ ικανοποιεί το $\text{COND}_{B(C)}$. Αυτό έπεται άμεσα από τα ακόλουθα:

- Δεδομένου ότι τα T_B, T_C και $\ell'_2 \hookrightarrow b'$ έχουν διαφορετικές μεταξύ τους μεταβλητές δείκτη, οι αποτιμήσεις ρ_B, ρ_C και ρ_0 δρουν σε ξένα μεταξύ τους σύνολα μεταβλητών δείκτη.
- Δεδομένου ότι η $\Pi_{B(C)}$ είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του όρου $B(C)$, οι ρ_B και ρ_C ικανοποιούν το $\text{COND}_{B(C)}$, δηλαδή,
 - $\rho_B(\ell_1 \hookrightarrow b_1) = \rho_C(\rho'_1 \hookrightarrow b'_1) = \ell \hookrightarrow t_1$,
 - αν η $x : \ell_x \hookrightarrow b_x$ εμφανίζεται στο T_B και η $x : \ell'_x \hookrightarrow b'_x$ εμφανίζεται στο T_C , τότε $\rho_B(\ell_x \hookrightarrow b_x) = \rho_C(\ell'_x \hookrightarrow b'_x)$ και τέλος,

- αν η $x : \ell_x \hookrightarrow b_x$ εμφανίζεται ελεύθερη στο $T_{B(C)}$, τότε, αν για παράδειγμα, εμφανίζεται ελεύθερη στο B , $\rho_0(b') \leq \rho_B(b_x)$.
- Η ρ_0 δρα μόνο σε καινούργιες μεταβλητές και απλά προσθέτει τις ισότητες που επιβάλλονται από την $\rho_0(\ell'_2 \hookrightarrow b') = \ell' \hookrightarrow t'$, κι επομένως, εξ ορισμού, σέβεται το σύνολο $\text{COND}_{B(C)}$.

(4) $A \equiv \lambda(v)(B)$. Έστω ότι το (T_B, COND_B) είναι ένα παραμετρικό διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας του B . Αν ο $\langle \ell_v \hookrightarrow b_v, \ell' \rangle \hookrightarrow b'$ είναι ένας παραμετρικός δείκτης τοπικότητας του τύπου του $\lambda(v)(B)$ με καινούργιες μεταβλητές δείκτη, τότε

$$T_{\lambda(v)(B)} := \frac{\begin{array}{c} T_B \\ \vdots \\ B : \ell \hookrightarrow b \end{array}}{\lambda(v)(B) : \langle \ell_v \hookrightarrow b_v, \ell' \rangle \hookrightarrow b'}$$

και το σύνολο των συνθηκών είναι

$$\begin{aligned} \text{COND}_{\lambda(v)(B)} &:= \text{COND}_B \cup \{\ell = \ell'\} \\ &\cup \{\ell_v \hookrightarrow b_v = \ell'_v \hookrightarrow b'_v \mid \text{αν η } v : \ell'_v \hookrightarrow b'_v \text{ εμφανίζεται ελεύθερη} \\ &\quad \text{στο } T_B\} \\ &\cup \{b' \leq b_x \mid \text{για κάθε } x \text{ που εμφανίζεται ελεύθερη στο } T_{\lambda(v)(B)} \\ &\quad \text{με δείκτη εξόδου } b_x\}. \end{aligned}$$

Οι ισότητες και οι ανισότητες που προστίθενται στο $\text{COND}_{\lambda(v)(B)}$ αντικατοπτρίζουν τους περιορισμούς του κανόνα (LP- λ -INTRO) κι επομένως, κάθε αποτίμηση ρ που τις ικανοποιεί είναι τέτοια ώστε η $\rho(T_{\lambda(v)(B)})$ είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του $\lambda(v)(B)$.

Έστω ότι η $\Pi_{\lambda(v)(B)}$ είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του $\lambda(v)(B)$ και έστω ότι η Π_B είναι η κλειστή υποαπόδειξη τοπικότητας του B που ορίζεται από αυτήν.

$$\Pi_{\lambda(v)(B)} \equiv \frac{\begin{array}{c} \Pi_B \\ \vdots \\ B : \ell_1 \hookrightarrow t_1 \end{array}}{\lambda(v)(B) : \langle \ell_0 \hookrightarrow t_0, \ell_1 \rangle \hookrightarrow t}$$

Αν η ρ_B είναι μια αποτίμηση τέτοια ώστε $\rho_B(T_B) = \Pi_B$ και η ρ_0 είναι τέτοια ώστε

$$\rho_0(\langle \ell_v \hookrightarrow b_v, \ell' \rangle \hookrightarrow b') = \langle \ell_0 \hookrightarrow t_0, \ell_1 \rangle \hookrightarrow t,$$

έπεται εύκολα ότι

$$(\rho_B \cup \rho_0)(T_{\lambda(v)(B)}) = \Pi_{\lambda(v)(B)}.$$

(5) $A \equiv A_0$ where $\{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}$. Έστω ότι για $i = 0, \dots, n$, τα $(T_{A_i}, \text{COND}_{A_i})$ είναι παραμετρικά διαγράμματα απόδειξης τοπικότητας των A_i με διαφορετικές μεταξύ τους μεταβλητές δείκτη. Αν ο $\ell'_0 \vdash b'$ είναι ένας παραμετρικός δείκτης τοπικότητας του τύπου του A με καινούργιες μεταβλητές δείκτη, τότε

$$T_A \equiv \frac{\begin{array}{ccc} T_{A_0} & T_{A_1} & T_{A_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_0 : \ell_0 \vdash b & A_1 : \ell_1 \vdash b_1 & \dots \quad A_n : \ell_n \vdash b_n \end{array}}{A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\} : \ell'_0 \vdash b'}$$

και το σύνολο των συνθηκών, ανάλογα, είναι

$$\begin{aligned} \text{COND}_A &\equiv \text{COND}_{A_0} \cup \dots \cup \text{COND}_{A_n} \cup \{\ell_0 \vdash b = \ell'_0 \vdash b'\} \\ &\cup \{\ell_x \vdash b_x = \ell'_x \vdash b'_x \mid \text{για κάθε } x \text{ τέτοια ώστε } \eta \ x : \ell_x \vdash b_x \\ &\quad \text{εμφανίζεται ελεύθερη σε κάποιο } T_{A_i} \\ &\quad \text{και } \eta \ x : \ell'_x \vdash b'_x \text{ σε } T_{A_j}\} \\ &\cup \{\ell_{p_i} \vdash b_{p_i} = \ell_i \vdash b_i \mid \text{αν } \eta \ p_i : \ell_{p_i} \vdash b_{p_i} \text{ εμφανίζεται ελεύθερη} \\ &\quad \text{σε κάποιο } A_j\} \\ &\cup \{b' \leq b_x \mid \text{για κάθε } x \text{ που εμφανίζεται ελεύθερη στο } T_A \\ &\quad \text{με δείκτη εξόδου } b_x\}. \end{aligned}$$

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, είναι τετριμμένο ότι οποιαδήποτε αποτίμηση ρ που ικανοποιεί το COND_A είναι τέτοια ώστε η $\rho(T_A)$ είναι κλειστή απόδειξη τοπικότητας του A κι επομένως, το ζεύγος (T_A, COND_A) είναι ένα διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας του A .

Έστω τώρα ότι η Π_A είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του A και $\Pi_{A_0}, \dots, \Pi_{A_n}$ είναι οι κλειστές αποδείξεις τοπικότητας των A_0, \dots, A_n αντίστοιχα, που ορίζονται από αυτήν.

$$\Pi_A \equiv \frac{\begin{array}{ccc} \Pi_{A_0} & \Pi_{A_1} & \Pi_{A_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_0 : \ell \vdash t_0 & A_1 : \ell'_1 \vdash t_1 & \dots \quad A_n : \ell'_n \vdash t_n \end{array}}{A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\} : \ell \vdash t_0}$$

Αν, για $i = 0, \dots, n$, $\rho_{A_i}(T_{A_i}) = \Pi_{A_i}$ και η ρ_0 είναι τέτοια ώστε

$$\rho_0(\ell'_0 \mapsto b') = \ell \mapsto t_0,$$

έπεται ανάλογα ότι

$$(\rho_{A_0} \cup \dots \cup \rho_{A_n} \cup \rho_0)(T_A) = \Pi_A.$$

(ii) Θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του A , η Π_0 , τέτοια ώστε για κάθε κλειστή απόδειξη τοπικότητας Π_A του A , $\Pi_0 \leq \Pi_A$.

Έστω ότι το (T_A, COND_A) είναι ένα παραμετρικό διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας του A , έστω ότι το V είναι το πεπερασμένο σύνολο των μεταβλητών δείκτη που εμφανίζονται στο T_A και έστω ότι το W είναι, αρχικά, το κενό σύνολο.

Θα περιγράψουμε μία διαδικασία σύμφωνα με την οποία θα αφαιρούμε μεταβλητές δείκτη από το V και θα τις τοποθετούμε στο W με κριτήριο το κατά πόσο θα πρέπει να τους δώσουμε ή όχι την τιμή 1.

Κατ' επανάληψη, κάνουμε τα εξής:

1. Για κάθε $b \in V$, αν $\{b = 1\} \subseteq \text{COND}_A$, ενημερώνουμε τα σύνολα ως εξής: $V = V \setminus \{b\}$ και $W = W \cup \{b\}$.
2. Για κάθε $b \in V$, αν $\{b = b'\} \subseteq \text{COND}_A$ ή $\{b' \leq b\} \subseteq \text{COND}_A$ όπου $b' \in W$, τα σύνολα ενημερώνονται ως εξής: $V = V \setminus \{b\}$ και $W = W \cup \{b\}$.

Παρατηρούμε ότι η διαδικασία τερματίζει αφού το σύνολο V είναι πεπερασμένο.

Τώρα, τετριμμένα, κάθε αποτίμηση ρ που ικανοποιεί το COND_A πρέπει να είναι τέτοια ώστε για κάθε $b \in W$, $\rho(b) = 1$. Ας θεωρήσουμε τώρα την αποτίμηση ρ_0 τέτοια ώστε

$$\rho_0(b) = \begin{cases} 1, & \text{αν } b \in W \\ 0, & \text{αν } b \in V. \end{cases}$$

Πρώτα, η ρ_0 ικανοποιεί το COND_A . Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για κάθε $b \in V$, δεν υπάρχει ισότητα της μορφής $b = 1$, $b' = b$ ή $b' \leq b$ όπου $b' \in W$, κι επομένως, τετριμμένα, αν αναθέσουμε την τιμή 0 σε όλες τις μεταβλητές οι δοσμένες ισότητες και ανισότητες ικανοποιούνται.

Δεύτερον, για κάθε ρ τέτοια ώστε ικανοποιείται το COND_A , για κάθε b , $\rho_0(b) \leq \rho(b)$. Επομένως, αν η Π_0 είναι τέτοια ώστε $\rho_0(T_A) = \Pi_0$ και η Π είναι τέτοια ώστε $\rho(T_A) = \Pi$, τότε $\Pi_0 \leq \Pi$. \dashv

Αυτό είναι το βασικό τεχνικό αποτέλεσμα της διατριβής σύμφωνα με το οποίο για κάθε όρο A , η μέγιστα τοπική κλειστή απόδειξη τοπικότητας του A αντιπροσωπεύει τη συμπεριφορά τοπικότητας που σέβεται τη συμπεριφορά τοπικότητας των σταθερών που εμφανίζονται στον A και η οποία λαμβάνει υπ' όψιν τις εξαρτήσεις τοπικότητας με τέτοιο τρόπο ώστε οι υπολογισμοί που περιλαμβάνονται να είναι όσο πιο τοπικοί γίνεται.

Κεφάλαιο 4

Τυπικές Συναφείς Συναρτήσεις Όρων

Στο Κεφάλαιο 3, ορίσαμε τις κλειστές αποδείξεις τοπικότητας κάθε όρου $A : \tilde{\sigma}$ έτσι ώστε αν η ετικέτα ρίζας είναι $A : \ell \vdash t$, τότε υπάρχει συναφής συνάρτηση της υποδήλωσης του A ως προς τον δείκτη ℓ . Οι αποδείξεις τοπικότητας ενός όρου A λαμβάνουν υπ' όψιν τους τις αλληλεξαρτήσεις τοπικότητας των υποόρων του και χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά τοπικότητάς του. Σε αυτό το κεφάλαιο, για κάθε όρο A , κάθε κλειστή απόδειξη τοπικότητας Π_A του A με ετικέτα ρίζας $A : \ell \vdash t$ και μία μεταβλητή κατάστασης u , ορίζουμε, μέσω ενός κατάλληλου συντακτικού μετασχηματισμού, τον *συναφή όρο* $A_{\Pi_A}^{*,u}$ ο οποίος ορίζει τυπικά μία συναφή συνάρτηση της υποδήλωσης του A ως προς τον ℓ^1 .

Στην Ενότητα 4.1, παρουσιάζουμε μία επέκταση της γλώσσας L_{ar}^λ , την $L_{ar}^{\lambda*}$, στην οποία θα οριστούν οι νέοι συναφείς όροι. Στη συνέχεια, ορίζουμε το *μετασχηματισμό τοπικής συνάφειας* για τους τοπικούς όρους (Ενότητα 4.2) και τον αντίστοιχο *μετασχηματισμό συνάφειας* για τους γενικούς όρους (Ενότητα 4.3). Στο Κεφάλαιο 5, θα χρησιμοποιήσουμε τον συναφή όρο του A σε μία κατάσταση a ως προς τη μέγιστα τοπική απόδειξη τοπικότητας της κανονικής του μορφής για να ορίσουμε το *αντικειμενικό περιεχόμενο του A στην a* .

¹Για συντομία, θα λέμε ότι μία συναφής συνάρτηση της υποδήλωσης του A ως προς τον δείκτη ℓ είναι απλά μία συναφής συνάρτηση ενός όρου A ως προς τον ℓ .

4.1 Μία Επέκταση της L_{ar}^λ

Όπως στην περίπτωση της LIL με τους τελεστές έντασης και έκτασης και της L_{ar}^λ με τον τελεστή αναδρομής, θα εμπλουτίσουμε την L_{ar}^λ για να μπορέσουμε να ορίσουμε τις συναφείς συναρτήσεις των όρων τυπικά σε αυτή την επεκτεταμένη γλώσσα, $L_{ar}^{\lambda*}$.

Για κάθε σταθερά $c : \tilde{\sigma} \in K$ και κάθε κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου ℓ του c , εισάγουμε στην $L_{ar}^\lambda(K)$ μία νέα σταθερά $c_\ell^* : s \rightarrow (\tilde{\sigma})_*^\ell$ η οποία υποδηλώνει την προτιμητέα συναφή συνάρτηση του c ως προς τον ℓ , δηλαδή,

$$\text{den}(c_\ell^*)(g) = c_\ell^\ell = (\text{den}(c)(g))_*^\ell.$$

Για κάθε τύπο $\tilde{\sigma}$ και κάθε κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου ℓ του $\tilde{\sigma}$, εισάγουμε επίσης, για ευκολία, άπειρες το πλήθος νέες μεταβλητές, απλές ή αναδρομής,

$$x_\ell^*, p_\ell^* : s \rightarrow (\tilde{\sigma})_*^\ell.$$

Τέλος, εισάγουμε ένα νέο κανόνα σχηματισμού όρων, την *εφαρμογή συνάφειας* (*associate application*) η οποία συμπεριφέρεται ακριβώς όπως η συνηθισμένη εφαρμογή συνάρτησης αλλά χρησιμοποιείται μόνο για τις νεοεισαχθείσες σταθερές και μεταβλητές. Επομένως, οι όροι της επεκτεταμένης γλώσσας, $L_{ar}^{\lambda*}$, ορίζονται αναδρομικά ως:

$$A ::= c \mid x \mid c_\ell^*[u] \mid x_\ell^*[u] \mid B(C) \mid \lambda(v)(B) \mid A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\} \quad (4.1)$$

όπου η x είναι μεταβλητή, απλή ή αναδρομής, οι u και v είναι απλές μεταβλητές και οι p_1, \dots, p_n είναι μεταβλητές αναδρομής. Προσδίδουμε τύπους όπως για τους όρους στον (1.8) στην Ενότητα 1.5.1 και δεδομένου ότι η εφαρμογή συνάφειας συμπεριφέρεται όπως η συνηθισμένη εφαρμογή,

$$\begin{aligned} \text{αν } c_\ell^* : s \rightarrow (\tilde{\sigma})_*^\ell \text{ και } u : s, \text{ τότε } c_\ell^*[u] : (\tilde{\sigma})_*^\ell, \\ \text{αν } x_\ell^* : s \rightarrow (\tilde{\sigma})_*^\ell \text{ και } u : s, \text{ τότε } x_\ell^*[u] : (\tilde{\sigma})_*^\ell. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η u εμφανίζεται ελεύθερη στον όρο $c_\ell^*[u]$ και τόσο η u όσο και η x_ℓ^* εμφανίζονται ελεύθερες στον $x_\ell^*[u]$.

Σε ό,τι αφορά στη δηλωτική σημασιολογία της $L_{ar}^{\lambda*}$, η δομή ερμηνείας είναι επίσης η \mathcal{U} — η δομή ερμηνείας της L_{ar}^λ που ορίστηκε στην Ενότητα 1.5.1. Η συνάρτηση υποδήλωσης που ορίζεται σε αυτή τη δομή για τους νέους όρους της εφαρμογής συνάφειας δίνεται από

$$\begin{aligned} \text{den}(c_\ell^*[u])(g) &= c_\ell^\ell(g(u)) \\ \text{den}(x_\ell^*[u])(g) &= g(x_\ell^*)(g(u)) \end{aligned}$$

Πριν ορίσουμε την κανονική μορφή των όρων της επεκτατεμένης γλώσσας, πρέπει να επανεξετάσουμε τους άμεσους όρους της $\mathcal{L}_{\text{ar}}^{\lambda*}$. Έστω οι ακόλουθοι όροι που ορίζονται από την εφαρμογή συνάφειας για μία απλή μεταβλητή v και μία μεταβλητή αναδρομής p όπου ο ℓ είναι ένας δείκτης τοπικότητας εισόδου κατάλληλου τύπου:

$$v_\ell^*[u] \text{ και } p_\ell^*[u].$$

Θεωρούνται ως γενικευμένες μεταβλητές (*generalized variables*) (απλές και αναδρομής, αντίστοιχα) που σημαίνει ότι οι άμεσοι όροι της $\mathcal{L}_{\text{ar}}^{\lambda*}$ είναι οι

$$X ::= V_i \mid P(V_1, \dots, V_n) \mid \lambda(v_1, \dots, v_m, u)(P(V_1, \dots, V_n)) \quad (4.2)$$

$$V_i ::= v_i \mid v_{i,\ell_i}^*[u_i], \quad P ::= p \mid p_\ell^*[u_i]$$

όπου οι $v_i, v_{i,\ell_i}^*, v_1, \dots, v_m, u_i, u$ είναι απλές μεταβλητές και οι p και p_ℓ^* είναι μεταβλητές αναδρομής. Για παράδειγμα, οι παρακάτω όροι είναι άμεσοι:

$$p_\ell^*[u](v_{\ell'}^*[u]), \quad p_\ell^*(u, v_{\ell'}^*[u]), \quad \lambda(u)p_\ell^*(u, v_{\ell'}^*[u]).$$

Παρατηρούμε ότι αν οι $v : \tilde{\sigma} \rightarrow \tilde{\tau}$ και $w : \tilde{\sigma}$ είναι απλές μεταβλητές, ενώ ο όρος $v(w)$ δεν είναι άμεσος στην $\mathcal{L}_{\text{ar}}^\lambda$, ο όρος $v_\ell^*[u]$ όπου $u : s$ είναι άμεσος στην $\mathcal{L}_{\text{ar}}^{\lambda*}$. Η ιδέα είναι ότι η εφαρμογή συνάφειας θα χρησιμοποιηθεί σε ιδιαίτερες περιπτώσεις για να υπολογιστεί η τιμή ενός αντικειμένου σε μία κατάσταση, και επομένως, όπως στην περίπτωση εφαρμογών όπως η $p(w)$ όπου η p είναι μία μεταβλητή αναδρομής, θα πρέπει να εκτελείται χωρίς «υπολογιστικό κόστος» στο Λογισμό Αναγωγής της γλώσσας $\mathcal{L}_{\text{ar}}^{\lambda*}$.

Ο Λογισμός Αναγωγής της $\mathcal{L}_{\text{ar}}^{\lambda*}$ είναι ακριβώς ίδιος με πριν (Πίνακας 1.3), και επομένως, οι όροι εφαρμογής συνάφειας $c_\ell^*[u]$ και $x_\ell^*[u]$ είναι μη αναγώγιμοι.

Πρόταση 4.1.1. (Θεώρημα 3.12 στο [22])

- (a) Οι σταθερές και οι άμεσοι όροι είναι μη αναγώγιμοι.
- (b) Οι όροι εφαρμογής συνάφειας $c_\ell^*[u]$ και $x_\ell^*[u]$ είναι μη αναγώγιμοι.
- (c) Ένας όρος εφαρμογής $B(C)$ είναι μη αναγώγιμος αν και μόνο αν ο όρος C είναι άμεσος και ο B είναι ρητός και μη αναγώγιμος.
- (d) Ένας λ-όρος $\lambda(u)(B)$ είναι μη αναγώγιμος αν και μόνο αν ο όρος B είναι ρητός και μη αναγώγιμος.
- (e) Ένας αναδρομικός όρος A_0 where $\{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}$ είναι μη αναγώγιμος αν και μόνο αν όλα τα μέρη A_0, \dots, A_n είναι μη αναγώγιμοι όροι.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η περίπτωση (b) είναι προφανής από την επισκόπηση των κανόνων αναγωγής. ⊣

Παρατηρούμε επίσης ότι η σχέση σύμπτωσης είναι η ίδια όπως πριν (σελίδα 20) και δεδομένου ότι οι όροι εφαρμογής συνάφειας είναι μη αναγώγιμοι, έχουμε

$$\begin{aligned} \text{cf}(c_\ell^*[u]) &\equiv c_\ell^*[u] \text{ where } \{ \} \\ \text{cf}(x_\ell^*[u]) &\equiv x_\ell^*[u] \text{ where } \{ \}. \end{aligned}$$

Το Θεώρημα Κανονικής Μορφής (Θεώρημα 1.5.1) επεκτείνεται εδώ χωρίς αλλαγές, που σημαίνει ότι στη $L_{\text{ar}}^{\lambda*}$, για κάθε όρο A υπάρχει ένας μοναδικός (μέχρι σύμπτωσης), μη αναγώγιμος αναδρομικός όρος $\text{cf}(A)$, τέτοιος ώστε $A \Rightarrow \text{cf}(A)$.

4.2 Τυπικές Τοπικά Συναφείς Συναρτήσεις Τοπικών Όρων

Σε αυτή την ενότητα, ορίζουμε τον μετασχηματισμό τοπικής συνάφειας που αντιστοιχεί ένα όρο $A^{*,u} : \sigma$ στη $L_{\text{ar}}^{\lambda*}$ σε κάθε τοπικό όρο $A : \tilde{\sigma}$ στη L_{ar}^{λ} και σε κάθε μεταβλητή κατάστασης $u : s$ που δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον A ,

$$A : \tilde{\sigma}, u : s \mapsto A^{*,u} : \sigma.$$

Αυτός ο νέος όρος ορίζει στην $L_{\text{ar}}^{\lambda*}$ μία συναφή συνάρτηση του αρχικού όρου, δηλαδή, αν ορίσουμε για κάθε κατάσταση $a : s$,

$$A^{*,\bar{a}} \equiv A^{*,u} \{u \equiv \bar{a}\},$$

τότε,

$$\eta(a \mapsto \text{den}(A^{*,\bar{a}})(g)) \text{ είναι τοπικά συναφής συνάρτηση της } \text{den}(A)(g).$$

Πριν ορίσουμε το μετασχηματισμό τοπικής συνάφειας, θα απλοποιήσουμε το συμβολισμό της προηγούμενης ενότητας. Για κάθε σταθερά, $c : \tilde{\sigma} \in K$, αν ο ℓ είναι ο τοπικός κλειστός δείκτης τοπικότητας εισόδου της, τότε απλά τον παραλείπουμε, δηλαδή, ορίζουμε

$$c^* \equiv c_\ell^*$$

Ανάλογα, αν ο ℓ είναι ο τοπικός κλειστός δείκτης τοπικότητας εισόδου του τύπου της μεταβλητής $x : \tilde{\sigma}$, ορίζουμε

$$x^* \equiv x_\ell^*.$$

Θα λέμε ότι η εμφάνιση ενός υποόρου $x^*[u]$ (ή ομοίως, $x_\ell^*[u]$) όπου η x είναι μία μεταβλητή, απλή ή αναδρομής, είναι *ελεύθερη* (*free*) σε ένα όρο A αν οι εμφανίσεις και των δύο μεταβλητών x^* (ή x_ℓ^*) και u είναι ελεύθερες στον A .

Πρόταση 4.2.1. (Μετασχηματισμός Τοπικής Συνάφειας - Local Associate Transformation) Για κάθε τοπικό όρο $A : \tilde{\sigma}$ και κάθε καινούργια μεταβλητή κατάστασης $u : s$, υπάρχει ένας όρος $A^{*,u} : \sigma$ στη $\mathcal{L}_{\text{af}}^{\lambda*}$, τέτοιος ώστε:

- (i) Αν ο A έχει ελεύθερες μεταβλητές στη λίστα $x_1 : \tilde{\sigma}_1, \dots, x_n : \tilde{\sigma}_n$, τότε ο $A^{*,u} : \sigma$ έχει ελεύθερες μεταβλητές στη λίστα $x_1^* : \sigma_1, \dots, x_n^* : \sigma_n, u : s$.
- (ii) Για κάθε μεταβλητή x , η x εμφανίζεται ελεύθερη στον A αν και μόνο αν ο υποόρος $x^*[u]$ εμφανίζεται ελεύθερος στον $A^{*,u}$.
- (iii) Ισχύουν οι εξής συνθήκες:

$$(1) \ c^{*,u} \equiv c^*[u]$$

$$(2) \ x^{*,u} \equiv x^*[u]$$

$$(3) \ (B(C))^{*,u} \equiv B^{*,u}(C^{*,u})$$

$$(4) \ (\lambda(v)(B))^{*,u} \equiv \lambda(v')(B^{*,u}\{v^*[u] \equiv v'\}), \text{ όπου η } v' \text{ είναι μία καινούργια απλή μεταβλητή ίδιου τύπου με τον } v^*[u]$$

$$(5) \ (A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\})^{*,u} \equiv (A_0)^{*,u}\{p_i^*[u] \equiv q_i \mid 1 \leq i \leq n\} \text{ where}$$

$$\begin{aligned} & \{q_1 := (A_1)^{*,u}\{p_i^*[u] \equiv q_i \mid 1 \leq i \leq n\}, \\ & \vdots \\ & q_n := (A_n)^{*,u}\{p_i^*[u] \equiv q_i \mid 1 \leq i \leq n\}\}. \end{aligned}$$

όπου για $i = 1, \dots, n$, η q_i είναι μία καινούργια μεταβλητή αναδρομής ίδιου τύπου με την $p_i^*[u]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη είναι με μία προφανή επαγωγή στον A .

Παρατηρούμε ότι οι αντικαταστάσεις σε κάθε περίπτωση είναι ελεύθερες δεδομένου ότι κάθε φορά οι μεταβλητές v' και q_i είναι καινούργιες.

Αν ο A είναι αναδρομικός όρος, σύμφωνα με την (ii), για $k = 0, \dots, n$, μια μεταβλητή p_i εμφανίζεται (ελεύθερη) στον A_k αν και μόνο αν η q_i εμφανίζεται (ελεύθερη) στον $(A_k)^{*,u}$. Έπεται ότι για $i = 1, \dots, n$, $\text{rank}(p_i) = \text{rank}(q_i)$ και επομένως, ο $A^{*,u}$ είναι αναδρομικός όρος. \dashv

Για παράδειγμα, αν οι $q, x' : e$ είναι καινούργιες μεταβλητές,

$$(\lambda(x)\text{love}(x, x))^{*,u} \equiv \lambda(x')\text{love}^*[u](x', x'),$$

$$(\text{run}(p) \text{ where } \{p := \text{John}\})^{*,u} \equiv \text{run}^*[u](q) \text{ where } \{q := \text{John}^*[u]\}.$$

Θεώρημα 4.2.2. Αν ο όρος $A : \tilde{\sigma}$ με ελεύθερες μεταβλητές στη λίστα $x_1 : \tilde{\sigma}_1, \dots, x_n : \tilde{\sigma}_n$ είναι τοπικός, η συνάρτηση $f_A : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}$ ορίζεται ως

$$f_A(f_1, \dots, f_n) = \text{den}(A)(g\{x_1 := f_1, \dots, x_n := f_n\})$$

και η συνάρτηση $f_{A^*,u} : s \times \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n \rightarrow \sigma$ ορίζεται ως

$$\begin{aligned} f_{A^*,u}(a, h_1, \dots, h_n) \\ = \text{den}(A^*,u\{x_1^*[u] := x'_1, \dots, x_n^*[u] := x'_n\}) \\ (g\{x'_1 := h_1, \dots, x'_n := h_n, u := a\}), \end{aligned}$$

όπου οι $x'_1 : \sigma_1, \dots, x'_n : \sigma_n$ είναι καινούργιες μεταβλητές, τότε η συνάρτηση $f_{A^*,u}$ είναι συναφής συνάρτηση της f_A .

Ειδικότερα, αν ο όρος A είναι κλειστός, τότε για κάθε κατάσταση $a : s$, η συνάρτηση $(a \mapsto \text{den}(A^*,\bar{a}))$ είναι τοπικά συναφής συνάρτηση της $\text{den}(A)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη είναι με επαγωγή στον A . Θα είναι χρήσιμο να χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες συντομεύσεις.

$$\begin{aligned} g\{x_i := f_i\} &\equiv g\{x_1 := f_1, \dots, x_n := f_n\} \\ g\{x'_i := h_i\} &\equiv g\{x'_1 := h_1, \dots, x'_n := h_n\} \end{aligned}$$

(1) $A \equiv c$. Απλά, $f_c(f_1, \dots, f_n) = c$, και

$$f_{c^*,u}(a, h_1, \dots, h_n) = \text{den}(c^*[u])(g\{x'_i := h_i, u := a\}) = c^*(a).$$

Επομένως, σύμφωνα με το Πρόγραμμα 2.2.10, η $f_{c^*,u}$ είναι τοπικά συναφής συνάρτηση της f_c .

(2) $A \equiv x$. Έστω ότι για κάποιο j , $x_j \equiv x$.

$$f_x(f_1, \dots, f_n) = \text{den}(x)(g\{x_i := f_i\}) = f_j, \text{ και}$$

$$\begin{aligned} f_{x^*,u}(a, h_1, \dots, h_n) \\ = \text{den}(x^*[u]\{x_j^*[u] := x'_j\})(g\{x'_i := h_i, u := a\}) = h_j. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την περίπτωση (i) του Θεωρήματος 2.2.9, η $f_{x^*,u}$ είναι τοπικά συναφής συνάρτηση της f_x .

(3) $A \equiv B(C)$. Έστω ότι οι ελεύθερες μεταβλητές των όρων B και C είναι στη λίστα $x_1 : \tilde{\sigma}_1, \dots, x_n : \tilde{\sigma}_n$.

$$\begin{aligned} f_{B(C)}(f_1, \dots, f_n) &= \text{den}(B)(g\{x_i := f_i\})(\text{den}(C)(g\{x_i := f_i\})) \\ &= f_B(f_1, \dots, f_n, f_C(f_1, \dots, f_n)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f_{(B(C))^*,u}(a, h_1, \dots, h_n) \\
&= \text{den}(B^{*,u}\{x_1^*[u] := x'_1, \dots, x_n^*[u] := x'_n\})(g\{x'_i := h_i, u := a\}) \\
&\quad \left(\text{den}(C^{*,u}\{x_1^*[u] := x'_1, \dots, x_n^*[u] := x'_n\})(g\{x'_i := h_i, u := a\}) \right) \\
&= f_{B^{*,u}}(a, h_1, \dots, h_n, f_{C^{*,u}}(a, h_1, \dots, h_n)).
\end{aligned}$$

Από την επαγωγική υπόθεση, οι $f_{B^{*,u}}$ και $f_{C^{*,u}}$ είναι τοπικά συναφείς συναρτήσεις των f_B και f_C αντίστοιχα, και επομένως, σύμφωνα με την περίπτωση της σύνθεσης του Θεωρήματος 2.2.9, η συνάρτηση $f_{(B(C))^*,u}$ είναι τοπικά συναφής συνάρτηση της $f_{B(C)}$.

(4) $A \equiv \lambda(v)(B)$. Έστω ότι οι ελεύθερες μεταβλητές του όρου B είναι στη λίστα $x_1 : \tilde{\sigma}_1, \dots, x_n : \tilde{\sigma}_n, v : \tilde{\sigma}$.

$$\begin{aligned}
f_{\lambda(v)(B)}(f_1, \dots, f_n) &= \left(f \mapsto \text{den}(B)(g\{x_i := f_i, v := f\}) \right) \\
&= \left(f \mapsto f_B(f_1, \dots, f_n, f) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f_{(\lambda(v)(B))^*,u}(a, h_1, \dots, h_n) \\
&= \text{den}(\lambda(v')(B^{*,u}\{v^*[u] := v'\})\{x_1^*[u] := x'_1, \dots, x_n^*[u] := x'_n\}) \\
&\quad (g\{x'_i := h_i, u := a\}) \\
&= \left(h \mapsto \text{den}(B^{*,u}\{v^*[u] := v', x_1^*[u] := x'_1, \dots, x_n^*[u] := x'_n\}) \right. \\
&\quad \left. (g\{x'_i := h_i, u := a, v' := h\}) \right) \\
&= (h \mapsto f_{B^{*,u}}(a, h_1, \dots, h_n, h)).
\end{aligned}$$

Από την επαγωγική υπόθεση, η $f_{B^{*,u}}$ είναι τοπικά συναφής συνάρτηση της f_B , και επομένως, σύμφωνα με την περίπτωση της λ-αφαίρεσης του Θεωρήματος 2.2.9, η συνάρτηση $f_{(\lambda(v)(B))^*,u}$ είναι τοπικά συναφής συνάρτηση της $f_{\lambda(v)(B)}$.

(5) $A \equiv A_0$ where $\{p_1 := A_1, \dots, p_m := A_m\}$. Έστω ότι οι ελεύθερες μεταβλητές του όρου A είναι στη λίστα x_1, \dots, x_n και επομένως, οι ελεύθερες μεταβλητές κάθε όρου A_i ($i = 1, \dots, m$) είναι στη λίστα $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_m$.

$$\begin{aligned}
f_A(f_1, \dots, f_n) &= \text{den}(A)(g\{x_i := f_i\}) \\
&= \text{den}(A_0)(g\{x_i := f_i, p_1 := P_1, \dots, p_m := P_m\}) \\
&= f_{A_0}(f_1, \dots, f_n, P_1, \dots, P_m),
\end{aligned}$$

όπου για $i = 1, \dots, m$, κάθε

$$P_i = f_{P_i}(f_1, \dots, f_n)$$

ορίζεται αναδρομικά στο βαθμό $\text{rank}(p_i)$:

$$P_i = f_{A_i}(f_1, \dots, f_n, P_{r_1}, \dots, P_{r_k})$$

όπου οι p_{r_1}, \dots, p_{r_k} είναι οι μεταβλητές με βαθμό $< \text{rank}(p_i)$ (βλέπε επίσης την Ενότητα 1.5.1).

Επίσης, αναδρομικά στο βαθμό $\text{rank}(q_i)$, έστω ότι

$$Q_i = f_{Q_i}(a, h_1, \dots, h_n) = f_{(A_i)^*, u}(a, h_1, \dots, h_n, Q_{r_1}, \dots, Q_{r_k}).$$

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε εδώ ότι, σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.1, για κάθε $i = 1, \dots, m$, $\text{rank}(p_i) = \text{rank}(q_i)$.

Λήμμα. Για κάθε $r = 1, \dots, n$, η f_{Q_i} είναι τοπικά συναφής συνάρτηση της f_{P_i} .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη είναι με επαγωγή στο $\text{rank}(p_i)$.

(i) $\text{rank}(p_i) = 0$. Έπεται τετριμμένα αφού $f_{P_i} = f_{A_i}$ και $f_{Q_i} = f_{(A_i)^*, u}$.

(ii) $\text{rank}(p_i) \geq 1$. Έστω ότι για όλες τις μεταβλητές p_{r_1}, \dots, p_{r_k} τέτοιες ώστε $\text{rank}(p_{r_j}) < \text{rank}(p_i)$, ισχύει η επαγωγική υπόθεση. Το ζητούμενο έπεται εύκολα από την περίπτωση της σύνθεσης του Θεωρήματος 2.2.9, δεδομένου ότι

$$f_{P_i}(f_1, \dots, f_n) = f_{A_i}(f_1, \dots, f_n, f_{P_{r_1}}(f_1, \dots, f_n), \dots, f_{P_{r_k}}(f_1, \dots, f_n))$$

και

$$\begin{aligned} & f_{Q_i}(a, h_1, \dots, h_n) \\ &= f_{(A_i)^*, u}(a, h_1, \dots, h_n, f_{Q_{r_1}}(a, h_1, \dots, h_n), \dots, f_{Q_{r_k}}(a, h_1, \dots, h_n)). \quad \dashv \end{aligned}$$

Τώρα, από την επαγωγική υπόθεση, η συνάρτηση $f_{(A_0)^*, u}$ είναι τοπικά συναφής συνάρτηση της f_{A_0} και

$$\begin{aligned} & f_{A^*, u}(a, h_1, \dots, h_n) \\ &= \text{den}(A^*, u \{x_1^*[u] \equiv x'_1, \dots, x_n^*[u] \equiv x'_n\})(g\{x'_i := h_i, u := a\}) \\ &= \text{den}((A_0)^*, u \{p_1^*[u] \equiv q_1, \dots, p_m^*[u] \equiv q_m, x_1^*[u] \equiv x'_1, \dots, x_n^*[u] \equiv x'_n\}) \\ & \quad (g\{x'_i := h_i, q_1 := Q_1, \dots, q_m := Q_m, u := a\}) \\ &= f_{(A_0)^*, u}(a, h_1, \dots, h_n, Q_1, \dots, Q_m). \end{aligned}$$

Επομένως, από την περίπτωση της σύνθεσης του Θεωρήματος 2.2.9, η $f_{A^*, u}$ είναι τοπικά συναφής συνάρτηση της f_A . —

Η τοπικά συναφής συνάρτηση της κανονικής μορφής του τοπικού όρου $A : \tilde{\sigma}$ χρησιμοποιείται στο Κεφάλαιο 5 για να ορίσουμε το αντικειμενικό περιεχόμενο του όρου A στην κατάσταση a . Τέλος, ολοκληρώνουμε την ενότητα με ένα απλό λήμμα που θα χρησιμοποιήσουμε σε εκείνον τον ορισμό.

Λήμμα 4.2.3. *Αν ο $A : \tilde{\sigma}$ είναι ένας τοπικός μη αναγώγιμος όρος στην L_{ar}^λ , τότε ο όρος $A^{*,u} : \sigma$ είναι μη αναγώγιμος στην $L_{ar}^{\lambda*}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη είναι με μία προφανή επαγωγή στον A , χρησιμοποιώντας τον συντακτικό ορισμό των μη αναγώγιμων όρων (Πρόταση 4.1.1). Μέρος της απόδειξης είναι να δείχτεί ότι αν ο $X : \tilde{\sigma}$ είναι ένας τοπικός άμεσος όρος στη L_{ar}^λ , τότε για κάθε μεταβλητή κατάστασης $u : s$, ο $X^{*,u}$ είναι άμεσος στη $L_{ar}^{\lambda*}$, το οποίο επίσης είναι προφανές από τα παρακάτω.

(1) Αν $X \equiv x$ όπου x είναι μεταβλητή, απλή ή αναδρομής, τότε $x^{*,u} \equiv x^*[u]$.

(2) Αν $X \equiv p(v_1, \dots, v_n)$, τότε

$$(p(v_1, \dots, v_n))^{*,u} \equiv p^*[u](v_1^*[u], \dots, v_n^*[u]).$$

(3) Αν $X \equiv \lambda(v_1, \dots, v_n)p$, τότε $(\lambda(v_1, \dots, v_n)p)^{*,u} \equiv \lambda(z_1, \dots, z_n)p^*[u]$, όπου οι z_1, \dots, z_n είναι καινούργιες απλές μεταβλητές κατάλληλων τύπων.

(4) Αν $X \equiv \lambda(w_1, \dots, w_m)p(v_1, \dots, v_n)$, τότε

$$\begin{aligned} & (\lambda(w_1, \dots, w_m)p(v_1, \dots, v_n))^{*,u} \\ & \equiv \lambda(z_1, \dots, z_m)(p^*[u](v_1^*[u], \dots, v_n^*[u])\{w_1^*[u] \equiv z_1, \dots, w_m^*[u] \equiv z_m\}), \end{aligned}$$

όπου οι z_1, \dots, z_m είναι καινούργιες απλές μεταβλητές κατάλληλων τύπων. \dashv

4.3 Τυπικές Συναφείς Συναρτήσεις Γενικών Όρων

Έστω ότι ο $A : \tilde{\sigma}$ είναι ένας όρος τέτοιος ώστε η υποδήλωσή του έχει μία συναφή συνάρτηση ως προς ένα κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου ℓ . Στο Κεφάλαιο 3, δείξαμε ότι συντακτικά αυτό επιβεβαιώνεται από την ύπαρξη μίας κλειστής απόδειξης τοπικότητας με ετικέτα ρίζας $A : \ell \vdash t$. Γενικά, ο όρος A έχει πολλαπλές κλειστές αποδείξεις τοπικότητας με τον ίδιο δείκτη τοπικότητας εισόδου στις ρίζες τους. Οι αποδείξεις αυτές περιγράφουν διαφορετικά στιγμιότυπα συμπεριφορών τοπικότητας των υποόρων του A τα οποία, ωστόσο, συγκλίνουν στον ίδιο κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου του A .

Οι αποδείξεις τοπικότητας θα αποδειχτούν αναντικατάστατες στον ορισμό του αντίστοιχου μετασχηματισμού συνάφειας για τους γενικούς όρους δεδομένου ότι, όπως φάνηκε στην περίπτωση των τοπικών όρων, είναι ένας συντακτικός μετασχηματισμός ο οποίος λαμβάνει υπ' όψιν του τις εξαρτήσεις

τοπικότητας των υποόρων ενός όρου. Επομένως, δοσμένης μιας κλειστής απόδειξης τοπικότητας Π_A ενός όρου $A : \tilde{\sigma}$ με ετικέτα ρίζας $A : \ell \vdash t$, αντιστοιχούμε στον A και σε οποιαδήποτε μεταβλητή κατάστασης $u : s$ που δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον A , ένα *συναφή όρο* (associate term) $A_{\Pi_A}^{*,u}$, δηλαδή,

$$A : \tilde{\sigma}, \Pi_A \text{ με ετικέτα ρίζας } A : \ell \vdash t, u : s \mapsto A_{\Pi_A}^{*,u} : \begin{cases} (\tilde{\sigma})_*^\ell, & \text{αν } t = 0 \\ s \rightarrow (\tilde{\sigma})_*^\ell, & \text{αν } t = 1 \end{cases}$$

ο οποίος ορίζει (κατά κάποιο τρόπο) μία συναφή συνάρτηση του A ως προς τον ℓ .

Πρόταση 4.3.1. (Μετασχηματισμός Συνάφειας – Associate Transformation) Για κάθε όρο $A : \tilde{\sigma}$ στη $\mathcal{L}_{\text{ar}}^\lambda$ και μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας Π_A με ετικέτα ρίζας $A : \ell \vdash t$ και οποιαδήποτε μεταβλητή κατάστασης $u : s$ που δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον A , υπάρχει ένας όρος

$$A_{\Pi_A}^{*,u} : \begin{cases} (\tilde{\sigma})_*^\ell, & \text{αν } t \equiv 0 \\ s \rightarrow (\tilde{\sigma})_*^\ell, & \text{αν } t \equiv 1 \end{cases}$$

τέτοιος ώστε:

- (i) Αν ο A έχει ελεύθερες μεταβλητές στη λίστα $x_1 : \tilde{\sigma}_1, \dots, x_n : \tilde{\sigma}_n$ και για $i = 1, \dots, n$, η x_i έχει τον δείκτη $m_i \vdash s_i$ στην Π_A , αν $t \equiv 1$, τότε ο $A_{\Pi_A}^{*,u}$ έχει ελεύθερες μεταβλητές στη λίστα $x_{1,m_1}^*, \dots, x_{n,m_n}^*$ ενώ αν $t \equiv 0$, οι ελεύθερες μεταβλητές του είναι στη λίστα $x_{1,m_1}^*, \dots, x_{n,m_n}^*, u$.
- (ii) Αν $t \equiv 1$, τότε η x_i εμφανίζεται ελεύθερη στον A αν και μόνο αν η x_{i,m_i}^* εμφανίζεται ελεύθερη στον $A_{\Pi_A}^{*,u}$.
- (iii) Αν $t \equiv 0$, τότε η x_i εμφανίζεται ελεύθερη στον A αν και μόνο αν είτε $s_i \equiv 0$ και ο $x_{i,m_i}^*[u]$ εμφανίζεται ελεύθερος στον $A_{\Pi_A}^{*,u}$, είτε $s_i \equiv 1$ και η x_{i,m_i}^* εμφανίζεται ελεύθερη στον $A_{\Pi_A}^{*,u}$.
- (iv) Ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

- (1) Αν $\Pi_c \equiv c : \ell \vdash t$, τότε

$$c_{\Pi_c}^{*,u} \equiv \begin{cases} c_\ell^*[u], & \text{αν } t \equiv 0 \\ c_\ell^*, & \text{αν } t \equiv 1 \end{cases}$$

- (2) Αν $\Pi_x \equiv x : \ell \vdash t$, τότε

$$x_{\Pi_x}^{*,u} \equiv \begin{cases} x_\ell^*[u], & \text{αν } t \equiv 0 \\ x_\ell^*, & \text{αν } t \equiv 1 \end{cases}$$

(3) $A\nu$

$$\Pi_{B(C)} \equiv \frac{\begin{array}{c} \Pi_B \qquad \qquad \Pi_C \\ \vdots \qquad \qquad \vdots \\ B : \langle \ell_1 \mapsto t_1, \ell_2 \rangle \mapsto t_0 \quad C : \ell_1 \mapsto t_1 \end{array}}{B(C) : \ell_2 \mapsto t}$$

 $\tau\acute{o}\tau\epsilon$

$$(B(C))_{\Pi_{B(C)}}^{*,u} \equiv \begin{cases} B_{\Pi_B}^{*,u}(C_{\Pi_C}^{*,u}), & \alpha\nu \ t \equiv 0, t_0 \equiv 0 \\ B_{\Pi_B}^{*,u}(u, C_{\Pi_C}^{*,u}), & \alpha\nu \ t \equiv 0, t_0 \equiv 1 \\ \lambda(u)(B_{\Pi_B}^{*,u}(C_{\Pi_C}^{*,u})), & \alpha\nu \ t \equiv 1, t_0 \equiv 0 \\ \lambda(u)(B_{\Pi_B}^{*,u}(u, C_{\Pi_C}^{*,u})), & \alpha\nu \ t \equiv 1, t_0 \equiv 1 \end{cases}$$

(4) $A\nu$

$$\Pi_{\lambda(v)(B)} \equiv \frac{\begin{array}{c} \Pi_B \\ \vdots \\ B : \ell \mapsto t' \end{array}}{\lambda(v)(B) : \langle \ell_0 \mapsto t_0, \ell \rangle \mapsto t}$$

 $\tau\acute{o}\tau\epsilon$

$$(\lambda(v)(B))_{\Pi_{\lambda(v)(B)}}^{*,u} \equiv \begin{cases} \lambda(v') \left(B_{\Pi_B}^{*,u} \{ v_{\ell_0 \mapsto t_0}^{*,u} : \equiv v' \} \right), & \alpha\nu \ t \equiv 0, t' \equiv 0 \\ \lambda(v') \left(B_{\Pi_B}^{*,u}(u) \{ v_{\ell_0 \mapsto t_0}^{*,u} : \equiv v' \} \right), & \alpha\nu \ t \equiv 0, t' \equiv 1 \\ \lambda(u) \lambda(v') \left(B_{\Pi_B}^{*,u} \{ v_{\ell_0 \mapsto t_0}^{*,u} : \equiv v' \} \right), & \alpha\nu \ t \equiv 1, t' \equiv 0 \\ \lambda(u) \lambda(v') \left(B_{\Pi_B}^{*,u}(u) \{ v_{\ell_0 \mapsto t_0}^{*,u} : \equiv v' \} \right), & \alpha\nu \ t \equiv 1, t' \equiv 1 \end{cases}$$

όπου η v' είναι μία καινούργια απλή μεταβλητή ίδιου τύπου με τον $v_{\ell_0 \mapsto t_0}^{*,u}$.

(5) $A\nu$

$$\Pi_A \equiv \frac{\begin{array}{c} \Pi_{A_0} \qquad \qquad \Pi_{A_1} \qquad \qquad \Pi_{A_k} \\ \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \\ A_0 : \ell_0 \mapsto t_0 \quad A_1 : \ell_1 \mapsto t_1 \quad \dots \quad A_n : \ell_k \mapsto t_k \end{array}}{A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_k := A_k\} : \ell_0 \mapsto t_0}$$

τότε

$$\begin{aligned} & \left(A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_k\} \right)_{\Pi_A}^{*,u} \\ & \equiv (A_0)_{\Pi_{A_0}}^{*,u} \{ (p_i)_{\ell_i \hookrightarrow t_i}^{*,u} : \equiv q_i \mid 1 \leq i \leq k \}, \\ & \text{where} \\ & \left\{ \begin{aligned} q_1 &:= (A_1)_{\Pi_{A_1}}^{*,u} \{ (p_i)_{\ell_i \hookrightarrow t_i}^{*,u} : \equiv q_i \mid 1 \leq i \leq k \}, \\ & \vdots \\ q_k &:= (A_k)_{\Pi_{A_k}}^{*,u} \{ (p_i)_{\ell_i \hookrightarrow t_i}^{*,u} : \equiv q_i \mid 1 \leq i \leq k \} \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

όπου για $i = 1, \dots, n$, η q_i είναι μια καινούργια μεταβλητή αναδρομής ίδιου τύπου με τον $(p_i)_{\ell_i \hookrightarrow t_i}^{*,u}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αποδεικνύουμε ταυτόχρονα τις περιπτώσεις (i)-(iv) με επαγωγή στον A . Παρατηρούμε ότι το μόνο που χρειάζεται να ελέγξουμε είναι ότι οι μετασχηματισμοί που ορίζονται από τις συνθήκες (1)-(5) στην περίπτωση (iv) παράγουν όρους. Αν $A \equiv c$ ή $A \equiv x$, το ζητούμενο είναι προφανές.

(3) $A \equiv B(C)$. Αν $t \equiv 1$, τότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.7, για $i = 1, \dots, n$, η x_i έχει τον δείκτη $m_i \hookrightarrow 1$, και επομένως, $(x_i)_{m_i \hookrightarrow 1}^{*,u} \equiv x_{i,m_i}^*$.

Αν $t \equiv 0$ και αν, για παράδειγμα, η x_i εμφανίζεται ελεύθερη στον B , τότε από την επαγωγική υπόθεση, αν $t_0 \equiv 1$, τότε $s_i \equiv 1$, και η x_{i,m_i}^* εμφανίζεται ελεύθερη αν και μόνο αν η x_i εμφανίζεται ελεύθερη και αν, από την άλλη μεριά, $s_0 \equiv 0$, από την επαγωγική υπόθεση, ο όρος $x_{i,m_i}^*[u]$ εμφανίζεται ελεύθερος στον $B_{\Pi_B}^{*,u}$ αν και μόνο αν η x_i εμφανίζεται ελεύθερη στον B . Ισχύουν ανάλογοι ισχυρισμοί στην περίπτωση που η x_i εμφανίζεται ελεύθερη στον C .

(4) $A \equiv \lambda(v)(B)$. Έστω ότι $x_i \neq v$. Αν $t \equiv 1$, τότε τετριμμένα για $i = 1, \dots, n$, $x_i : m_i \hookrightarrow 1$ και επομένως, η x_{i,m_i}^* εμφανίζεται ελεύθερη αν και μόνο αν η x_i εμφανίζεται ελεύθερη. Αν $t \equiv 0$ και $t' \equiv 1$, τότε από την επαγωγική υπόθεση για τον B , η x_{i,m_i}^* εμφανίζεται ελεύθερη. Αν $t \equiv 0$ και $t' \equiv 0$, τότε από την επαγωγική υπόθεση, ο όρος $x_{i,m_i}^*[u]$ εμφανίζεται ελεύθερος.

(5) $A \equiv A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_k := A_k\}$. Οι ισχυρισμοί είναι ανάλογοι και δεν τους επαναλαμβάνουμε εδώ. Γενικά, αν για κάποιο $i = 1, \dots, k$, $t_i \equiv 1$, τότε $(p_i)_{\ell_i \hookrightarrow 1}^{*,u} \equiv p_{i,\ell_i}^*$ ενώ, αν $t_i \equiv 0$, τότε, αν η p_i εμφανίζεται ελεύθερη σε κάποιο A_j ($j = 0, \dots, k$), τότε από την Πρόταση 3.2.7, ισχύει επίσης ότι $t_j \equiv 0$. Επομένως, από την επαγωγική υπόθεση, και οι δύο μεταβλητές του $(p_i)_{\ell_i}^{*,u} \equiv p_{i,\ell_i}^*[u]$ εμφανίζονται ελεύθερες αν και μόνο αν η p_i εμφανίζεται ελεύθερη. Έπεται ότι για κάθε i , $\text{rank}(q_i) = \text{rank}(p_i)$ και επομένως, ο αναδρομικός όρος $A_{\Pi_A}^{*,u}$ είναι καλά σχηματισμένος. \dashv

Αν η Π_A είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του A με ετικέτα ρίζας $A : \ell \vdash t$, τότε εναλλακτικά συμβολίζουμε το συναφή του όρου ως προς αυτήν και ως προς μία μεταβλητή κατάστασης $u : s$ που δεν εμφανίζεται ελεύθερη σε αυτόν ως

$$A_{\Pi_A}^{*,u} \equiv A_{\ell \vdash t}^{*,u}.$$

Αυτός ο συμβολισμός θα χρησιμοποιείται όταν θα είναι σαφές ποια είναι η κλειστή απόδειξη τοπικότητας και αντί αυτής, θέλουμε να εστιάσουμε την προσοχή μας στον δείκτη της ετικέτας ρίζας.

Θεώρημα 4.3.2. Έστω ότι οι ελεύθερες μεταβλητές του $A : \tilde{\sigma}$ είναι στη λίστα $x_1 : \tilde{\sigma}_1, \dots, x_n : \tilde{\sigma}_n$ και η συνάρτηση $f_A : \tilde{\sigma}_1 \times \dots \times \tilde{\sigma}_n \rightarrow \tilde{\sigma}$ ορίζεται ως

$$f_A(f_1, \dots, f_n) = \text{den}(A)(g\{x_1 := f_1, \dots, x_n := f_n\}).$$

(i) Αν η Π_A είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του A με ετικέτα ρίζας $A : \ell \vdash 0$ όπου για $i = 1, \dots, n$, η x_i έχει τον δείκτη $m_i \vdash s_i$ και η συνάρτηση

$$f_{A_{\ell \vdash 0}^{*,u}} : s \times \left\{ \left(s \rightarrow (\tilde{\sigma}_1)_*^{m_1} \right) \right\} \times \dots \times \left\{ \left(s \rightarrow (\tilde{\sigma}_n)_*^{m_n} \right) \right\} \rightarrow (\tilde{\sigma})_*^\ell$$

ορίζεται για $a : s$ ως

$$\begin{aligned} f_{A_{\ell \vdash 0}^{*,u}}(a, h_1, \dots, h_n) \\ = \text{den}(A_{\ell \vdash 0}^{*,u}\{(x_1)_{m_1 \vdash s_1}^{*,u} := x'_1, \dots, (x_n)_{m_n \vdash s_n}^{*,u} := x'_n\}) \\ (g\{x'_1 := h_1, \dots, x'_n := h_n, u := a\}), \end{aligned}$$

τότε η $f_{A_{\ell \vdash 0}^{*,u}}$ είναι συναφής συνάρτηση της f_A ως προς τον κλειστό δείκτη $\langle m_1 \vdash s_1, \dots, m_n \vdash s_n, \ell \rangle$.

(ii) Αν η Π_A είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του όρου A με ετικέτα ρίζας $A : \ell \vdash 1$ όπου για $i = 1, \dots, n$, η x_i έχει τον δείκτη $m_i \vdash s_i$ (με $s_i \equiv 1$) και η συνάρτηση $f_{A_{\ell \vdash 1}^{*,u}} : s \times (s \rightarrow (\tilde{\sigma}_1)_*^{m_1}) \times \dots \times (s \rightarrow (\tilde{\sigma}_n)_*^{m_n}) \rightarrow (\tilde{\sigma})_*^\ell$ ορίζεται για $a : s$ ως

$$\begin{aligned} f_{A_{\ell \vdash 1}^{*,u}}(a, h_1, \dots, h_n) \\ = \text{den}(A_{\ell \vdash 1}^{*,u}\{x_{1,m_1}^* := x'_1, \dots, x_{n,m_n}^* := x'_n\})(g\{x'_1 := h_1, \dots, x'_n := h_n\})(a), \end{aligned}$$

τότε η $f_{A_{\ell \vdash 1}^{*,u}}$ είναι συναφής συνάρτηση της f_A ως προς τον κλειστό δείκτη $\langle m_1 \vdash 1, \dots, m_n \vdash 1, \ell \rangle$.

Ειδικότερα, αν ο A είναι κλειστός όρος και η Π_A είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του A με ετικέτα ρίζας $A : \ell \vdash t$, τότε η συνάρτηση

$$(a \mapsto \text{den}(A_{\ell \vdash 0}^{*,u})(g\{u := a\})), \text{ αν } t \equiv 0, \text{ ή } \\ \text{den}(A_{\ell \vdash 1}^{*,u}), \text{ αν } t \equiv 1$$

είναι συναφής συνάρτηση της $\text{den}(A)$ ως προς τον ℓ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αποδεικνύουμε μαζί τα (i) και (ii) με επαγωγή στον όρο A και επικαλούμενοι τις βασικές ιδιότητες του Θεωρήματος 2.4.8 όπως επικαλεστήκαμε το Θεώρημα 2.2.9 στην απόδειξη του αντίστοιχου Θεωρήματος 4.2.2. Στην πραγματικότητα, η απόδειξη αποτελεί βασικά άμεση γενίκευση της απόδειξης του Θεωρήματος 4.2.2, και συμπεριλαμβάνουμε εδώ τις λεπτομέρειες μόνο χάριν πληρότητας.

Για κάθε όρο A , η συναφής συνάρτηση του A σε αυτήν την απόδειξη, αν δεν δίνεται ρητά μία απόδειξη τοπικότητας, θεωρείται ότι εξετάζεται ως προς τις αποδείξεις τοπικότητας που αναφέρονται στην Πρόταση 4.3.1. Θα είναι επίσης χρήσιμο να χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες συντομεύσεις:

$$g\{x_i := f_i\} \equiv g\{x_1 := f_1, \dots, x_n := f_n\} \\ g\{x'_i := h_i\} \equiv g\{x'_1 := h_1, \dots, x'_n := h_n\}$$

$$(1) A \equiv c. \text{ Τότε, } f_c(f_1, \dots, f_n) = c. \text{ Αν } t \equiv 1,$$

$$f_{c_{\ell \vdash t}^{*,u}}(a, h_1, \dots, h_n) = \text{den}(c_{\ell}^*)(g\{x'_i := h_i\})(a) = c_{*}^{\ell}(a),$$

και, αν $t \equiv 0$,

$$f_{c_{\ell \vdash t}^{*,u}}(a, h_1, \dots, h_n) = \text{den}(c_{\ell}^*[u])(g\{x'_i := h_i, u := a\}) = c_{*}^{\ell}(a).$$

Επομένως, σύμφωνα με το Πρόσχημα 2.4.9, και στις δύο περιπτώσεις η $f_{c_{\ell \vdash t}^{*,u}}$ είναι συναφής συνάρτηση της f_c ως προς τον $\langle m_1 \vdash s_1, \dots, m_n \vdash s_n, \ell \rangle$.

$$(2) A \equiv x. \text{ Έστω ότι για κάποιο } j, x_j \equiv x \text{ και } \Pi_x \equiv x : m_j \vdash s_j.$$

$$f_x(f_1, \dots, f_n) = \text{den}(x)(g\{x_i := f_i\}) = f_j.$$

$$\text{Αν } s_j \equiv 1 \text{ και } h_j : s \rightarrow (\tilde{\sigma}_j)_*^{m_j},$$

$$f_{(x)_{m_j \vdash 1}^{*,u}}(a, h_1, \dots, h_n) = \text{den}(x_{m_j}^*\{x_{m_j}^* \equiv x'_j\})(g\{x'_i := h_i\})(a) = h_j(a)$$

και, αν $s_j \equiv 0$ και $h_j : (\tilde{\sigma}_j)_*^{m_j}$,

$$\begin{aligned} f_{(x)_{m_j \downarrow 1}}^{*,u}(a, h_1, \dots, h_n) \\ = \text{den}(x_{m_j}^*[u]\{x_{m_j}^*[u] \equiv x'_j\})(g\{x'_i := h_i, u := a\}) = h_j. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την περίπτωση (i) του Θεωρήματος 2.4.8, και στις δυο περιπτώσεις η $f_{(x)_{m_j \downarrow s_j}}^{*,u}$ είναι συναφής συνάρτηση της f_x ως προς τον δείκτη $\langle m_1 \downarrow s_1, \dots, m_j \downarrow s_j, \dots, m_n \downarrow s_n, m_j \rangle$.

(3) $A \equiv B(C)$. Έστω ότι οι ελεύθερες μεταβλητές των B και C είναι στη λίστα $x_1 : \tilde{\sigma}_1, \dots, x_n : \tilde{\sigma}_n$.

$$f_{B(C)}(f_1, \dots, f_n) = f_B(f_1, \dots, f_n, f_C(f_1, \dots, f_n)).$$

Αν $t \equiv 0$ και $t_0 \equiv 0$,

$$\begin{aligned} f_{(B(C))_{\Pi_B(C)}}^{*,u}(a, h_1, \dots, h_n) \\ = \text{den}(B_{\Pi_B}^{*,u}\{(x_1)_{m_1 \downarrow s_1}^{*,u} \equiv x'_1, \dots, (x_n)_{m_n \downarrow s_1}^{*,u} \equiv x'_n\})(g\{x'_i := h_i, u := a\}) \\ \quad \left(\text{den}(C_{\Pi_C}^{*,u}\{(x_1)_{m_1 \downarrow s_1}^{*,u} \equiv x'_1, \dots, (x_n)_{m_n \downarrow s_1}^{*,u} \equiv x'_n\})(g\{x'_i := h_i, u := a\}) \right) \\ = \begin{cases} f_{B_{\Pi_B}}^{*,u}(a, h_1, \dots, h_n, f_{C_{\Pi_C}}^{*,u}(a, h_1, \dots, h_n)), & \text{αν } t_1 \equiv 0, \\ f_{B_{\Pi_B}}^{*,u}\left((a, h_1, \dots, h_n, (a \mapsto f_{C_{\Pi_C}}^{*,u}(a, h_1, \dots, h_n)))\right), & \text{αν } t_1 \equiv 1, \end{cases} \end{aligned}$$

αν $t \equiv 0$ και $t_0 \equiv 1$,

$$\begin{aligned} f_{(B(C))_{\Pi_B(C)}}^{*,u}(a, h_1, \dots, h_n) \\ = \begin{cases} \left(a \mapsto f_{B_{\Pi_B}}^{*,u}(a, h_1, \dots, h_n) \right) \left(a, f_{C_{\Pi_C}}^{*,u}(a, h_1, \dots, h_n) \right), & \text{αν } t_1 \equiv 0, \\ \left(a \mapsto f_{B_{\Pi_B}}^{*,u}(a, h_1, \dots, h_n) \right) \left(a, (a \mapsto f_{C_{\Pi_C}}^{*,u}(a, h_1, \dots, h_n)) \right), & \text{αν } t_1 \equiv 1, \end{cases} \end{aligned}$$

αν $t \equiv 1$ και $t_0 \equiv 0$,

$$\begin{aligned} f_{(B(C))_{\Pi_B(C)}}^{*,u}(a, h_1, \dots, h_n) \\ = \begin{cases} f_{B_{\Pi_B}}^{*,u}(a, h_1, \dots, h_n, f_{C_{\Pi_C}}^{*,u}(a, h_1, \dots, h_n)), & \text{αν } t_1 \equiv 0, \\ f_{B_{\Pi_B}}^{*,u}\left(a, h_1, \dots, h_n, (a \mapsto f_{C_{\Pi_C}}^{*,u}(a, h_1, \dots, h_n))\right), & \text{αν } t_1 \equiv 1, \end{cases} \end{aligned}$$

και τέλος, αν $t \equiv 1$ και $t_0 \equiv 1$,

$$\begin{aligned} & f_{(B(C))_{\Pi_B(C)}}^{*,u}(a, h_1, \dots, h_n) \\ &= \begin{cases} \left(a \mapsto f_{B_{\Pi_B}}^{*,u}(a, h_1, \dots, h_n) \right) \left(a, f_{C_{\Pi_C}}^{*,u}(a, h_1, \dots, h_n) \right), & \text{αν } t_1 \equiv 0, \\ \left(a \mapsto f_{B_{\Pi_B}}^{*,u}(a, h_1, \dots, h_n) \right) \left(a, (a \mapsto f_{C_{\Pi_C}}^{*,u}(a, h_1, \dots, h_n)) \right), & \text{αν } t_1 \equiv 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Από την επαγωγική υπόθεση, η $f_{B_{\Pi_B}}^{*,u}$ είναι συναφής συνάρτηση της f_B ως προς τον $\langle m_1 \mapsto s_1, \dots, m_n \mapsto s_n, \ell_1 \mapsto t_1, \ell_2 \rangle$ και η $f_{C_{\Pi_C}}^{*,u}$ είναι συναφής συνάρτηση της f_C ως προς τον $\langle m_1 \mapsto s_1, \dots, m_n \mapsto s_n, \ell_1 \rangle$. Επομένως, σύμφωνα με την περίπτωση της σύνθεσης του Θεωρήματος 2.4.8, και στις τέσσερις περιπτώσεις η $f_{(B(C))_{\Pi_B(C)}}^{*,u}$ είναι συναφής συνάρτηση της $f_{B(C)}$ ως προς τον $\langle m_1 \mapsto s_1, \dots, m_n \mapsto s_n, \ell_2 \rangle$.

Παρατηρούμε ξανά ότι πληρούνται οι υποθέσεις της περίπτωσης της σύνθεσης του Θεωρήματος 2.4.8 λόγω της Πρότασης 3.2.7.

(4) $A \equiv \lambda(v)(B)$. Έστω ότι οι ελεύθερες μεταβλητές του όρου B είναι στη λίστα $x_1 : \tilde{\sigma}_1, \dots, x_n : \tilde{\sigma}_n, v : \tilde{\sigma}$.

$$f_{\lambda(v)(B)}(f_1, \dots, f_n) = (f \mapsto f_B(f_1, \dots, f_n, f)).$$

Αν $t \equiv 0$ και $t' \equiv 1$,

$$\begin{aligned} & f_{(\lambda(v)(B))_{\Pi_{\lambda(v)(B)}}}^{*,u}(a, h_1, \dots, h_n) \\ &= \text{den}(\lambda(v')B_{\Pi_B}^{*,u}(u)\{v_{\ell_0 \mapsto t_0}^{*,u} : \equiv v', (x_1)_{m_1 \mapsto s_1}^{*,u} : \equiv x'_1, \dots, (x_n)_{m_n \mapsto s_1}^{*,u} : \equiv x'_n\}) \\ & \quad (g\{x'_i := h_i, u := a\}) \\ &= \left(h \mapsto \text{den}(B_{\Pi_B}^{*,u}(u)\{v_{\ell_0 \mapsto t_0}^{*,u} : \equiv v', (x_1)_{m_1 \mapsto s_1}^{*,u} : \equiv x'_1, \dots, (x_n)_{m_n \mapsto s_1}^{*,u} : \equiv x'_n\}) \right. \\ & \quad \left. (g\{x'_i := h_i, u := a, v' := h\}) \right), \\ &= \left(h \mapsto (b \mapsto f_{B_{\Pi_B}}^{*,u}(b, h_1, \dots, h_n, h))(a) \right). \end{aligned}$$

Αν $t \equiv 0$ και $t' \equiv 0$,

$$\begin{aligned}
 & f_{(\lambda(v)(B))_{\Pi_{\lambda(v)}(B)}}^{*,u} (a, h_1, \dots, h_n) \\
 &= \text{den}(\lambda(v') B_{\Pi_B}^{*,u} \{v_{\ell_0 \mapsto t_0}^{*,u} := v', (x_1)_{m_1 \mapsto s_1}^{*,u} := x'_1, \dots, (x_n)_{m_n \mapsto s_1}^{*,u} := x'_n\}) \\
 & \quad (g\{x'_i := h_i, u := a\}) \\
 &= \left(h \mapsto \text{den}(B_{\Pi_B}^{*,u} \{v_{\ell_0 \mapsto t_0}^{*,u} := v', (x_1)_{m_1 \mapsto s_1}^{*,u} := x'_1, \dots, (x_n)_{m_n \mapsto s_1}^{*,u} := x'_n\}) \right. \\
 & \quad \left. (g\{x'_i := h_i, u := a, v' := h\}) \right) \\
 &= \left(h \mapsto f_{B_{\Pi_B}^{*,u}}(a, h_1, \dots, h_n, h) \right).
 \end{aligned}$$

και αν $t \equiv 1$, ομοίως,

$$\begin{aligned}
 & f_{(\lambda(v)(B))_{\Pi_{\lambda(v)}(B)}}^{*,u} (a, h_1, \dots, h_n) \\
 &= \begin{cases} \left(b \mapsto (h \mapsto (b \mapsto f_{B_{\Pi_B}^{*,u}}(b, h_1, \dots, h_n, h))(b)) \right)(a), & \text{αν } t' \equiv 1, \\ \left(b \mapsto (h \mapsto f_{B_{\Pi_B}^{*,u}}(b, h_1, \dots, h_n, h)) \right)(a) & \text{αν } t' \equiv 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Από την επαγωγική υπόθεση, η $f_{B_{\Pi_B}^{*,u}}$ είναι συναφής συνάρτηση της f_B ως προς τον $\langle m_1 \mapsto s_1, \dots, m_n \mapsto s_n, \ell \rangle$ και επομένως, από την περίπτωση της λ-αφαίρεσης του Θεωρήματος 2.4.8, η $f_{(\lambda(v)(B))_{\Pi_{\lambda(v)}(B)}}^{*,u}$ είναι συναφής συνάρτηση της $f_{\lambda(v)(B)}$ ως προς τον $\langle m_1 \mapsto s_1, \dots, m_n \mapsto s_n, \ell_0 \mapsto t_0, \ell \rangle$.

(5) $A \equiv A_0$ where $\{p_1 := A_1, \dots, p_k := A_k\}$. Έστω ότι οι ελεύθερες μεταβλητές του όρου A είναι στη λίστα x_1, \dots, x_n και επομένως, οι ελεύθερες μεταβλητές κάθε $A_i (i = 1, \dots, k)$ είναι στη λίστα $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_k$.

$$f_A(f_1, \dots, f_n) = f_{A_0}(f_1, \dots, f_n, P_1, \dots, P_k),$$

όπου για $i = 1, \dots, k$, κάθε

$$P_i = f_{P_i}(f_1, \dots, f_n)$$

ορίζεται αναδρομικά στον $\text{rank}(p_i)$:

$$P_i = f_{A_i}(f_1, \dots, f_n, P_{r_1}, \dots, P_{r_m})$$

όπου οι p_{r_1}, \dots, p_{r_m} είναι οι μεταβλητές με βαθμό $< \text{rank}(p_i)$ (βλέπε επίσης στην Ενότητα 1.5.1).

Από την άλλη μεριά, δεδομένου ότι οι A και A_0 έχουν τον ίδιο δείκτη εξόδου, είτε $t_0 \equiv 0$ είτε $t_0 \equiv 1$,

$$f_{A_{\Pi A}^{*,u}}(a, h_1, \dots, h_n) = f_{(A_0)_{\Pi A_0}^{*,u}}(a, h_1, \dots, h_n, Q_1, \dots, Q_m)$$

όπου, σε κάθε περίπτωση, τα h_1, \dots, h_n μπορεί να είναι διαφορετικού τύπου και κάθε Q_i ορίζεται αναδρομικά στον βαθμό $\text{rank}(q_i)$ ως

$$Q_i = f_{Q_i}(a, h_1, \dots, h_n) = f_{(A_i)_{\ell_i \vdash t_i}^{*,u}}(a, h_1, \dots, h_n, Q_{r_1}, \dots, Q_{r_m}).$$

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ξανά εδώ ότι σύμφωνα με την Πρόταση 4.3.1, για $i = 1, \dots, k$, $\text{rank}(p_i) = \text{rank}(q_i)$.

Η απόδειξη ολοκληρώνεται από μία εύκολη επαγωγή στο βαθμό $\text{rank}(p_i)$, χρησιμοποιώντας την περίπτωση της σύνθεσης του Θεωρήματος 2.4.8, σύμφωνα με την οποία για $i = 1, \dots, k$, η f_{Q_i} είναι συναφής συνάρτηση της f_{P_i} ως προς τον ℓ_i . Παρατηρούμε ότι ο περιορισμός του Θεωρήματος εξασφαλίζεται από την Πρόταση 3.2.7. \dashv

Τέλος, το παρακάτω λήμμα γενικεύει το Λήμμα 4.2.3 της προηγούμενης ενότητας.

Λήμμα 4.3.3. *Αν ο $A : \tilde{\sigma}$ είναι ένας μη αναγώγιμος όρος και η Π_A είναι μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του A με ετικέτα ρίζας $A : \ell \vdash t$, τότε ο όρος $A_{\Pi A}^{*,u}$ είναι μη αναγώγιμος όρος.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη είναι με μία τετριμμένη, αλλά αρκετά «κουραστική», επαγωγή στον A . \dashv

Κεφάλαιο 5

Αλγοριθμικό Αντικειμενικό Περιεχόμενο

Ο στόχος της δουλειάς που παρουσιάστηκε σε αυτή τη διατριβή είναι να οριστεί στη Θεωρία Προσδιορισμού Αναφοράς μία έννοια δομικού νοήματος το οποίο να αντιπροσωπεύει αυτό που μία πρόταση επικοινωνεί για τον κόσμο σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο αναφοράς. Κεντρική ιδέα της προσέγγισης που υιοθετήθηκε εδώ ήταν η μελέτη της συμπεριφοράς τοπικότητας των αντικειμένων η οποία κωδικοποιείται από τους κλειστούς δείκτες τοπικότητας εισόδου. Στο Κεφάλαιο 2, δείξαμε ότι αν ένα αντικείμενο $f : \tilde{\sigma}$ έχει μία συναφή συνάρτηση ως προς ένα κλειστό δείκτη τοπικότητας εισόδου ℓ του τύπου του, τότε η συμπεριφορά του χαρακτηρίζεται πλήρως από αυτήν. Στο Κεφάλαιο 3, περιγράψαμε τη συμπεριφορά τοπικότητας των εξαρτημένων από τη κατάσταση όρων της γλώσσας L_{ar}^λ με τη χρήση των κλειστών αποδείξεων τοπικότητας και δείξαμε ότι για κάθε όρο A , η συμπεριφορά τοπικότητάς του καθορίζεται από τη συμπεριφορά τοπικότητας των σταθερών που εμφανίζονται σε αυτόν. Το βασικό τεχνικό αποτέλεσμα αυτής της διατριβής παρουσιάστηκε επίσης σε αυτό το κεφάλαιο: για κάθε όρο A , υπάρχει μία μέγιστα τοπική κλειστή απόδειξη τοπικότητας. Για την ακρίβεια, για κάθε όρο A ο οποίος είναι τέτοιος ώστε η συμπεριφορά τοπικότητας των σταθερών που εμφανίζονται σε αυτόν «περιγράφεται με ένα κανονικό τρόπο» (από ένα παραμετρικό διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας), υπάρχει μία συμπεριφορά της υποδήλωσης του A με βάση την οποία ο υπολογισμός της σε μία κατάσταση χρησιμοποιεί τις τιμές των υποδηλώσεων των υποόρων σε αυτή την κατάσταση όσο περισσότερο γίνεται. Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 4, για κάθε όρο A και μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του A , ορίστηκε τυπικά με τη χρήση του μετασχηματισμού συνάφειας σε μία επέκταση της L_{ar}^λ η συναφής συνάρτηση του A ως προς μία δοσμένη

απόδειξη τοπικότητας.

Σε αυτό το τελευταίο κεφάλαιο της διατριβής, χρησιμοποιούμε την τυπική συναφή συνάρτηση ενός όρου A ως προς τη μέγιστα τοπική κλειστή απόδειξη τοπικότητας σε μια κατάσταση a για να ορίσουμε το **αντικειμενικό περιεχόμενο του A στην a** (Ενότητα 5.1). Ορίζουμε επίσης την **αντικειμενική συνωνυμία** και χρησιμοποιούμε παραδείγματα για να ρίξουμε φως στο ρόλο των νέων αυτών εννοιών νοήματος στη σημασιολογία της φυσικής γλώσσας. Στην Ενότητα 5.2, συγκρίνουμε τις προτεινόμενες έννοιες με τις αντίστοιχες ιδέες στη Λογική των Δεικτικών Εκφράσεων και τέλος, στην Ενότητα 5.3, παρουσιάζουμε μερικές ιδέες για τη μελλοντική δουλειά σε αυτήν την περιοχή.

5.1 Αντικειμενική Κανονική Μορφή και Αντικειμενική Συνωνυμία

Στη γλώσσα L_{ar}^λ , το τοπικό νόημα και η τοπική συνωνυμία ορίζονται μόνο για όρους τύπου \tilde{t} , δηλαδή, όρους οι οποίοι αποδίδουν προτάσεις της φυσικής γλώσσας (Ενότητα 1.5.2). Ορίζουμε εδώ ανάλογα το αντικειμενικό περιεχόμενο για όλους τους όρους τύπου $A : \tilde{\sigma}_0$ και το χρησιμοποιούμε για να εξετάσουμε τη συνωνυμία των εκφορών.

Ορισμός 5.1.1. (Αντικειμενικό Περιεχόμενο ενός Όρου $A : \tilde{\sigma}_0$ σε μία Κατάσταση a) Έστω ότι ο $A : \tilde{\sigma}_0$ και μία κατάσταση $a : s$ στη L_{ar}^λ είναι τέτοιος ώστε

$$A \Rightarrow_{cf} A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}.$$

Αν η Π_A είναι η μέγιστα τοπική απόδειξη τοπικότητας της $cf(A)$ με ετικέτα ρίζας $cf(A) : l \vdash 0$, τότε η **αντικειμενική κανονική μορφή του A στην κατάσταση a** (*factual canonical form of A at a*) είναι η

$$fcf(A, \bar{a}) := (cf(A))_{\Pi_A}^{*, \bar{a}}$$

και το **αντικειμενικό περιεχόμενο του A στην κατάσταση a** (*factual content of A at a*) είναι ο προσδιορισμός αναφοράς της αντικειμενικής κανονικής μορφής του A στην a , δηλαδή,

$$\text{Αντικειμενικό Περιεχόμενο του } A \text{ στην κατάσταση } a := \text{int}(fcf(A, \bar{a})).$$

Ως συνήθως, θα χρησιμοποιούμε την αντικειμενική κανονική μορφή του A στην κατάσταση a για να μιλάμε για το αντικειμενικό περιεχόμενό του συντακτικά.

Όπως είναι φυσικό, η αντικειμενική κανονική μορφή ενός τοπικού όρου $A : \tilde{\sigma}_0$ στην κατάσταση a είναι απλά

$$\text{fcf}(A, \bar{a}) := (\text{cf}(A))^*_{\Pi} \bar{a}.$$

Επίσης, σύμφωνα με το Λήμμα 4.3.3, ο όρος $(\text{cf}(A))^*_{\Pi} \bar{a}$ είναι μη αναγώγιμος και επομένως, η κανονική του μορφή συμπίπτει με αυτόν.

Δεύτερον, παρατηρούμε ότι για κάθε όρο $A : \tilde{\sigma}$, ο δείκτης εξόδου της ετικέτας ρίζας της μέγιστα τοπικής απόδειξης τοπικότητάς του είναι 0. (Έπεται εύκολα δεδομένου ότι, με επαγωγή στον A , μπορούμε να δείξουμε ότι αν ο A έχει κλειστή απόδειξη τοπικότητας με ετικέτα ρίζας $\ell \vdash 1$, τότε υπάρχει επίσης μία κλειστή απόδειξη τοπικότητας του A με ετικέτα ρίζας $\ell \vdash 0$.)

Η έννοια της αντικειμενικής συνωνυμίας ορίζεται εύκολα ως αναφορική συνωνυμία μεταξύ αντικειμενικών κανονικών μορφών.

Ορισμός 5.1.2. (Αντικειμενική Συνωνυμία) Για κάθε δύο όρους $A : \tilde{\sigma}_0$ και $B : \tilde{\sigma}_0$, ο A στην κατάσταση a είναι *αντικειμενικά συνώνυμος* (*factually synonymous*) με τον B στην κατάσταση b αν και μόνο αν

$$\text{fcf}(A, \bar{a}) \approx \text{fcf}(B, \bar{b}).$$

Παράδειγμα 5.1.3. Ας εξετάσουμε το διάσημο παράδοξο, που παρουσιάζεται στο [22], για τις εκφορές ‘Αυτός είναι ο Scott’ και ‘Ο Scott είναι ο Scott’ σε μία κατάσταση όπου πράγματι οι λέξεις ‘αυτός’ και ‘Scott’ αναφέρονται στο ίδιο πρόσωπο. Θεωρούμε μία τοπική σταθερά $\text{id} : \tilde{\epsilon} \times \tilde{\epsilon} \rightarrow \tilde{\tau}$ η οποία αντιπροσωπεύει την ταυτότητα μεταξύ όρων τύπου $\tilde{\epsilon}$, και επομένως, οι δύο προτάσεις αποδίδονται στην L_{af}^λ από τους τοπικούς όρους

$$\text{id}(\text{he}, \text{Scott}) \quad \text{και} \quad \text{id}(\text{Scott}, \text{Scott}).$$

Τα αντίστοιχα αντικειμενικά περιεχόμενά τους στην κατάσταση a όπου ισχύει ότι $\text{he}(a) = \text{Scott}(a)$ ορίζονται από τις αντίστοιχες κανονικές μορφές και η αντικειμενική συνωνυμία τους έπεται εύκολα.

$$\begin{aligned} & \text{id}^*[\bar{a}](p, q) \text{ where } \{p := \text{he}^*[\bar{a}], q := \text{Scott}^*[\bar{a}]\} \\ & \approx \text{id}^*[\bar{a}](p, q) \text{ where } \{p := \text{Scott}^*[\bar{a}], q := \text{Scott}^*[\bar{a}]\}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι στη διαδικασία προσδιορισμού της αντικειμενικής συνωνυμίας χρησιμοποιούνται μόνο οι τιμές των υποδηλώσεων he και Scott σε αυτή τη συγκεκριμένη κατάσταση ακριβώς επειδή οι αντίστοιχες σταθερές είναι τοπικές. Οι δύο εκφορές επικοινωνούν το ίδιο γεγονός για τον κόσμο, πράγμα που εξηγεί γιατί περιμένουμε κανείς να τις μεταχειρίζεται ως «συνώνυμες».

$$\begin{array}{c}
\text{former} : \langle \langle l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 1, l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 0 \quad p_1 : \langle l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 1 \\
\hline
\text{former}(p_1) : \langle l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 0 \quad p_2 : l \hookrightarrow 0 \\
\hline
\text{former}(p_1, p_2) : l \hookrightarrow 0 \quad \text{minister} : \langle l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 1 \quad \text{John} : l \hookrightarrow 0 \\
\hline
\text{former}(p_1, p_2) \text{ where } \{p_1 := \text{minister}, p_2 := \text{John}\} : l \hookrightarrow 0
\end{array}$$

Σχήμα 5.1: Η μέγιστα τοπική απόδειξη τοπικότητας του όρου $\text{cf}(\text{former}(\text{minister}, \text{John}))$.

Από την άλλη μεριά, η αντικειμενική συνωνυμία τους βασίζεται στην ισότητα μεταξύ δύο υποδηλώσεων ($\text{he}^*[\bar{a}] = \text{Scott}^*[\bar{a}]$) και ξεπερνά τη γνώση της γλώσσας. Απαιτεί γνώση του εξωτερικού (μεταμφιεσμένου) κόσμου, γεγονός που εξηγεί την πιθανότητα του τα έχει κανείς διαφορετικές στάσεις απέναντι σε αυτές — για παράδειγμα, να πιστεύει τη μία και να μην πιστεύει την άλλη. Στο [22], εξηγείται επίσης ότι αυτές οι δύο προτάσεις, οι οποίες, φυσικά, δεν είναι αναφορικά συνώνυμες, δεν είναι ούτε τοπικά συνώνυμες στην a ,

$$\begin{aligned}
&\text{id}(p', q')(\bar{a}) \text{ where } \{p' := \text{he}, q' := \text{Scott}\} \\
&\approx \text{id}(p', q')(\bar{a}) \text{ where } \{p' := \text{Scott}, q' := \text{Scott}\}.
\end{aligned}$$

Αυτό το απλό παράδειγμα δείχνει ότι το αντικειμενικό περιεχόμενο μίας εκφοράς δεν μπορεί να αποτελεί το αντικείμενο της πεποίθησής μας αν και ως έννοια νοήματος σε πλαίσιο είναι προφανώς υποψήφιο για κάτι τέτοιο. Στα [22] και [13], προτείνεται ότι ίσως τα τοπικά νοήματα είναι περισσότερα κατάλληλα για αυτό το ρόλο. Είναι πιο σημαντικό ωστόσο να επισημάνουμε το γεγονός ότι στην L_{ar}^λ υπάρχουν τώρα δύο έννοιες νοήματος σε πλαίσιο που εκφράζουν ένα διαφορετικό αλγόριθμο υπολογισμού της υποδήλωσης ενός όρου σε μία κατάσταση και επομένως, μπορούν πιθανώς να συνεισφέρουν στην κατανόηση προτάσεων που εκφράζουν τη στάση μας απέναντι σε άλλες προτάσεις (propositional attitudes).

Παράδειγμα 5.1.4. Ας εξετάσουμε άλλο ένα παράδειγμα με το δεικτικό ‘αυτός’ και το επίθετο ‘πρώην’, των οποίων τη συμπεριφορά τοπικότητας εξηγήσαμε πολλές φορές (Παραδείγματα 2.3.1 και 3.2.10), στις δύο εκφορές ‘Ο Γιάννης είναι πρώην υπουργός’ και ‘Αυτός είναι πρώην υπουργός’ στην κατάσταση a όπου $\text{John}(a) = \text{he}(a)$. Η μέγιστα τοπική απόδειξη τοπικότητας της κανονικής μορφής του $\text{former}(\text{minister}, \text{John})$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.1. Η μέγιστα τοπική απόδειξη της κανονικής μορφής του $\text{former}(\text{minister}, \text{he})$ είναι

$$\frac{\text{Yesterday} : \langle l \mapsto 1 \rangle \mapsto 0 \quad p : l \mapsto 1}{\frac{\text{Yesterday}(p) : l \mapsto 0 \quad \text{it_rains} : l \mapsto 1}{\text{Yesterday}(p) \text{ where } \{p := \text{it_rains}\} : l \mapsto 0}}$$

Σχήμα 5.2: Η μέγιστα τοπική κλειστή απόδειξη τοπικότητας της κανονικής μορφής του Yesterday(it_rains)

απολύτως ανάλογη και επομένως, έπεται ότι

$$\begin{aligned} & \text{former}^*_{\langle \langle l \mapsto 0 \rangle \mapsto 1, l \mapsto 0 \rangle}[\bar{a}](p, q) \text{ where } \{p := \text{minister}^*_{\langle l \mapsto 0 \rangle}, q := \text{John}^*_l[\bar{a}]\} \\ & \approx \text{former}^*_{\langle \langle l \mapsto 0 \rangle \mapsto 1, l \mapsto 0 \rangle}[\bar{a}](p, q) \text{ where } \{p := \text{minister}^*_{\langle l \mapsto 0 \rangle}, q := \text{he}_l^*[\bar{a}]\}. \end{aligned}$$

Αυτές οι δύο εκφορές δεν είναι τοπικά συνώνυμες αλλά το γεγονός ότι είναι αντικειμενικά συνώνυμες συμφωνεί ξανά με τη διαίσθησή μας ότι αυτές οι δύο εκφορές κομίζουν την ίδια πληροφορία για τον κόσμο. Τα παραδείγματα τα οποία αφορούν δεικτικά μπορούν να εξηγήσουν την ανάγκη ύπαρξης μίας έννοιας αντικειμενικής συνωνυμίας και στη συνέχεια, θα εξετάσουμε ακόμα ένα.

Παράδειγμα 5.1.5. Διατυπώνουμε στην L_{ar}^λ το απλό Φρεγκεανό παράδειγμα που έχουμε αναφέρει ήδη στην Ενότητα 1.1 στο οποίο περιλαμβάνονται τα δεικτικά ‘Χθες’ και ‘Σήμερα’. Μία εκφορά της πρότασης ‘Σήμερα βρέχει’ σε μία συγκεκριμένη μέρα, στην κατάσταση a , θα μεταφερθεί ως ‘Χθες έβρεξε’ την επόμενη μέρα, στην κατάσταση b . Οι αντίστοιχοι όροι στη L_{ar}^λ και οι κανονικές τους μορφές είναι οι εξής¹.

$$\begin{aligned} \text{Yesterday(it_rains)} & \Rightarrow_{cf} \text{Yesterday}(p) \text{ where } \{p := \text{it_rains}\} \\ \text{Today(it_rains)} & \Rightarrow_{cf} \text{Today}(p) \text{ where } \{p := \text{it_rains}\} \end{aligned}$$

Η μέγιστα τοπική απόδειξη τοπικότητας της κανονικής μορφής της πρότασης ‘Χθες έβρεξε’ παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.2. Αν θεωρήσουμε ότι η σταθερά Today έχει επίσης μόνο τον κλειστό δείκτη τοπικότητας $\langle l \mapsto 1 \rangle$, τότε η αντίστοιχη απόδειξη της κανονικής μορφής της ‘Σήμερα βρέχει’ είναι ακριβώς η ίδια αν απλά αντικαταστήσουμε τη σταθερά Yesterday με την Today. Οι δύο εκφορές είναι αντικειμενικά συνώνυμες

¹Οι σταθερές Yesterday : $\tilde{t} \rightarrow \tilde{t}$ και Today : $\tilde{t} \rightarrow \tilde{t}$ θεωρούνται σε αυτό το παράδειγμα ως προτασιακοί τελεστές (βλέπε επίσης τη χρήση του ‘Χθες’ στις Ενότητες 1.6 και 5.2).

$$\begin{aligned} & \text{Yesterday}_{\langle l \mapsto 1 \rangle}^*[\bar{b}](p') \text{ where } \{p' := \text{it_rains}_l^*\} \\ & \approx \text{Today}_{\langle l \mapsto 1 \rangle}^*[\bar{a}](p') \text{ where } \{p' := \text{it_rains}_l^*\} \end{aligned}$$

υπό τον όρο ότι

$$\models \text{Yesterday}_{\langle l \mapsto 1 \rangle}^*[\bar{b}](p') = \text{Today}_{\langle l \mapsto 1 \rangle}^*[\bar{a}](p')$$

το οποίο έπεται, δεδομένου ότι σύμφωνα με τη συνήθη ερμηνεία αυτών των σταθερών

$$\models \text{Yesterday}(p')(\bar{b}) = \text{Today}(p')(\bar{a}).$$

Από την άλλη μεριά, αν θεωρήσουμε ότι η σταθερά *Today* είναι τοπική, οι δύο εκφορές δεν είναι αντικειμενικά συνώνυμες. Να σημειωθεί ότι οι δύο εκφορές είναι τοπικά συνώνυμες.

Γενικά, ο πλάγιος λόγος, όπως στο παραπάνω παράδειγμα, είναι ένα φαινόμενο που μπαίνουμε στο πειρασμό να αναλύσουμε με τη χρήση της αντικειμενικής συνωνυμίας. Παρατηρούμε ωστόσο ότι η αντικειμενική συνωνυμία (όπως η αναφορική και η τοπική συνωνυμία) είναι δομική, γεγονός που σημαίνει ότι μία πρόταση στον πλάγιο λόγο θα είναι αντικειμενικά συνώνυμη με την αρχική μόνο αν τα συστατικά της μέρη μεταφέρονται αντιστοίχως.

Παράδειγμα 5.1.6. Ολοκληρώνουμε αυτή η σειρά παραδειγμάτων με το διάσημο παράδειγμα της Partee ([18]) το οποίο προσπαθούμε να αναλύσουμε με τη χρήση της τοπικότητας όπως αναπτύσσεται εδώ. Η κανονική μορφή της πρότασης ‘Η θερμοκρασία είναι ενενήντα βαθμοί και αυξάνεται’ είναι

$$\begin{aligned} & \lambda(x)(\text{and}(\text{rise}(x), \text{ninety}(x)))(\text{the}(\text{temp})) \\ & \Rightarrow_{\text{cf}} \lambda(x)(\text{and}(r_1(x), r_2(x)))(p) \text{ where } \{r_1 := \lambda(x)\text{rise}(x), \\ & \quad r_2 := \lambda(x)\text{ninety}(x), \\ & \quad p := \text{the}(q), q := \text{temp}\}. \end{aligned}$$

Η μέγιστα τοπική κλειστή απόδειξη τοπικότητάς της (Σχήμα 5.3) παρουσιάζεται εδώ για να μπορέσουμε να καταστήσουμε σαφές πώς ο «συντονισμός» των *rise* and *ninety* επιβάλλουν τη χρήση του δείκτη $\langle l \mapsto 1 \rangle$ της τοπικής σταθεράς *ninety* (βλέπε επίσης το Παράδειγμα 3.2.6). Το αντικειμενικό περιεχόμενο της στην κατάσταση *a* είναι

$$\begin{aligned} & \lambda(x')(\text{and}_{\langle l \mapsto 0, l \mapsto 0 \rangle}^*[\bar{a}](r'_1(x'), r'_2(x'))(p')) \\ & \text{where } \{r'_1 := \lambda(x')\text{rise}_{\langle l \mapsto 1 \rangle}^*[\bar{a}](x'), \\ & \quad r'_2 := \lambda(x')\text{ninety}_{\langle l \mapsto 1 \rangle}^*[\bar{a}](x'), \\ & \quad p' := \lambda(u)\text{the}_{\langle l \mapsto 0 \rangle \mapsto 1}^*[u](q'), \\ & \quad q' := \text{temp}_{\langle l \mapsto 0 \rangle}^*\}. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{r_1 : \langle l \hookrightarrow 1 \rangle \hookrightarrow 0 \quad x : l \hookrightarrow 1}{\text{and} : \langle l \hookrightarrow 0, l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 0 \quad r_1(x) : l \hookrightarrow 0} \quad \frac{r_2 : \langle l \hookrightarrow 1 \rangle \hookrightarrow 0 \quad x : l \hookrightarrow 1}{r_2(x) : l \hookrightarrow 0} \\
\hline
\text{and}(r_1(x)) : \langle l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 0 \quad r_2(x) : l \hookrightarrow 0 \\
\hline
\text{and}(r_1(x), r_2(x)) : l \hookrightarrow 0 \\
\hline
\Pi_{A_0} : \frac{\lambda(x)(\text{and}(r_1(x), r_2(x))) : \langle l \hookrightarrow 1 \rangle \hookrightarrow 0 \quad p : l \hookrightarrow 1}{\lambda(x)(\text{and}(r_1(x), r_2(x)))(p) : l \hookrightarrow 0}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\Pi_{A_{r_1}} : \frac{\text{rise} : \langle l \hookrightarrow 1 \rangle \hookrightarrow 0 \quad x : l \hookrightarrow 1}{\text{rise}(x) : l \hookrightarrow 0} \quad \Pi_{A_{r_2}} : \frac{\text{ninety} : \langle l \hookrightarrow 1 \rangle \hookrightarrow 0 \quad x : l \hookrightarrow 1}{\text{ninety}(x) : l \hookrightarrow 0} \\
\hline
\lambda(x)\text{rise}(x) : \langle l \hookrightarrow 1 \rangle \hookrightarrow 0 \quad \lambda(x)\text{ninety}(x) : \langle l \hookrightarrow 1 \rangle \hookrightarrow 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\Pi_{A_p} : \frac{\text{the} : \langle \langle l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 1 \rangle \hookrightarrow 0 \quad q : \langle l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 1}{\text{the}(q) : l \hookrightarrow 1} \quad \Pi_{A_q} : \text{temp} : \langle l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 1
\end{array}$$

$$\frac{\Pi_{A_0} \quad \Pi_{A_{r_1}} \quad \Pi_{A_{r_2}} \quad \Pi_{A_p} \quad \Pi_{A_q}}{A}$$

Σχήμα 5.3: Η μέγιστα τοπική κλειστή απόδειξη τοπικότητας του όρου $A \equiv \text{cf}(\lambda(x)(\text{and}(\text{rise}(x), \text{ninety}(x)))(\text{the}(\text{temp})))$.

Επομένως, το αντικειμενικό της περιεχόμενο σε κάθε κατάσταση a εξαρτάται από την συναφή συνάρτηση του υποόρου $\text{the}(\text{temp})$ και όχι μόνο από την τιμή της στην a . Αυτό συνάγεται εδώ από την ανάλυση της συμπεριφοράς τοπικότητας της συγκεκριμένης πρότασης· δεν επιβάλλεται από επιλογές που γίνονται κατά την απόδοση της πρότασης στην τυπική γλώσσα.

Η ανάλυση της συμπεριφοράς τοπικότητας της πρότασης ‘Η θερμοκρασία είναι ενενήντα βαθμοί και αυτή αυξάνεται’ αν χρησιμοποιήσουμε «κοινή δέσμευση» (co-indexing) όπως στο [22] θα δώσει απολύτως ανάλογα αποτελέσματα για τον υποόρο $\text{the}(\text{temp})$ ².

²Η πρόταση αυτή δεν είναι δόκιμη στα ελληνικά αλλά παρουσιάζεται εδώ ως μετάφραση της αγγλικής πρότασης ‘The temperature is ninety and it is rising’ με σκοπό να αποτελέσει παράδειγμα «κοινής δέσμευσης».

Η θερμοκρασία είναι ενενήντα βαθμοί και αυτή αυξάνεται
 $\xrightarrow{\text{αποδίδεται}}$ $\text{and}(p, q) \text{ where } \{p := \text{ninety}(p_1), q := \text{rise}(p_1),$
 $p_1 := \text{the}(p_2), p_2 := \text{temp}\}.$

Από την άλλη μεριά, η ανάλυση συμπεριφοράς τοπικότητας της πρότασης
 ‘Η θερμοκρασία είναι ενενήντα βαθμοί και η θερμοκρασία αυξάνεται’ εξετάζει
 τις δύο εμφανίσεις του υποόρου $\text{the}(\text{temp})$ ανεξάρτητα.

$\text{and}(\text{ninety}(\text{the}(\text{temp})), \text{rise}(\text{the}(\text{temp})))$
 $\Rightarrow_{\text{cf}} \text{and}(p, q) \text{ where } \{p := \text{ninety}(p_1), q := \text{rise}(q_1), p_1 := \text{the}(p_2), p_2 := \text{temp},$
 $q_1 := \text{the}(q_2), q_2 := \text{temp}\}.$

Στη μέγιστα τοπική απόδειξη τοπικότητας αυτού του όρου ο υποόρος $\text{the}(\text{temp})$
 έχει διαφορετικούς δείκτες εξόδου. Γενικά, μία σταθερά η οποία εμφανίζεται
 σε δύο μέρη σε ένα όρο A μπορεί να έχει διαφορετικό δείκτη τοπικότητας
 σε καθεμία από τις εμφανίσεις της στη μέγιστα τοπική απόδειξη τοπικότητας
 του A .

5.2 Αντικειμενικό Περιεχόμενο και η Λογική των Δεικτικών Εκφράσεων

Σε αυτή τη σύντομη ενότητα, εξετάζουμε μερικά παραδείγματα τα οποία έχουμε
 αναφέρει ήδη στην Ενότητα 1.4 όπου παρουσιάστηκε πρώτη φορά η Λογική των
 Δεικτικών Εκφράσεων. Είναι ενδιαφέρον να συγκρίνουμε την αντιμετώπιση
 αυτών των παραδειγμάτων στην L_{ar}^λ με αυτή στην Ty_2 που παρουσιάστηκε στην
 Ενότητα 1.6.

Παράδειγμα 5.2.1. Ας θεωρήσουμε την εκφορά της πρότασης ‘Εγώ προσβλή-
 θηκα χθες’ σε δύο καταστάσεις a και b όπου ο ομιλητής διαφέρει. Ο Kaplan
 ορθά υποστηρίζει ότι οι αντίστοιχες εκφορές δεν έχουν το ίδιο Περιεχόμενο
 σε αυτές τις καταστάσεις, αν και οι υποδηλώσεις τους μπορεί να είναι ίδιες.

Στην L_{ar}^λ , η κανονική μορφή του όρου που αποδίδει την πρόταση είναι

$\text{Yesterday}_1(\text{be_insulted}, l) \Rightarrow_{\text{cf}} \text{Yesterday}_1(p, q) \text{ where } \{p := \text{be_insulted}, q := l\}$

και η αντικειμενική κανονική μορφή της σε μία κατάσταση a που υπολογίζεται
 από τη μέγιστα τοπική απόδειξη τοπικότητάς του που παρουσιάζεται στο
 Σχήμα 5.4 είναι

$(\text{Yesterday}_1)^*_{\langle \langle l_{\downarrow 0} \rangle \rangle_{\downarrow 1}, l_{\downarrow 0}}[\bar{a}](p', q') \text{ where } \{p' := \text{be_insulted}^*_{\langle l_{\downarrow 0} \rangle}, q' := l^*[\bar{a}]\}.$

$$\begin{array}{c}
\text{Yesterday}_1 : \langle \langle l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 1, l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 0 \quad p : \langle l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 1 \\
\hline
\text{Yesterday}_1(p) : \langle l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 0 \quad q : l \hookrightarrow 0 \\
\hline
\text{Yesterday}_1(p, q) : l \hookrightarrow 0 \quad \text{be_insulted} : \langle l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 1 \quad l : l \hookrightarrow 0 \\
\hline
\text{Yesterday}_1(p, q) \text{ where } \{p := \text{be_insulted}, q := l\} : l \hookrightarrow 0
\end{array}$$

Σχήμα 5.4: Η μέγιστα τοπική κλειστή απόδειξη τοπικότητας της κανονικής μορφής του $\text{Yesterday}_1(\text{insulted}, l)$.

Είναι προφανές ότι αν $\not\models l_i^*[\bar{a}] = l_i^*[\bar{b}]$, τότε

$$\begin{aligned}
& (\text{Yesterday}_1)^*_{\langle \langle l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 1, l \hookrightarrow 0 \rangle}[\bar{a}](p', q') \text{ where } \{p' := \text{be_insulted}^*_{\langle l \hookrightarrow 0 \rangle}, q' := l_i^*[\bar{a}]\} \\
& \not\approx (\text{Yesterday}_1)^*_{\langle \langle l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 1, l \hookrightarrow 0 \rangle}[\bar{b}](p', q') \text{ where } \{p' := \text{be_insulted}^*_{\langle l \hookrightarrow 0 \rangle}, q' := l_i^*[\bar{b}]\}.
\end{aligned}$$

Μπορεί ναδειχτεί ότι αυτές οι δύο εκφορές δεν είναι ποτέ τοπικά συνώνυμες αν η a δεν ταυτίζεται με την b .

Παράδειγμα 5.2.2. Τώρα, έστω μία κατάσταση a όπου η ημερομηνία είναι η 21η Απριλίου 1973 και ο ομιλητής είναι το άτομο που δηλώνεται από το όνομα 'David Kaplan'. Τότε η εκφορά της 'Εγώ προσβλήθηκα χθες' στην κατάσταση a είναι αντικειμενικά συνώνυμη με την εκφορά της 'Ο David Kaplan προσβλήθηκε στις 20 Απριλίου 1973' σε οποιαδήποτε κατάσταση b , δεδομένου ότι η σταθερά DavidKaplan_i^* υποδηλώνει στην b το ίδιο άτομο,

$$\begin{aligned}
& (\text{Yesterday}_1)^*_{\langle \langle l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 1, l \hookrightarrow 0 \rangle}[\bar{a}](p', q') \text{ where } \{p' := \text{be_insulted}^*_{\langle l \hookrightarrow 0 \rangle}, q' := l_i^*[\bar{a}]\} \\
& \approx (\text{on20April1973})^*_{\langle \langle l \hookrightarrow 0 \rangle \hookrightarrow 1, l \hookrightarrow 0 \rangle}[\bar{b}](p', q') \text{ where} \\
& \{p' := \text{be_insulted}^*_{\langle l \hookrightarrow 0 \rangle}, q' := \text{DavidKaplan}_i^*[\bar{b}]\}.
\end{aligned}$$

Ο Kaplan υποστηρίζει ότι φυσικά, οι δύο αυτές προτάσεις δεν έχουν τον ίδιο Χαρακτήρα. Στην L_{ar}^λ , αυτοί οι δύο όροι δεν είναι αναφορικά συνώνυμοι αλλά επίσης οι δύο εκφορές στις καταστάσεις a και b αντίστοιχα, δεν είναι τοπικά συνώνυμες. Επομένως, η παρατήρηση του Kaplan ότι η πρόταση 'Εγώ προσβλήθηκα χθες' στην a «...θα έχει ένα περιεχόμενο περίπου ισοδύναμο με [αυτό]...» ([14]) της εκφοράς 'Ο David Kaplan προσβλήθηκε στις 20 Απριλίου 1973' σε οποιαδήποτε κατάσταση καθίσταται εδώ απολύτως ακριβής.

Τέλος, θα πρέπει να επισημάνουμε ξανά το γεγονός ότι στη Θεωρία Προσδιορισμού Αναφοράς τόσο το αντικειμενικό περιεχόμενο όσο και το τοπικό νόημα είναι δομικές έννοιες νοήματος. Επομένως, η εκφορά της πρότασης

‘Εγώ προσβλήθηκα χθες’ στην κατάσταση a δεν θα είναι αντικειμενικά συνώνυμη με οποιαδήποτε εκφορά της πρότασης ‘Ο άνδρας με το γκρι καπέλο προσβλήθηκε χθες’ στην ίδια κατάσταση ακόμα κι αν ο ομιλητής τυχαίνει να είναι ο μοναδικός παριστάμενος άνδρας που φοράει γκρι καπέλο.

5.3 Μελλοντική Δουλειά

Η Θεωρία Προσδιορισμού Αναφοράς αποτελεί μία μαθηματική απεικόνιση της σημασιολογίας της φυσικής γλώσσας η οποία έχει τώρα εξοπλιστεί με μία πρόσθετη έννοια νοήματος σε πλαίσιο — το αντικειμενικό περιεχόμενο. Υπάρχουν διάφορες πλευρές του που είναι αρκετά ενδιαφέρουσες ώστε να μελετηθούν περαιτέρω και επομένως, να μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε καλύτερα τα φαινόμενα της φυσικής γλώσσας.

Πρώτον, το αντικειμενικό περιεχόμενο ενός όρου A σε μία κατάσταση a ορίζεται με τη χρήση της τυπικής συναφούς συνάρτησης της κανονικής μορφής του A αντί της τυπικής συναφούς συνάρτησης του ίδιου του A . Αν ο A είναι τοπικός όρος, μπορεί να δείχτει ότι η κανονική μορφή του τοπικά συναφούς όρου του A σε μία κατάσταση a συμπίπτει με τον τοπικά συναφή όρο της κανονικής μορφής του A στην a . Στη γενική περίπτωση, ο προσδιορισμός της ακριβούς σχέσης μεταξύ των δύο όρων είναι αντικείμενο περαιτέρω μελέτης. Μέρος της πολυπλοκότητας του προβλήματος αυτού είναι η σύγκριση μεταξύ της μέγιστα τοπικής απόδειξης τοπικότητας του A και της μέγιστα τοπικής απόδειξης τοπικότητας της κανονικής μορφής του A .

Δεύτερον, ας θεωρήσουμε δύο όρους A και B οι οποίοι αποδίδουν προτάσεις της φυσικής γλώσσας. Αν είναι αναφορικά συνώνυμοι, τότε είναι τοπικά συνώνυμοι σε κάθε κατάσταση a (βλέπε επίσης το [13] για ανάλογα αποτελέσματα στην $L_{ar}^{\lambda, G}$). Το ερώτημα του κατά πόσον οι δύο όροι είναι επίσης αντικειμενικά συνώνυμοι σε κάθε κατάσταση a δεν έχει προφανή απάντηση. Το αντικειμενικό περιεχόμενο όπως ορίστηκε εδώ εκφράζει έναν αλγόριθμο που βασίζεται στη μέγιστα τοπική ερμηνεία των μερών ενός όρου. Από την άλλη μεριά, το τοπικό νόημα εκφράζει ένα διαφορετικό αλγόριθμο ο οποίος υπολογίζει το ίδιο αντικείμενο αλλά δεν προϋποθέτει τίποτα για τη συμπεριφορά τοπικότητας των μερών του όρου. Επομένως, το ερώτημα είναι στην πραγματικότητα πιο περίπλοκο, και την ίδια στιγμή, πιο ενδιαφέρον, απ’ ότι φαίνεται με την πρώτη ματιά.

Τρίτον, κανείς μπορεί να μελετήσει το ρόλο του νοήματος που ορίζεται αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση ως προς τις καταστάσεις του αντικειμενικού περιεχομένου ενός όρου A σε μια κατάσταση και πώς αυτό σχετίζεται με το σφαιρικό νόημα που έχει αρχικά οριστεί στην L_{ar}^{λ} .

Τέλος, πιστεύουμε ότι η έννοια της τοπικότητας που εισήχθη εδώ και η ανάλυση ως προς αυτήν που επιτυγχάνεται από τη μέγιστα τοπική απόδειξη τοπικότητας μιας πρότασης μπορεί να είναι ένα χρήσιμο εργαλείο στην κατανόηση αδιαφανών περιβαλλόντων και σχετικών θεμάτων που αφορούν την Αρχή της Σύνθεσης.

Βιβλιογραφία

- [1] Rudolf Carnap. *Meaning and Necessity*. The University of Chicago Press, second edition, 1956. Πρώτη έκδοση το 1947.
- [2] David D. Dowty, Robert E. Wall, and Stanley Peters. *Introduction to Montague semantics*. D. Reidel Publishing Company, 1981.
- [3] Gottlob Frege. Funktion und Begriff. Ανακοίνωση στο *Jenaische Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft*, Ιένα, 9 Ιανουαρίου 1891. Αγγλική μετάφραση από τον P. T. Geach ως ‘Function and Concept’ στο [9].
- [4] Gottlob Frege. *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau: W. Koebner, 1884.
- [5] Gottlob Frege. Über Begriff und Gegenstand. *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*, 16:192–205, 1892. Αγγλική μετάφραση από τον P. T. Geach ως ‘On Concept and Object’ στο [9].
- [6] Gottlob Frege. Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 100:25–50, 1892. Αγγλική μετάφραση από τον M. Black ως ‘On Sense and Meaning’ στο [9].
- [7] Gottlob Frege. Der Gedanke - Eine logische Untersuchung. *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus I*, pages 58–77, 1918-1919. Αγγλική μετάφραση από τους P. Geach και R. H. Stoothoff ως ‘Thoughts’, Ανατύπωση στο [25].
- [8] Daniel Gallin. *Intensional and higher-order modal logic (With applications to Montague semantics)*. Number 19 in North-Holland Mathematical Studies. North-Holland, 1975.

- [9] P. Geach and M. Black, editors. *Translations from the philosophical writings of Gottlob Frege*. Basil Blackwell, third edition, 1980.
- [10] Irene Heim and Angelika Kratzer. *Semantics in Generative Grammar*. Blackwell, 1998.
- [11] Theo M.V. Janssen. Frege, Contextuality and Compositionality. *Journal of Logic, Language, and Information*, 10:115–136, 2001.
- [12] Eleni Kalyvianaki. Factual content in algorithmic natural language semantics. In Ville Nurmi and Dmitry Sustretov, editors, *Proceedings of the Twelfth ESSLLI Student Session*, 2007.
- [13] Eleni Kalyvianaki and Yiannis N. Moschovakis. Two aspects of situated meaning. In Fritz Hamm and Stephan Kepser, editors, *Logics for Linguistic Structures*. DeGruyter, Υπό έκδοση.
- [14] David Kaplan. On the logic of demonstratives. *Journal of Philosophical Logic*, 8:81–98, 1978. Ανατύπωση στο [25].
- [15] David Kaplan. Demonstratives An Essay on the Semantics, Logic, Metaphysics, and Epistemology of Demonstratives and Other Indexicals & Afterthoughts. In Joseph Almog, John Perry, and Howard Wettstein, editors, *Themes from Kaplan*, pages 481–614. Oxford University Press, 1989.
- [16] Richard Montague. English as a formal language. In Bruno Visentini et al., editor, *Linguaggi nella Società e nella Tecnica*, pages 189–224. Milan, Edizioni di Comunità, 1970. Ανατύπωση στο [19].
- [17] Richard Montague. Universal grammar. *Theoria*, (36):373–398, 1970. Ανατύπωση στο [19].
- [18] Richard Montague. The proper treatment of quantification in ordinary english. In J. Hintikka, J. Moravcsik, and P. Suppes, editors, *Approaches to Natural Language: Proceedings of the 1970 Stanford Workshop on Grammar and Semantics*, pages 221–242. Dordrecht, D. Reidel Publishing Company, 1973. Ανατύπωση στο [19].
- [19] Richard Montague. *Formal Philosophy: Selected papers by Richard Montague*. Richmond H. Thomason (editor), Yale University Press, 1974.
- [20] Yiannis N. Moschovakis. Sense and denotation as algorithm and value. In J. Väänänen and J. Oikkonen, editors, *Logic Colloquium '90*, volume 2 of *Lecture Notes in Logic*, pages 210–249, 1994.

- [21] Yiannis N. Moschovakis. What is an algorithm? In B. Engquist and W. Schmid, editors, *Mathematics unlimited — 2001 and beyond*, pages 919–936. Springer, 2001.
- [22] Yiannis N. Moschovakis. A logical calculus of meaning and synonymy. *Linguistics and Philosophy*, 29:27–89, 2006.
- [23] Francis Jeffry Pelletier. Did Frege believe Frege’s principle? *Journal of Logic, Language, and Information*, 10:87–114, 2001.
- [24] Paul Portner and Barbara H. Partee, editors. *Formal Semantics: The essential readings*. Blackwell, 2002.
- [25] Nathan Salmon and Scott Soames, editors. *Propositions and Attitudes*. Oxford University Press, 1988.
- [26] Dana Scott. Advice on Modal Logic. In Karel Lambert, editor, *Philosophical problems in logic: some recent developments*, pages 143–173. D. Reidel: Dordrecht, Holland, 1970.

Γλωσσάριο Αγγλικών Όρων

λ-abstraction	λ-αφαίρεση	equivalent	ισοδύναμος
acyclic	μη κυκλικός	evaluation	αποτίμηση
application	εφαρμογή	extension	έκταση
assignment	ανάθεση τιμών	factual	αντικειμενικός
associate function	συναφής συνάρτηση	formation tree	δέντρο σχηματισμού
calculus	λογισμός	generic	παραμετρικός
canonical form	κανονική μορφή	global	σφαρικός
character	χαρακτήρας	immediate	άμεσος
circumstance	περίσταση	index	δείκτης
closed	κλειστός	index token	σύμβολο δείκτη
compositionality principle	αρχή της σύνθεσης	indexical	δεικτικό
congruence	σύμπτωση	intension	ένταση
constant	σταθερά	irreducible	μη αναγώγιμος
content	περιεχόμενο	local	τοπικός
context	πλαίσιο	locality	τοπικότητα
declarative sentence	δηλωτική πρόταση	input index	δείκτης εισόδου
demonstrative	δεικτική έκφραση	output index	δείκτης εξόδου
denotation	υποδήλωση	proof	απόδειξη
		proof schema	διάγραμμα απόδειξης
		meaning	νόημα

metalanguage μεταγλώσσα	transformation μετασχηματισμός
object-language γλώσσα-αντικείμενο	associate συνάφειας
operator τελεστής	term όρος
preferred προτιμητέα	explicit ρητός
recursion αναδρομή	head κεφαλή
recursive construct τελεστής αναδρομής	proper μη άμεσος
recursor αναδρομέας	type τύπος
reduction αναγωγή	basic βασικός
reference αναφορά	level επίπεδο
referential intension προσδιορισμός αναφοράς	pure απλός
render αποδίδω	state-dependent εξαρτώμενος από την κατάσταση
semantics σημασιολογία	universe σύμπαν
formal τυπική	utterance εκφορά
sense σημασία	variable μεταβλητή
situated meaning νόημα σε πλαίσιο	bound occurrence δεσμευμένη εμφάνιση
standard κανονικός	free occurrence ελεύθερη εμφάνιση
state κατάσταση	fresh καινούργια
state-description περιγραφή κατάστασης	generalized γενικευμένη
subproof υποαπόδειξη	pure απλή
substitution αντικατάσταση	recursive αναδρομής
synonymy συνωνυμία	
denotational δηλωτική	
referential αναφορική	

Ευρετήριο Όρων

- IL, εντασιακή λογική, 11
- λ-αφαίρεση, 9
- λ-λογισμός, 9
- L_{ar}^λ , 19
- LD, λογική των δεικτικών εκφράσεων, 17, 110
- LIL, γλώσσα της εντασιακής λογικής, 12
- άμεσος όρος, 22
- ανάθεση τιμών, 10
 - ενημέρωση, 10
- αναγωγή, 22
 - κανόνες, 22
 - λογισμός, 23
- αναδρομέας, 24
- αναδρομή, μη κυκλική, 20
- αναδρομικός τελεστής, 20
- αναφορά, 1
- αναφορική συνωνυμία, 25
- αντικατάσταση, 45
- αντικειμενική
 - κανονική μορφή, 104
 - συνωνυμία, 105
- αντικειμενικό περιεχόμενο, 2, 104
 - στην LIL, 30
- απλή μεταβλητή, 20
- απλός τύπος, 34
- αποτίμηση, 45
- απόδειξη τοπικότητας
 - διάγραμμα, 74
 - παραμετρικό, 76
 - κλειστή, 62
 - κανονική, 72
 - μέγιστα τοπική, 74, 79
 - πιο τοπική από, 73, 76
 - ρίζα, 64
- απόδοση, 15
- αρχή της σύνθεσης, 1
- αρχή του Πλαισίου, 7
- βασικός τύπος, 9
- γενική συνθήκη τοπικότητας, 50
- γενικευμένη μεταβλητή, 22, 87
- γλώσσα της εντασιακής λογικής, LIL, 12
- γλώσσα-αντικείμενο, 12
- δέντρο σχηματισμού όρου, 10
- δείκτης, 12
- δείκτης (τοπικότητας), 45
 - κανονικός, 45
 - κλειστός, 44
 - εισόδου, 44
 - εξόδου, 44
 - μεταβλητή, 45
 - μικρότερος από ή ίσος με, 73
 - παραμετρικός, 46
 - πιο τοπικός από, 73
 - σταθερά, 44
 - σύμβολο, 45
 - τοπικός, 45
- δεικτική έκφραση, 17

- λογική των, LD, 17, 110
 δεικτικό, 17
 δηλωτική πρόταση, 6
 διάγραμμα απόδειξης τοπικότητας, 74
 έκταση, 11
 Montague, 14
 εμφάνιση (μεταβλητής)
 δεσμευμένη, 10
 ελεύθερη, 9
 ένταση, 11
 Montague, 14
 εντασιακή λογική, IL, 11
 εξαρτώμενος από την κατάσταση τύ-
 πος, 34
 επίπεδο τύπου, 35
 εφαρμογή, 9
 συνάφειας, 86
 θεωρία προσδιορισμού αναφοράς, 1,
 19
 ισοδύναμα (σύνολα συνθηκών), 77
 κανονική κλειστή απόδειξη τοπικό-
 τητας, 72
 κανονική μορφή, 24
 αντικειμενική, 104
 κανονικός δείκτης τοπικότητας, 45
 κανόνες αναγωγής, 22
 κατάσταση, 12
 κεφαλή (όρου), 24
 κλειστή απόδειξη τοπικότητας, 62
 κλειστός
 δείκτης (τοπικότητας), 44
 εισόδου, 44
 εξόδου, 44
 όρος, 10
 λογική
 γλώσσα της εντασιακής, LIL, 12
 εντασιακή, IL, 11
 των δεικτικών εκφράσεων, LD,
 17, 110
 λογισμός αναγωγής, 23
 μέγιστα τοπική απόδειξη τοπικότη-
 τας, 74, 79
 μέρος (όρου), 24
 μεταβλητή, 9
 αναδρομής, 20
 απλή, 20
 γενικευμένη, 22, 87
 δείκτη (τοπικότητας), 45
 εμφάνιση
 δεσμευμένη, 10
 ελεύθερη, 9
 μεταγλώσσα, 12
 μετασχηματισμός
 συνάφειας, 94
 τοπικής συνάφειας, 89
 μη άμεσος όρος, 22
 μη αναγώγιμος όρος, 24
 μη κυκλική αναδρομή, 20
 μη τοπικό αντικείμενο, 37
 μικρότερος από ή ίσος με (δείκτης
 τοπικότητας), 73
 νόημα, 1
 σφαιρικό, 24
 στην LIL, 30
 τοπικό, 26
 στην LIL, 30
 όρος, 9
 άμεσος, 22
 αναφορικά συνώνυμος, 25
 αντικειμενικά συνώνυμος, 105
 δέντρο σχηματισμού, 10
 κλειστός, 10
 μη άμεσος, 22
 μη αναγώγιμος, 24

- ρητός, 25
- συναφής, 94
- τοπικά συνώνυμος, 27
- τοπικός, 60
- παραμετρικό διάγραμμα απόδειξης το-
πικότητας, 76
- παραμετρικός δείκτης τοπικότητας,
46
- περίσταση, πιθανή, 17
- περιγραφή-κατάστασης, 11
- περιεχόμενο
 - αντικειμενικό, 2, 104
 - στην LIL, 30
 - στην LD, 18
- πιο τοπική από (απόδειξη τοπικότη-
τας), 73, 76
- πιο τοπικός από (δείκτης τοπικότη-
τας), 73
- πλάισιο
 - αποτίμησης, 17
 - αρχή του, 7
 - εκφοράς, 17
- προσδιορισμός αναφοράς, 2, 22, 24
- προτιμητέα
 - συναφής, 52
 - τοπικά συναφής, 38
- πρόταση, 6
 - δηλωτική, 6
- ρίζα (απόδειξης τοπικότητας), 64
- ρητός όρος, 25
- σημασία, 6
- σημασιολογία, τυπική, 11
- σταθερά, 10
 - δείκτη (τοπικότητας), 44
- συνάφεια
 - εφαρμογή, 86
 - μετασχηματικός τοπικής, 89
 - μετασχηματισμός, 94
- συναφής
 - τύπος, 48
 - όρος, 94
- συναφής συνάρτηση, 49
 - προτιμητέα, 52
 - τοπικά, 36
 - προτιμητέα, 38
 - τυπική, 88
 - τυπική, 93
- συνθήκη τοπικότητας, 37
 - γενική, 50
- συνωνυμία
 - αναφορική, 25
 - αντικειμενική, 105
 - τοπική, 27
- σφαιρικό νόημα, 24
 - στην LIL, 30
- σύμβολο δείκτη (τοπικότητας), 45
- σύμπαν, 10
- σύμπτωση, 20
- σύνθεση, αρχή της, 1
- τελεστής
 - έκτασης, 11
 - έντασης, 11
 - αναδρομικός, 20
- τοπική συνωνυμία, 27
- τοπικό νόημα, 26
 - στην LIL, 30
- τοπικός, 36
 - δείκτης (τοπικότητας), 45
 - όρος, 60
- τοπικότητα, 2, 35
 - συνθήκη, 37
 - γενική, 50
- τυπική σημασιολογία, 11
- τύπος, 9
 - απλός, 34
 - βασικός, 9

εξαρτώμενος από την κατάσταση,
34

επίπεδο, 35
συναφής, 48

υποαπόδειξη, 64
υποδήλωση, 6, 10

χαρακτήρας (στην LD), 18