Γιώργος Ζήκος

ΕΠΙΣΤΗΜΙΚΕΣ ΤΡΟΠΙΚΕΣ ΛΟΓΙΚΕΣ ΔΙΧΩΣ ΕΠΙΓΝΩΣΗ ΤΗΣ ΑΓΝΟΙΑΣ

Γνωσιακές Δομές, και Επεκτάσεις με Εκτίμηση και Πληροφόρηση

Διδακτορική Διατριβή

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
Λογική και Θεωρία Αλγορίθμων και Υπολογισμού
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Σεπτέμβριος 2012

στη μνήμη του πατέρα μου

Ευχαριστίες

Το τμήμα των «ευχαριστιών» είναι συνήθως βαρετό ή και γελοίο γι' αυτούς που το ακούν ή το διαβάζουν. Πόσοι δεν έχουμε μειδιάσει βλέποντας κάποιον να βγάζει μπροστά στο μικρόφωνο ένα χαρτάκι, και να διαβάζει ένα κατεβατό, για τη μάνα και τον παππού του, μέχρι το σκύλο του και το δήμαρχο... Γι' αυτόν όμως που στέκεται μπρος στο μικρόφωνο, ίσως και να 'ναι πραγματικά σημαντικά όλα αυτά. Και να σημαίνουν τόσα πολλά γι' αυτόν.

Και τότε, «τα πολλά λόγια είναι φτώχεια». Η βοήθεια που μου έδωσε ο επιβλέπων καθηγητής μου, Κώστας Κούτρας, καθ' όλη τη διάρκεια των πέντε χρόνων, είναι απλώς ανεκτίμητη. Θα πω μόνο το εξής. Ότι αν δεν τον είχα πλάι μου, δεν θα κατάφερνα να ξεκινήσω καν την παρούσα εργασία. Γιατί όταν βρισκόμουν στο δεύτερο χρόνο του διδακτορικού, κι ήταν ακόμη τόσο θολή η αίσθησή μου για το τι σημαίνει τροπική λογική, ο Κώστας είχε τη φαεινή ιδέα να μου δώσει ένα πρόβλημα για να σκέφτομαι, που όχι μόνο με βοήθησε ν' αρχίζω να καταλαβαίνω «πράγματα» για την περιοχή αυτή, αλλά οδήγησε και σε μια δημοσίευση, και με έκανε ν' αποφασίσω ν' ασχοληθώ με την επιστημική τροπική λογική. Η δημοσίευση αυτή δεν περιγράφεται καν στην παρούσα εργασία. Όμως με έκανε να καταλάβω τι θέλω, και φυσικά μου έδωσε μια ψυχολογική ώθηση. Τον ευχαριστώ για όλα.

Μια παρόμοια ψυχολογική υποστήριξη μού έδωσε κι ο δεύτερος επιβλέπων καθηγητής μου, ο Κώστας Δημητρακόπουλος. Και πάλι στις αρχές του διδακτορικού, όταν είχα το δίλημμα αν θα έκανα αίτηση για ανανέωση της εκπαιδευτικής μου άδειας ή όχι. Τότε, οι ενθαρρυντικές και νουνεχείς συμβουλές του, με έκαναν να πάρω τη σωστή απόφαση. Όσον αφορά δε στην παρούσα εργασία, εκτός των επιστημονικών παρατηρήσεών του, είχε την υπομονή να την επιμεληθεί και φιλολογικώς. Κι όποτε τον χρειάστηκα για επιστημονικές συμβουλές ή για να δαμάσω το τέρας της γραφειοκρατίας, ήταν για μένα παρών. Τον ευχαριστώ πολύ κι εκείνον.

Παρεμπιπτόντως, μιλώντας για γραφειοκρατία, ο νους όλων μας πάει στο κράτος και τη λειτουργία του. Όμως σε μένα, το ελληνικό κράτος στάθηκε σημαντικός αρωγός. Δίχως την οικονομική βοήθειά του δεν θα μπορούσα να εκπονήσω την παρούσα διατριβή. Αυτό έγινε εντελώς ξεκάθαρο, όταν πέρυσι, που έληξε η τετραετής εκπαιδευτική μου άδεια και επέστρεψα στο σχολείο μου, μου ήταν τρομερά δύσκολο να διδάσκω στο σχολείο και να ανταποκρίνομαι στις υποχρεώσεις του διδακτορικού. Ένα χρόνο, τον άντεξα. Αν δεν είχα πάρει όμως την άδεια, δεν υπήρχε περίπτωση να τα βγάλω πέρα. Γι' αυτό, ευχαριστώ ολόψυχα την πολιτεία, δηλ. ουσιαστικά όλους τους πολίτες αυτής της χώρας.

Περιεχόμενα

«καὶ εἰδέναι μὲν μηδὲν πλὴν αὐτὸ τοῦτο [εἰδέναι].»
(κι ότι δεν γνώριζε τίποτε εκτός της άγνοιάς του)
Διογένης Λαέρτιος

1
Επιστημική τροπική λογική

«Τούτη όμως είναι η απορία μου, και δεν μπορώ να τη λύσω ικανοποιητικά από μόνος μου, δηλαδή τι τέλος πάντων είναι γνώση», διερωτάται ο Σωκράτης στον «Θεαίτητο» του Πλάτωνα[1]. Συνοψίζει σε μια φράση το βασικό ερώτημα του κλάδου της φιλοσοφίας που ονομάζεται *γνωσιολογία*. Υπάρχουν όμως πολλά είδη γνώσης, όπως ακριβώς υπάρχουν πολλοί τρόποι χρήσης των λέξεων «γνωρίζω»/«ξέρω»: «γνωρίζω πώς να πάω στο Μαραθώνα», «γνωρίζω την Ελένη», «ξέρω να κάνω ποδήλατο», «ξέρω να παίζω τσέλο», «γνωρίζω ότι αυτό που λες είναι ψέμα», «γνωρίζω ότι η πρόταση «κάποιες χρονιές έχει δυο φορές πανσέληνο τον Αύγουστο» είναι αληθής».

Η γνωσιολογία εστιάζει στη *γνώση ότι κάτι είναι αληθές* [21, σελ.3], στη λεγόμενη *προτασιακή γνώση* [34, σελ.5]. Σε αδρές γραμμές θα μπορούσε να ειπωθεί ότι στη σύγχρονη γνωσιολογία υπάρχουν δύο βασικές στοχεύσεις: (α) η απάντηση στο πολύ παλιό ερώτημα πώς μπορεί να οριστεί η (προτασιακή) γνώση, και (β) τι μπορεί να συναχθεί από κάτι που θεωρείται γνώση. Σίγουρα η πιο δημοφιλής απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι εκείνη του Πλάτωνα: «γνώση είναι η αληθινή κρίση μαζί με λόγο»[2], και η πιο δημοφιλής κατάρριψη του ορισμού αυτού, δύο αντιπαραδείγματα γνωστά ως «περιπτώσεις Gettier» [12]. Η δεύτερη στόχευση αποτελεί χωριστό κομμάτι της γνωσιολογίας, γνωστό ως *«επιστημική λογική»* ('epistemic logic').

Έτσι, η επιστημική λογική εστιάζει στο λογισμό περί της προτασιακής γνώσης, και όχι στη φύση της, ενώ αποτελεί εργαλείο για τη μελέτη της με τυπικό τρόπο. Θεμελιώδης εργασία στη σύγχρονη επιστημική λογική είναι σίγουρα εκείνη του Jaakko Hintikka, 'Knowledge and Belief - An Introduction to the Logic of the Two Notions' [17]. Από τον τίτλο και μόνο διαφαίνεται ότι η επιστημική λογική – ίσως και λόγω του ορισμού του Πλάτωνα – εμπλέκει στη μελέτη της και την έννοια της «πεποίθησης». Αναφέρεται συχνά και ο όρος 'doxastic logic' (που αποδίδω ως *«δοξασιακή λογική»*) για τη λογική της «πεποίθησης», από την αρχαία ελληνική λέξη «δόξα». Πολλοί όμως χρησιμοποιούν τον όρο «επιστημική λογική» ως ομπρέλα και για τα δύο. Θα βρει λοιπόν κανείς, στα πλαίσια της επιστημικής λογικής, φράσεις της μορφής "ο X γνωρίζει το φ" ή "ο Y πιστεύει ότι ισχύει το ψ"[3]. Στην παρούσα εργασία θα αναφέρομαι σε ένα εχέφρον πρόσωπο, το οποίο γνωρίζει ή πιστεύει, και το οποίο θα ονομάζω *«αντιλήπτορα»*[4].

[1]Θεαίτητος 145e

[2]Θεαίτητος 201d, ορισμός γνωστός στην αγγλόφωνη βιβλιογραφία ως JTB: 'justified true belief'.

[3]Ακολουθώντας μια παραλλαγή της τακτικής των Hintikka/Quine χρησιμοποιώ διπλά λατινικά εισαγωγικά όταν η φράση περιέχει συντακτικές μεταβλητές, και διπλά ελληνικά (ή μονά λατινικά) αλλιώς. Έτσι, θα γράφω "ο X γνωρίζει το φ", ενώ «ο Γαλιλαίος γνωρίζει ότι η γη κινείται» ('Galileo knows that the earth moves').

[4]Πρόκειται για απόδοση της λέξης 'agent' που απαντά κανείς στην αγγλόγωνη βιβλιογραφία. Έχω δανειστεί τον όρο «αντιλήπτορας» από το σχόλιο με αριθμό 34 στην έκδοση του «Θεαίτητου» του Πλάτωνα από τις εκδόσεις

Στα πλαίσια της τυπικής λογικής που ονομάζεται *«τροπική»* μια λέξη ή φράση (που ονομάζεται *«τροπικότητα»*) μπορεί να προταχθεί μιας πρότασης φ σχηματίζοντας έτσι μια νέα, η οποία να περιγράφει τον *τρόπο της αλήθειας της* φ, δηλ. πότε, πού, πώς, ή κάτω από ποιες συνθήκες η φ γίνεται αληθής [15, σελ.3]. Έτσι, η τροπική λογική που διαθέτει την τροπικότητα «ο αντιλήπτορας γνωρίζει» θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την τυποποίηση των προβλημάτων της επιστημικής λογικής. Αυτή ακριβώς είναι *«επιστημική τροπική λογική»*. Για μια ενδελεχή εισαγωγή σ' αυτήν βλ. [13] ή [32]. Αν και η επιστημική τροπική λογική ξεπήδησε από τη φιλοσοφική λογική, βρήκε αρκετές εφαρμογές και στη θεωρητική πληροφορική (για παράδειγμα στα κατανεμημένα συστήματα [8], σε συστήματα πολλών αντιληπτόρων [37], κ.λπ.) και τη θεωρία παιγνίων [1]. Για μια επισκόπηση εφαρμογών σε αρκετούς τομείς βλ. [33].

Αν και ο όρος «τροπική λογική» αναφέρεται σε μια επιστημονική περιοχή, στα πλαίσια της λογικής αυτής ο ίδιος ο όρος είναι πιο τεχνικός και σημαίνει απλώς ένα σύνολο τύπων γραμμένων σε μια συγκεκριμένη τυπική γλώσσα, το οποίο πληροί κάποιες προϋποθέσεις. Έτσι, μιλάμε για πολλές επιστημικές τροπικές λογικές (ΕΤΛ) που περιγράφουν, άλλες καλύτερα και άλλες λιγότερο επιτυχημένως, τους «νόμους» που διέπουν την *επιστημική κατάσταση* του αντιλήπτορα (δηλ. τι γνωρίζει ή τι πιστεύει εκείνος).

Θα ξεκινήσω με την παρουσίαση της ΕΤΛ που ονομάζεται $\mathbf{S4.2}_{\mathsf{KB}}$ καθώς και άλλων ισοδύναμων λογικών, πάνω στις οποίες θα χτιστεί η παρούσα εργασία. Στο 2ο κεφάλαιο θα παρουσιάσω μια γενίκευση των σταθερών συνόλων πεποίθησης του Stalnaker, η οποία θα βασίζεται στην $\mathbf{S4.2}_{\mathsf{KB}}$. Στο 3ο θα επεκταθεί η $\mathbf{S4.2}_{\mathsf{KB}}$ στην ΕΤΛ **KBE**, η οποία θα προσπαθήσει να περιγράψει την επιστημική κατάσταση του αντιλήπτορα λαμβάνοντας υπόψη όχι μόνο «γνώση» και «πεποίθηση» αλλά και μια καινούρια τροπικότητα που περιγράφει «εκτίμηση». Στο τελευταίο μέρος της εργασίας θα γίνει προσπάθεια να περιγραφεί μέσω μιας καινούριας ΕΤΛ, της **KBEI**, η αλλαγή που επιφέρει στην επιστημική κατάσταση του αντιλήπτορα η πρόσληψη καινούριας πληροφορίας.

1.1 Η λογική $\mathbf{S4.2}_{\mathsf{KB}}$

Όλες οι ΕΤΛ που θα παρουσιαστούν στην παρούσα εργασία θα αποτελούνται από τύπους φτιαγμένους σε μια προτασιακή γλώσσα εφοδιασμένη με τους κατάλληλους *τροπικούς τελεστές*[5]. Η γλώσσα αυτή (που θα τη συμβολίζουμε ως $\mathcal{L}$ με κάποιο δείκτη που αντιστοιχεί στους τροπικούς τελεστές) θα περιέχει τις προτασιακές μεταβλητές του συνόλου $\Phi = \{p_0, p_1, \ldots\}$, το σύμβολο $\perp$ της αντίφασης, τον προτασιακό συνδέσμο $\supset$ της συνεπαγωγής, καθώς και τους κατάλληλους τροπικούς τελεστές. Μιλάμε για μονοτροπική, διτροπική, ή γενικώς πολυτροπική λογική αναλόγως με το πλήθος των τελεστών αυτών. Στη γενική περίπτωση μιας πολυτροπικής γλώσσας εφοδιασμένης με τους τροπικούς τελεστές $\Box_1, \ldots, \Box_n$ οι καλώς ορισμένοι τύποι της είναι εκείνοι ακριβώς που περιγράφονται σε μορφή Backus-Naur ως εξής:

$$\varphi ::= p \mid \perp \mid \varphi \supset \psi \mid \Box_1\varphi \mid \ \ldots \ \mid \Box_n\varphi$$

όπου $p \in \Phi$. Όπως ακριβώς το συνηθίζουν στη βιβλιογραφία, δεν θα χρησιμοποιήσω άλλο συμβολισμό για το σύνολο των τύπων αλλά θα γράφω κάπως καταχρηστικώς $\varphi \in \mathcal{L}_\Box$ για να αναφερθώ στον τύπο φ της τροπικής γλώσσας $\mathcal{L}_\Box$.

«Κάκτος», 1993. Για λόγους πολιτικής ορθότητας θα ήθελα να αναφέρω ότι χρησιμοποιώ το αρσενικό γένος της λέξης, όχι επειδή θεωρώ ότι ο αντιλήπτορας είναι άνδρας, αλλά επειδή ακολουθώ το γραμματικό κανόνα που θεωρεί το αρσενικό γραμματικό γένος ως επικρατέστερο, κι ας μη συμφωνώ καθόλου με τον κανόνα αυτό.

[5] Ο τροπικός τελεστής είναι το σύμβολο που αναπαριστά τη λέξη ή τη φράση που ονομάσαμε «τροπικότητα» στην εισαγωγή του παρόντος κεφαλαίου.

Θα ξεκινήσω με τη μονοτροπική γλώσσα $\mathcal{L}_{\mathsf{K}}$ που είναι εφοδιασμένη με τον τελεστή K που συμβολίζει την τροπικότητα «ο αντιλήπτορας γνωρίζει». Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, οι ΕΤΛ είναι σύνολα τύπων που ουσιαστικά περιγράφουν τους «νόμους» που διέπουν την επιστημική κατάσταση του αντιλήπτορα. Ας γίνουμε τώρα πιο συγκεκριμένοι. Κατ' αρχάς, κάθε *τροπική λογική* σε μια τροπική γλώσσα δεν είναι τίποτε άλλο από την κλασική προτασιακή λογική στην εν λόγω γλώσσα, δηλ. πρόκειται για ένα σύνολο τύπων Λ που περιέχει όλες τις προτασιακές ταυτολογίες και είναι κλειστό ως προς τους κανόνες της *ομοιόμορφης αντικατάστασης* και του *modus ponens* (συμβ. **MP**, ο οποίος σημαίνει ότι, αν $\varphi \in \Lambda$ και $\varphi \supset \psi \in \Lambda$, τότε και $\psi \in \Lambda$). Θα συμβολίζω με $\mathbf{PC}_{\mathcal{L}_{\mathsf{K}}}$ την απλούστερη τροπική λογική που περιέχει ακριβώς αυτά. Προφανώς απαιτούμε επιπλέον κάποιοι συγκεκριμένοι τύποι, τα *αξιώματα*, να ανήκουν στην τροπική λογική Λ, οι οποίοι – στην περίπτωση κάποιας ΕΤΛ – θα περιγράφουν τους «νόμους» που προαναφέρθηκαν. Για παράδειγμα, το αξίωμα $\mathsf{K}\varphi \supset \varphi$ ανήκει σε όλες τις γνωστές ΕΤΛ και περιγράφει προφανώς το νόμο ότι ο αντιλήπτορας γνωρίζει μόνον αλήθειες. Απ' την άλλη πλευρά, ο τύπος $\mathsf{K}p_0$, όπου p_0 είναι η πρόταση «η γη κινείται», δεν θα μπορούσε να ανήκει σε καμία ενδιαφέρουσα (επιστημική) τροπική λογική, μια και αν συνέβαινε αυτό, τότε λόγω του προηγούμενου αξιώματος και του **MP**, θα ανήκε σ' αυτήν ο τύπος p_0, λόγω δε της ομοιόμορφης αντικατάστασης, και οποιοσδήποτε άλλος τύπος, δηλ. η λογική αυτή θα ταυτιζόταν με την ασυνεπή τροπική λογική όλων των τύπων, η οποία είναι άνευ ενδιαφέροντος. Από τα δύο αυτά παραδείγματα ήθελα να διαφανεί ότι οι ΕΤΛ περιέχουν μόνον «νόμους» που διέπουν την επιστημική κατάσταση του αντιλήπτορα, και όχι απλώς «απλά δεδομένα» που γνωρίζει ή πιστεύει αυτός. Τέλος, από μια τροπική λογική απαιτούμε συνήθως κλειστότητα κι ως προς άλλους κανόνες, ανάλογα με το τι είδους λογική θέλουμε να κατασκευάσουμε. Οι ΕΤΛ που θα δούμε είναι *κανονικές* (δηλ. περιέχουν το αξίωμα **K** και είναι κλειστές ως προς τον κανόνα **RN** που θα δούμε στον επόμενο ορισμό), και *κλασικές* (δηλ. κλειστές ως προς τον κανόνα **RE** που θα συναντήσουμε στο τελευταίο κεφάλαιο). Φυσικά, όταν λέμε ότι μια τροπική λογική *αξιωματικοποιείται* από κάποια συγκεκριμένα αξιώματα, εννοούμε ότι είναι το $\subseteq$-ελάχιστο σύνολο τύπων που περιέχει όλες τις (προτασιακές) ταυτολογίες, τα αξιώματα αυτά και που είναι κλειστό ως προς τους προαναφερθέντες κανόνες (ομοιόμορφης αντικατάστασης, **MP**, και **RN** ή **RE**).

Ξεκινώ με τα αξιώματα και ακολούθως με τον ορισμό μιας «βασικής» ΕΤΛ:

K. $\mathsf{K}\varphi \wedge \mathsf{K}(\varphi \supset \psi) \supset \mathsf{K}\psi$
Οι λογικές συνέπειες της γνώσης αποτελούν γνώση.

T. $\mathsf{K}\varphi \supset \varphi$
Η γνώση αποτελείται μόνο από αλήθειες.

4. $\mathsf{K}\varphi \supset \mathsf{K}\mathsf{K}\varphi$
Επίγνωση της γνώσης. ('positive introspection')

Ορισμός 1.1.1 **S4** *είναι η προτασιακή τροπική λογική που αξιωματικοποιείται από τα* **K**, **T**, *και* **4** *και που είναι κλειστή επιπροσθέτως ως προς τον κανόνα*[6]

$$\mathbf{RN}_{\mathsf{K}}. \quad \frac{\varphi}{\mathsf{K}\varphi}$$

Εκτός από το αξίωμα **T** που θεωρείται προφανές, για όλα τα υπόλοιπα υπάρχουν στη βιβλιογραφία φιλοσοφικές αντιρρήσεις. Το **K** που περιγράφει την ικανότητα του αντιλήπτορα να γνωρίζει *όλες* τις λογικές συνέπειες της γνώσης που κατέχει, μαζί με τον κανόνα $\mathbf{RN}_{\mathsf{K}}$ που

[6] δηλ. αν το φ ανήκει στη λογική, τότε ανήκει και το $\mathsf{K}\varphi$

περιγράφει την ικανότητά του να γνωρίζει *όλες* τις λογικές αλήθειες, υποδηλώνουν ότι ο αντιλήπτορας έχει λογικές ικανότητες σε υπερβολικό βαθμό για τα ανθρώπινα δεδομένα· πρόκειται για το πρόβλημα της *«λογικής παντογνωσίας»* [29], [31] που συνεπάγεται για τον αντιλήπτορα η **S4**. Θα μπορούσε φυσικά κάποιος να επιχειρηματολογήσει υπερασπιζόμενός την, πράγμα που ενστερνίζομαι πλήρως, ότι ο αντιλήπτορας δεν είναι κάποιο υπαρκτό φυσικό πρόσωπο, κι ότι η λογική περιέχει ό,τι μπορεί λογικώς να συναχθεί από τη γνώση του, ανεξαρτήτως αν εκείνος δεν το κάνει (δηλ. να κάτσει να σκεφτεί για το αν κάτι είναι ταυτολογία ή τι προκύπτει λογικώς από τη γνώση του) λόγω έλλειψης λογικής ικανότητας ή ακόμη και τεμπελιάς. Ακόμα και για το αξίωμα **4** (που χαρακτηρίζεται στην αγγλόφωνη βιβλιογραφία ως το αξίωμα της 'positive introspection') υπήρξαν αντιρρήσεις, αλλά όπως λέει κι ο W. Lenzen [22, σελ.35] (για την αποδοχή των **4** και $\mathbf{RN}_{\mathsf{K}}$) «μια τέτοια εξιδανίκευση είναι απαραίτητη, αν θέλουμε τελικά να κάνουμε κάτι σαν επιστημική λογική».

Μια δεύτερη «βασική» ΕΤΛ είναι στη μονοτροπική γλώσσα $\mathcal{L}_{\mathsf{B}}$ που είναι εφοδιασμένη με τον τελεστή B, ο οποίος συμβολίζει την τροπικότητα «ο αντιλήπτορας πιστεύει». Πρόκειται ουσιαστικά για τη δοξασιακή τροπική λογική $\mathbf{KD45}_{\mathsf{B}}$, την οποία όμως εντάσσω στις ΕΤΛ όπως ανέφερα στην εισαγωγή. Αυτή αξιωματικοποιείται από τα $\mathbf{K}_{\mathsf{B}}$ και $\mathbf{4}_{\mathsf{B}}$ (τα αντίστοιχα δηλ. για τον τελεστή B), καθώς και από τα

$\mathbf{D}_{\mathsf{B}}$. $\mathsf{B}\varphi \supset \neg\mathsf{B}\neg\varphi$

Οι πεποιθήσεις είναι συνεπείς.
Γι' αυτό ο Stalnaker ονομάζει το αξίωμα αυτό **CB** (consistency of belief).

$\mathbf{5}_{\mathsf{B}}$. $\neg\mathsf{B}\varphi \supset \mathsf{B}\neg\mathsf{B}\varphi$

Ασθενής επίγνωση της αμφιβολίας.

είναι δε κλειστή ως προς τους κανόνες ομοιόμορφης αντικατάστασης, **MP**, και $\mathbf{RN}_{\mathsf{B}}$. Θεωρείται αναντιρρήτως ως η πιο κατάλληλη λογική για να περιγράψει την επιστημική κατάσταση του αντιλήπτορα ως προς το τι πιστεύει. Αξίζει να σημειωθεί ότι το αξίωμα $\mathbf{5}_{\mathsf{B}}$ είναι αποδεκτό (δηλ. ότι αν ο αντιλήπτορας αμφιβάλλει για κάτι, τότε πιστεύει σ' αυτήν του την αμφιβολία), παρόλο που, όπως θα δούμε στο τέλος αυτής της παραγράφου, το αντίστοιχό του για τη γνώση δεν είναι.

Οι ΕΤΛ αποτελούνται συνήθως από τύπους στη διτροπική γλώσσα $\mathcal{L}_{\mathsf{KB}}$ και απαιτούν επιπλέον τα λεγόμενα *αξιώματα-γέφυρες* που περιγράφουν την αλληλεπίδραση των τελεστών K και B. Ιδού όσα θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω (οι ονομασίες τους οφείλονται πρώτιστα στον Stalnaker, ενώ σε παρένθεση αναγράφονται οι ονομασίες που τους έδωσε ο Lenzen).

KB. $\mathsf{K}\varphi \supset \mathsf{B}\varphi$

Οι γνώσεις αποτελούν πεποιθήσεις. (**B1**)

(**B2.3**) $\mathsf{B}\varphi \supset \neg\mathsf{B}\neg\mathsf{K}\varphi$

Αν κάποιος είναι πεπεισμένος για κάτι, τότε δεν μπορεί να είναι πεπεισμένος ότι δεν το γνωρίζει[7].

PIB. $\mathsf{B}\varphi \supset \mathsf{K}\mathsf{B}\varphi$

Επίγνωση της πεποίθησης. (**B2.4**) ('positive introspection regarding belief')

NIB. $\neg\mathsf{B}\varphi \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{B}\varphi$

Επίγνωση της αμφιβολίας. ('negative introspection regarding belief')

[7] Κατά τον Lenzen, ένας «ρεαλιστής γνωσιολόγος» είναι υποχρεωμένος να αποδεχθεί τουλάχιστον αυτήν την αρχή [22, σελ.43].

SB. $\mathsf{B}\varphi \supset \mathsf{BK}\varphi$

Ισχυρή πεποίθηση. ('strong belief' – 'subjective certainty')

Θέλοντας να προχωρήσω σε κάποια αποτελέσματα των Lenzen [22, σελ.44–45] και Stalnaker [32, σελ.179] που συνοψίζονται στην παρακάτω πρόταση, ιδού ο ακόλουθος σημαντικός

Ορισμός 1.1.2 *Έστω το επιστημικό αξίωμα* **G**. $\neg\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{K}\neg\varphi$ *καθώς και το αξίωμα* **DB**. $\mathsf{B}\varphi \equiv \neg\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi$ *που είναι ουσιαστικά* ορισμός της πίστης συναρτήσει της γνώσης *(σε αντιδιαστολή με τον ορισμό JTB της γνώσης από την πίστη, του Πλάτωνα – πβ. υποσημείωση 2). Τότε ορίζονται οι ΕΤΛ*

$$\mathbf{S4.2} = \mathbf{S4} + \mathbf{G} \qquad (\textit{λογική στη γλώσσα } \mathcal{L}_{\mathsf{K}})$$

$$\mathbf{S4.2}_{\mathsf{KB}} = \mathbf{S4.2} + \mathbf{DB} \qquad (\textit{λογική στη γλώσσα } \mathcal{L}_{\mathsf{KB}})$$

Πρόταση 1.1.3

$$\mathbf{S4} + \mathbf{KD45}_{\mathsf{B}} + \mathbf{B1} + \mathbf{B2.3} + \mathbf{B2.4} = \mathbf{S4.2}_{\mathsf{KB}} \qquad \text{(Lenzen)}$$

$$\mathbf{S4} + \mathbf{CB} + \mathbf{KB} + \mathbf{SB} + \mathbf{PIB} + \mathbf{NIB} = \mathbf{S4.2}_{\mathsf{KB}} \qquad \text{(Stalnaker)}$$

Η πρόταση αυτή δείχνει ότι όλα τα προηγούμενα αξιώματα που θεωρήσαμε εύλογα για την περιγραφή της επιστημικής κατάστασης του αντιλήπτορα, μπορούν να «συμπτυχθούν» στη λογική $\mathbf{S4.2}_{\mathsf{KB}}$, δηλ. απλώς στην **S4.2** μαζί με τον ορισμό **DB**. Αυτός είναι ο λόγος που ο Lenzen λέει ότι «η **S4.2** αναπαριστά *την εχέφρονα λογική της γνώσης*» κι ότι «η λογική της «πραγματικής» γνώσης δεν είναι – όπως ισχυρίζεται ο Hintikka – ακριβώς η **S4**, αλλά πρέπει να είναι τουλάχιστον τόσο ισχυρή όσο η **S4.2**» [22, σελ.45].

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί κι ένα αξίωμα, δημοφιλές μεν σε κάποιους (κυρίως στους θεωρητικούς Πληροφορικούς), αλλά για το οποίο υπάρχουν αρκετές ενστάσεις για την ένταξή του στις ΕΤΛ. Πρόκειται για το **5**. $\neg\mathsf{K}\varphi \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi$ που χαρακτηρίζεται στην αγγλόφωνη βιβλιογραφία ως το αξίωμα της 'negative introspection', και που περιγράφει την ικανότητα του αντιλήπτορα να έχει *επίγνωση της άγνοιάς* του, δηλ. να μην νομίζει ποτέ ότι ξέρει κάτι, αν δεν το ξέρει. Ο J. Hintikka γράφει γι' αυτό [17, σελ.106] «ίσως αποτύχεις – εκτός κι αν τυχαίνει να είσαι τόσο αγχίνους όσο ο Σωκράτης – στο να έχεις επίγνωση της άγνοιάς σου». Το λογικό επιχείρημά του εναντίον του **5** εδράζεται στο γεγονός ότι μπορεί να αποδειχθεί[8] στη λογική $\mathbf{T}+\mathbf{5}$ ο τύπος $\varphi \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{K}\neg\varphi$ (δηλ. το αξίωμα **B**), ο οποίος κατά τον Hintikka δεν μπορεί να γίνει αποδεκτός. Κι αυτό διότι θα προέκυπτε[9] ότι $\mathsf{BK}\varphi \supset \varphi \in \mathbf{T}+\mathbf{5}+\mathbf{CB}+\mathbf{KB}$, πράγμα που είναι απαράδεκτο, μια και, αν πιστεύει κάποιος ότι γνωρίζει κάτι, προφανώς δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αυτό είναι σίγουρα αλήθεια[10]. Όμως, τα αξιώματα **T**, **CB** και **KB** είναι εξόχως επιθυμητά,

[8] Το να πούμε ότι ένας τύπος αποδεικνύεται – εννοώντας κατά Hilbert – σε μια τροπική λογική Λ είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι ανήκει στη λογική αυτή [3, σελ.37], $\vdash_\Lambda \varphi \iff \varphi \in \Lambda$.

[9] Στην πραγματικότητα δεν χρειαζόταν η αναφορά στο **B**. Απλώς επειδή ο Hintikka περιέγραφε την τυπική απόδειξη με λόγια, τον διευκόλυνε το ενδιάμεσο στάδιο του **B**.

[10] Εκτός κι αν τυχαίνει να είσαι ο Σωκράτης, όπως είπαμε ότι έγραψε ο Hintikka. Θεωρώ ότι η αναφορά αυτή του Hintikka στο Σωκράτη δεν εδράζεται μόνο στη γενικότερη αντίληψη ότι ο Σωκράτης είχε αυτογνωσία. Σίγουρα θα είχε διαβάσει στην «Απολογία του Σωκράτη» τη φράση του «ἃ μὴ οἶδα οὐδ' οἴομαι εἰδέναι» (ΠΛ Απολ 21d), δηλ. «όσα δεν γνωρίζω δεν πιστεύω ότι τα γνωρίζω». Αυτό μπορεί να γραφεί στην τυπική μας γλώσσα ως $\neg\mathsf{K}\varphi \supset \neg\mathsf{BK}\varphi$, ή ισοδύναμα ως $\mathsf{BK}\varphi \supset \mathsf{K}\varphi$, ή λόγω του αξιώματος **T**, $\mathsf{BK}\varphi \supset \varphi$.

αφού εκφράζουν τις ιδιότητες ότι οι γνώσεις είναι αληθείς, ότι οι πεποιθήσεις είναι συνεπείς, κι ότι οι γνώσεις αποτελούν πεποιθήσεις. Έτσι, αναγκαζόμαστε να απορρίψουμε το **5**.[11]

Υιοθετώ λοιπόν κι εγώ την άποψη ότι η $\mathbf{S4.2}_{\mathsf{KB}}$ είναι η πιο κατάλληλη ΕΤΛ για να περιγράψει την επιστημική κατάσταση του αντιλήπτορα. Όλες δε οι ΕΤΛ που θα παρουσιάσω στα επόμενα κεφάλαια θα χτιστούν πάνω σ' αυτή. Σε αντίθεση με τους περισσότερους θεωρητικούς Πληροφορικούς και συντασσόμενος με τον Hintikka θα απορρίψω το **5**. Για την απόδειξη ότι $\mathbf{5} \notin \mathbf{S4.2}_{\mathsf{KB}}$ είναι απαραίτητη μια ερμηνεία, ως προς την οποία είναι ορθή η λογική αυτή. Μια τέτοια ερμηνεία θα παρουσιαστεί στην επόμενη παράγραφο.

1.2 Σχεσιακές δομές

Από το 1918 που θεωρείται ότι γεννήθηκε η σύγχρονη τροπική λογική με μια εργασία του C.I. Lewis [23], ως και τα τέλη της δεκαετίας του 1950[12], οι τροπικές γλώσσες ερμηνεύονταν με αλγεβρικά μοντέλα, τα οποία όμως ήταν κάθε άλλο παρά διαισθητικά. Τη δεκαετία του 1960 μια ιδέα και μόνο – που αποδίδεται (όχι όμως ομόφωνα) στον S. Kripke [20] – έδωσε νέα ώθηση στην τροπική λογική: η σημασιολογία των τροπικών γλωσσών να βασίζεται σε «σχεσιακές δομές».

Στη σημασιολογία αυτή, μια ερμηνεία για την μονοτροπική γλώσσα $\mathcal{L}_\Box$ με τον τροπικό τελεστή $\Box$ περιλαμβάνει ένα μη κενό σύνολο κόσμων W και μια διμελή σχέση $\mathcal{R} \subseteq W \times W$ που ερμηνεύει τον $\Box$. Επίσης, μια αποτίμηση $V : \Phi \to \mathcal{P}(W)$ προσδιορίζει σε ποιους κόσμους ισχύει κάθε προτασιακή μεταβλητή. Η δομή $\mathfrak{F} = \langle W, \mathcal{R} \rangle$ καλείται *πλαίσιο* για την $\mathcal{L}_\Box$, και η $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$ *μοντέλο* βασισμένο πάνω στο $\mathfrak{F}$. Η V επεκτείνεται σε όλους τους τύπους, έτσι ώστε να αποκτήσουν αληθοτιμή σε κάθε κόσμο, ακολουθώντας τους προφανείς κανόνες της προτασιακής λογικής για τους προτασιακούς συνδέσμους. Για τον τροπικό τελεστή, η επέκταση της V γίνεται έτσι ώστε σε κάθε κόσμο ισχύει ο τύπος $\Box\varphi$ ανν σε κάθε κόσμο που συνδέεται μ' αυτόν μέσω της $\mathcal{R}$ ισχύει ο φ. Συνηθίζουμε να γράφουμε για κάποιον κόσμο $w \in W$ και τύπο φ

$$w \in \overline{V}(\Box\varphi) \iff \mathfrak{M}, w \Vdash \Box\varphi \iff (\forall v \in W)(w\mathcal{R}v \Rightarrow \mathfrak{M}, v \Vdash \varphi) \qquad (*)$$

Η ιδέα αυτή ήταν καταλυτική, μια και ήταν πια δυνατό να αποδειχθούν θεωρήματα ορθότητας και πληρότητας γνωστών λογικών ως προς κλάσεις πλαισίων[13]. Έτσι για παράδειγμα, η *κανονική* λογική **KT** στη γλώσσα $\mathcal{L}_\Box$ αποδείχθηκε ότι περιέχει ακριβώς όλους τους τύπους της $\mathcal{L}_\Box$ που είναι *έγκυροι* σε όλα τα ανακλαστικά πλαίσια (δηλ. στα πλαίσια, των οποίων η σχέση $\mathcal{R}$ είναι ανακλαστική) ή η **S4** που αποδείχθηκε ότι περιέχει ακριβώς όλους τους τύπους που είναι έγκυροι σε όλα τα ανακλαστικά και μεταβατικά πλαίσια (είναι δηλ. *ορθή* και *πλήρης* ως προς τα πλαίσια αυτά). Αξίζει να σημειωθεί ότι η ύπαρξη του αξιώματος **B** σε μια κανονική λογική, την αναγκάζει να είναι ισχυρώς πλήρης ως προς τα συμμετρικά πλαίσια. Λαμβάνοντας λοιπόν υπόψη κι ότι $\mathbf{S5} = \mathbf{KT4B}$ (βλ. υποσημείωση 11), βλέπουμε ότι η **S5** είνα ορθή και πλήρης ως προς τα πλαίσια,

[11] Πάντως, μια και οι θεωρητικοί Πληροφορικοί το αποδέχονται αφού τους βοηθά στις εφαρμογές τους, ας σημειωθεί ότι η λογική $\mathbf{S4} + \mathbf{5}$ ονομάζεται **S5**. Αποδεικνύεται πάντως ότι

$$\mathbf{S5} = \mathbf{KT45} = \mathbf{KT4B} = \mathbf{KDB4} = \mathbf{KDB5} = \mathbf{KT5}$$

Απ' αυτό διαφαίνεται ότι στα πλαίσια της λογικής **KT**, υποθέτοντας επιπλέον την «επίγνωση της άγνοιας» (δηλ. το αξίωμα **5**) αποδεικνύεται η «επίγνωση της γνώσης» (δηλ. το αξίωμα **4**). Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Άρα, το να γνωρίζει κάποιος τι δεν γνωρίζει είναι μεγαλύτερη ικανότητα από το να γνωρίζει τι γνωρίζει, πράγμα όχι ιδιαιτέρως αναμενόμενο που σίγουρα δεν θα μπορούσε να αποδειχθεί εύκολα δίχως τυπική λογική...

[12] Ας σημειωθεί ότι η λογική **S4.2** αναλύθηκε το 1959 στην εργασία [7] των Dummett και Lemmon.

[13] Για τις έννοιες που ακολουθούν, της κανονικής λογικής, των έγκυρων τύπων, της αντιστοιχίας τύπων με ιδιότητες, της ορθότητας και (ισχυρής ή όχι) πληρότητας τροπικών λογικών ως προς κλάσεις δομών βλ. για παράδειγμα [3].

των οποίων η $\mathcal{R}$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Αυτό σημαίνει ότι τα πλαίσια αυτά αποτελούνται από σύνολα κόσμων, καθένα από τα οποία αντιστοιχεί σε κάποια κλάση ισοδυναμίας. Αντί για τον όρο «κλάση ισοδυναμίας» χρησιμοποιείται στη μοντελοθεωρία που περιγράφουμε ο όρος 'cluster' που αποδίδω στα Ελληνικά ως *«σύμπλοκο»*. Τα σύμπλοκα περιέχουν κόσμους που «βλέπουν» μέσω της $\mathcal{R}$ το ένα το άλλο, ενώ τα ίδια τα σύμπλοκα δεν «επικοινωνούν» μεταξύ τους.

Ας δούμε τώρα τα αντίστοιχα μοντελοθεωρητικά αποτελέσματα για την **S4.2** που μας ενδιαφέρει άμεσα.

Πλαίσια της S4.2

Κατ' αρχάς, το αξίωμα **G** αντιστοιχεί στην ιδιότητα της *ασθενούς κατευθυνσιμότητας*. Ένα πλαίσιο λέμε ότι έχει την ιδιότητα αυτή (ή αλλιώς, την ιδιότητα *Church-Rosser*) ανν

$$(\forall w, v, u \in W)\big(w\mathcal{R}v \ \&\ w\mathcal{R}u \Longrightarrow (\exists s \in W)(v\mathcal{R}s \ \&\ u\mathcal{R}s)\big)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό $\mathbf{S4.2} = \mathbf{KT4G}$, αποδεικνύεται ότι η λογική αυτή είναι ορθή και πλήρης ως προς τα Kripke πλαίσια που είναι ανακλαστικά, μεταβατικά, και ασθενώς κατευθυνόμενα. Αποδεικνύεται επίσης [14, σελ.30] ότι η **S4.2** είναι ορθή και πλήρης κι ως προς τα πλαίσια που είναι ανακλαστικά, μεταβατικά, και *κατευθυνόμενα*, όπου κατευθυνόμενα σημαίνει ότι ικανοποιούν την ιδιότητα

$$(\forall v, u \in W)(\exists s \in W)(v\mathcal{R}s \ \&\ u\mathcal{R}s)$$

Εύκολα βλέπει κανείς ότι τα σχεσιακά πλαίσια με αυτές τις τρεις ιδιότητες αποτελούνται από σύμπλοκα, τα οποία – σε αντίθεση μ' εκείνα των **S5**-πλαισίων – επικοινωνούν μεταξύ τους. Όταν λέμε ότι «επικοινωνούν» δύο σύμπλοκα, για παράδειγμα ότι το C_1 «βλέπει» το C_2, εννοούμε ότι όλοι οι κόσμοι του C_1 συνδέονται μέσω της $\mathcal{R}$ με όλους τους κόσμους του C_2. Επίσης, δεν μπορεί επιπλέον το C_2 να βλέπει το C_1, μια και σ' αυτήν την περίπτωση όλοι οι κόσμοι του $C_1 \cup C_2$ θα έβλεπαν όλους του ίδιου συνόλου, κι έτσι θα μιλούσαμε για ένα σύμπλοκο και όχι για δύο διαφορετικά. Επίσης, στα πλαίσια αυτά υπάρχει ένα συγκεκριμένο σύμπλοκο που ονομάζεται *«τελικό»* ('final cluster'), το οποίο δεν βλέπει κανένα άλλο, ενώ όλα τα υπόλοιπα βλέπουν αυτό. Λόγω της μεταβατικότητας, κάθε σύμπλοκο, βλέπει απευθείας το τελικό, κι αν βλέπει και κάποιο άλλο, τότε φτάνει στο τελικό το πολύ μέσω ενός ενδιάμεσου συμπλόκου. Επομένως, η γενική μορφή ενός **S4.2**-πλαισίου φαίνεται στο Σχήμα 1.1, όπου τα έντονα βέλη συμβολίζουν ότι όλοι οι κόσμοι του ενός σύμπλοκου βλέπουν όλους του άλλου. Με FC συμβολίζεται το τελικό σύμπλοκο.

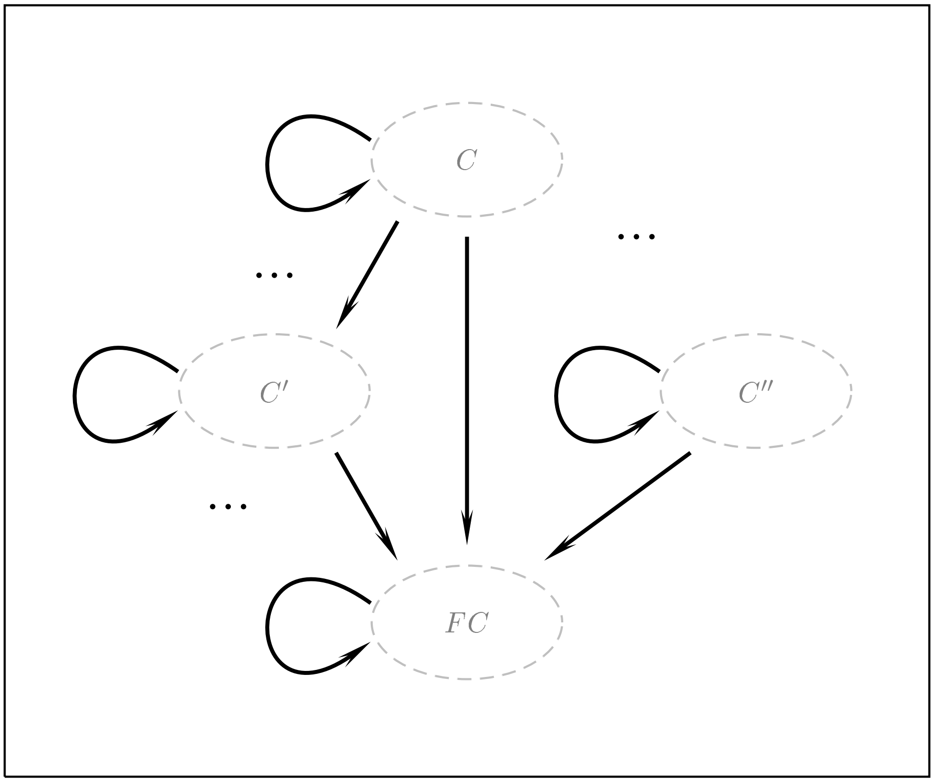
Θα κλείσουμε αυτήν την παράγραφο με τους τυπικούς ορισμούς των συμπλόκων, καθώς και με μερικές παρατηρήσεις που συγκεντρώνουν τις ιδιότητές τους. Υποθέτουμε ένα **S4.2**-πλαίσιο $\mathfrak{F} = \langle W, \mathcal{R} \rangle$, όπου η $\mathcal{R}$ είναι μια *αμκ-σχέση στο* W (δηλ. μια διμελής σχέση στο W που είναι ανακλαστική, μεταβατική, και κατευθυνόμενη).

Ορισμός 1.2.1

i. *Έστω μη κενό* $C \subseteq W$. *Το* C *θα ονομάζεται* σύμπλοκο *του* $\mathfrak{F}$ *ανν* $(\forall w, v \in C)\ w\mathcal{R}v$ *και* $(\forall w \in W \setminus C)(\exists v \in C)(\neg w\mathcal{R}v$ *ή* $\neg v\mathcal{R}w)$.

ii. Τελικό σύμπλοκο *του* $\mathfrak{F}$ *είναι το σύνολο* $FC = \{v \in W \mid (\forall w \in W)\ w\mathcal{R}v\}$.

iii. *Αν όλα τα σύμπλοκα του* $\mathfrak{F}$ *είναι μονοσύνολα, τότε η σχέση* $\mathcal{R}$ *ονομάζεται* απλή αμκ-σχέση *στο* W.



Σχήμα 1.1: Η γενική μορφή ενός **S4.2**-πλαισίου.

Παρατήρηση 1.2.2

i. $(\forall w \in W)(\exists$ *σύμπλοκο* $C)\ w \in C$

ii. $(\forall$ *σύμπλοκα* $C, C')(C \neq C' \Rightarrow C \cap C' = \varnothing)$

iii. $(\forall$ *σύμπλοκα* $C, C')(\forall w \in C, w' \in C')\big(w\mathcal{R}w' \Rightarrow (\forall t \in C, t' \in C')\ t\mathcal{R}t'\big)$

iv. $(\forall$ *σύμπλοκα* $C, C')(\forall w \in C, w' \in C')\big(C \neq C'\ \&\ w\mathcal{R}w') \Rightarrow (\forall t \in C, t' \in C')\ \neg t'\mathcal{R}t\big)$

Παρατήρηση 1.2.3 *Έστω FC το τελικό σύμπλοκο του $\mathfrak{F}$. Τότε*

i. $FC \neq \varnothing$ *και αποτελεί σύμπλοκο του* $\mathfrak{F}$.

ii. $(\forall w \in W)\ FC \subseteq \mathcal{R}(w)$ [14]

iii. $(\forall v \in FC)\ FC = \mathcal{R}(v)$

Λήμμα 1.2.4 *Το FC είναι τελικό σύμπλοκο του $\mathfrak{F}$ ανν* $(\forall w \in W \setminus FC)(\exists v \in FC)\ w\mathcal{R}v$

Λήμμα 1.2.5 *Έστω ότι η $\mathcal{R}$ είναι μια απλή αμκ-σχέση στο W. Τότε*

$$(\exists f \in W)(\forall w \in W)\big(w\mathcal{R}f\ \&\ (w \neq f \Rightarrow \neg f\mathcal{R}w)\big)$$

[14] $\mathcal{R}(w)$ είναι το σύνολο όλων των $\mathcal{R}$-επομένων του w.

1.3 Επιστημικά μοντέλα Kripke

Ας δούμε τι σημαίνει η ερμηνεία Kripke ειδικά για τις επιστημικές γλώσσες. Έστω λοιπόν η μονοτροπική επιστημική γλώσσα $\mathcal{L}_{\mathsf{K}}$ και ένα μοντέλο $\mathfrak{M} = \langle W, \mathcal{R}, V \rangle$ για αυτήν. Αν θεωρήσουμε ότι ο αντιλήπτορας βρίσκεται στον κόσμο w (χωρίς να είναι βέβαιο ότι εκείνος το γνωρίζει αυτό, δηλ. ίσως να μη γνωρίζει όλους τους τύπους που είναι αληθείς εκεί), τι μπορεί να σημαίνει γι' αυτόν ότι ο w συνδέεται μέσω της $\mathcal{R}$ με τον κόσμο v; Ο Hintikka είχε μια κομψή ιδέα γι' αυτό, όπως λέει κι ο Fitting [9, σελ.369], θεωρώντας, όπως παρατηρεί ο Stalnaker [32, σελ.171], ότι ο αντιλήπτορας έχει την ικανότητα να εντοπίζει στο λογικό χώρο κόσμους, στους οποίους δεν θα μπορούσε να βρίσκεται, και να τους αποκλείει· αυτό ακριβώς αποτελεί «γνώση». Με άλλα λόγια δηλ. ο κόσμος w του αντιλήπτορα θα συνδέεται μέσω της $\mathcal{R}$ με έναν κόσμο v ανν κάθε τύπος που γνωρίζει ο αντιλήπτορας ισχύει τόσο στον w όσο και στον v, γιατί σε αντίθετη περίπτωση θα μπορούσε να ξεχωρίσει μεταξύ τους αυτούς τους δύο κόσμους. Γι' αυτόν το λόγο συνηθίζουμε να λέμε ότι ο v είναι *«επιστημικώς μη διαφοροποιήσιμος»* από τον w. Συνοψίζοντας, γράφουμε $(\forall w, v \in W)$

$$w\mathcal{R}v \overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\text{ο } v \text{ είναι επιστημικώς μη διαφοροποιήσιμος από τον } w \overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow}$$

$$(\forall\varphi)(\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{K}\varphi \Longrightarrow (\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \wedge \mathfrak{M}, v \Vdash \varphi)) \qquad (**)$$

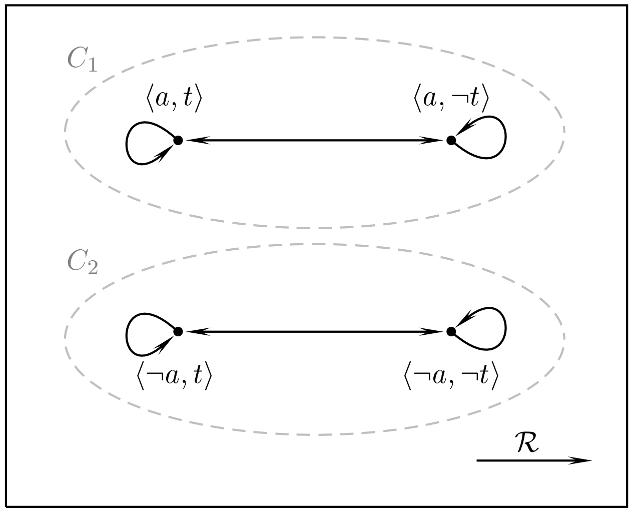
Αποδεικνύεται ότι ο ορισμός $(**)$ είναι συμβατός με τον $(*)$ με την έννοια ότι, αν απαιτήσουμε συγκεκριμένα σύνολα τύπων να είναι γνωστά στον αντιλήπτορα σε κάθε κόσμο, τότε υπάρχει επιστημικό μοντέλο τ.π. να ισχύει η $(**)$ και φυσικά η $(*)$. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Έστω ότι ο αντιλήπορας βρίσκεται στην Αθήνα κι ότι περιοριζόμαστε στην επιστημική του κατάσταση όσον αφορά σε δύο μόνο προτάσεις (δηλ. ασχολούμαστε με το τι γνωρίζει για δύο μόνο πράγματα): στην πρόταση «έχει καύσωνα στην Αθήνα» που ονομάζουμε a (για ευκολία, αντί για p_0), και στην πρόταση «έχει καύσωνα στην Τιχουάνα» που ονομάζουμε t. Θεωρούμε λοιπόν ότι ο αντιλήπτορας γνωρίζει την αληθοτιμή της a, ενώ αγνοεί εκείνην της t. Το σύνολο W θα αποτελείται από τέσσερις κόσμους, έναν για κάθε συνδυασμό αληθοτιμής των a και t· πρόκειται για το *λογικό χώρο* που προσδιορίζεται από αυτές τις δύο προτασιακές μεταβλητές. Για ευκολία, ονομάζουμε αυτούς τους τέσσερις κόσμους $\langle a, t\rangle$, $\langle a, \neg t\rangle$, $\langle \neg a, t\rangle$, και $\langle \neg a, \neg t\rangle$, ώστε να φαίνεται αμέσως πού ισχύει τι. Δεν είναι απαραίτητο σε κάθε επιστημικό μοντέλο να υπάρχουν κόσμοι για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς. Απλώς στο παράδειγμα αυτό, ο καύσωνας στην Αθήνα είναι ανεξάρτητο γεγονός από τον καύσωνα στην Τιχουάνα[15]. Ο αντιλήπτορας, ανάλογα με το τι ισχύει στην Αθήνα σχετικά με τον καύσωνα, μπορεί και αποκλείει κάποιους από τους κόσμους του W, ενώ οι υπόλοιποι είναι επιστημικώς μη διαφοροποιήσιμοι μεταξύ τους. Έτσι, αν όντως έχει καύσωνα στην Αθήνα, οι κόσμοι $\langle \neg a, t\rangle$ και $\langle \neg a, \neg t\rangle$ αποκλείονται, αλλά ο αντιλήπτορας δεν γνωρίζει σε ποιον από τους δύο άλλους βρίσκεται, αφού δεν γνωρίζει τι συμβαίνει στην Τιχουάνα, άρα οι υπόλοιποι δύο είναι επιστημικώς μη διαφοροποιήσιμοι μεταξύ τους. Ανάλογα πράγματα ισχύουν και αν δεν έχει καύσωνα στην Αθήνα. Το επιστημικό μας μοντέλο $\mathfrak{M}_{at}$ λοιπόν, έχει τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 1.2.

Στο παράδειγμα αυτό ξεκινήσαμε υποθέτοντας ότι στους κόσμους $\langle a, t\rangle$ και $\langle a, \neg t\rangle$ ο αντιλήπτορας γνωρίζει το a αλλά δεν γνωρίζει ούτε t, ούτε $\neg t$, δηλ. ότι εκεί ισχύουν οι τύποι $\mathsf{K}a$, $\mathsf{KK}a$, κ.λπ., καθώς και οι $\neg\mathsf{K}t$ και $\neg\mathsf{K}\neg t$ [16]. Ενώ στους κόσμους $\langle \neg a, t\rangle$ και $\langle \neg a, \neg t\rangle$ υποθέσαμε

[15]Όσοι έχουν αντιρρήσεις γι' αυτό αναλογιζόμενοι το «φαινόμενο της πεταλούδας» δεν νομίζω ότι θα μπορούσαν να μας πείσουν εύκολα ότι αποκλείεται σίγουρα κάποιος από τους τέσσερις συνδυασμούς λόγω του φαινομένου αυτού.

[16]Απ' τη στιγμή που θεωρούμε ότι ο αντιλήπτορας έχει επίγνωση της γνώσης του, απαιτούμε να ισχύουν και οι τύποι $\mathsf{KK}a$, $\mathsf{KKK}a, \ldots$. Αντιθέτως, δεν απαιτούμε εκ των προτέρων να ισχύουν και οι $\mathsf{K}\neg\mathsf{K}t$, $\mathsf{KK}\neg\mathsf{K}t, \ldots$ ούτε



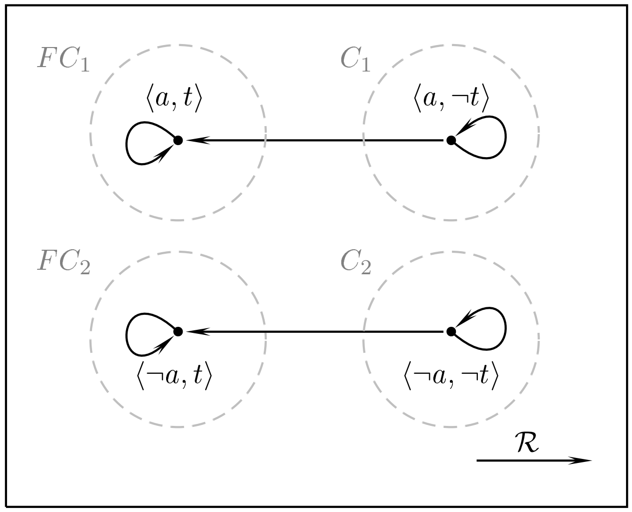
Σχήμα 1.2: Το **S5**-μοντέλο $\mathfrak{M}_{at}$

ότι ο αντιλήπτορας γνωρίζει το $\neg a$ και συνεχίζει να έχει άγνοια για τους t και $\neg t$, δηλ. να ισχύουν αντίστοιχοι τύποι με προηγουμένως. Παρατηρούμε ότι, αν η $(*)$ προσδιορίζει τι σημαίνει $\mathfrak{M}_{at}, w \Vdash \mathsf{K}\varphi$ (για κάθε τύπο φ και κόσμο w), τότε το μοντέλο $\mathfrak{M}_{at}$ που κατασκευάσαμε ικανοποιεί και την $(**)$. Μ' αυτό το παράδειγμα, οι υπέρμαχοι της ιδέας ότι η **S5** είναι η αρμόζουσα επιστημική λογική, θα ήταν ευχαριστημένοι. Είναι ένα καθαρό **S5**-μοντέλο (πβ. Παράγραφο 1.2) με σύμπλοκα τα σύνολα C_1 και C_2.

Ας αναλογιστούμε όμως ποια μορφή θα είχε το μοντέλο, αν υποθέταμε ότι η γνώση του αντιλήπτορα σχετικά με το τι συμβαίνει δεν ήταν τόσο «ομοιόμορφα» κατανεμημένη. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι, επειδή ο αντιλήπτορας βρίσκεται στην Αθήνα, συνεχίζει να γνωρίζει τι συμβαίνει εκεί. Όσον αφορά δε στην Τιχουάνα, αν εκεί δεν έχει καύσωνα, δεν πληροφορείται τίποτε, όπως προηγουμένως. Αν όμως έχει, ίσως επειδή αυτός οδήγησε σε εκτεταμένες φυσικές καταστροφές, οι ειδήσεις αναφέρθηκαν στο γεγονός αυτό, κι έτσι ο αντιλήπτορας έμαθε για τον καύσωνα εκεί. Τότε απαιτούμε στον κόσμο $\langle a, t\rangle$ ο αντιλήπτορας να γνωρίζει όχι μόνον το a αλλά και το t (αφού το έμαθε μέσω των ειδήσεων), αλλά όχι το $\neg t$, δηλ. να ισχύουν οι τύποι $\mathsf{K}a$, $\mathsf{KK}a, \ldots$, $\mathsf{K}t$, $\mathsf{KK}t, \ldots$, και $\neg\mathsf{K}\neg t$. Ενώ στον κόσμο $\langle a, \neg t\rangle$ ο αντιλήπτορας έχει άγνοια για την ισχύ τόσο του t, όσο και του $\neg t$, αφού οι ειδήσεις δεν αναφέρθηκαν καθόλου στην Τιχουάνα. Άρα πρέπει να ισχύουν εκεί ακριβώς οι ίδιοι τύποι με το μοντέλο $\mathfrak{M}_{at}$. Ανάλογα πράγματα πρέπει να ισχύουν και στους υπόλοιπους δύο κόσμους. Τότε λοιπόν, για να ισχύει η $(**)$ πρέπει το καινούριο επιστημικό μοντέλο $\mathfrak{M}'_{at}$ του αντιλήπτορα να είναι όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3.

Για να δούμε δε, και ένα επιστημικό μοντέλο με μη τετριμμένα σύμπλοκα (που δεν είναι δηλ. μονοσύνολα), ας υποθέσουμε ότι συνεχίζουμε μεν να ενδιαφερόμαστε για τις γνώσεις του αντιλήπτορα περί των a και t, αλλά ότι εκείνος γνωρίζει μόνο τι συμβαίνει στην Τιχουάνα, κι αυτό μόνο στην περίπτωση που εκεί έχει καύσωνα (πράγμα που άκουσε στις ειδήσεις). Όσον αφορά στην Αθήνα, ας θεωρήσουμε ότι δεν γνωρίζει τι συμβαίνει εκεί. Τότε το μοντέλο μας θα μοιάζει μ' εκείνο του Σχήματος 1.4.

οι $\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\neg t$, $\mathsf{KK}\neg\mathsf{K}\neg t, \ldots$ μια και δεν είμαστε σίγουροι ότι ο αντιλήπτορας έχει επίγνωση της άγνοιάς του (πβ. ό,τι ειπώθηκε για το αξίωμα **5** στο τέλος της Παραγράφου 1.1). Όμως, παρόλο που γενικά απορρίψαμε αυτήν την ιδιότητα, μπορεί τελικά να ισχύει σε κάποιο συγκεκριμένο παράδειγμα, όπως εδώ.

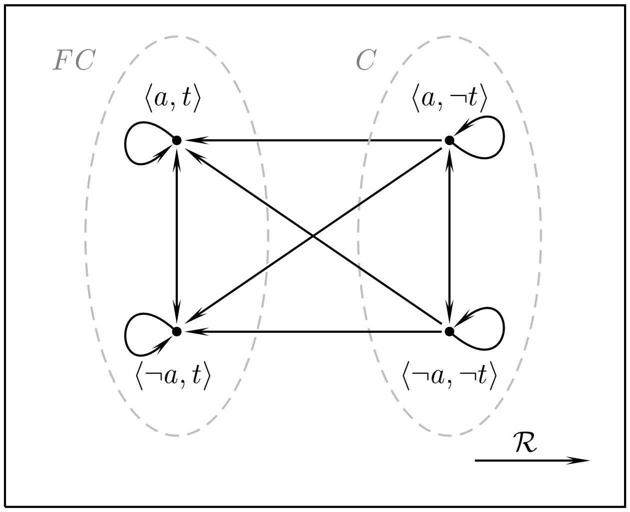


Σχήμα 1.3: Το μη συμμετρικό μοντέλο $\mathfrak{M}'_{at}$

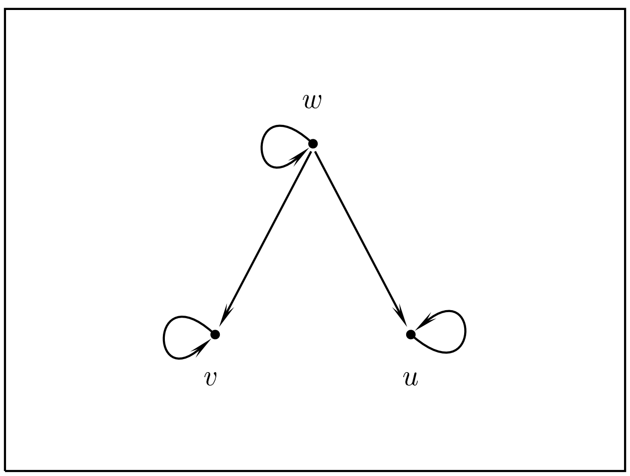
Τα δύο τελευταία μοντέλα δεν είναι **S5** μια και δεν είναι συμμετρικά. Κι αυτό διότι, αν υπήρχε για παράδειγμα η ακμή από το $\langle a, t\rangle$ στο $\langle a, \neg t\rangle$ (στο $\mathfrak{M}'_{at}$), επειδή έχουμε απαιτήσει να ισχύει $\mathfrak{M}'_{at}, \langle a, t\rangle \Vdash \mathsf{K}t$, για να είναι αληθής η $(**)$ (δηλ. η βασική αρχή των επιστημικών μοντέλων, περί μη διαφοροποιησιμότητας) θα έπρεπε $\mathfrak{M}'_{at}, \langle a, \neg t\rangle \Vdash t$, πράγμα άτοπο. Βλέπουμε λοιπόν ότι, αν η πληροφορία που έχει ο αντιλήπτορας δεν είναι κατανεμημένη ομοιόμορφα ανάμεσα στους κόσμους, στους οποίους μπορεί να βρεθεί, τότε υπάρχει περίπτωση να υπάρξουν ασυμμετρίες στο ίδιο το επιστημικό μοντέλο, το οποίο τότε δεν θα είναι **S5**-μοντέλο. Τι μπορεί να είναι όμως; Στην Παράγραφο 1.1 καταλήξαμε στο ότι η «καλύτερη» λογική της γνώσης είναι η **S4.2**. Μήπως όμως δικαιολογείται αυτό και σημασιολογικώς, ακολουθώντας τον ορισμό $(**)$ περί μη διαφοροποιησιμότητας και όχι επικαλούμενοι απλώς τα αποτελέσματα ορθότητας/πληρότητας της **S4.2**, για να πούμε και ότι τα «καλύτερα» επιστημικά μοντέλα είναι τα **S4.2**-μοντέλα;

Κατ' αρχάς αποφασίσαμε ότι τα επιστημικά μοντέλα θα είναι Kripke (α). Μετά διαπιστώνουμε ότι πρέπει να είναι ανακλαστικά (β), μια και ο αντιλήπτορας δεν μπορεί να διαφοροποιήσει έναν κόσμο από τον εαυτό του, αφού αν το έκανε, λόγω $(**)$ θα υπήρχε τύπος, τον οποίο θα γνώριζε ο αντιλήπτορας στον κόσμο αυτό, αλλά δεν θα ίσχυε εκεί· πράγμα άτοπο. Έπειτα, αν από έναν κόσμο w δεν είναι διαφοροποιήσιμος ένας άλλος v, κι απ' αυτόν ένας τρίτος u, τότε, αν ο αντιλήπτορας γνωρίζει κάποιον τύπο στο w, θα έχει επίγνωση αυτού, άρα λόγω $(**)$, θα γνωρίζει τον τύπο στο v, οπότε και πάλι λόγω $(**)$, θα ισχύει ο τύπος στο u. Άρα από $(**)$, ο w βλέπει μέσω της $\mathcal{R}$ τον u. Αυτό σημαίνει όμως, ότι το μοντέλο είναι μεταβατικό (γ).

Τέλος, ας θεωρήσουμε ότι από έναν κόσμο w δεν είναι διαφοροποιήσιμοι δύο άλλοι κόσμοι v και u (βλ. Σχήμα 1.5). Θα υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει v' τ.π. $v' \neq v$, $v' \neq w$ και $v\mathcal{R}v'$, με την έννοια ότι αν ίσχυε αυτό, επειδή προκύπτει, λόγω μεταβατικότητας, $w\mathcal{R}v'$, θα πέρναμε τον v' στη θέση του v (δηλ. ο v είναι ο «τελευταίος κατεβαίνοντας από τον w»). Ομοίως και για τον u. Ας υποθέσουμε λοιπόν τώρα – προς άτοπο – ότι δεν υπάρχει κόσμος s τ.π. $v\mathcal{R}s$ και $u\mathcal{R}s$. Αν υπήρχε και η ακμή $v\mathcal{R}w$, τότε λόγω μεταβατικότητας, θα υπήρχε και η $v\mathcal{R}u$, και επειδή λόγω ανακλαστικότητας ισχύει $u\mathcal{R}u$, τότε θα υπήρχε κόσμος s με τις προαναφερθείσες ιδιότητες, ο u· άτοπο. Αν υπήρχε και η ακμή $u\mathcal{R}w$, θα καταλήγαμε ομοίως σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι δεν υπάρχουν οι δύο αυτές ακμές, κι ότι το συγκεκριμένο τμήμα του μοντέλου μας είναι ακριβώς όπως στο Σχήμα 1.5. Ας υποθέσουμε λοιπόν τώρα ότι στους κόσμους v και u ισχύουν ακριβώς



Σχήμα 1.4: Το μη συμμετρικό μοντέλο $\mathfrak{M}''_{at}$



Σχήμα 1.5: Προς απόδειξη της ιδιότητας Church-Rosser.

οι ίδιοι τύποι, κι ας θεωρήσουμε κάποιον φ τ.π. να ισχύει $\mathsf{K}\varphi$ στον v. Όμως, ό,τι γνωρίζει ο αντιλήπτορας είναι αληθές, άρα ο φ ισχύει στον v, κι έτσι, εξ υποθέσεως, αληθεύει και στον u. Οπότε, λόγω (∗∗), $v\mathcal{R}u$, πράγμα που είναι άτοπο, όπως φάνηκε προηγουμένως. Άρα υπάρχει τύπος που δεν ισχύει στους v και u ταυτοχρόνως. Έστω ότι αυτός είναι ο ψ, ο οποίος αληθεύει στον v αλλά όχι στον u. Επειδή υποθέσαμε ότι ο v είναι ο «τελευταίος» κόσμος «κατεβαίνοντας από τον w» κι επειδή, όπως είδαμε, δεν υπάρχουν οι ακμές $v\mathcal{R}w$ και $v\mathcal{R}u$, θα ισχύει στον v ο τύπος $\mathsf{K}\psi$. Για τους ίδιους ακριβώς λόγους θα ισχύει στον u ο τύπος $\mathsf{K}\neg\psi$. Ας εμπλέξουμε λοιπόν τώρα τη «δόξα» στο μοντέλο μας. Ακολουθώντας τον ορισμό **DB** της πίστης (βλ. Παράγραφο 1.1), για να πούμε ότι ο αντιλήπτορας πιστεύει σε έναν κόσμο ότι ισχύει κάποιος τύπος, πρέπει να υπάρχει $\mathcal{R}$-επόμενός του κόσμος, στον οποίον ο αντιλήπτορας να γνωρίζει τον τύπο αυτόν. Άρα, με βάση τον ορισμό αυτόν, από τη μια πιστεύει ο αντιλήπτορας ότι ισχύει το ψ, κι απ' την άλλη πιστεύει στο $\neg\psi$, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την αρχή της συνεπούς πεποίθησης. Έτσι, σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο, άρα, έχοντας υποθέσει ότι $w\mathcal{R}v$ και $w\mathcal{R}u$, αποδείχθηκε ότι υπάρχει κόσμος s τ.π. $v\mathcal{R}s$ και $u\mathcal{R}s$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε επιστημικό μοντέλο είναι ασθενώς κατευθυνόμενο (δ).

Από τα σημεία (α) έως (δ), κι από ό,τι ειπώθηκε στο τέλος της Παραγράφου 1.2 συνάγουμε και πάλι το συμπέρασμα ότι τα επιστημικά μοντέλα που συνάδουν με τις διαισθήσεις μας είναι τα $\mathbf{S4.2}$-μοντέλα.

Κλείνοντας αυτήν την επισκόπηση στις ΕΤΛ και στα μοντέλα τους, θα ήθελα να σταθώ λίγο στον Ορισμό 1.1.2 και συγκεκριμένα στο ότι $\mathbf{S4.2}_{\mathsf{KB}} = \mathbf{S4.2} + \mathbf{DB}$. Αφού στο σημείο (δ) του προηγούμενου επιχειρήματος χρησιμοποιήθηκε ο ορισμός $\mathbf{DB}$, για ποιο λόγο αναφερόμουν συνεχώς στη λογική $\mathbf{S4.2}$ και τα μοντέλα της, και όχι στην $\mathbf{S4.2}_{\mathsf{KB}}$; Η επόμενη παρατήρηση νομίζω ότι το ξεκαθαρίζει.

Παρατήρηση 1.3.1 *Η $\mathbf{S4.2}_{\mathsf{KB}}$ είναι λογική στη γλώσσα $\mathcal{L}_{\mathsf{KB}}$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε πλαίσιο που θέλουμε να αποτελεί ερμηνεία της πρέπει να έχει τη μορφή $\mathfrak{F} = \langle W, \mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mathsf{B}} \rangle$, όπου η σχέση $\mathcal{R}_{\mathsf{B}}$ δίνει ερμηνεία στον τροπικό τελεστή B. Στα επιστημικά μοντέλα όμως που είδαμε, δεν υπήρχε καμιά αναφορά σε τέτοια σχέση. Κι αυτό διότι είχαμε στο μυαλό μας τη μονοτροπική γλώσσα $\mathcal{L}_{\mathsf{K}}$, βλέπαμε τον τελεστή B όχι ως τροπικό αλλά ως τελεστή συντομογραφίας, και θεωρούσαμε μόνο μια σχέση που να συνδέει κόσμους μεταξύ τους, τη σχέση μη διαφοροποιησιμότητας. Αυτό σημαίνει δηλ. ότι, όποτε θέλαμε να ελέγξουμε αν ισχύει σε κάποιον κόσμο ο τύπος $\mathsf{B}\varphi$, βλέπαμε ουσιαστικά τον τύπο $\neg\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi$, και ελέγχαμε μέσω της $\mathcal{R}$ αν ίσχυε αυτός ή όχι. Έτσι, για να διακρίνω τη μια περίπτωση απ' την άλλη, γράφω $\mathbf{S4.2}_{\mathsf{KB}}$ όταν αναφέρομαι στην αντίστοιχη λογική της διτροπικής γλώσσας, ενώ σημειώνω $\mathbf{S4.2} + \mathbf{DB}$ όταν θέλω να αναφερθώ στην αντίστοιχη λογική της μονοτροπικής γλώσσας και να υπονοήσω (χωρίς ενδεχομένως να το αναφέρω διαρρήδην) ότι το B είναι τελεστής συντομογραφίας. Φυσικά, οι δύο λογικές ταυτίζονται ως σύνολα, απλώς το σύμβολο B το ονομάζουμε διαφορετικά στις αντίστοιχες γλώσσες τους.*

Τέλος, ιδού μια παρατήρηση χρήσιμη στα τελευταία δύο κεφάλαια.

Παρατήρηση 1.3.2 *Έστω FC το τελικό σύμπλοκο του $\mathbf{S4.2}$-μοντέλου $\mathfrak{M} = \langle W, \mathcal{R}, V \rangle$. Τότε*

$$(\forall \varphi \in \mathcal{L}_{\mathsf{K}})(\forall w \in W)(\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{B}\varphi \iff \mathfrak{M}, FC \Vdash \mathsf{K}\varphi \iff \mathfrak{M}, FC \Vdash \varphi)$$

«Θέλω να πιστεύω – και η πίστη μου αυτή βγαίνει πάντοτε πρώτη στον αγώνα της με τη γνώση – ότι, όπως και να το εξετάσουμε, η πολυαιώνια παρουσία του ελληνισμού πάνω στα δώθε ή εκείθε του Αιγαίου χώματα έφτασε να καθιερώσει μιαν ορθογραφία, όπου το κάθε ωμέγα, το κάθε ύψιλον, η κάθε οξεία, η κάθε υπογεγραμμένη, δεν είναι παρά ένας κολπίσκος, μια κατωφέρεια, μια κάθετη βράχου πάνω σε μια καμπύλη πρύμνας πλεούμενου, κυματιστοί αμπελώνες, υπέρθυρα εκκλησιών, ασπράκια ή κοκκινάκια εδώ ή εκεί, από περιστεριώνες και γλάστρες με γεράνια.»

Οδυσσέας Ελύτης, «Τα δημόσια και ιδιωτικά»

2 Επιστημικές και δοξασιακές δομές

Όπως ειπώθηκε στην Παράγραφο 1.1, οι ΕΤΛ προσπαθούν να περιγράψουν τους «νόμους» που διέπουν την επιστημική κατάσταση ενός εχέφρονα αντιλήπτορα, και όχι να συμπεριλάβουν «απλά δεδομένα» που γνωρίζει ή πιστεύει αυτός. Για να συμπεριληφθούν αυτά σε ένα *σύνολο πεποιθήσεων* προτάθηκε από τον R. Stalnaker η έννοια των *σταθερών θεωριών* [30], τα οποία ήταν θεμελιώδους σημασίας για τη μη μονοτονική τροπική λογική [24, σελ.223]. Σύμφωνα με τον ορισμό αυτόν, με δεδομένη μια τροπική γλώσσα $\mathcal{L}_\Box$, στην οποία ο τροπικός τελεστής περιγράφει γνώση/πεποίθηση, κάθε σταθερή θεωρία $T \subseteq \mathcal{L}_\Box$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

(St1) $\mathbf{PC}_{\mathcal{L}_\Box} \subseteq T$ και η T είναι κλειστή ως προς **MP**.
Όλες οι ταυτολογίες (στη γλώσσα $\mathcal{L}_\Box$), καθώς και όλες οι λογικές συνέπειες των γνώσεων/πεποιθήσεων του αντιλήπτορα, αποτελούν γνώσεις/πεποιθήσεις του.

(St2) $\varphi \in T \Rightarrow \Box\varphi \in T$
Αν το φ ανήκει στις γνώσεις/πεποιθήσεις του αντιλήπτορα, τότε η πρόταση «γνωρίζω/πιστεύω στο φ» επίσης θα ανήκει στις γνώσεις/πεποιθήσεις του.
(πράγμα που χαρακτηρίζεται ως 'positive introspection')

(St3) $\varphi \notin T \Rightarrow \neg\Box\varphi \in T$
Αν το φ δεν ανήκει στις γνώσεις/πεποιθήσεις του αντιλήπτορα, τότε η πρόταση «δεν γνωρίζω/πιστεύω στο φ» θα ανήκει στις γνώσεις/πεποιθήσεις του.
('negative introspection')

Το προφανές προτέρημα του ορισμού αυτού είναι ότι περιγράφει το σύνολο πεποιθήσεων του αντιλήπτορα με μόνο τρεις απλές ιδιότητες κλειστότητας. Απ' την άλλη όμως, (α) δεν διαφοροποιεί μεταξύ τους γνώσεις και πεποιθήσεις, και (β) υποθέτει ότι ο αντιλήπτορας έχει ικανότητες επίγνωσης της άγνοιάς του (ιδιότητα (**St3**)) πράγμα που απορρίψαμε με κατηγορηματικό τρόπο στο προηγούμενο κεφάλαιο. Τα σημεία αυτά ίσως να μην αποτελούν πρόβλημα σε διάφορες εφαρμογές (όπως για παράδειγμα στην Τεχνητή Νοημοσύνη), όμως από πλευράς λογικής θα ήταν προτιμότερο να αντιμετωπιστούν. Έτσι, στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστούν οι (προτεινόμενες εναλλακτικές των σταθερών θεωριών) *επιστημικές και δοξασιακές δομές* KB_P, οι οποίες θα περιγράφουν τα σύνολα γνώσεων και πεποιθήσεων ενός αντιλήπτορα (που δεν έχει υποχρεωτικώς επίγνωση της άγνοιάς του) καθώς και εκείνα που περιέχουν τους αληθείς τύπους. Κατόπιν θα παρουσιαστούν ιδιότητες των δομών αυτών καθώς και θεωρήματα αντιστοιχίας τους με θεωρίες της λογικής **S4.2**.

2.1 Ορισμός

Προκειμένου να γίνει σαφής η προσέγγισή μας, πρέπει να τονιστεί ότι έχουμε κατά νου ένα επιστημικό μοντέλο όπως αυτό παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 1.3, όπου η σχέση $\mathcal{R}$ διασυνδέει επιστημικώς μη διαφοροποιήσιμους κόσμους. Ο αντιλήπτορας βρίσκεται σε κάποιον κόσμο από αυτούς, δίχως να ξέρει απαραιτήτως πού ακριβώς, και αναλόγως με την πληροφόρηση που έχει, γνωρίζει ή πιστεύει κάποιους τύπους, ενώ δεν έχει άποψη για κάποιους άλλους. Σκοπός μας είναι, δεδομένης αυτής της πληροφόρησης του αντιλήπτορα, να ορίσουμε για κάθε περίπτωση τρία σύνολα, ένα με τους τύπους που ισχύουν στην περίπτωση αυτή, ένα μ' εκείνους που γνωρίζει, κι ένα μ' εκείνους που πιστεύει ο αντιλήπτορας.

Για να γίνει ακόμα πιο σαφές τι προσπαθούμε να κάνουμε, ας θεωρήσουμε και πάλι το επιστημικό μοντέλο του Σχήματος 1.4, κι ας ονομάσουμε περίπτωση υπ' αριθμόν μηδέν, εκείνη στην οποία ο αντιλήπτορας γνωρίζει ότι στην Τιχουάνα έχει καύσωνα, αφού το πληροφορήθηκε στις ειδήσεις (πρόκειται για τις επιστημικές καταστάσεις του τελικού συμπλόκου FC), και περίπτωση υπ' αριθμόν ένα, εκείνη στην οποία ο αντιλήπτορας δεν έχει καμία πληροφόρηση ούτε για το τι συμβαίνει στην Τιχουάνα, ούτε στην Αθήνα (επιστημικές καταστάσεις του συμπλόκου C). Σκοπός μας είναι να ορίσουμε την τριάδα συνόλων $\langle T_0, \Gamma_0, \Delta_0\rangle$, όπου T_0 είναι το σύνολο των τύπων που αληθεύουν στην περίπτωση#0 (δηλ. που ισχύουν στο τελικό σύμπλοκο FC), και Γ_0 (Δ_0) είναι το σύνολο των τύπων που γνωρίζει (πιστεύει) ο αντιλήπτορας σ' αυτήν την περίπτωση. Η τριάδα $\langle T_1, \Gamma_1, \Delta_1\rangle$ αφορά στα αντίστοιχα σύνολα στην περίπτωση#1 όπου ο αντιλήπτορας βρίσκεται σε κάποιον κόσμο του συμπλόκου C. Ας προχωρήσουμε λοιπόν στους ορισμούς αυτούς που προτείνουμε ως εναλλακτική στις σταθερές θεωρίες του Stalnaker.

Έστω κατ' αρχάς $D = \{0, \ldots, n\}$ οι κωδικοί των διαφορετικών περιπτώσεων που μπορεί να ισχύουν για τον αντιλήπτορα (στο προηγούμενο παράδειγμα είχαμε $D = \{0, 1\}$).

Ορισμός 2.1.1 *Έστω απλή αμκ-σχέση*[1] P *στο* D *και* $T_0, \ldots, T_n \subseteq \mathcal{L}_\mathsf{K}$ *συνεπείς θεωρίες*[2] *τ.π.* $(\forall i \in D)(\forall \varphi \in \mathcal{L}_\mathsf{K})$

($\mathbf{pc_i}$) $\mathbf{PC}_{\mathcal{L}_\mathsf{K}} \subseteq T_i$ *και η* T_i *είναι κλειστή ως προς* **MP**.

($\mathbf{p_i}$) $\varphi \in \bigcap_{iPj} T_j \Rightarrow \mathsf{K}\varphi \in T_i$

($\mathbf{n_i}$) $\varphi \notin T_i \Rightarrow \neg\mathsf{K}\varphi \in \bigcap_{jPi} T_j$

Επιπλέον, ορίζουμε

$$\Gamma_i = \bigcap_{iPj} T_j \quad \text{και} \quad \Delta_i = \bigcup_{iPj} \Gamma_j$$

Τότε, οι διατεταγμένες τριάδες $\langle (T_i), (\Gamma_i), (\Delta_i)\rangle_{i\in D}^{P}$ *αποτελούν τη λεγόμενη* KB_P-δομή.

Το επόμενο απλό παράδειγμα δείχνει ότι οι συνεπείς, σταθερές θεωρίες του Stalnaker αποτελούν τετριμμένη περίπτωση KB_P-δομής.

Παράδειγμα 2.1.2 Έστω $D = \{0\}$, μια συνεπής θεωρία $T_0 \subseteq \mathcal{L}_\mathsf{K}$, και η αντίστοιχη $KB_{\{(0,0)\}}$-δομή $\langle T_0, \Gamma_0, \Delta_0\rangle^{\{(0,0)\}}$ (για την τετριμμένη απλή αμκ-σχέση στο D, την $\{(0,0)\}$). Τότε, απ' τον Ορισμό 2.1.1, για την T_0 ισχύει $(\forall \varphi \in \mathcal{L}_\mathsf{K})$

($\mathbf{pc_0}$) $\mathbf{PC}_{\mathcal{L}_\mathsf{K}} \subseteq T_0$ και η T_0 είναι κλειστή ως προς **MP**

[1] βλ. Ορισμό 1.2.1(iii).
[2] Προφανώς, μια θεωρία $T \subseteq \mathcal{L}_\mathsf{K}$ θα λέγεται *συνεπής* ανν $(\forall \varphi \in T)\neg\varphi \notin T$.

$(\mathbf{p_0})\quad \varphi \in T_0 \Rightarrow \mathsf{K}\varphi \in T_0$

$(\mathbf{n_0})\quad \varphi \notin T_0 \Rightarrow \neg\mathsf{K}\varphi \in T_0$

Ισχύει δε, $\Gamma_0 = \Delta_0 = T_0$. Βλέπουμε λοιπόν ότι, σύμφωνα με τον ορισμό του Stalnaker για τη γλώσσα $\mathcal{L}_{\mathsf{K}}$, η Γ_0 είναι μια σταθερή θεωρία. Το γεγονός δε, ότι $\Gamma_0 = \Delta_0$, συμβαδίζει με τη μη διαφοροποίηση της γνώσης από την πεποίθηση στον ορισμό του Stalnaker.

Παράδειγμα 2.1.3 Έστω τώρα η απλή αμκ-σχέση $P = \{(0,0),(1,1),(1,0)\}$ στο $D = \{0,1\}$ και η αντίστοιχη KB_P-δομή $\langle (T_i),(\Gamma_i),(\Delta_i)\rangle^P_{i\in D}$. Τότε, ο Ορισμός 2.1.1 καθορίζει ότι οι T_0 και T_1 είναι συνεπείς θεωρίες που ικανοποιούν όλες τις παρακάτω συνθήκες $(\forall\varphi \in \mathcal{L}_{\mathsf{K}})$

$(\mathbf{pc_{0,1}})\quad \mathbf{PC}_{\mathcal{L}_{\mathsf{K}}} \subseteq T_0, T_1$ και οι T_0, T_1 είναι κλειστές ως προς **MP**

$(\mathbf{p_0})\quad \varphi \in T_0 \Rightarrow \mathsf{K}\varphi \in T_0$

$(\mathbf{n_0})\quad \varphi \notin T_0 \Rightarrow \neg\mathsf{K}\varphi \in T_0 \ \&\ \neg\mathsf{K}\varphi \in T_1$

$(\mathbf{p_1})\quad \varphi \in T_0 \ \&\ \varphi \in T_1 \Rightarrow \mathsf{K}\varphi \in T_1$

$(\mathbf{n_1})\quad \varphi \notin T_1 \Rightarrow \neg\mathsf{K}\varphi \in T_1$

Επιπλέον, $\Gamma_0 = T_0$, $\Gamma_1 = T_0 \cap T_1$, $\Delta_0 = T_0$, και $\Delta_1 = T_0 \cup (T_0 \cap T_1) = T_0$. Το γεγονός ότι $\Delta_0 = \Delta_1 = T_0$ δεν είναι σύμπτωση, αλλά προκύπτει από κάποιες ιδιότητες της σχέσης P, στις οποίες θα αναφερθούμε παρακάτω (Παρατήρηση 2.2.11).

Η επόμενη παρατήρηση καταδεικνύει ότι θα μπορούσαν, αντί για τις ιδιότητες $(\mathbf{p_i})$ και $(\mathbf{n_i})$ στις KB_P-δομές, να χρησιμοποιηθούν ισοδύναμα οι εξής, οι οποίες ενδεχομένως να φαίνονται πιο κοντά στις διαισθήσεις μας[3] $(\forall i \in D)(\forall\varphi \in \mathcal{L}_{\mathsf{K}})$

$(\mathbf{k_i})\quad \varphi \in \Gamma_i \Rightarrow \mathsf{K}\varphi \in T_i$

Αν ο αντιλήπτορας γνωρίζει το φ στην περίπτωση i, τότε προφανώς ο τύπος $\mathsf{K}\varphi$ είναι αληθής στην περίπτωση αυτή.

$(\mathbf{nk_i})\quad \varphi \notin \Gamma_i \Rightarrow \neg\mathsf{K}\varphi \in T_i$

Αν ο αντιλήπτορας δεν γνωρίζει το φ στην περίπτωση i, τότε ο τύπος $\neg\mathsf{K}\varphi$ είναι αληθής στην περίπτωση αυτή.

Παρατήρηση 2.1.4 *Έστω απλή αμκ-σχέση P στο D και συνεπείς θεωρίες $T_i \subseteq \mathcal{L}_{\mathsf{K}}$ $(\forall i \in D)$. Επιπλέον, ας ονομάσουμε KB'_P-δομή τις τριάδες $\langle (T_i),(\Gamma_i),(\Delta_i)\rangle^P_{i\in D}$ ανν ισχύει ό,τι αναφέρθηκε στον Ορισμό 2.1.1 έχοντας αντικαταστήσει τις ιδιότητες $(\mathbf{p_i})$ και $(\mathbf{n_i})$ με τις $(\mathbf{k_i})$ και $(\mathbf{nk_i})$, αντιστοίχως. Τότε, οι τριάδες $\langle (T_i),(\Gamma_i),(\Delta_i)\rangle^P_{i\in D}$ θα αποτελούν KB_P-δομή ανν είναι KB'_P-δομή.*

Απόδειξη. Έστω ότι οι τριάδες αποτελούν KB_P-δομή. Κατ' αρχάς, λόγω του ορισμού των Γ_i προκύπτει αμέσως η $(\mathbf{k_i})$. Έστω τώρα ότι για τυχαία $i \in D$ και φ ισχύει ότι $\varphi \notin \Gamma_i$. Τότε, απ' τον ορισμό των Γ_i, θα υπάρχει $j \in D$ τ.π. iPj και $\varphi \notin T_j$, άρα, από $(\mathbf{n_j})$, $\neg\mathsf{K}\varphi \in T_i$, δηλ. αληθεύει η $(\mathbf{nk_i})$.

[3] Ο λόγος που επιλέχθηκαν οι πρώτες είναι διότι φαίνονται ως προφανής γενίκευση του ορισμού του Stalnaker.

Αντιστρόφως, βλέπουμε και πάλι αμέσως ότι ισχύει η $(\mathbf{p_i})$, λόγω του ορισμού των Γ_i. Έστω τώρα ότι για κάποια $i \in D$ και φ ισχύει $\varphi \notin T_i$, κι ας θεωρήσουμε τυχαίο $j \in D$ τ.π. jPi. Ας υποθέσουμε επιπλέον, προς άτοπο, ότι $\varphi \in \Gamma_j$. Τότε, απ' τον ορισμό του Γ_j, $\varphi \in \bigcap_{jPk} T_k$, κι απ' τη στιγμή που jPi, $\varphi \in T_i$, πράγμα που είναι άτοπο. Έτσι, $\varphi \notin \Gamma_j$, δηλ. από $(\mathbf{nk_j})$, $\neg\mathsf{K}\varphi \in T_j$. Επομένως, $\neg\mathsf{K}\varphi \in \bigcap_{jPi} T_j$, που σημαίνει ότι αληθεύει η $(\mathbf{n_i})$. ∎

Μετά την παρατήρηση αυτή, μπορούμε να επικαλούμαστε τις ιδιότητες $(\mathbf{k_i})$ και $(\mathbf{nk_i})$ για οποιαδήποτε KB_P-δομή.

Αναλογιζόμενοι ξανά όσα ειπώθηκαν στην αρχή της παρούσας παραγράφου, παρατηρούμε ότι το γεγονός ότι ο αντιλήπτορας γνωρίζει τον τύπο φ σε κάποια περίπτωση i μπορεί να περιγραφεί με δύο τρόπους: δηλώνοντας ότι $\varphi \in \Gamma_i$ ή χρησιμοποιώντας τον τροπικό μας τελεστή, γράφοντας $\mathsf{K}\varphi \in T_i$. Αντιστοίχως, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της πεποίθησης συναρτήσει της γνώσης που παρουσιάστηκε στον Ορισμό 1.1.2, το γεγονός ότι ο αντιλήπτορας πιστεύει ότι ισχύει ο τύπος φ σε κάποια περίπτωση i μπορεί και πάλι να περιγραφεί με δύο τρόπους: δηλώνοντας ότι $\varphi \in \Delta_i$ ή γράφοντας $\neg\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi \in T_i$.

Η επόμενη παρατήρηση διαπιστώνει ότι και στις δύο περιπτώσεις οι δύο διαφορετικοί τρόποι γραφής είναι ισοδύναμοι, πράγμα που δεχόμαστε ασμένως.

Παρατήρηση 2.1.5 *Έστω KB_P-δομή $\langle (T_i), (\Gamma_i), (\Delta_i)\rangle^P_{i\in D}$. Τότε $(\forall i \in D)(\forall \varphi \in \mathcal{L}_\mathsf{K})$*

i. $\varphi \in \Gamma_i \iff \mathsf{K}\varphi \in T_i$

ii. $\varphi \in \Delta_i \iff \neg\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi \in T_i$

Απόδειξη. i. Η μία κατεύθυνση είναι τετριμμένη, λόγω της Παρατήρησης 2.1.4, μια και πρόκειται για την ιδιότητα $(\mathbf{k_i})$. Για την αντίστροφη, έστω $i \in D$ και φ τ.π. $\varphi \notin \Gamma_i$. Τότε, από $(\mathbf{nk_i})$, $\neg\mathsf{K}\varphi \in T_i$, δηλ. απ' τη στιγμή που η T_i είναι συνεπής, $\neg\neg\mathsf{K}\varphi \notin T_i$, επομένως, λόγω $(\mathbf{pc_i})$, $\mathsf{K}\varphi \notin T_i$.

ii. $(\Rightarrow)$ Έστω $i \in D$ και φ τ.π. $\varphi \in \Delta_i$. Τότε, εξ ορισμού του Δ_i, θα υπάρχει $j \in D$ τ.π. iPj και $\varphi \in \Gamma_j$. Έτσι, από (i), $\mathsf{K}\varphi \in T_j$, κι απ' τη στιγμή που η T_j είναι συνεπής, $\neg\mathsf{K}\varphi \notin T_j$, οπότε, $\neg\mathsf{K}\varphi \notin \bigcap_{iPj} T_j$, δηλ. εξ ορισμού του Γ_i, $\neg\mathsf{K}\varphi \notin \Gamma_i$, άρα από $(\mathbf{nk_i})$, $\neg\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi \in T_i$.
$(\Leftarrow)$ Έστω τώρα ότι $\varphi \notin \Delta_i$. Τότε, εξ ορισμού του Δ_i, για όλα τα $j \in D$ τ.π. iPj, $\varphi \notin \Gamma_j$, έτσι, από $(\mathbf{nk_i})$, $(\forall j \in D)(iPj \Rightarrow \neg\mathsf{K}\varphi \in T_j)$, επομένως, $\neg\mathsf{K}\varphi \in \bigcap_{iPj} T_j$, κι έτσι από $(\mathbf{p_i})$, $\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi \in T_i$, οπότε, απ' τη στιγμή που η T_i είναι συνεπής, $\neg\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi \notin T_i$. ∎

2.2 Ιδιότητες

Σε όλα τα επόμενα λήμματα θεωρούμε δεδομένη κάποια KB_P-δομή $\langle (T_i), (\Gamma_i), (\Delta_i)\rangle^P_{i\in D}$. Ακόμα κι αν δεν θέταμε περιορισμούς στη σχέση P (να είναι δηλ. μια αμκ-σχέση), ο Ορισμός 2.1.1 θα ανάγκαζε όλες τις θεωρίες που εμφανίζονται σ' αυτόν να περιέχουν το αξίωμα $\mathbf{K}$.

Λήμμα 2.2.1 $(\forall i \in D)\ \mathbf{K} \in T_i$

Απόδειξη. Αν $\neg\mathsf{K}\varphi \in T_i$ ή $\neg\mathsf{K}(\varphi \supset \psi) \in T_i$, τότε, λόγω $(\mathbf{pc_i})$, $\mathbf{K} \in T_i$.
Αν $\neg\mathsf{K}\varphi \notin T_i$ και $\neg\mathsf{K}(\varphi \supset \psi) \notin T_i$, τότε, από $(\mathbf{nk_i})$, $\varphi \in \Gamma_i$ και $\varphi \supset \psi \in \Gamma_i$, έτσι, λόγω του ορισμού του Γ_i, $\varphi \in \bigcap_{iPj} T_j$ και $\varphi \supset \psi \in \bigcap_{iPj} T_j$, επομένως, από $(\mathbf{pc_j})$, $\psi \in \bigcap_{iPj} T_j$, άρα, από $(\mathbf{p_i})$, $\mathsf{K}\psi \in T_i$, και τέλος, από $(\mathbf{pc_i})$, και πάλι $\mathbf{K} \in T_i$. ∎

Τώρα, υποθέτοντας ότι η P είναι μια αμκ-σχέση, θα ήταν επιθυμητό αυτή ακριβώς η προϋπόθεση να εφοδιάζει τις θεωρίες Γ_i και Δ_i με διαισθητικές ιδιότητες για τις γνώσεις και τις πεποιθήσεις. Τα επόμενα δύο λήμματα μάς πληροφορούν ότι απ' την ανακλαστικότητα της P προκύπτει ότι *«η γνώση συνεπάγεται την πεποίθηση»* (η λεγόμενη *'entailment thesis'*), κι ότι η *«γνώση είναι αληθής»*.

Λήμμα 2.2.2 $(\forall i \in D)$ $\Gamma_i \subseteq T_i \cap \Delta_i$, *δηλ. ό,τι γνωρίζει ο αντιλήπτορας είναι αληθές και το πιστεύει.*

Απόδειξη. Έστω ότι $i \in D$ και $\varphi \in \Gamma_i$. Τότε, απ' τον ορισμό του Γ_i έχουμε, $\varphi \in \bigcap_{iPj} T_j$, κι απ' τη στιγμή που ισχύει iPi, $\varphi \in T_i$. Επιπροσθέτως, και πάλι λόγω του ότι iPi, $\Gamma_i \subseteq \bigcup_{iPj} \Gamma_j = \Delta_i$, άρα, $\varphi \in \Delta_i$. ∎

Λήμμα 2.2.3 $(\forall i \in D)$ $\mathbf{T} \in T_i$

Απόδειξη. Αν $\neg \mathsf{K}\varphi \in T_i$, τότε, από $(\mathbf{pc_i})$, $\mathbf{T} \in T_i$.
Αν $\neg \mathsf{K}\varphi \notin T_i$, τότε, από $\mathbf{nk_i}$, $\varphi \in \Gamma_i$, δηλ. απ' τον ορισμό του Γ_i, $\varphi \in \bigcap_{iPj} T_j$, κι επειδή η P είναι ανακλαστική, iPi, επομένως, $\varphi \in T_i$, έτσι, από $(\mathbf{pc_i})$, και πάλι $\mathbf{T} \in T_i$. ∎

Τα δύο προηγούμενα λήμματα ήταν απόρροια της ανακλαστικότητας της P. Η μεταβατικότητά της συνεπάγεται την *«επίγνωση της γνώσης»* (*'positive introspection concerning knowledge'*) με τη μορφή ιδιότητας κλειστότητας.

Λήμμα 2.2.4 $(\forall i \in D)(\forall \varphi \in \mathcal{L}_{\mathsf{K}})(\varphi \in \Gamma_i \Rightarrow \mathsf{K}\varphi \in \Gamma_i)$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $\varphi \in \Gamma_i$, δηλ. απ' τον ορισμό του Γ_i, ότι $\varphi \in \bigcap_{iPj} T_j$. Τότε,

$$(\forall j \in D)(iPj \Rightarrow \varphi \in T_j) \quad (*)$$

Έστω τώρα $k \in D$ τ.π. iPk, και $l \in D$ τ.π. kPl. Επειδή η P είναι μεταβατική, iPl, έτσι, λόγω $(*)$, $\varphi \in T_l$. Επομένως, $\varphi \in \bigcap_{kPl} T_l$, που σημαίνει, λόγω $(\mathbf{p_k})$, $\mathsf{K}\varphi \in T_k$. Έτσι, $\mathsf{K}\varphi \in \bigcap_{iPk} T_k$, δηλ. εξ ορισμού του Γ_i, $\mathsf{K}\varphi \in \Gamma_i$. ∎

Το λήμμα αυτό, σε συνδυασμό με τον ορισμό του Δ_i, συνεπάγεται αμέσως το επόμενο λήμμα, το οποίο ουσιαστικά περιγράφει σε μορφή ιδιότητας κλειστότητας το αξίωμα **SB** του Stalnaker (βλ. Παράγραφο 1.1) περί «ισχυρής πεποίθησης».

Λήμμα 2.2.5 $(\forall i \in D)(\forall \varphi \in \mathcal{L}_{\mathsf{K}})(\varphi \in \Delta_i \Rightarrow \mathsf{K}\varphi \in \Delta_i)$

Απ' την ανακλαστικότητα της P προκύπτει επίσης ότι οι θεωρίες του Ορισμού 2.1.1 περιέχουν το αξίωμα **4**.

Λήμμα 2.2.6 $(\forall i \in D)$ $\mathbf{4} \in T_i$

Απόδειξη. Αν $\neg \mathsf{K}\varphi \in T_i$, τότε, από $(\mathbf{pc_i})$, $\mathbf{4} \in T_i$.
Αν $\neg \mathsf{K}\varphi \notin T_i$, τότε, λόγω $(\mathbf{nk_i})$, $\varphi \in \Gamma_i$, κι απ' το Λήμμα 2.2.4, $\mathsf{K}\varphi \in \Gamma_i$, έτσι, λόγω του $(\mathbf{k_i})$, $\mathsf{K}\mathsf{K}\varphi \in T_i$, επομένως, από $(\mathbf{pc_i})$, και πάλι $\mathbf{4} \in T_i$. ∎

Το ακόλουθο τεχνικό λήμμα θα μας χρησιμεύσει στην επόμενη παράγραφο.

Λήμμα 2.2.7 $(\forall i, j \in D)(iPj \Rightarrow \Gamma_i \subseteq \Gamma_j)$

Αποδειξη. Έστω $i, j \in D$ τ.π. iPj, καθώς και $\varphi \in \Gamma_i$ και $k \in D$ τ.π. jPk. Τότε, απ' τη στιγμή που η P είναι μεταβατική, iPk, κι έτσι, απ' τον ορισμό του Γ_i, $\varphi \in T_k$, επομένως, απ' τον ορισμό του Γ_j, $\varphi \in \Gamma_j$. ∎

Για να τελειώσουμε με τις ιδιότητες κάθε KB_P-δομής, οι οποίες είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι η P είναι μια αμκ-σχέση, ας εστιάσουμε στο ότι η P είναι κατευθυνόμενη (βλ. Παράγραφο 1.2). Από αυτό ακριβώς προκύπτουν ιδιότητες κλειστότητας που αντιστοιχούν στα αξιώματα **B2.3** (του κατά Lenzen «ρεαλιστή γνωσιολόγου») και **PIB** (που ονομάστηκε **B2.4** από τον Lenzen, και που αντιστοιχεί στην *«επίγνωση της πεποίθησης» – 'positive introspection regarding belief'*)

Λήμμα 2.2.8 $(\forall i \in D)(\forall \varphi \in \mathcal{L}_{\mathsf{K}})$

i. $\varphi \in \Delta_i \Rightarrow \neg\mathsf{K}\varphi \notin \Delta_i \qquad (\simeq \mathbf{B2.3})$

ii. $\varphi \in \Delta_i \Rightarrow \neg\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi \in \Gamma_i \qquad (\simeq \mathbf{PIB}, \mathbf{B2.4})$

Αποδειξη. Και για τις δύο περιπτώσεις ξεκινούμε υποθέτοντας ότι $\varphi \in \Delta_i$. Τότε, εξ ορισμού του Δ_i, θα υπάρχει $j \in D$ τ.π. iPj και $\varphi \in \Gamma_j$. Έστω τώρα $l \in D$ τ.π. iPl. Τότε, απ' τη στιγμή που η P είναι κατευθυνόμενη, πρέπει να υπάρχει ένα $m \in D$ τ.π. jPm και lPm. Επιπροσθέτως, ας θεωρήσουμε ένα $s \in D$ τ.π. mPs. Επειδή ισχύει jPm και λόγω του ότι η P είναι μεταβατική, θα έχουμε jPs, κι έτσι, επειδή $\varphi \in \Gamma_j = \bigcap_{jPk} T_k$, $\varphi \in T_s$. Επομένως, $\varphi \in \bigcap_{mPs} T_s$, κι από $(\mathbf{p_m})$, $\mathsf{K}\varphi \in T_m$, άρα, λόγω του ότι η T_m είναι συνεπής, $\neg\mathsf{K}\varphi \notin T_m$.

i. Έχει αποδειχθεί ως τώρα ότι υπάρχει $m \in D$ τ.π. lPm και $\neg\mathsf{K}\varphi \notin T_m$. Επομένως, εξ ορισμού του Γ_l, $\neg\mathsf{K}\varphi \notin \Gamma_l$, έτσι, $(\forall l \in D)(iPl \Rightarrow \neg\mathsf{K}\varphi \notin \Gamma_l)$, άρα, εξ ορισμού του Δ_i, $\neg\mathsf{K}\varphi \notin \Delta_i$.

ii. Απ' τη στιγμή που $\neg\mathsf{K}\varphi \notin T_m$, και επειδή ισχύει lPm, λόγω $(\mathbf{n_m})$, $\neg\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi \in T_l$, επομένως, $\neg\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi \in \bigcap_{iPl} T_l$, οπότε, απ' τον ορισμό του Γ_i, $\neg\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi \in \Gamma_i$. ∎

Τέλος, ας εστιάσουμε στην προϋπόθεση ότι η αμκ-σχέση P είναι απλή. Τότε, δίχως βλάβη της γενικότητας (κάνοντας ενδεχομένως μια αλλαγή αρίθμησης στο σύνολο D), μπορούμε να δεχθούμε ότι η ιδιότητα που περιγράφει το Λήμμα 1.2.5 μπορεί να διατυπωθεί ως εξής

Λήμμα 2.2.9 $(\forall i \in D)\big(iP0 \;\&\; (i > 0 \Rightarrow \neg 0Pi)\big)$, *δηλ. ότι το μοναδικό στοιχείο του τελικού συμπλόκου της δομής $\langle D, P\rangle$ είναι το 0.*

Αυτή ακριβώς η ιδιότητα[4] εφοδιάζει τις θεωρίες της KB_P-δομής με το αξίωμα **G** και ξεκαθαρίζει τη μεταξύ τους σχέση.

[4] Εννοώ την ιδιότητα του Λήμματος 1.2.5. Εκείνη του Λήμματος 2.2.9 απλώς διευκολύνει το συμβολισμό.

Λήμμα 2.2.10 $(\forall i \in D)$ $\mathbf{G} \in T_i$

Απόδειξη. Αν $\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi \in T_i$, τότε, από $(\mathbf{pc_i})$, $\mathbf{G} \in T_i$.
Αν $\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi \notin T_i$, τότε, λόγω $(\mathbf{p_i})$, θα υπάρχει $j \in D$ τ.π. iPj και $\neg\mathsf{K}\varphi \notin T_j$, έτσι, απ' τη στιγμή που ισχύει $jP0$ (λόγω του Λήμματος 2.2.9), από $(\mathbf{n_0})$, θα έχουμε $\varphi \in T_0$, άρα, λόγω της συνέπειας της T_0, $\neg\varphi \notin T_0$, κι από $(\mathbf{n_0})$, $\neg\mathsf{K}\neg\varphi \in \bigcap_{kP0} T_k$. Έτσι, από Λήμμα 2.2.9, $(\forall k \in D)\neg\mathsf{K}\neg\varphi \in T_k$, οπότε προφανώς, $\neg\mathsf{K}\neg\varphi \in \bigcap_{iPk} T_k$, επομένως, από $(\mathbf{p_i})$, $\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\neg\varphi \in T_i$, συνεπώς, λόγω $(\mathbf{pc_i})$, και πάλι $\mathbf{G} \in T_i$. ∎

Παρατήρηση 2.2.11 $(\forall i \in D)$

i. $\Delta_i = \Gamma_0 = T_0$

ii. *Η Δ_i είναι σταθερή θεωρία (κατά Stalnaker)*

Απόδειξη. i. Κατ' αρχάς, απ' τον ορισμό του Γ_0 κι απ' το Λήμμα 2.2.9, έχουμε $\Gamma_0 = T_0$ $(*)$
Έστω τώρα ότι $\varphi \in \Delta_i$. Τότε, εξ ορισμού του Δ_i, θα υπάρχει $j \in D$ τ.π. iPj και $\varphi \in \Gamma_j$, ή, απ' τον ορισμό του Γ_j, $\varphi \in \bigcap_{jPk} T_k$, κι αφού, απ' το Λήμμα 2.2.9, $jP0$, θα ισχύει $\varphi \in T_0$.
Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι $\varphi \in T_0$. Τότε, από $(*)$, $\varphi \in \Gamma_0$. Όμως, απ' το Λήμμα 2.2.9, $iP0$, άρα, $\varphi \in \bigcup_{iPj} \Gamma_j$, επομένως, εξ ορισμού του Δ_i, $\varphi \in \Delta_i$.

ii. Από το Λήμμα 2.2.9 έπεται ότι οι ιδιότητες $(\mathbf{pc_0})$, $(\mathbf{p_0})$, και $(\mathbf{n_0})$ συνεπάγονται αντιστοίχως τις (**St1**), (**St2**), και (**St3**) του ορισμού των σταθερών θεωριών για την T_0. Το ζητούμενο προκύπτει τότε λόγω (i). ∎

Η συνέπεια της T_0, συνεπικουρούμενη από την τελευταία παρατήρηση, δίνει αμέσως, με τη μορφή ιδιότητας κλειστότητας, την *«αρχή της συνεπούς πεποίθησης»* που αντιστοιχεί στο αξίωμα $\mathbf{D}_\mathsf{B}$ (ή **CB**, κατά τον Stalnaker – βλ. Παράγραφο 1.1)

Λήμμα 2.2.12 $(\forall i \in D)(\forall \varphi \in \mathcal{L}_\mathsf{K})(\varphi \in \Delta_i \Rightarrow \neg\varphi \notin \Delta_i)$

Στην επόμενη παράγραφο θα παρουσιαστεί ένας μοντελοθεωρητικός χαρακτηρισμός των KB_P-δομών. Για να επιτευχθεί αυτό, θα χρειαστούμε το επόμενο αποτέλεσμα.

Λήμμα 2.2.13 $(\forall i \in D)$

i. *Η Γ_i είναι κλειστή ως προς ισχυρή* **S4.2**-*αποδειξιμότητα*[5], *δηλ.* $\Gamma_i = Cn_{\mathbf{S4.2}}(\Gamma_i)$.

ii. *Η Γ_i είναι συνεπής με την* **S4.2** *(σ***S4.2***-θεωρία)*[6].

[5] Στην παράγραφο αυτή χρησιμοποιούμε την *ισχυρή αποδειξιμότητα*. Λέμε δηλ. ότι το φ αποδεικνύεται στην κανονική τροπική λογική Λ από τη θεωρία I (γράφουμε $I \vdash_\Lambda \varphi$) ανν υπάρχει μια τυπική απόδειξη α λα Hilbert που τερματίζει στο φ, κάθε βήμα της οποίας, ή θα είναι μια ταυτολογία της $\mathcal{L}_\mathsf{K}$ (δηλ. μέλος της $\mathbf{PC}_{\mathcal{L}_\mathsf{K}}$), ή γενίκευση κάποιου αξιώματος της Λ, ή μέλος της I, ή θα προκύπτει από εφαρμογή του κανόνα **MP** ή του **RN** σε τύπους προηγούμενων βημάτων.
Επίσης γενικότερα, για μια τροπική λογική Λ και μια θεωρία $T \subseteq \mathcal{L}_\square$, συνηθίζουμε να συμβολίζουμε με $Cn_\Lambda(T)$ το σύνολο $\{\varphi \in \mathcal{L}_\square \mid T \vdash_\Lambda \varphi\}$. Θα λέμε δε, ότι η T είναι *κλειστή ως προς ισχυρή Λ-αποδειξιμότητα* ανν $T = Cn_\Lambda(T)$.

[6] Λέμε ότι η θεωρία I είναι *συνεπής με την τροπική λογική* Λ (σημειώνεται ως σΛ) ανν $I \nvdash_\Lambda \bot$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. i. Είναι προφανές, εξ ορισμού της ισχυρής αποδειξιμότητας, ότι, αν $\varphi \in \Gamma_i$, τότε $\Gamma_i \vdash_{\mathbf{S4.2}} \varphi$. Αντιστρόφως, έστω ότι $\Gamma_i \vdash_{\mathbf{S4.2}} \varphi$. Τότε, θα αποδειχθεί με επαγωγή στο μήκος της απόδειξης, ότι $\varphi \in \Gamma_i$.

Επαγ.Βάση. Για μήκος απόδειξης ίσο με ένα. Αν $\varphi \in \Gamma_i$, τότε τελειώσαμε. Αλλιώς, έστω τυχαίο $j \in D$ τ.π. iPj. Αν $\varphi \in \mathbf{PC}_{\mathcal{L}_\mathsf{K}}$, τότε, λόγω ($\mathbf{pc_j}$), $\varphi \in T_j$. Αν το φ αποτελεί γενίκευση κάποιου από τα αξιώματα της **S4.2**, δηλ. του **K**, ή του **T**, ή του **4**, ή του **G**, τότε, από τα Λήμματα 2.2.1, 2.2.3, 2.2.6, ή 2.2.10 αντιστοίχως, θα προκύψει $\varphi \in T_j$. Έτσι, αφού αυτό συμβαίνει για κάθε $j \in D$ τ.π. iPj, θα έχουμε, εξ ορισμού του Γ_i, $\varphi \in \Gamma_i$.

Επαγ.Βήμα. Αν το ψ και το $\psi \supset \varphi$ είναι τύποι που εμφανίζονται σε προηγούμενα βήματα της απόδειξης, τότε, απ' την Επαγ.Υπόθεση, θα ισχύει $\psi \in \Gamma_i$ και $\psi \supset \varphi \in \Gamma_i$, δηλ. εξ ορισμού του Γ_i, $(\forall j \in D)(iPj \Rightarrow (\psi \in T_j \;\&\; \psi \supset \varphi \in T_j))$, κι έτσι, από ($\mathbf{pc_j}$), $\varphi \in T_j$, οπότε, και πάλι απ' τον ορισμό του Γ_i, $\varphi \in \Gamma_i$.

Αν $\varphi = \mathsf{K}\psi$ όπου ψ είναι τύπος που εμφανίζεται σε προηγούμενο βήμα της απόδειξης, τότε, απ' την Επαγ.Υπόθεση, $\psi \in \Gamma_i$, οπότε, λόγω του Λήμματος 2.2.4, $\mathsf{K}\psi \in \Gamma_i$.

ii. Ας υποθέσουμε, προς άτοπο, ότι η θεωρία Γ_i δεν ήταν συνεπής με την **S4.2**. Τότε, $\Gamma_i \vdash_{\mathbf{S4.2}} \bot$, άρα, από (i), $\bot \in \Gamma_i$, δηλ. εξ ορισμού του Γ_i και του Λήμματος 2.2.9, $\bot \in T_0$, επομένως, η T_0 θα ήταν ασυνεπής, πράγμα άτοπο, εκ του Ορισμού 2.1.1. ∎

2.3 Χαρακτηρισμός

Κατ' αρχάς, ας ορίσουμε τις ακόλουθες θεωρίες.

Ορισμός 2.3.1 *Έστω Kripke μοντέλο $\mathfrak{M} = \langle W, \mathcal{R}, V \rangle$ και τυχαίο $C \subseteq W$. Τότε*

$$\begin{aligned} Th_{\mathfrak{M}}(C) &=_{o\rho.} \{\varphi \in \mathcal{L}_\mathsf{K} \mid (\forall w \in C)\ \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi\} \\ K_{\mathfrak{M}}(C) &=_{o\rho.} \{\varphi \in \mathcal{L}_\mathsf{K} \mid (\forall w \in C)\ \mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{K}\varphi\} \\ B_{\mathfrak{M}}(C) &=_{o\rho.} \{\varphi \in \mathcal{L}_\mathsf{K} \mid (\forall w \in C)\ \mathfrak{M}, w \Vdash \neg\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi\} \end{aligned}$$

Περιγράφοντας με λόγια, ο ορισμός αυτός ονομάζει $Th_{\mathfrak{M}}(C)$ το σύνολο των τύπων που ισχύουν σε όλους τους κόσμους του C, $K_{\mathfrak{M}}(C)$ το σύνολο των τύπων που γνωρίζει ο αντιλήπτορας παντού στο C, και $B_{\mathfrak{M}}(C)$ το σύνολο των τύπων, στους οποίους πιστεύει ο αντιλήπτορας παντού στο C.

Το πρώτο θεώρημα της παραγράφου αυτής διατείνεται ότι στην περίπτωση που το $\mathfrak{M}$ είναι ένα **S4.2**-μοντέλο, τότε ό,τι ισχύει στα σύμπλοκά του, κι ό,τι γνωρίζει ή πιστεύει ο αντιλήπτορας σ' αυτά, περιγράφονται συντακτικώς από μια KB_P-δομή. Επιπλέον, ό,τι πιστεύει ο αντιλήπτορας είναι το ίδιο σε όλα τα σύμπλοκα και ταυτίζεται με ό,τι γνωρίζει στο τελικό σύμπλοκο (ένα παράδειγμα θα παρουσιαστεί στην επόμενη παράγραφο). Για να προχωρήσουμε όμως στην απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε την έννοια της *σχέσης προτύπου*, καθώς και μερικών ιδιοτήτων της.

Ορισμός 2.3.2 *Έστω $\mathcal{R}$ μια αμκ-σχέση στο σύνολο W που έχει πεπερασμένο πλήθος συμπλόκων, έστω τα $C_0, \dots, C_n \subseteq W$. Τότε,* σχέση πρότυπο *$P$ της $\mathcal{R}$ θα ονομάζεται κάθε διμελής σχέση στο $D = \{0, \dots, n\}$ τ.π. $(\forall i, j \in D)$*

$$iPj \iff (\exists w \in C_i)(\exists v \in C_j)\ wRv$$

Λήμμα 2.3.3 *Έστω $\mathcal{R}$ μια αμκ-σχέση στο W (με σύμπλοκα τα $C_0, \ldots, C_n \subseteq W$) και P μια σχέση πρότυπό της. Τότε, θεωρώντας και πάλι $D = \{0, \ldots, n\}$*

i. $(\forall i, j \in D)\big(iPj \iff (\forall w \in C_i)(\forall v \in C_j)\ w\mathcal{R}v\big)$

ii. *Η P αποτελεί μία απλή αμκ-σχέση στο D.*

Αποδειξη. i. Άμεσο, από Ορισμό 2.3.2 και Παρατήρηση 1.2.2(iii).

ii. Το γεγονός ότι η P είναι ανακλαστική, μεταβατική, και κατευθυνόμενη προκύπτει εύκολα απ' το γεγονός ότι η $\mathcal{R}$ είναι μια αμκ-σχέση, χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 2.3.2. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι είναι και απλή, δηλ. ότι κάθε σύμπλοκό της είναι μονοσύνολο. Ας υποθέσουμε, προς άτοπο, ότι υπάρχει σύμπλοκο της δομής $\langle D, P\rangle$ με περισσότερα από ένα στοιχεία, κι ας τα ονομάσουμε i, j, όπου φυσικά $i \neq j$. Απ' τη στιγμή που ανήκουν σε σύμπλοκο, απ' τον Ορισμό 1.2.1(i) θα είχαμε, iPj και jPi, άρα, λόγω (i), $(\forall w \in C_i)(\forall v \in C_j)\ (w\mathcal{R}v \ \&\ v\mathcal{R}w)$ (1) Όμως, απ' την Παρατήρηση 1.2.2(ii) (κι απ' τη στιγμή που προφανώς $C_j \neq \varnothing$), θα υπήρχε κάποιο $u \in C_j \setminus C_i$, κι έτσι, λόγω του Ορισμού 1.2.1(i), θα υπήρχε κάποιο $s \in C_i$ τ.π. $\neg u\mathcal{R}s$ ή $\neg s\mathcal{R}u$, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με το (1). Απ' τη στιγμή δε, που τα σύμπλοκα είναι εξ ορισμού μη κενά, θα είναι μονοσύνολα. ∎

Είμαστε λοιπόν έτοιμοι να προχωρήσουμε στο πρώτο μας αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.3.4 *Έστω $\mathfrak{M} = \langle W, \mathcal{R}, V\rangle$ ένα* **S4.2***-μοντέλο με σύμπλοκα τα μη κενά σύνολα $C_i \subseteq W$ (όπου $i \in D = \{0, \ldots, n\}$), μεταξύ των οποίων το C_0 που είναι το τελικό σύμπλοκο. Τότε, υπάρχει σχέση $P \subseteq D \times D$ τ.π. η $\langle (Th_{\mathfrak{M}}(C_i)), (K_{\mathfrak{M}}(C_i)), (B_{\mathfrak{M}}(C_i))\rangle^P_{i\in D}$ να είναι μια KB_P-δομή. Επίσης θα ισχύει $B_{\mathfrak{M}}(C_i) = K_{\mathfrak{M}}(C_0)$.*

Αποδειξη. Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1.1 πρέπει (1) να αποδείξουμε ότι οι θεωρίες $Th_{\mathfrak{M}}(C_i)$ είναι συνεπείς, (2) να βρούμε μια απλή αμκ-σχέση P στο D τ.π. $(\forall i \in D)$ να ισχύει (3) $K_{\mathfrak{M}}(C_i) = \bigcap_{iPj} T_j$, οι ιδιότητες $(\mathbf{pc_i})$, $(\mathbf{p_i})$, και $(\mathbf{n_i})$ για τη θεωρία $Th_{\mathfrak{M}}(C_i)$, (4) $B_{\mathfrak{M}}(C_i) = \bigcup_{iPj} K_{\mathfrak{M}}(C_j)$. Τότε, απ' όλα αυτά θα προκύψει ότι η εν λόγω δομή είναι KB_P-δομή, επομένως, απ' την Παρατήρηση 2.2.11, θα ισχύει και ότι $B_{\mathfrak{M}}(C_i) = K_{\mathfrak{M}}(C_0)$. Ιδού λοιπόν.

(1) Για ευκολία, ας ονομάσουμε T_i κάθε $Th_{\mathfrak{M}}(C_i)$. Τότε, προφανώς, $T_i \neq \varnothing$ (για παράδειγμα $\top \in T_i$) καθώς και, αν $\varphi \in T_i$, τότε $\neg\varphi \notin T_i$, δηλ. το T_i είναι συνεπές.

(2) Απ' τη στιγμή που η $\mathcal{R}$ είναι μία αμκ-σχέση με σύμπλοκα τα $C_0, \ldots, C_n$, αν οριστεί η σχέση P στο D ως εξής $(\forall i, j \in D)$

$$iPj \overset{\text{ορ.}}{\iff} (\exists w \in C_i)(\exists v \in C_j)\ w\mathcal{R}v$$

τότε, λόγω του Ορισμού 2.3.2, η P θα αποτελεί σχέση πρότυπο της $\mathcal{R}$, κι έτσι, λόγω του Λήμματος 2.3.3(ii), θα είναι μια απλή αμκ-σχέση στο D.

(3) Λόγω του Ορισμού 2.3.1, αρκεί να δείξουμε ότι $(\forall i \in D)(\forall \varphi \in \mathcal{L}_{\mathsf{K}})$

$$(\forall w \in C_i)\ \mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{K}\varphi \iff (\forall j \in D)(iPj \Rightarrow (\forall v \in C_j)\ \mathfrak{M}, v \Vdash \varphi)$$

Για το ευθύ, ας θεωρήσουμε κάποιο $j \in D$ τ.π. iPj, και ένα τυχαίο $v \in C_j$. Τότε, θεωρώντας και κάποιο $w \in C_i$, απ' το Λήμμα 2.3.3(i), $w\mathcal{R}v$, έτσι, εξ υποθέσεως, $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$. Για το αντίστροφο, έστω κάποιο $w \in C_i$, καθώς και ένα $v \in W$ τ.π. $w\mathcal{R}v$. Τότε, επειδή $\bigcup_{j\in D} C_j = W$, θα υπάρχει ένα $j \in D$ τ.π. $v \in C_j$, επομένως, εξ ορισμού της P, iPj, άρα, εξ υποθέσεως, $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$, κι έτσι, $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{K}\varphi$.

($\mathbf{pc_i}$) Η ισχύς της ιδιότητας αυτής είναι προφανής, μια και όλοι οι τύποι της λογικής $\mathbf{PC}_{\mathcal{L}_\mathsf{K}}$ είναι έγκυροι σε κάθε μοντέλο Kripke, και επειδή η κλειστότητα της θεωρίας T_i ως προς **MP** προκύπτει αμέσως απ' τον ορισμό της αλήθειας του τύπου $\varphi \supset \psi$ σε ένα μοντέλο Kripke.

($\mathbf{p_i}$) Ας υποθέσουμε ότι $\varphi \in \bigcap_{iPj} T_j$, δηλ. ότι για τυχαίο $j \in D$ τ.π. iPj, θα ισχύει $(\forall w \in C_j)\ \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$. Έστω τώρα τυχαίο $v \in C_i$, και κάποιο $u \in W$ τ.π. $v\mathcal{R}u$. Τότε, λόγω της Παρατήρησης 1.2.2(i), θα υπάρχει ένα $j \in D$ τ.π. $u \in C_j$, οπότε, εξ ορισμού της P, iPj, επομένως, εξ υποθέσεως, $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$, κι έτσι, $\mathfrak{M}, v \Vdash \mathsf{K}\varphi$, δηλ. $\mathsf{K}\varphi \in T_i$.

($\mathbf{n_i}$) Έστω ότι $\varphi \notin T_i$, δηλ. ότι υπάρχει κάποιο $w \in C_i$ τ.π. $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\varphi$. Ας θεωρήσουμε τώρα κάποιο $j \in D$ τ.π. jPi και $v \in C_j$. Τότε, λόγω του Λήμματος 2.3.3(i), $v\mathcal{R}w$, έτσι, απ' τη στιγμή που $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\varphi$, θα ισχύει $\mathfrak{M}, v \Vdash \neg\mathsf{K}\varphi$, δηλ. $\neg\mathsf{K}\varphi \in T_j$, οπότε $\neg\mathsf{K}\varphi \in \bigcap_{jPi} T_j$.

(4) Λόγω του Ορισμού 2.3.1, αρκεί να δείξουμε ότι $(\forall i \in D)(\forall \varphi \in \mathcal{L}_\mathsf{K})$

$$(\forall w \in C_i)\ \mathfrak{M}, w \Vdash \neg\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi \iff (\exists j \in D)(iPj\ \&\ (\forall v \in C_j)\ \mathfrak{M}, v \Vdash \mathsf{K}\varphi)$$

Για το ευθύ, ας θεωρήσουμε τυχαίο $w \in C_i$. Τότε, εξ υποθέσεως, θα υπάρχει κάποιο $u \in W$ τ.π. $w\mathcal{R}u$ και $\mathfrak{M}, u \Vdash \mathsf{K}\varphi$. Όμως, λόγω της Παρατήρησης 1.2.2(i), θα υπάρχει κάποιο $j \in D$ τ.π. $u \in C_j$, έτσι, εξ ορισμού της P, iPj. Επιπροσθέτως, ας θεωρήσουμε κάποιο $v \in C_j$. Τότε, εκ του Ορισμού 1.2.1(i), $u\mathcal{R}v$. Τέλος, ας θεωρήσουμε κι ένα $s \in W$ τ.π. $v\mathcal{R}s$. Επειδή η $\mathcal{R}$ είναι μεταβατική, $u\mathcal{R}s$, έτσι, αφού $\mathfrak{M}, u \Vdash \mathsf{K}\varphi$, θα ισχύει $\mathfrak{M}, s \Vdash \varphi$, δηλ. $\mathfrak{M}, v \Vdash \mathsf{K}\varphi$.

Για το αντίστροφο, έστω $w \in C_i$ και τυχαίο $v \in C_j$, όπου j ο δείκτης που μας δίνει η υπόθεση. Επειδή iPj, απ' το Λήμμα 2.3.3(i), θα έχουμε $w\mathcal{R}v$. Όμως, εξ υποθέσεως, $\mathfrak{M}, v \Vdash \mathsf{K}\varphi$, άρα, $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi$. ∎

Πριν συνεχίσουμε με το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος, θα ήθελα στο σημείο αυτό να δούμε ότι οι KB_P-δομές έχουν όντως μια απ' τις ιδιότητες, για την οποία ακριβώς κατασκευάστηκαν: ότι δεν ισχύει σίγουρα σ' αυτές η «επίγνωση της άγνοιας» ('negative introspection'). Σκοπός μας είναι δηλ. να κατασκευάσουμε μια KB_P-δομή που να διαθέτει μια θεωρία γνώσης Γ_i τ.π. για κάποιον τύπο φ να ισχύει $\varphi \notin \Gamma_i$ καθώς και $\neg\mathsf{K}\varphi \notin \Gamma_i$, δηλ. να υπάρχει περίπτωση ο αντιλήπτορας να μη γνωρίζει το φ, αλλά ούτε να γνωρίζει ότι δεν το γνωρίζει. Μπορεί δηλ. να έχει άγνοια της άγνοιάς του.

Για την κατασκευή αυτού του αντιπαραδείγματος, θα χρειαστούμε την ακόλουθη πρόταση. Σ' αυτήν, θα θεωρήσουμε δεδομένες κάποιες θεωρίες $S_0, \ldots, S_n$ που θα περιέχουν μόνον τύπους δίχως τροπικούς τελεστές[7]. Θα θεωρήσουμε επιπλέον ότι πρόκειται για συνεπείς και προτασιακώς κλειστές[8] θεωρίες, καθώς και κάποια απλή αμκ-σχέση P στο $D = \{0, \ldots, n\}$. Στην πρόταση αυτή, ακολουθώντας ουσιαστικά τα βήματα του προηγούμενου θεωρήματος, θα αποδειχθεί ότι είναι δυνατόν να βρεθεί μια KB_P-δομή $\langle (T_i), (\Gamma_i), (\Delta_i)\rangle^P_{i\in D}$ τ.π. το μη τροπικό «κομμάτι» των θεωριών $T_0, \ldots, T_n$ να είναι ακριβώς οι θεωρίες $S_0, \ldots, S_n$ αντιστοίχως. Ιδού οι λεπτομέρειες.

Πρόταση 2.3.5 *Έστω $S_0, \ldots, S_n \subseteq \mathcal{L}$ τροπικώς ελεύθερες, συνεπείς, και προτασιακώς κλειστές θεωρίες, και P μια απλή αμκ-σχέση στο $D = \{0, \ldots, n\}$. Τότε, υπάρχει KB_P-δομή $\langle (T_i), (\Gamma_i), (\Delta_i)\rangle^P_{i\in D}$ τ.π. $(\forall i \in D)\ T_i \cap \mathcal{L} = S_i$.*

[7] Θεωρίες και τύπους που δεν περιέχουν τροπικούς τελεστές τους ονομάζουμε συνήθως *τροπικώς ελεύθερους*.

[8] Μια τροπικώς ελεύθερη θεωρία $T \subseteq \mathcal{L}$ θα ονομάζεται *προτασιακώς κλειστή* ανν $T = Cn_{\mathbf{PC}}(T)$, όπου – κατ' αναλογία με ό,τι ειπώθηκε στην υποσημείωση 5 στο Λήμμα 2.2.13, αλλά τώρα για την προτασιακή περίπτωση – $Cn_{\mathbf{PC}}(T) = \{\varphi \in \mathcal{L} \mid T \vdash_{\mathbf{PC}} \varphi\}$, όπου φυσικά το σύμβολο $\vdash_{\mathbf{PC}}$ αναφέρεται σε τυπική απόδειξη του Προτασιακού Λογισμού.

Αποδειξη. Έστω το μοντέλο $\mathfrak{M} = \langle W, \mathcal{R}, V\rangle$, όπου

- $W = \bigcup_{i\in D} C_i$, όπου $(\forall i \in D)$
$$C_i = \{(i,a) \in D \times (\Phi \mapsto \{A,\Psi\}) \mid (\forall \varphi \in S_i)\ \overline{a}(\varphi) = A\}$$
- $\mathcal{R} = \bigcup_{iPj} C_i \times C_j$
- $V(p) = \bigcup_{i\in D}\{(i,a) \in C_i \mid a(p) = A\} \quad (p \in \Phi)$

Δηλ. στο μοντέλο αυτό, κάθε C_i αποτελείται από όλες τις προτασιακές αποτιμήσεις (στις οποίες έχει προσαρτηθεί ο δείκτης i), οι οποίες ικανοποιούν τη θεωρία S_i. Κατ' αρχάς, σταθεροποιώντας κάποιο $i \in D$, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το $\overline{a}(\varphi)$ για κάθε $\varphi \in S_i$ έχει νόημα, μια και $S_i \subseteq \mathcal{L}$, είναι δηλ. τροπικώς ελεύθερη θεωρία, και η $\overline{a}$ είναι η επέκταση της a στους τύπους της $\mathcal{L}$. Επίσης, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι $C_i \neq \varnothing$, αφού η S_i είναι συνεπής, και άρα ικανοποιήσιμη, λόγω του Θεωρήματος Πληρότητας του Προτασιακού Λογισμού.

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των επεκτάσεων, τόσο της προτασιακής αποτίμησης a, όσο και της τροπικής V, μπορεί να αποδειχθεί με μια τετριμμένη επαγωγή στους τύπους της $\mathcal{L}$, ότι $(\forall (i,a) \in W)(\forall \varphi \in \mathcal{L})$
$$\mathfrak{M}, (i,a) \Vdash \varphi \iff \overline{a}(\varphi) = A \qquad (*)$$

Έστω τώρα κάποιο $\varphi \in S_i$. Τότε, εξ ορισμού του C_i, $(\forall (i,a) \in C_i)\ \overline{a}(\varphi) = A$, έτσι, από $(*)$, επειδή $\varphi \in \mathcal{L}$, θα ισχύει $(\forall (i,a) \in C_i)\ \mathfrak{M}, (i,a) \Vdash \varphi$, οπότε, $\varphi \in Th_{\mathfrak{M}}(C_i)$, και φυσικά, $\varphi \in Th_{\mathfrak{M}}(C_i) \cap \mathcal{L}$.

Αντιστρόφως, έστω $\varphi \in Th_{\mathfrak{M}}(C_i) \cap \mathcal{L}$. Τότε, $(\forall (i,a) \in C_i)\ \mathfrak{M}, (i,a) \Vdash \varphi$, επομένως, λόγω $(*)$, επειδή $\varphi \in \mathcal{L}$, θα ισχύει $(\forall (i,a) \in C_i)\ \overline{a}(\varphi) = A$, έτσι, εξ ορισμού του C_i, $S_i \vDash \varphi$, άρα, απ' το Θεώρημα Πληρότητας του Προτασιακού Λογισμού, $S_i \vdash_{\mathbf{PC}} \varphi$, κι αφού η θεωρία S_i είναι προτασιακώς κλειστή, $\varphi \in S_i$.

Αποδείχθηκε δηλ. ότι $Th_{\mathfrak{M}}(C_i) \cap \mathcal{L} = S_i$. Έτσι, θα τελειώναμε, αν αποδεικνύαμε επιπλέον ότι η $\langle (Th_{\mathfrak{M}}(C_i)), (K_{\mathfrak{M}}(C_i)), (B_{\mathfrak{M}}(C_i))\rangle_{i\in D}^{P}$ είναι μια KB_P-δομή. Όμως, λόγω της κατασκευής της $\mathcal{R}$, και επειδή η P είναι μια αμκ-σχέση στο D, είναι άμεσο ότι και η $\mathcal{R}$ είναι μία αμκ-σχέση στο W. Επομένως, έχει νόημα η αναφορά σε μια σχέση πρότυπο της $\mathcal{R}$. Θα δείξουμε ότι μια τέτοια σχέση πρότυπο είναι η P. Κατ' αρχάς, πρόκειται όντως για μια διμελή σχέση στο D. Επιπροσθέτως, ας θεωρήσουμε τυχαία $i, j \in D$ τ.π. iPj. Τότε, εξ ορισμού της $\mathcal{R}$, $(\forall (i,a) \in C_i)(\forall (j,b) \in C_j)\ (i,a)\mathcal{R}(j,b)$, κι απ' τη στιγμή που $C_i, C_j \neq \varnothing$, θα υπάρχουν $(i,a) \in C_i$ και $(j,b) \in C_j$ τ.π. $(i,a)\mathcal{R}(j,b)$. Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχουν $(i,a) \in C_i$ και $(j,b) \in C_j$ τ.π. $(i,a)\mathcal{R}(j,b)$. Τότε, εξ ορισμού της $\mathcal{R}$, πρέπει να υπάρχουν $i', j' \in D$ και $C_{i'}, C_{j'}$ τ.π. $i'Pj'$ και $(i,a) \in C_{i'}$ και $(j,b) \in C_{j'}$. Όμως τότε, εξ ορισμού των C_i, θα ισχύει $i' = i$ και $j' = j$, επομένως, iPj. Επιπλέον, εκ της κατασκευής της $\mathcal{R}$, κι επειδή η P είναι απλή, όλα τα C_i (με $i \in D$) είναι σύμπλοκα της δομής $\langle W, \mathcal{R}\rangle$. Παρατήρηση-κλειδί για να διαφανεί αυτό είναι ότι τα C_i είναι ξένα μεταξύ τους, αφού ουσιαστικά το W είναι η ξένη ένωση των αντίστοιχων συνόλων αποτιμήσεων. Έτσι, από όλα αυτά, και λόγω του Ορισμού 2.3.2, η P αποτελεί σχέση πρότυπο της $\mathcal{R}$ (με σύμπλοκα τα $C_0, \ldots, C_n$).

Τώρα, η απόδειξή μας μπορεί να συνεχιστεί ακριβώς με τα βήματα εκείνης του Θεωρήματος 2.3.4, παραλείποντας μόνο το βήμα (2) (αφού η P έχει ήδη οριστεί, είναι απλή αμκ-σχέση, και αποτελεί σχέση πρότυπο της $\mathcal{R}$), καθώς και την επίκληση στην Παρατήρηση 2.2.11. Απλώς, όπου εμφανίζεται μοντέλο $\mathfrak{M}$ στα βήματα αυτά, στην παρούσα απόδειξη εννοούμε εκείνο που ορίσαμε στην αρχή. Συμπεραίνουμε λοιπόν εν τέλει ότι η $\langle (Th_{\mathfrak{M}}(C_i)), (K_{\mathfrak{M}}(C_i)), (B_{\mathfrak{M}}(C_i))\rangle_{i\in D}^{P}$ είναι μια KB_P-δομή. ∎

Συνεχίζουμε λοιπόν με το ακόλουθο αποτέλεσμα περί «άγνοιας της άγνοιας».

Πόρισμα 2.3.6 *Υπάρχει KB_P-δομή $\langle(T_i),(\Gamma_i),(\Delta_i)\rangle_{i\in D}^P$ τ.π. κάποια θεωρία της Γ_i δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της «επίγνωσης της άγνοιας» στη μορφή ιδιότητας κλειστότητας, δηλ. υπάρχει τύπος φ τ.π. $\varphi \notin \Gamma_i$ καθώς και $\neg\mathsf{K}\varphi \notin \Gamma_i$.*

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε και πάλι την απλή αμκ-σχέση P του Παραδείγματος 2.1.3. Επιπλέον, έστω οι θεωρίες $S_0 = Cn_{\mathbf{PC}}(\{p_0\})$ και $S_1 = Cn_{\mathbf{PC}}(\varnothing)$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $S_0 = Cn_{\mathbf{PC}}(S_0)$ και $S_1 = Cn_{\mathbf{PC}}(S_1)$, δηλ. ότι πρόκειται για προτασιακώς κλειστές θεωρίες (αυτό έχει νόημα αφού οι θεωρίες S_0 και S_1 – η οποία είναι, παρεμπιπτόντως, το σύνολο όλων των ταυτολογιών – είναι τροπικώς ελεύθερες). Προφανώς, και οι δύο είναι ικανοποιήσιμες, άρα, απ' το Θεώρημα Ορθότητας του Προτασιακού Λογισμού, θα είναι και συνεπείς. Έτσι, απ' την Πρόταση 2.3.5, προκύπτει ότι υπάρχει KB_P-δομή $\langle(T_0,T_1),(\Gamma_0,\Gamma_1),(\Delta_0,\Delta_1)\rangle^P$ τ.π. $T_0\cap\mathcal{L} = S_0$ και $T_1\cap\mathcal{L} = S_1$. Έτσι, $p_0 \in T_0$ και $p_0 \notin T_1$ (διότι αλλιώς, αν $p_0 \in T_1$, θα ίσχυε και $p_0 \in S_1$, δηλ. η p_0 θα ήταν ταυτολογία, πράγμα άτοπο). Τότε όμως, επειδή $p_0 \notin T_1$, εξ ορισμού του $\Gamma_1 = T_1 \cap T_0$, έχουμε $p_0 \notin \Gamma_1$. Αλλά $p_0 \in T_0$, οπότε, λόγω $(\mathbf{p_0})$, $\mathsf{K}p_0 \in T_0$, κι απ' τη στιγμή που η T_0 είναι συνεπής (αφού δείξαμε ότι η παραπάνω δομή είναι μια KB_P-δομή), θα ισχύει $\neg\mathsf{K}p_0 \notin T_0$, άρα, $\neg\mathsf{K}p_0 \notin \Gamma_1$. Άρα, αποδείχθηκε το πόρισμα για τη θεωρία Γ_1 και τον τύπο p_0. ∎

Τελειώνοντας την παρούσα παράγραφο, θα αποδειχθεί το αντίστροφο του Θεωρήματος 2.3.4, δηλ. ότι για δοσμένη KB_P-δομή, υπάρχει επιστημικό $\mathbf{S4.2}$-μοντέλο, στο οποίο, ό,τι γνωρίζει ή πιστεύει ο αντιλήπτορας περιγράφεται απ' τη δοθείσα KB_P-δομή, κι επιπλέον, ό,τι πιστεύει εκείνος, περιγράφεται από μια θεωρία γνώσης της KB_P-δομής. Το μοντέλο, το οποίο θα αναζητήσουμε, θα είναι μια κατασκευή παρόμοια με τα γνωστά κανονιστικά μοντέλα μιας τροπικής λογικής (βλ. για παράδειγμα [3, §4.2]), και θα βασιστεί στην κανονική τροπική λογική $\mathbf{S4.2}$, την οποία και θα ονομάσουμε για ευκολία Λ. Ξεκινάμε με τον ορισμό του μοντέλου αυτού.

Ορισμός 2.3.7 *Έστω $\langle(T_i),(\Gamma_i),(\Delta_i)\rangle_{i\in D}^P$ μια KB_P-δομή.* Κανονιστικό μοντέλο για τη δομή *αυτή είναι το μοντέλο Kripke $\mathfrak{M}^c = \langle W^c, \mathcal{R}^c, V^c\rangle$, για το οποίο ισχύει*

i. $W^c = \bigcup_{i\in D} W_i^c$, *όπου* $(\forall i \in D)\ W_i^c = \{(i,\Theta) \in D\times\mathcal{P}(\mathcal{L}_{\mathsf{K}}) \mid \Theta : \mu\Gamma_i\sigma\Lambda\}$ [9]

ii. $$\big(\forall(i,\Theta),(j,\mathsf{z}) \in W^c\big)\big((i,\Theta)\mathcal{R}^c(j,\mathsf{z}) \iff (iPj \quad \& \quad (\forall\varphi\in\mathcal{L}_{\mathsf{K}})(\mathsf{K}\varphi\in\Theta \Rightarrow \varphi\in\mathsf{z}))\big)$$

iii. $(\forall p \in \Phi)(V^c(p) = \{(i,\Theta)\in W^c \mid p \in \Theta\})$

Τώρα, θα παρουσιαστούν κάποια λήμματα, τα οποία θα αποδειχθούν χρήσιμα στο κεντρικό μας θεώρημα. Για τα δύο πρώτα δεν θα δοθούν αποδείξεις, μια και αποτελούν προφανείς παραλλαγές γνωστών λημμάτων (βλ. για παράδειγμα [5, σελ.53] και [3, σελ.197] αντιστοίχως), και τα οποία μπορούν να αποδειχθούν για οποιαδήποτε τροπική λογική, δηλ. δεν ισχύουν ειδικά για την κανονική τροπική λογική $\Lambda = \mathbf{S4.2}$.

Λήμμα 2.3.8 *Έστω I μια $\sigma\Lambda$-θεωρία, Θ μια $\mu I\sigma\Lambda$-θεωρία, και φ,ψ τύποι της $\mathcal{L}_{\mathsf{K}}$. Τότε*

i. *Η Θ είναι κλειστή ως προς* $\mathbf{MP}$.

[9] Έστω Λ μια κανονική τροπική λογική, και I μια $\sigma\Lambda$-θεωρία (βλ. Υποσημείωση 6 στο Λήμμα 2.2.13). Τότε, η θεωρία T θα λέγεται *I-συνεπής με τη Λ* (συμβ. $I\sigma\Lambda$) ανν $(\forall n\in\mathbb{N})(\forall\varphi_0,\dots,\varphi_n\in T)\ I \nvdash_\Lambda \varphi_0\wedge\ldots\wedge\varphi_n \supset \bot$, ενώ μια θεωρία Θ θα λέγεται *μεγιστικώς I-συνεπής με τη Λ* (συμβ. $\mu I\sigma\Lambda$) ανν η Θ είναι μια $I\sigma\Lambda$-θεωρία και για κάθε ψ που δεν ανήκει στη Θ, η $\Theta\cup\{\psi\}$ δεν είναι $I\sigma\Lambda$-θεωρία.

ii. $\varphi \in \Theta \iff \neg\varphi \notin \Theta$.

iii. $I \vdash_\Lambda \varphi \iff (\forall \mathsf{Z} : \mu I\sigma\Lambda)\ \varphi \in \mathsf{Z}$

iv. $\varphi \wedge \psi \in \Theta \iff (\varphi \in \Theta$ *και* $\psi \in \Theta)$

Λήμμα 2.3.9 (Lindenbaum) *Έστω I μια $\sigma\Lambda$-θεωρία και T μια $I\sigma\Lambda$-θεωρία. Τότε, θα υπάρχει μια $\mu I\sigma\Lambda$-θεωρία Θ τ.π. $T \subseteq \Theta$.*

Σημείωση 2.3.10 *Κατ' αρχάς, ας παρατηρήσουμε ότι το W^c είναι η ξένη ένωση όλων των $\mu\Gamma_i\sigma\Lambda$-θεωριών με δείκτες στο D. Επιπλέον, λόγω του Λήμματος 2.2.13(ii), κάθε Γ_i (με $i \in D$) είναι μια $\sigma\Lambda$-θεωρία, έτσι, έχει νόημα να αναφερόμαστε σε $\mu\Gamma_i\sigma\Lambda$-θεωρίες. Επίσης, επειδή η Γ_i είναι $\sigma\Lambda$, εξ ορισμού, $\Gamma_i \nvdash_\Lambda \bot$, έτσι, $\{\top\}$ είναι μια $\Gamma_i\sigma\Lambda$-θεωρία, οπότε, απ' το Λήμμα του Lindenbaum (2.3.9), θα υπάρχει μια $\mu\Gamma_i\sigma\Lambda$-θεωρία (που θα περιέχει τον τύπο $\top$), επομένως, $W_i^c \neq \varnothing$ (με $i \in D$).*

Λήμμα 2.3.11 (Truth Lemma) $(\forall\varphi \in \mathcal{L}_\mathsf{K})(\forall(i,\Theta) \in W^c)(\mathfrak{M}^c,(i,\Theta) \Vdash \varphi \iff \varphi \in \Theta)$

Απόδειξη. Με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του φ. Η επαγωγική βάση προκύπτει αμέσως απ' τον Ορισμό 2.3.7(iii). Το πρώτο μέρος του επαγωγικού βήματος, που αφορά στην περίπτωση του τύπου $\varphi \supset \psi$, προκύπτει τετριμμένως από την επαγωγική υπόθεση, χρησιμοποιώντας τα (i), (ii), και (iv) του Λήμματος 2.3.8. Ας εστιάσουμε λοιπόν στο δεύτερο μέρος του επαγωγικού βήματος, στην περίπτωση του τύπου $\mathsf{K}\varphi$.

$\mathfrak{M}^c,(i,\Theta) \Vdash \mathsf{K}\varphi$ ανν $(\forall(j,\mathsf{Z}) \in W^c)((i,\Theta)\mathcal{R}^c(j,\mathsf{Z}) \Rightarrow \mathfrak{M}^c,(j,\mathsf{Z}) \Vdash \varphi)$ ανν (από Επαγ.Υπόθ.) $(\forall(j,\mathsf{Z}) \in W^c)((i,\Theta)\mathcal{R}^c(j,\mathsf{Z}) \Rightarrow \varphi \in \mathsf{Z})$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι $\mathsf{K}\varphi \in \Theta$.

($\Rightarrow$) Θα δείξουμε το αντιθετοανάστροφο. Έστω λοιπόν ότι $\mathsf{K}\varphi \notin \Theta$. Ας παρατηρήσουμε κατ' αρχάς, διότι θα μας χρειαστεί, ότι η Θ είναι μια $\mu\Gamma_i\sigma\Lambda$-θεωρία, αφού $(i,\Theta) \in W^c$. Ας ορίσουμε λοιπόν τώρα τις θεωρίες $\mathsf{H} = \{\psi \in \mathcal{L}_\mathsf{K} \mid \mathsf{K}\psi \in \Theta\}$ and $\mathsf{I} = \{\neg\varphi\} \cup \mathsf{H}$, κι ας υποθέσουμε, προς άτοπο, ότι η I δεν είναι $\Gamma_i\sigma\Lambda$, δηλ. ότι υπάρχουν $\psi_1,\ldots,\psi_n \in \mathsf{I}$ τ.π. $\Gamma_i \vdash_\Lambda \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \supset \bot$.

- Αν $n = 1$ και $\psi_1 = \neg\varphi$, δηλ. $\Gamma_i \vdash_\Lambda \varphi$, τότε, απ' τον κανόνα **RN**, $\Gamma_i \vdash_\Lambda \mathsf{K}\varphi$, κι έτσι, απ' τη στιγμή που η Θ είναι μια $\mu\Gamma_i\sigma\Lambda$-θεωρία, λόγω του Λήμματος 2.3.8(iii), $\mathsf{K}\varphi \in \Theta$, πράγμα που είναι άτοπο.

- Αν $\psi_1,\ldots,\psi_n \in \mathsf{H}$, τότε, αφού προφανώς $\bot \supset \varphi \in \mathbf{PC}$, θα έχουμε $\Gamma_i \vdash_\Lambda \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \supset \phi$.
  Αν $n > 1$ και $\psi_1,\ldots,\psi_{n-1} \in \mathsf{H}$ και $\psi_n = \neg\varphi$, τότε $\Gamma_i \vdash_\Lambda \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_{n-1} \supset \phi$.
  Δηλ. και στις δύο περιπτώσεις, θα υπήρχαν $\psi_1,\ldots,\psi_n \in \mathsf{H}$ με $n \geq 1$ τ.π. $\Gamma_i \vdash_\Lambda \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \supset \varphi$. Έτσι, απ' τον κανόνα **RN** και το αξίωμα **K** (μέσω μιας τετριμμένης επαγωγής), θα προέκυπτε ότι $\Gamma_i \vdash_\Lambda \mathsf{K}\psi_1 \wedge \ldots \wedge \mathsf{K}\psi_n \supset \mathsf{K}\varphi$, οπότε, απ' το Λήμμα 2.3.8(iii) (αφού η Θ είναι μια $\mu\Gamma_i\sigma\Lambda$-θεωρία), $\mathsf{K}\psi_1 \wedge \ldots \wedge \mathsf{K}\psi_n \supset \mathsf{K}\varphi \in \Theta$. Όμως, επειδή $\psi_1,\ldots,\psi_n \in \mathsf{H}$, εξ ορισμού της H, $\mathsf{K}\psi_1,\ldots,\mathsf{K}\psi_n \in \Theta$, κι έτσι, απ' το Λήμμα 2.3.8(iv) και (i), $\mathsf{K}\varphi \in \Theta$, πράγμα που είναι πάλι άτοπο.

Άρα, η I είναι $\Gamma_i\sigma\Lambda$-θεωρία, κι απ' το Λήμμα του Lindenbaum (2.3.9), θα υπάρχει μια $\mu\Gamma_i\sigma\Lambda$-θεωρία Z τ.π. $\mathsf{I} \subseteq \mathsf{Z}$, κι έτσι, $\neg\varphi \in \mathsf{Z}$, πράγμα που σημαίνει, απ' το Λήμμα 2.3.8(ii), ότι $\varphi \notin \mathsf{Z}$. Επιπροσθέτως, για τον τυχαίο τύπο ψ, αν $\mathsf{K}\psi \in \Theta$, τότε, εξ ορισμού του H, $\psi \in \mathsf{H}$, κι έτσι, $\psi \in \mathsf{I}$, άρα, $\psi \in \mathsf{Z}$. Κι απ' τη στιγμή δε, που η P είναι ανακλαστική, iPi, οπότε, απ' τον Ορισμό 2.3.7(ii), $(i,\Theta)\mathcal{R}^c(i,\mathsf{Z})$. Δηλ. βρήκαμε ένα $(i,\mathsf{Z}) \in W^c$, για το οποίο ισχύει $(i,\Theta)\mathcal{R}^c(i,\mathsf{Z})$ και $\varphi \notin \mathsf{Z}$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι $\mathsf{K}\varphi \in \Theta$, κι ας θεωρήσουμε ένα $(j, \mathsf{z}) \in W^c$ τ.π. $(i, \Theta)\mathcal{R}^c(j, \mathsf{z})$. Τότε, εκ του Ορισμού 2.3.7(ii), θα ισχύει $\varphi \in \mathsf{z}$. ∎

Λήμμα 2.3.12 *Έστω $\langle(T_i), (\Gamma_i), (\Delta_i)\rangle^P_{i\in D}$ μια KB_P-δομή, και $\mathfrak{M}^c$ το κανονιστικό της μοντέλο. Τότε $(\forall i \in D)(\forall \varphi \in \mathcal{L}_\mathsf{K})$*

$$\Gamma_i \vdash_\Lambda \varphi \iff (\forall (i, \Theta) \in W^c_i)\ \mathfrak{M}^c, (i, \Theta) \Vdash \mathsf{K}\varphi$$

Απόδειξη. Για το ευθύ, έστω ότι $\Gamma_i \vdash_\Lambda \varphi$. Τότε, απ' τον κανόνα **RN**, θα προκύψει ότι $\Gamma_i \vdash_\Lambda \mathsf{K}\varphi$, έτσι, λόγω του Λήμματος 2.3.8(iii), $(\forall \Theta : \mu\Gamma_i\sigma\Lambda)\ \mathsf{K}\varphi \in \Theta$, οπότε, απ' το Λήμμα 2.3.11, $(\forall (i, \Theta) \in W^c_i)\ \mathfrak{M}^c, (i, \Theta) \Vdash \mathsf{K}\varphi$.

Για το αντίστροφο, έστω ότι $\Gamma_i \nvdash_\Lambda \varphi$, κι ας υποθέσουμε, προς άτοπο, ότι η $\{\neg\mathsf{K}\varphi\}$ δεν ήταν $\Gamma_i\sigma\Lambda$-θεωρία. Τότε, $\Gamma_i \vdash_\Lambda \mathsf{K}\varphi$, κι έτσι, αφού $\mathbf{T} \in \Lambda$, $\Gamma_i \vdash_\Lambda \varphi$, πράγμα που είναι άτοπο. Επομένως, η $\{\neg\mathsf{K}\varphi\}$ είναι $\Gamma_i\sigma\Lambda$-θεωρία, οπότε, απ' το Λήμμα του Lindenbaum (2.3.9), θα υπάρχει μια $\mu\Gamma_i\sigma\Lambda$-θεωρία Θ (δηλ. ένα ζεύγος $(i, \Theta) \in W^c_i$) τ.π. $\neg\mathsf{K}\varphi \in \Theta$, κι έτσι, απ' το Λήμμα 2.3.11, θα προκύψει ότι $\mathfrak{M}^c, (i, \Theta) \nVdash \mathsf{K}\varphi$. ∎

Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα αντιστοιχίας για τις KB_P-δομές, το αντίστροφο του Θεωρήματος 2.3.4.

Θεώρημα 2.3.13 *Έστω $\langle(T_i), (\Gamma_i), (\Delta_i)\rangle^P_{i\in D}$ μια KB_P-δομή. Τότε, θα υπάρχει ένα* **S4.2**-*μοντέλο $\mathfrak{M} = \langle W, \mathcal{R}, V\rangle$ και $C_i \subseteq W$ τ.π. $(\forall i \in D)$*

$$\Gamma_i = K_\mathfrak{M}(C_i) \qquad \Delta_i = B_\mathfrak{M}(C_i) = \Gamma_0$$

Απόδειξη. Έστω το κανονιστικό μοντέλο $\mathfrak{M}^c$ για την KB_P-δομή $\langle(T_i), (\Gamma_i), (\Delta_i)\rangle^P_{i\in D}$, κι ας θέσουμε $C_i =_{\text{ορ.}} W^c_i$. Κατ' αρχάς, θα πιστοποιήσουμε ότι το $\mathfrak{M}^c$ είναι ένα **S4.2**-μοντέλο.

Για την ανακλαστικότητα, ας θεωρήσουμε κάποιο $i \in D$, ένα τυχαίο $(i, \Theta) \in W^c_i$, καθώς και κάποιο $\varphi \in \mathcal{L}_\mathsf{K}$ τ.π. $\mathsf{K}\varphi \in \Theta$. Τότε, επειδή $\Gamma_i \vdash_\Lambda \mathbf{T}$, κι αφού η Θ είναι μια $\mu\Gamma_i\sigma\Lambda$-θεωρία, απ' το Λήμμα 2.3.8(iii), έπεται ότι $\mathbf{T} \in \Theta$, κι έτσι, λόγω του Λήμματος 2.3.8(i), $\varphi \in \Theta$. Επιπλέον, αφού η P είναι ανακλαστική, iPi, άρα, εκ του Ορισμού 2.3.7(ii), $(i, \Theta)\mathcal{R}^c(i, \Theta)$.

Για τη μεταβατικότητα, έστω κάποια $(i, \Theta) \in W^c_i$, $(j, \mathsf{z}) \in W^c_j$, και $(k, \mathsf{H}) \in W^c_k$ τ.π. $(i, \Theta)\mathcal{R}^c(j, \mathsf{z})$ και $(j, \mathsf{z})\mathcal{R}^c(k, \mathsf{H})$. Επιπλέον, ας θεωρήσουμε ένα $\varphi \in \mathcal{L}_\mathsf{K}$ τ.π. $\mathsf{K}\varphi \in \Theta$. Τότε, επειδή $\Gamma_i \vdash_\Lambda \mathbf{4}$, κι αφού η Θ είναι μια $\mu\Gamma_i\sigma\Lambda$-θεωρία, απ' το Λήμμα 2.3.8(iii), προκύπτει ότι $\mathbf{4} \in \Theta$, οπότε, λόγω του Λήμματος 2.3.8(i), $\mathsf{KK}\varphi \in \Theta$, επομένως, αφού $(i, \Theta)\mathcal{R}^c(j, \mathsf{z})$, $\mathsf{K}\varphi \in \mathsf{z}$, κι επειδή $(j, \mathsf{z})\mathcal{R}^c(k, \mathsf{H})$, $\varphi \in \mathsf{H}$. Επιπροσθέτως, απ' τη στιγμή που η P είναι μεταβατική, και αφού ισχύει iPj (επειδή $(i, \Theta)\mathcal{R}^c(j, \mathsf{z})$) και jPk (επειδή $(j, \mathsf{z})\mathcal{R}^c(k, \mathsf{H})$), θα έχουμε iPk. Έπεται λοιπόν, απ' τον Ορισμό 2.3.7(ii), ότι $(i, \Theta)\mathcal{R}^c(k, \mathsf{H})$.

Για την κατευθυνσιμότητα, θα αποδείξουμε αρχικώς ότι

$$(\forall i \in D)(\forall (i, \Theta) \in W^c_i)(\forall (0, \mathsf{H}) \in W^c_0)\ (i, \Theta)\mathcal{R}^c(0, \mathsf{H}) \qquad (*)$$

Έστω τυχαίο $\varphi \in \mathcal{L}_\mathsf{K}$ τ.π. $\mathsf{K}\varphi \in \Theta$. Ας υποθέσουμε, προς άτοπο, ότι $\neg\mathsf{K}\varphi \in \Gamma_i$. Τότε, $\Gamma_i \vdash_\Lambda \neg\mathsf{K}\varphi$, έτσι, αφού η Θ είναι μια $\mu\Gamma_i\sigma\Lambda$-θεωρία, απ' το Λήμμα 2.3.8(iii), θα προέκυπτε ότι $\neg\mathsf{K}\varphi \in \Theta$, δηλ. η Θ θα ήταν ασυνεπής, οπότε, δεν θα ήταν $\Gamma_i\sigma\Lambda$, πράγμα άτοπο. Άρα, $\neg\mathsf{K}\varphi \notin \Gamma_i$, δηλ. εξ ορισμού του Γ_i, θα υπάρχει ένα $k \in D$ τ.π. iPk και $\neg\mathsf{K}\varphi \notin T_k$. Όμως τότε, από Παρατήρηση 2.1.4 και ιδιότητα $(\mathbf{nk_i})$, $\varphi \in \Gamma_k$. Επιπλέον, απ'το Λήμμα 2.2.9, έχουμε ότι $kP0$, κι έτσι, λόγω του Λήμματος 2.2.7, $\Gamma_k \subseteq \Gamma_0$, άρα, $\varphi \in \Gamma_0$, οπότε, $\Gamma_0 \vdash_\Lambda \varphi$, κι απ'τη στιγμή που η H

είναι μια $\mu\Gamma_0\sigma\Lambda$-θεωρία, απ' το Λήμμα 2.3.8(iii), $\varphi \in \mathsf{H}$. Αποδείχθηκε δηλ. ότι, αν $\mathsf{K}\varphi \in \Theta$, τότε $\varphi \in \mathsf{H}$. Επιπροσθέτως όμως, και πάλι απ' το Λήμμα 2.2.9, $iP0$, άρα, εκ του Ορισμού 2.3.7(ii), προκύπτει ότι $(i,\Theta)\mathcal{R}^c(0,\mathsf{H})$. Επομένως, αποδείχθηκε η $(*)$.

Έστω τώρα κάποια τυχαία $(i,\Theta) \in W_i^c$ και $(j,\mathsf{Z}) \in W_j^c$. Όμως, λόγω της Παρατήρησης 2.3.10, θα υπάρχει $(0,\mathsf{H}) \in W_0^c$, και θα ισχύει, από $(*)$, $(i,\Theta)\mathcal{R}^c(0,\mathsf{H})$ και $(j,\mathsf{Z})\mathcal{R}^c(0,\mathsf{H})$, πράγμα που σημαίνει ότι το $\mathfrak{M}^c$ είναι κατευθυνόμενο.

Ας έρθουμε τώρα στις θεωρίες της γνώσης $K_{\mathfrak{M}^c}$. Απ' το Λήμμα 2.2.13(i), προκύπτει ότι $\varphi \in \Gamma_i$ ανν $\Gamma_i \vdash_\Lambda \varphi$. Επιπλέον, $\Gamma_i \vdash_\Lambda \varphi$ ανν (απ' το Λήμμα 2.3.12) $(\forall (i,\Theta) \in C_i)\ \mathfrak{M}^c,(i,\Theta) \Vdash \mathsf{K}\varphi$ ανν (απ' τον Ορισμό 2.3.1) $\varphi \in K_{\mathfrak{M}^c}(C_i)$. Έτσι $(\forall i \in D)$

$$\Gamma_i = K_{\mathfrak{M}^c}(C_i) \qquad (**)$$

Τέλος, ας επικεντρωθούμε στις θεωρίες πεποίθησης $B_{\mathfrak{M}^c}$. Λόγω της Παρατήρησης 2.2.11(i), ισχύει για όλα τα $i \in D$, $\Delta_i = \Gamma_0$. Άρα, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(\forall i \in D)\ B_{\mathfrak{M}^c}(C_i) = \Gamma_0$.

Έστω λοιπόν κάποια $i \in D$ και $\varphi \in B_{\mathfrak{M}^c}(C_i)$. Τότε, για το τυχαίο $(i,\Theta) \in W_i^c = C_i$ θα ισχύει, $\mathfrak{M}^c,(i,\Theta) \Vdash \neg\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi$, δηλ. θα υπάρχει κάποιο $(j,\mathsf{Z}) \in W_j^c$ τ.π. $(i,\Theta)\mathcal{R}^c(j,\mathsf{Z})$ και $\mathfrak{M}^c,(j,\mathsf{Z}) \Vdash \mathsf{K}\varphi$. Τώρα, έστω κάποια $(0,\mathsf{H}) \in W_0^c$ και $(k,\mathsf{H}') \in W_k^c$ τ.π. $(0,\mathsf{H})\mathcal{R}^c(k,\mathsf{H}')$, δηλ. εκ του Ορισμού 2.3.7(ii), $0Pk$, κι έτσι, απ' το Λήμμα 2.2.9, $k = 0$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $(k,\mathsf{H}') = (0,\mathsf{H}') \in W_0^c$. Όμως τότε, από $(*)$, $(j,\mathsf{Z})\mathcal{R}^c(0,\mathsf{H}')$. Έτσι, κι απ' τη στιγμή που $\mathfrak{M}^c,(j,\mathsf{Z}) \Vdash \mathsf{K}\varphi$, θα ισχύει ότι $\mathfrak{M}^c,(k,\mathsf{H}') \Vdash \varphi$, οπότε, $\mathfrak{M}^c,(0,\mathsf{H}) \Vdash \mathsf{K}\varphi$, επομένως, $(\forall (0,\mathsf{H}) \in W_0^c)\ \mathfrak{M}^c,(0,\mathsf{H}) \Vdash \mathsf{K}\varphi$, πράγμα που σημαίνει, εκ του Ορισμού 2.3.1, ότι $\varphi \in K_{\mathfrak{M}^c}(W_0^c)$, δηλ. από $(**)$, $\varphi \in \Gamma_0$.

Αντιστρόφως, έστω κάποιο $\varphi \in \Gamma_0$, δηλ. και πάλι από $(**)$, $\varphi \in K_{\mathfrak{M}^c}(W_0^c)$. Ας θεωρήσουμε επίσης τυχαίο $(i,\Theta) \in W_i^c = C_i$, και κάποιο $(0,\mathsf{H}) \in W_0^c$ (υπάρχει τέτοιο, μια και, λόγω της Παρατήρησης 2.3.10, $W_0^c \neq \varnothing$). Τότε, από $(*)$, θα ισχύει $(i,\Theta)\mathcal{R}^c(0,\mathsf{H})$. Έτσι, απ' τη στιγμή που $\varphi \in K_{\mathfrak{M}^c}(W_0^c)$, εκ του Ορισμού 2.3.1, θα ισχύει $\mathfrak{M}^c,(0,\mathsf{H}) \Vdash \mathsf{K}\varphi$, άρα, $\mathfrak{M}^c,(i,\Theta) \Vdash \neg\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi$, δηλ. και πάλι απ' τον Ορισμό 2.3.1, $\varphi \in B_{\mathfrak{M}^c}(C_i)$. ∎

2.4 Ένα παράδειγμα

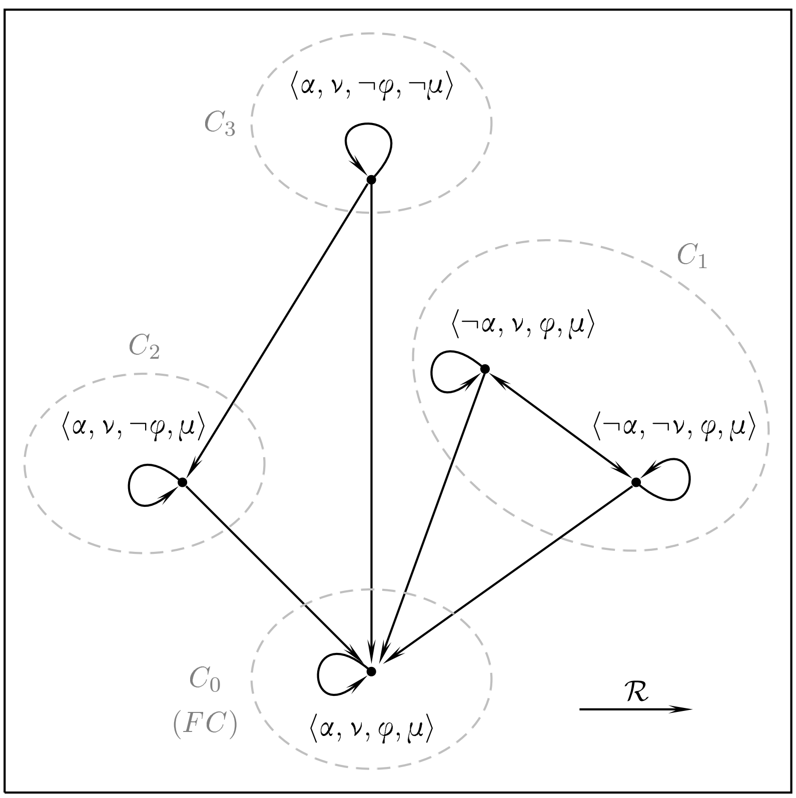
Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα επιστημικού μοντέλου, τη μορφή της αντίστοιχης KB_P-δομής, καθώς και τι ακριβώς αυτή περιγράφει.

Έστω λοιπόν ένα σχολικό τμήμα, στο οποίο η υπεύθυνη καθηγήτρια λέει στους μαθητές πώς τα έχουν πάει στα μαθήματα, για να πάρουν μια ιδέα για τα τελικά αποτελέσματα που πρόκειται να βγουν τις επόμενες μέρες. Ας θεωρήσουμε ότι έχει και τους δίνει πληροφορία για τέσσερα μαθήματα· τα αρχαία Ελληνικά, τα νέα Ελληνικά, τη φυσική, και τα μαθηματικά. Τους λέει κατ' αρχάς (1) ότι ευτυχώς δεν υπάρχει κάποιος που να έμεινε και στα αρχαία, και στη φυσική (στα οποία οι καθηγητές είναι ιδιαιτέρως αυστηροί), (2) ότι όποιος πέρασε τη φυσική ήταν καλός και στα μαθηματικά, κι έτσι πέρασε κι αυτά, και (3) ότι για τον ίδιο λόγο, όποιος πέρασε τα αρχαία, πέρασε και τα νέα Ελληνικά.

Με βάση την πληροφορία αυτή, μπορεί να κατασκευαστεί ένα επιστημικό μοντέλο. Σ' αυτό, έστω ότι οι προτασιακές μεταβλητές που μας ενδιαφέρουν είναι οι α, ν, φ, και μ που εμπεριέχουν την πληροφορία, αν ο μαθητής-αντιλήπτορας πέρασε το αντίστοιχο μάθημα ή όχι. Τα δεδομένα (1) έως (3) αποκλείουν κάποιους συνδυασμούς αληθοτιμών των μεταβλητών αυτών, κι έτσι το επιστημικό μας μοντέλο θα αποτελείται μόνο από πέντε κόσμους, και όχι από δεκαέξι. Επειδή δε, δεν υπάρχει σιγουριά σε κανέναν απ' τους μαθητές για το πώς τα έχει πάει (με βάση τα δεδομένα αυτά), το μοντέλο θα είναι τετριμμένο, αποτελούμενο από ένα μόνο σύμπλοκο, όπου όλοι οι κόσμοι συνδέονται με όλους, αφού, όπου κι αν βρίσκεται ο αντιλήπτορας, όλοι οι υπόλοιποι κόσμοι είναι πιθανοί, δεν είναι δηλ. διαφοροποιήσιμοι από την (άγνωστη σ' αυτόν) θέση που βρίσκεται.

Για να γίνει λοιπόν το παράδειγμα λίγο πιο ενδιαφέρον, ας θεωρήσουμε ότι η καθηγήτρια δίνει στους μαθητές μια επιπλέον πληροφορία. Τους ανακοινώνει ποια μαθήματα πέρασε ο καθένας, λέγοντάς τους όμως, για να μην τους αποκαρδιώσει ευθύς αμέσως, ότι για τα υπόλοιπα δεν είναι σίγουρη. Φυσικά, χωρίς να το γνωρίζουν οι μαθητές, όσα μαθήματα δεν ανέφερε στον καθέναν τους, σ' αυτά ακριβώς έμεινε. Επειδή όμως θεωρεί σημαντικό μάθημα τα αρχαία, αν κάποιος έμεινε σ' αυτό, δεν ανέφερε καθόλου η καθηγήτρια αν πέρασε ο μαθητής στο άλλο φιλολογικό μάθημα, τα νέα, ακόμα κι αν το πέρασε. Επειδή ως τώρα αναφέραμε μόνον έναν αντιλήπτορα, ενώ στο παράδειγμα αυτό φαίνεται να υπάρχουν πολλοί μαθητές-αντιλήπτορες, ας ξεκαθαρίσουμε ότι πρόκειται για έναν αντιλήπτορα, αφού δεν υπάρχει «επικοινωνία» μεταξύ τους. Ο καθένας σκέφτεται για τον εαυτό του, μην εμπλέκοντας τον άλλον. Για να γίνει αυτό πιο ξεκάθαρο, θα μπορούσαμε να φανταστούμε ότι υπάρχει ένας μόνο μαθητής, και το μοντέλο περιγράφει τις διαφορετικές περιπτώσεις που μπορεί να ισχύουν γι' αυτόν.

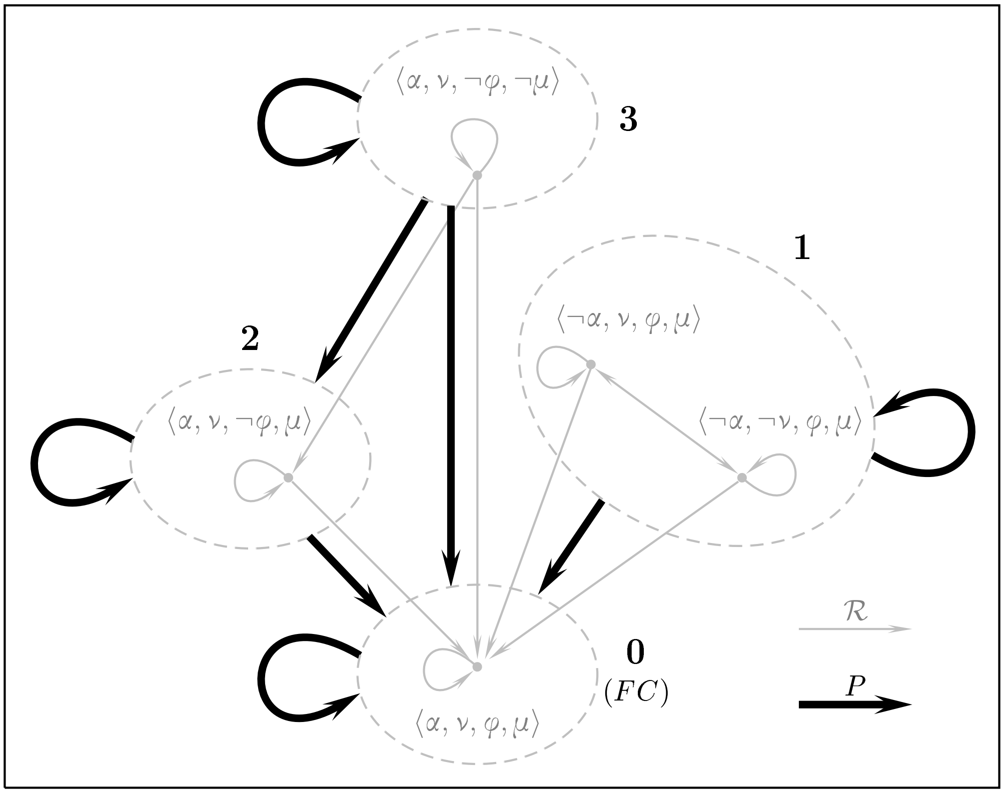
Έτσι, το επιστημικό μοντέλο αφορά σε έναν μόνο αντιλήπτορα, και μετά την επιπλέον πληροφορία αποκτά πια τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 2.1. Πρόκειται για ένα κλασικό **S4.2**-μοντέλο με σύμπλοκα, τα σύνολα C_0 έως C_3, όπου C_0 είναι το τελικό σύμπλοκο.



Σχήμα 2.1: Ένα «σχολικό» επιστημικό μοντέλο.

Πώς μπορούμε λοιπόν τώρα να περιγράψουμε τα σύνολα των τύπων που γνωρίζει ή πιστεύει ο μαθητής-αντιλήπτορας σε κάθε περίπτωση; Με βάση ό,τι ειπώθηκε στις προηγούμενες παραγράφους, αν οι θεωρίες T_i, Γ_i, Δ_i (με $i \in D = \{0, \ldots, 3\}$) αποτελούν τα σύνολα των τύπων, οι οποίοι ισχύουν, ή τους οποίους γνωρίζει, ή στους οποίους πιστεύει ο αντιλήπτορας, αντιστοίχως, τότε οι θεωρίες αυτές πρέπει να ικανοποιούν κάποιες ιδιότητες. Για να περιγραφούν αυτές, πρέπει να εξαγάγουμε από το επιστημικό μοντέλο, τη σχέση πρότυπό του P, κι απ' αυτή να «κατασκευάσουμε» τις ιδιότητες.

Η σχέση πρότυπο P είναι εκείνη που διασυνδέει τα σύμπλοκα, σε ένα σύνολο με στοιχεία τους δείκτες των συμπλόκων, δηλ. στο $D = \{0, \ldots, 3\}$, όπως ακριβώς φαίνεται στο Σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2: Η σχέση πρότυπο P της $\mathcal{R}$ του «σχολικού» μοντέλου.

Το Θεώρημα 2.3.4 μας διαβεβαιώνει ότι, έχοντας την P, όλες οι παραπάνω θεωρίες περιγράφονται από την KB_P-δομή $\langle (T_i), (\Gamma_i), (\Delta_i) \rangle^P_{i \in D}$, δηλ. με βάση τον Ορισμό 2.1.1, οι θεωρίες αυτές θα ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες κλειστότητας $(\forall \varphi \in \mathcal{L}_{\mathsf{K}})$

$(\mathbf{pc_{0,1,2,3}})$ $\mathbf{PC}_{\mathcal{L}_{\mathsf{K}}} \subseteq T_0, T_1, T_2, T_3$ και οι T_0, T_1, T_2, T_3 είναι κλειστές ως προς $\mathbf{MP}$.

$(\mathbf{p_0})$ $\varphi \in T_0 \Rightarrow \mathsf{K}\varphi \in T_0$

$(\mathbf{n_0})$ $\varphi \notin T_0 \Rightarrow \neg\mathsf{K}\varphi \in T_0 \ \& \ \neg\mathsf{K}\varphi \in T_1 \ \& \ \neg\mathsf{K}\varphi \in T_2 \ \& \ \neg\mathsf{K}\varphi \in T_3$

$(\mathbf{p_1})$ $\varphi \in T_0 \ \& \ \varphi \in T_1 \Rightarrow \mathsf{K}\varphi \in T_1$

$(\mathbf{n_1})$ $\varphi \notin T_1 \Rightarrow \neg\mathsf{K}\varphi \in T_1$

$(\mathbf{p_2})$ $\varphi \in T_0 \ \& \ \varphi \in T_2 \Rightarrow \mathsf{K}\varphi \in T_2$

$(\mathbf{n_2})$ $\varphi \notin T_2 \Rightarrow \neg\mathsf{K}\varphi \in T_2 \ \& \ \neg\mathsf{K}\varphi \in T_3$

$(\mathbf{p_3})$ $\varphi \in T_0 \ \& \ \varphi \in T_2 \ \& \ \varphi \in T_3 \Rightarrow \mathsf{K}\varphi \in T_3$

$(\mathbf{n_3})$ $\varphi \notin T_3 \Rightarrow \neg\mathsf{K}\varphi \in T_3$

Όσον αφορά στις θεωρίες γνώσης, θα ισχύει $\mathsf{\Gamma}_0 = T_0$, $\mathsf{\Gamma}_1 = T_0 \cap T_1$, $\mathsf{\Gamma}_2 = T_0 \cap T_2$, και $\mathsf{\Gamma}_3 = T_0 \cap T_2 \cap T_3$.

Ας δούμε τώρα συγκεκριμένα παραδείγματα τύπων που γνωρίζουν ή πιστεύουν οι μαθητές

(α) με βάση ό,τι είπε η καθηγήτρια και επιχειρηματολογώντας σύμφωνα με τον κοινό νου, βρισκόμενοι στη θέση του μαθητή-αντιλήπτορα που δεν γνωρίζει σε ποιο ακριβώς σημείο του επιστημικού μοντέλου βρίσκεται (εκτός κι αν είναι στο τελικό σύμπλοκο C_0, όπου γνωρίζει όλη τη – σχετιζόμενη με το πρόβλημα – αλήθεια, κι έτσι ξέρει πού βρίσκεται), και

(β) εφαρμόζοντας απλώς τις παραπάνω ιδιότητες κλειστότητας της συγκεκριμένης KB_P-δομής, βρισκόμενοι στη θέση της καθηγήτριας που εποπτεύει όλο το επιστημικό μοντέλο.

- (α) Κατ' αρχάς, οι μαθητές γνωρίζουν ό,τι τους είπε η καθηγήτριά τους· δηλ. εκείνοι του συμπλόκου C_3 ότι πέρασαν αρχαία και νέα, εκείνοι του C_2 ότι πέρασαν επιπλέον και μαθηματικά, εκείνοι του C_1 ότι πέρασαν φυσική και μαθηματικά, κι εκείνοι του C_0 ότι πέρασαν σε όλα.

  (β) Αυτό φαίνεται αμέσως από το επιστημικό μοντέλο μας κι απ' τον ορισμό των $\mathsf{\Gamma}_i$ της KB_P-δομής, αφού ισχύει

$$\begin{array}{rcllll} \alpha\wedge\nu & \in & T_3, & T_2, & & T_0,\ \mathsf{\Gamma}_3 \\ \alpha\wedge\nu\wedge\mu & \in & & T_2, & & T_0,\ \mathsf{\Gamma}_2 \\ \varphi\wedge\mu & \in & & & T_1, & T_0,\ \mathsf{\Gamma}_1 \\ \alpha\wedge\nu\wedge\varphi\wedge\mu & \in & & & & T_0,\ \mathsf{\Gamma}_0 \end{array}$$

- (α) Κάθε μαθητής που δεν έχει πληροφορηθεί για το αν πέρασε κάποιο συγκεκριμένο μάθημα, θεωρεί πιθανό να τον ενημέρωνε η καθηγήτριά του ότι το έχει περάσει (οπότε και να το ήξερε), αφού δεν υπάρχει κανένας λόγος να θεωρεί αυτό απίθανο. Έτσι, με βάση τον ορισμό της πεποίθησης, ότι πιστεύω κάτι σημαίνει ότι μπορούσα και να το γνώριζα (βλ. αξίωμα **DB** στον Ορισμό 1.1.2), κάθε μαθητής πιστεύει ότι πέρασε κάθε μάθημα.

  (β) Αυτό προκύπτει αμέσως από την Παρατήρηση 2.2.11(i) που μας διαβεβαιώνει ότι $\Delta_0 = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \mathsf{\Gamma}_0$.

  Θα μπορούσε όμως κάποιος να αναρωτηθεί, αν ισχύει το ίδιο και για την αποτυχία, δηλ. αν κάθε μαθητής πιστεύει ότι δεν πέρασε κάποιο μάθημα, για το οποίο δεν ενημερώθηκε. Αν ίσχυε αυτό, και πάλι με βάση τον ορισμό της πεποίθησης, θα έπρεπε ο μαθητής να θεωρούσε πιθανό να τον ενημέρωνε η καθηγήτριά του ότι δεν το έχει περάσει. Αυτό όμως δεν ισχύει, αφού η καθηγήτρια ενημερώνει τους μαθητές για το ποια μαθήματα πέρασαν, και όχι για εκείνα, στα οποία έμειναν (πράγμα το οποίο γνωρίζουν οι μαθητές).

- (α) Ας θεωρήσουμε την περίπτωση του συμπλόκου C_3 όπου ο μαθητής-αντιλήπτορας έχει πληροφορηθεί ότι πέρασε αρχαία και νέα (ενώ έχει άγνοια για τα υπόλοιπα μαθήματα). Προφανώς δεν είναι σίγουρος ότι τα υπόλοιπα δύο δεν τα πέρασε, δηλ. για παράδειγμα $\neg\varphi \notin \mathsf{\Gamma}_3$. Κι αφού, όπως είπαμε προηγουμένως, η καθηγήτρια τους ενημέρωσε για τα μαθήματα που πέρασαν, και όχι για εκείνα, στα οποία έμειναν, σε όποια άλλη κατάσταση κι αν βρισκόταν ο μαθητής αυτός (δηλ. στη C_2 όπου θα ενημερωνόταν ότι έχει περάσει και τα μαθηματικά, ή στη C_0 όπου θα ενημερωνόταν ότι τα έχει περάσει όλα), δεν θα ήταν ποτέ σίγουρος ότι έμεινε στη φυσική. Δηλ. σε όλες αυτές τις καταστάσεις θα ίσχυε $\neg\mathsf{K}\neg\varphi$. Όμως, αν ανακαλέσουμε τον «ορισμό της γνώσης» σε επίπεδο μοντέλων, ότι δηλ. γνωρίζω κάτι σημαίνει ότι σε όλους τους πιθανούς για μένα κόσμους ισχύει αυτό (βλ. σχέση $(*)$ στη σελ. 6), τότε στην περίπτωση του C_3 ο μαθητής γνωρίζει ότι δεν είναι σίγουρος ότι έμεινε στη φυσική, ή γραμμένο αλλιώς $\neg\mathsf{K}\neg\varphi \in \mathsf{\Gamma}_3$.

(β) Αυτό πιστοποιείται (σχεδόν με αυτοματοποιημένο τρόπο) κι απ' τις προαναφερθείσες ιδιότητες της KB_P-δομής, αφού $\neg\varphi \notin T_0$, κι έτσι, αφού $(3,0) \in P$, απ' τον ορισμό του Γ_3 θα έχουμε ότι $\neg\varphi \notin \Gamma_3$. Επίσης, επειδή $(3,0),(2,0),(0,0) \in P$, το ότι $\neg\varphi \notin T_0$, μας δίνει, λόγω $(\mathbf{n_0})$, $\neg\mathsf{K}\neg\varphi \in T_0 \cap T_2 \cap T_3$, δηλ. εξ ορισμού του Γ_3, $\neg\mathsf{K}\neg\varphi \in \Gamma_3$.

Δικαιολογήσαμε (με δύο τρόπους) ότι $\neg\varphi \notin \Gamma_3$, ενώ $\neg\mathsf{K}\neg\varphi \in \Gamma_3$. Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση αυτή, ο αντιλήπτορας δεν γνωρίζει κάτι, αλλά έχει επίγνωση της άγνοιάς του για αυτό ('negative introspection').

- (α) Ας θεωρήσουμε και πάλι την περίπτωση C_3. Σ' αυτήν, επειδή ο μαθητής δεν ενημερώθηκε ότι πέρασε τη φυσική, προφανώς δεν είναι σίγουρος ότι την πέρασε, άρα $\varphi \notin \Gamma_3$. Ας υποθέσουμε τώρα, προς άτοπο, ότι ο μαθητής γνώριζε ότι δεν είναι σίγουρος ότι πέρασε τη φυσική. Με βάση και πάλι τον «ορισμό της γνώσης» σε επίπεδο μοντέλων που επικαλεστήκαμε προηγουμένως, θα έπρεπε σε κάθε κόσμο που θεωρεί ο μαθητής πιθανό, να μην ήταν σίγουρος ότι πέρασε τη φυσική. Όμως, ο κόσμος–περίπτωση που ο μαθητής έχει ενημερωθεί ότι την πέρασε (που σύμφωνα με το μοντέλο μας είναι η περίπτωση του τελικού συμπλόκου C_0) είναι πιθανός κόσμος για το μαθητή του C_3, και μάλιστα σ' αυτόν, προφανώς θα γνώριζε ότι πέρασε τη φυσική, αφού ενημερώθηκε γι' αυτό. Έτσι, καταλήξαμε σε άτοπο. Αυτό όμως σημαίνει ότι ο μαθητής τελικά, δεν γνώριζε ότι δεν είναι σίγουρος ότι πέρασε τη φυσική, ή γραμμένο αλλιώς $\neg\mathsf{K}\varphi \notin \Gamma_3$.

  (β) Στο επιστημικό μοντέλο βλέπει αμέσως η καθηγήτρια ότι $\neg\varphi \in T_3$, κι επειδή οι θεωρία T_3 είναι συνεπής, $\varphi \notin T_3$, επομένως, αφού $(3,3) \in P$, $\varphi \notin \Gamma_3$. Επίσης, $\varphi \in T_0$, κι έτσι, από $(\mathbf{p_0})$, $\mathsf{K}\varphi \in T_0$, οπότε, λόγω της συνέπειας του T_0, $\neg\mathsf{K}\varphi \notin T_0$, κι αφού $(3,0) \in P$, $\neg\mathsf{K}\varphi \notin \Gamma_3$.

  Φάνηκε δηλ. (και πάλι με δύο τρόπους) ότι $\varphi \notin \Gamma_3$ και $\neg\mathsf{K}\varphi \notin \Gamma_3$, που σημαίνει ότι στην περίπτωση αυτή, ο μαθητής-αντιλήπτορας δεν γνωρίζει κάτι, ούτε έχει όμως επίγνωση αυτής της άγνοιάς του ('failure of negative introspection').

„Es ist nicht der Kampf der Meinungen, welcher die Geschichte so gewalttätig gemacht hat, sondern der Kampf des Glaubens an die Meinungen, das heißt der Überzeugungen."
(Δεν είναι η μάχη των απόψεων που έκανε την Ιστορία τόσο βίαιη, αλλά η μάχη της πίστης στις απόψεις, δηλ. των πεποιθήσεων.)

Friedrich Nietzsche

3 Εισάγοντας εκτίμηση

Όπως είδαμε στην Παράγραφο 1.1, η διτροπική λογική $\mathbf{S4} + \mathbf{KD45_B} + \mathbf{B1} + \mathbf{B2.3} + \mathbf{B2.4}$ που περιέχει όποιο αξίωμα θεωρούμε ότι είναι αναγκαίο για να περιγραφούν γνώσεις (μέσω του τελεστή K) και πεποιθήσεις (μέσω του τελεστή B), ταυτίζεται κατ' αρχάς, από Πρόταση 1.1.3, με την $\mathbf{S4.2_{KB}} = \mathbf{S4.2} + \mathbf{DB}$, γι' αυτό και ο Lenzen χαρακτήρισε την $\mathbf{S4.2}$ ως «Τη λογική της γνώσης». Επίσης είδαμε, στην ίδια Πρόταση, ότι ταυτίζεται και με τη λογική $\mathbf{S4} + \mathbf{CB} + \mathbf{KB} + \mathbf{SB} + \mathbf{PIB} + \mathbf{NIB}$ του Stalnaker. Έτσι, το γεγονός ότι το αξίωμα $\mathbf{SB}$. $\mathsf{B}\varphi \supset \mathsf{BK}\varphi$ ανήκει στην $\mathbf{S4.2_{KB}}$, μας αναγκάζει να αναγνωρίσουμε ότι η έννοια της πεποίθησης, όπως αυτή είναι ενσωματωμένη στην $\mathbf{S4.2_{KB}}$, είναι αρκετά ισχυρή· γι' αυτό άλλωστε ονόμασε ο Stalnaker το αξίωμα αυτό 'strong belief'.

Μπορεί μεν μια τέτοια έννοια πεποίθησης να είναι εύλογη σε πολλά παραδείγματα όπου η διαίσθησή μας περί πίστης μάς υποδεικνύει την αποδοχή μιας ισχυρής εκδοχής της (όταν για παράδειγμα λέει ένας φιλόθρησκος χριστιανός ότι πιστεύει στη ζωή μετά το θάνατο – χωρίς βεβαίως να το ξέρει, ή όταν λέει ένας φανατικός οπαδός του Παναθηναϊκού ότι πιστεύει ότι θα πάρει η ομάδα του το πρωτάθλημα – χωρίς βεβαίως να το γνωρίζει ούτε αυτός), όμως σε άλλα παραδείγματα, φαντάζει ίσως πιο χρήσιμη μια «πεποίθηση» με «μικρότερο βαθμό βεβαιότητας». Ας φανταστούμε κάποιο μαθητή που έγραψε μόλις ένα διαγώνισμα, κι οποίος απάντησε σε πέντε από τα δέκα ερωτήματα. Είναι σχεδόν βέβαιος ότι απάντησε σωστά σε αυτά. Δικαιούται όμως να πιστεύει ότι πέρασε το μάθημα; Και εννοούμε το «πιστεύει» με την ισχυρή του έννοια α λα Stalnaker. Μάλλον όχι, γιατί λόγω $\mathbf{SB}$ θα έπρεπε και να πιστεύει ότι είναι σίγουρος γι' αυτό. Είναι μάλλον πιο λογικό να σκεφτούμε ότι ο μαθητής θεωρεί πιο πιθανό να περνά το μάθημα, παρά να μην το περνά. Ο βαθμός βεβαιότητας ως προς το τι θα γίνει με το μάθημα σταματά εκεί. Θα μπορούσαμε επίσης να πούμε ότι ο μαθητής **εκτιμά** ότι περνά το μάθημα (με την έννοια που προαναφέραμε), χωρίς όμως να το πιστεύει με ισχυρό τρόπο.

Διαφαίνεται λοιπόν η ανάγκη να εμπλουτιστεί η $\mathbf{S4.2} + \mathbf{DB}$[1] με έναν τελεστή που να περιγράφει την «εκτίμηση». Φυσικά, θα πρέπει η νέα αυτή λογική να ικανοποιεί κάποιες ιδιότητες που να περιγράφουν τη διαίσθησή μας περί της εκτίμησης. (1) Πρώτα απ' όλα, δεν πρέπει να μπορεί να αποδεικνύεται σ' αυτήν, κάτι αντίστοιχο με την ισχυρή πεποίθηση, δηλ. δεν πρέπει να περιέχει τύπο που να εκφράζει ότι, αν εκτιμά κάτι ο αντιλήπτορας, τότε εκτιμά ότι το γνωρίζει. (2) Πρέπει η εκτίμηση να εκφράζει βαθμό βεβαιότητας ασθενέστερο της πεποίθησης, δηλ. αν ο αντιλήπτορας πιστεύει κάτι, τότε πρέπει και να εκτιμά ότι αυτό ισχύει. (3) Πρέπει η εκτίμηση να συλλαμβάνει την ιδέα του «λίγο πάνω απ' το μισό» που περιγράφηκε πριν, δηλ. ότι ο αντιλήπτορας

[1] Ο λόγος που γράφω $\mathbf{S4.2} + \mathbf{DB}$ και όχι $\mathbf{S4.2_{KB}}$ διευκρινίζεται στην Παρατήρηση 1.3.1.

εκτιμά κάτι ανν θεωρεί πιο πιθανό να ισχύει αυτό, παρά να μην ισχύει. Είναι προφανές ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι ο αντιλήπτορας δεν εκτιμά ότι ισχύει κάτι ανν εκτιμά ότι αυτό δεν ισχύει. (4) Όσον αφορά στη μεταφορά της εκτίμησης μέσω συνεπαγωγών, πρέπει η νέα λογική να περιγράφει το εξής: αν ο αντιλήπτορας εκτιμά ότι ισχύει κάτι, πρέπει να γνωρίζει/να είναι σίγουρος ότι αυτό συνεπάγεται κάτι άλλο, για να μπορέσει να συναγάγει ότι εκτιμά το δεύτερο. Το σημαντικό σ' αυτήν την παρατήρηση είναι, ότι είναι επιβεβλημένη η σιγουριά του αντιλήπτορα για την ισχύ της συνεπαγωγής. Οποιοσδήποτε μικρότερος βαθμός βεβαιότητας, δεν πρέπει να οδηγεί σε εκτίμηση του συμπεράσματος της συνεπαγωγής. Αυτό ίσως γίνει πιο καθαρό στο (v) της Παρατήρησης 3.3.4. (5) Τέλος, αν ο αντιλήπτορας εκτιμά κάτι, τότε πρέπει προφανώς να συνειδητοποιεί το γεγονός αυτό, δηλ. να γνωρίζει ότι εκτιμά αυτό το κάτι. Θα ονομάσουμε την ιδιότητα αυτή «αυτογνωσία ως προς την εκτίμηση».

Θα ξεκινήσουμε λοιπόν με τον ορισμό της νέας αυτής λογικής, και θα δούμε κάποιες ιδιότητές της.

3.1 Η λογική KBE

Η λογική **S4.2+DB** είναι μονοτροπική, κανονική ως προς τον τελεστή της K, και έχει ως τελεστή συντομογραφίας τον B που εξαρτάται από τον K (βλ. Ορισμό 1.1.2 και Παρατήρηση 1.3.1). Η νέα λογική που θα ορίσουμε θα βασιστεί σ' αυτήν. Επειδή το **DB** είναι στην προσέγγισή μας συντομογραφία μερικές φορές θα αναφερόμαστε απλώς στη λογική **S4.2**.

Θεωρούμε λοιπόν την προτασιακή, διτροπική γλώσσα $\mathcal{L}_{KBE}$ που περιέχει τις προτασιακές μεταβλητές του συνόλου $\Phi = \{p_0, p_1, \ldots\}$, το σύμβολο $\perp$ της αντίφασης, τον προτασιακό σύνδεσμο $\supset$ της συνεπαγωγής, καθώς και τους τροπικούς τελεστές K και E. Όπως προαναφέρθηκε, η $\mathcal{L}_{KBE}$ θέλουμε επίσης να περιέχει έναν τελεστή συντομογραφίας B, ο οποίος θα είναι εξαρτημένος από τον τροπικό τελεστή K και θα οριστεί βάσει αυτού. Για τους τρεις αυτούς τελεστές έχουμε κατά νου την ακόλουθη ερμηνεία:

- Ο τύπος $\mathsf{K}\varphi$ θα διαβάζεται ως "*ο αντιλήπτορας γνωρίζει ότι ισχύει το φ*" ή αλλιώς ότι "*το φ αποτελεί γνώση για κείνον*".
- Ο τύπος $\mathsf{B}\varphi$ θα διαβάζεται ως "*ο αντιλήπτορας πιστεύει ότι ισχύει το φ*" ή αλλιώς ότι "*το φ αποτελεί πεποίθησή του*".
- Ο τύπος $\mathsf{E}\varphi$ θα διαβάζεται ως "*ο αντιλήπτορας εκτιμά ότι ισχύει το φ*" δηλ. ότι "*θεωρεί πιο «πιθανό» να ισχύει το φ παρά να μην ισχύει*" ή αλλιώς ότι "*το φ αποτελεί εκτίμηση του αντιλήπτορα*".

Ακολουθούν τα αξιώματα που θα παραγάγουν στον επόμενο ορισμό τη λογική, με την οποία θα ασχοληθούμε στο παρόν κεφάλαιο, καθώς και η αντίστοιχη διαισθητική ερμηνεία τους. Για να γίνει αυτή πιο ξεκάθαρη, θα προτάξουμε τον ορισμό της πεποίθησης βάσει της γνώσης (όπως ακριβώς ορίστηκε στον 1.1.2) και θα τον χρησιμοποιήσουμε στα αξιώματα.

Συντομογραφία

DB. $\mathsf{B}\varphi \equiv \neg\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi$

Ορισμός των πεποιθήσεων.

<u>Αξιώματα</u>

K. $\mathsf{K}\varphi \wedge \mathsf{K}(\varphi \supset \psi) \supset \mathsf{K}\varphi$
Οι λογικές συνέπειες της γνώσης αποτελούν γνώση.

T. $\mathsf{K}\varphi \supset \varphi$
Η γνώση αποτελείται μόνο από αλήθειες.

4. $\mathsf{K}\varphi \supset \mathsf{KK}\varphi$
Επίγνωση της γνώσης.

CB. $\mathsf{B}\varphi \supset \neg\mathsf{B}\neg\varphi$
Οι πεποιθήσεις είναι συνεπείς.

BE. $\mathsf{B}\varphi \supset \mathsf{E}\varphi$
Οι πεποιθήσεις είναι εκτιμήσεις.

CCE. $\mathsf{E}\varphi \equiv \neg\mathsf{E}\neg\varphi$
Οι εκτιμήσεις είναι συνεπείς και πλήρεις.

EK. $\mathsf{E}\varphi \wedge \mathsf{K}(\varphi \supset \psi) \supset \mathsf{E}\psi$
Μια εκτίμηση συνεπάγεται μιαν άλλη μόνον αν η λογική συνεπαγωγή που τις συνδέει αποτελεί γνώση.

PIE. $\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{KE}\varphi$
Επίγνωση της εκτίμησης.

Πριν συνεχίσουμε με τον ορισμό της λογικής μας, ας σταθούμε σε δύο αξιώματα. Κατ' αρχάς στο **CB**, κι ας το δούμε υπό το φως του ορισμού **DB**. Παρατηρούμε τότε ότι το **CB** είναι ισοδύναμο με το αξίωμα **G** (βλ. Ορισμούς 1.1.1 και 1.1.2), γι' αυτό το λόγο είπαμε ότι η λογική που θα ορίσουμε βασίζεται στην **S4.2** του Lenzen.

Το δεύτερο είναι ο αξίωμα **CCE**, το οποίο αποτελείται από δύο κατευθύνσεις. Η μία περιγράφει ότι οι εκτιμήσεις είναι συνεπείς (δηλ. ότι δεν μπορεί ο αντιλήπτορας να εκτιμά ότι ισχύει κάτι και ταυτοχρόνως να εκτιμά ότι δεν ισχύει) και είναι μάλλον αδιαμφισβήτητη. Η άλλη κατεύθυνση δείχνει τον περιορισμένο βαθμό βεβαιότητας της έννοιας «εκτίμηση». Κι αυτό διότι το **CCE** διατείνεται ότι το να μην αποτελεί εκτίμηση του αντιλήπτορα το φ συνεπάγεται το να είναι εκτίμησή του το $\neg\varphi$. Δηλ. αν ο αντιλήπτορας δεν εκτιμά ότι ισχύει κάτι, τότε αυτό τού είναι αρκετό για να εκτιμήσει ότι δεν ισχύει. Αυτό που στην περίπτωση των εκτιμήσεων φαίνεται σχεδόν αυτονόητο (πράγμα που οφείλεται στη σημασία της λέξης «εκτίμηση») δεν ισχύει φυσικά για την πεποίθηση. Εκεί, η αμφιβολία για κάτι δεν συνεπάγεται την πίστη στο «αντίθετό» του. Είναι σχεδόν τετριμμένο το παράδειγμα εκείνων που δεν πιστεύουν στο Θεό, και οι οποίοι εξαιτίας αυτής της αμφιβολίας δεν καθίστανται αυτομάτως αθεϊστές· ίσως να είναι αγνωστικιστές. Και φυσικά αυτό αφορά και στη γνώση. Η άγνοια κάποιου πράγματος επ' ουδενί δεν μπορεί να συνεπάγεται τη γνώση (δηλ. την απόλυτη βεβαιότητα) για το «αντίθετό» του· η γνώση κατακτάται με πολύ περισσότερο κόπο.

Ορισμός 3.1.1 **KBE** *είναι η προτασιακή, τροπική λογική που αξιωματικοποιείται από τα* **K**, **T**, **4**, **CB**, **BE**, **CCE**, **EK**, **PIE** *και που είναι κλειστή ως προς τον κανόνα*

$$\mathbf{RN}_{\mathsf{K}}.\quad \frac{\varphi}{\mathsf{K}\varphi}$$

Απ' τον ορισμό αυτόν διαφαίνεται αμέσως ότι η **KBE** είναι κανονική ως προς K. Αυτό σημαίνει ότι (πβ. [5])

Παρατήρηση 3.1.2 *Η **KBE** είναι κλειστή ως προς τον κανόνα*

$$\mathbf{RM}_{\mathsf{K}}.\quad \frac{\varphi \supset \psi}{\mathsf{K}\varphi \supset \mathsf{K}\psi}$$

Απ' την άλλη πλευρά, η **KBE** δεν είναι κανονική ως προς E (πράγμα που θα φανεί αργότερα, μετά την απόδειξη ορθότητας της **KBE** ως προς μια κλάση συγκεκριμένων πλαισίων, δείχνοντας ότι $\mathsf{E}\varphi \wedge \mathsf{E}(\varphi \supset \psi) \supset \mathsf{E}\psi \notin \mathbf{KBE}$). Παρόλ' αυτά, η επόμενη παρατήρηση δείχνει ότι στην **KBE** ισχύουν οι παραπάνω δύο κανόνες ως προς τον τελεστή E.

Παρατήρηση 3.1.3 *Η **KBE** είναι κλειστή ως προς τους κανόνες*

$$\mathbf{RN}_{\mathsf{E}}.\ \frac{\varphi}{\mathsf{E}\varphi} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{RM}_{\mathsf{E}}.\ \frac{\varphi \supset \psi}{\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{E}\psi}$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη[2] του $\mathbf{RN}_{\mathsf{E}}$ αρκεί να θυμηθούμε απ' την Πρόταση 1.1.3 ότι το **KB** αποτελεί τυπικό θεώρημα της λογικής $\mathbf{S4.2}+\mathbf{DB}$, άρα και της **KBE**. Από αυτό, από τον $\mathbf{RN}_{\mathsf{K}}$, κι απ' το αξίωμα **BE** προκύπτει αμέσως το ζητούμενο.
Η ισχύς του κανόνα $\mathbf{RM}_{\mathsf{E}}$ προκύπτει μέσω της επόμενης τυπικής απόδειξης.

1.	$\varphi \supset \psi$	υπόθεση
2.	$\mathsf{K}(\varphi \supset \psi)$	$1, \mathbf{RN}_{\mathsf{K}}$
3.	$\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{E}\varphi \wedge \mathsf{K}(\varphi \supset \psi)$	$2, \mathbf{PC}, \mathbf{MP}$
4.	$\mathsf{E}\varphi \wedge \mathsf{K}(\varphi \supset \psi) \supset \mathsf{E}\psi$	$\mathbf{EK}$
5.	$\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{E}\psi$	$3, 4, \mathbf{PC}, \mathbf{MP}$

∎

Το αξίωμα **PIE** που αποφασίσαμε να εντάξουμε στη λογική μας, περιγράφει μια ιδιότητα που φαντάζει εύλογη: ο αντιλήπτορας πρέπει σε περίπτωση που έχει εκτιμήσει ότι ισχύει κάτι, να διαθέτει την ικανότητα να αντιλαμβάνεται ότι το έχει εκτιμήσει, κι έτσι να είναι σίγουρος γι' αυτήν του τη νοητική κατάσταση. Είναι αυτό που ονομάστηκε «επίγνωση της εκτίμησης». Οι κλασικές, επιστημικές και δοξασιακές λογικές θεωρούν εξάλλου ότι ο αντιλήπτορας έχει την ικανότητα αυτή τόσο για τη γνώση, όσο και για την πεποίθηση (πβ. για παράδειγμα [22], [32]). Και φυσικά, απ' τη στιγμή που γνωρίζει ότι έχει εκτιμήσει κάτι, αυτό δεν αποτελεί μόνο γνώση του, αλλά και πεποίθησή του και εκτίμησή του.

Πιο ενδιαφέρον ίσως να είναι, να ελεγχθεί τι συμβαίνει με την «επίγνωση της μη εκτίμησης». Δηλ. αν ο αντιλήπτορας δεν εκτιμά ότι ισχύει κάτι, είναι σίγουρος ότι δεν εκτιμά ότι αυτό ισχύει; Διότι όσον αφορά στην πεποίθηση, αυτό που στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως *'negative introspection'* ως προς την πεποίθηση είναι γενικά αποδεκτό (βλ. για παράδειγμα το αξίωμα **NI**. $\neg\mathsf{B}\varphi \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{B}\varphi$ του Stalnaker στο [32, σελ.179] – το οποίο ονομάσαμε **NIB** στην

[2] Όταν μιλάμε για απόδειξη στο παρόν αλλά και στο επόμενο κεφάλαιο, σε αντίθεση με το προηγούμενο (πβ. Υποσημείωση 5 στο Λήμμα 2.2.13), την εννοούμε με την ασθενή εκδοχή του όρου (*«ασθενής αποδειξιμότητα»*), δηλ. $I \vdash_\Lambda \varphi$ ανν $\varphi \in \Lambda$ ή υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και τύποι $\psi_0, \ldots, \psi_n \in I$ τ.π. $\psi_0 \wedge \ldots \wedge \psi_n \supset \varphi \in \Lambda$. Όταν $I = \varnothing$, τότε δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ ισχυρής και ασθενούς αποδειξιμότητας, και ισχύει $\vdash_\Lambda \varphi$ ανν $\varphi \in \Lambda$.

παράγραφο 1.1 – ή τη συζήτηση στο [16]). Ενώ απ' την άλλη πλευρά, η «επίγνωση της άγνοιας» που περιγράφεται απ' το αξίωμα **5**. $\neg \mathsf{K}\varphi \supset \mathsf{K}\neg \mathsf{K}\varphi$ δεν είναι γενικά αποδεκτή, πράγμα που πυροδότησε την όλη συζήτηση στο τέλος της Παραγράφου 1.1.

Επίσης, θα ήταν καλό να διερευνηθεί αν η λογική μας έχει παρεμφερείς ιδιότητες με την *'negative certainty'* (A13) που περιγράφεται στο [16], η οποία αντιστοιχεί στο αξίωμα $\neg \mathsf{B}\varphi \supset \mathsf{B}\neg \mathsf{K}\varphi$, και η οποία ανήκει επιπροσθέτως στο σύστημα OK&ORIB του Voorbraak [36].

Η επόμενη παρατήρηση ξεκαθαρίζει την κατάσταση.

Παρατήρηση 3.1.4

i. *Η επίγνωση της εκτίμησης ισχύει και στους τρεις βαθμούς, δηλ.*
$\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{KE}\varphi,\ \mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{BE}\varphi,\ \mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{EE}\varphi \in \mathbf{KBE}$

ii. *Η επίγνωση της μη εκτίμησης ισχύει και στους τρεις βαθμούς, δηλ.*
$\neg\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{E}\varphi,\ \neg\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{B}\neg\mathsf{E}\varphi,\ \neg\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{E}\neg\mathsf{E}\varphi \in \mathbf{KBE}$

iii. *Η μη εκτίμηση συνεπάγεται επίγνωση της άγνοιας και της αμφιβολίας και στους τρεις βαθμούς, δηλ.*
$\neg\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi,\ \neg\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{B}\neg\mathsf{K}\varphi,\ \neg\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{E}\neg\mathsf{K}\varphi \in \mathbf{KBE}$
$\neg\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{B}\varphi,\ \neg\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{B}\neg\mathsf{B}\varphi,\ \neg\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{E}\neg\mathsf{B}\varphi \in \mathbf{KBE}$

iv. $\mathsf{KE}\varphi \equiv \mathsf{E}\varphi \in \mathbf{KBE}$

v. $\mathsf{EK}\varphi \equiv \mathsf{B}\varphi \in \mathbf{KBE}$

Απόδειξη. i. Προκύπτει αμέσως από **PIE**, **KB** (βλ. Παράγραφο 1.1), και **BE**.

ii. Έστω κατ' αρχάς η ακόλουθη τυπική απόδειξη:

1.	$\neg\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{E}\neg\varphi$	$\mathbf{CCE}, \mathbf{PC}, \mathbf{MP}$
2.	$\mathsf{E}\neg\varphi \supset \mathsf{KE}\neg\varphi$	$\mathbf{PIE}$
3.	$\mathsf{E}\neg\varphi \supset \neg\mathsf{E}\varphi$	$\mathbf{CCE}, \mathbf{PC}, \mathbf{MP}$
4.	$\mathsf{KE}\neg\varphi \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{E}\varphi$	$3, \mathbf{RM}_\mathsf{K}$
5.	$\neg\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{E}\varphi$	$1, 2, 4, \mathbf{PC}, \mathbf{MP}$

Τα υπόλοιπα έπονται αμέσως λόγω **KB** και **BE**.

iii. Η δεύτερη τριάδα προκύπτει στις τρεις γραμμές 4, 6, και 8 της ακόλουθης τυπικής απόδειξης:

1.	$\mathsf{B}\varphi \supset \mathsf{E}\varphi$	$\mathbf{BE}$
2.	$\neg\mathsf{E}\varphi \supset \neg\mathsf{B}\varphi$	$1, \mathbf{PC}, \mathbf{MP}$
3.	$\neg\mathsf{B}\varphi \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{B}\varphi$	**NIB** (τυπικό θεώρ. της $\mathbf{S4.2} + \mathbf{DB}$, βλ. Προτ. 1.1.3)
4.	$\neg\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{B}\varphi$	$2, 3, \mathbf{PC}, \mathbf{MP}$
5.	$\mathsf{K}\neg\mathsf{B}\varphi \supset \mathsf{B}\neg\mathsf{B}\varphi$	$\mathbf{KB}$
6.	$\neg\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{B}\neg\mathsf{B}\varphi$	$4, 5, \mathbf{PC}, \mathbf{MP}$
7.	$\mathsf{B}\neg\mathsf{B}\varphi \supset \mathsf{E}\neg\mathsf{B}\varphi$	$\mathbf{BE}$
8.	$\neg\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{E}\neg\mathsf{B}\varphi$	$6, 7, \mathbf{PC}, \mathbf{MP}$

Τώρα, με εφαρμογή του **KB** και των κανόνων $\mathbf{RM}_\mathsf{K}$, $\mathbf{RM}_\mathsf{B}$[3], και $\mathbf{RM}_\mathsf{E}$ προκύπτουν και οι υπόλοιποι τρεις τύποι.

[3] Αποδεικνύεται από $\mathbf{K}_\mathsf{B}$ και $\mathbf{RN}_\mathsf{B}$· βλ. ορισμούς στην Παράγραφο 1.1 καθώς και την Πρόταση 1.1.3.

iv. Έπεται αμέσως, με εφαρμογή των **T** και **PIE**.

v. Έστω η ακόλουθη τυπική απόδειξη:

1.	$\neg B\varphi \supset K\neg B\varphi$	**NIB**
2.	$K\varphi \supset B\varphi$	**KB**
3.	$\neg B\varphi \supset \neg K\varphi$	2, **PC**, **MP**
4.	$K\neg B\varphi \supset K\neg K\varphi$	3, $\mathbf{RM}_{K}$
5.	$K\neg K\varphi \supset B\neg K\varphi$	**KB**
6.	$B\neg K\varphi \supset E\neg K\varphi$	**BE**
7.	$E\neg K\varphi \supset \neg EK\varphi$	**CCE**
8.	$\neg B\varphi \supset \neg EK\varphi$	1, 4, 5, 6, 7, **PC**, **MP**
9.	$EK\varphi \supset B\varphi$	8, **PC**, **MP**
10.	$B\varphi \supset BK\varphi$	**SB** (τυπικό θεώρ. της **S4.2** + **DB**, βλ. Προτ. 1.1.3)
11.	$BK\varphi \supset EK\varphi$	**BE**
12.	$B\varphi \supset EK\varphi$	10, 11, **PC**, **MP**
13.	$EK\varphi \equiv B\varphi$	9, 12, **PC**, **MP**

∎

Ένα μόνο σχόλιο για την τελευταία ιδιότητα: έχοντας ξεκαθαρίσει κάποιος στο μυαλό του τι σημαίνουν οι λέξεις «γνωρίζω», «πιστεύω», και «εκτιμώ» και αναγνωρίζοντας ότι γι' αυτές ισχύουν οι ιδιότητες που περιγράφονται στην αρχή της παραγράφου αυτής, φαντάζει δύσκολο, δίχως χρήση τυπικής λογικής να φτάσει στο συμπέρασμα ότι το να εκτιμά ότι γνωρίζει κάτι είναι ισοδύναμο με το να το πιστεύει, αν και αυτό το συμπέρασμα φαντάζει εύλογο.

3.2 Πλειονότητες και ασθενή υπερφίλτρα

Η **KBE** θα ερμηνευτεί με επιστημικά μοντέλα, δηλ. με σχεσιακά μοντέλα (Kripke), στα οποία η σχέση $\mathcal{R}$ (με την οποία ερμηνεύεται ο τελεστής K) διασυνδέει κάθε κόσμο με όλους τους επιστημικώς μη διαφοροποιήσιμους από αυτόν κόσμους, όπως ακριβώς περιγράφηκε στην παράγραφο 1.3. Όσον αφορά στον τελεστή συντομογραφίας B, απ' τη στιγμή που είναι εξαρτημένος από τον K, δεν θα ερμηνευτεί με άλλη σχέση, αλλά με την $\mathcal{R}$· απλώς το $B\varphi$ θα σημαίνει ό,τι προσδιορίζεται απ' το $\neg K\neg K\varphi$ (πβ. Παρατήρηση 1.3.1). Όμως, για τον τελεστή E επαρκεί για την ερμηνεία του μια παρόμοια σχέση Kripke;

Ας θυμηθούμε την απαίτηση (3), στην εισαγωγή του παρόντος κεφαλαίου, για την εκτίμηση. Θέλουμε το $E\varphi$ τελικά να ερμηνευτεί ως «ο αντιλήπτορας θεωρεί πιο πιθανό να ισχύει το φ, παρά να μην ισχύει», δηλ. θέλουμε το $E\varphi$ να είναι αληθές σε έναν κόσμο w ανν μεταξύ των επιστημικώς μη διαφοροποιήσιμων κόσμων από τον w (δηλ. μεταξύ των $\mathcal{R}$-επόμενων κόσμων του w) εκείνοι στους οποίους ισχύει το φ να αποτελούν «πλειονότητα»[4]. Άρα, είμαστε αναγκασμένοι να χρησιμοποιήσουμε για τον τελεστή αυτόν, ερμηνείες γειτονιάς Scott-Montague, δηλ. να αντιστοιχίσουμε σε κάθε κόσμο w το σύνολο $\mathcal{N}(w)$ όλων των υποσυνόλων από τους $\mathcal{R}$-επόμενούς του, τα οποία αποτελούν πλειονότητα μεταξύ των $\mathcal{R}$-επόμενων. Ως γνωστόν (βλ. για παράδειγμα [5, σελ.208]), στα μοντέλα αυτά λέμε ότι το $E\varphi$ ισχύει στο w ανν το σύνολο κόσμων στο οποίο ισχύει το φ (που συμβολίζεται με $|\varphi|$), ανήκει στο $\mathcal{N}(w)$. Εμείς λοιπόν, αν αλλάξουμε λίγο αυτόν

[4] Για να ισχύει όμως αυτό πρέπει να θεωρήσουμε ότι όλοι οι κόσμοι εμφανίζονται με την ίδια πιθανότητα.

τον ορισμό και πούμε ότι το Εφ ισχύει στο w ανν εξ ορισμού $\mathcal{R}(w) \cap |\varphi| \in \mathcal{N}(w)$, τότε αυτό θα σήμαινε ότι το Εφ ισχύει στο w ανν το $\mathcal{R}(w) \cap |\varphi|$ αποτελεί πλειονότητα στο σύνολο $\mathcal{R}(w)$, πράγμα που είναι αυτό που θα θέλαμε. Έτσι, θα μπορούσαμε να ορίσουμε τα επόμενα πλαίσια, και μετά φυσικά να ελπίζουμε ότι αποδεικνύεται ότι η **KBE** περιέχει ακριβώς τους τύπους που είναι έγκυροι στα πλαίσια αυτά.

Ορισμός 3.2.1 *Έστω τριάδα* $\mathfrak{F} = \langle W, \mathcal{R}, \mathcal{N} \rangle$, *όπου*

- $W \neq \varnothing$
- $\mathcal{R} \subseteq W \times W$ *είναι μια ανακλαστική, μεταβατική, και κατευθυνόμενη σχέση, πεπερασμένης διακλάδωσης*[5].
- $\mathcal{N} : W \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ *τ.π.* $(\forall w \in W)$
  - $\mathcal{N}(w) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{R}(w))$
  - $FC \in \mathcal{N}(w)$,
    όπου FC *είναι το τελικό σύμπλοκο της* **S4.2**-*δομής* $\langle W, \mathcal{R} \rangle$ (πβ. Παράγραφο 1.2).
  - $(\forall X \subseteq W)\big(\mathcal{R}(w) \cap X \in \mathcal{N}(w) \Longrightarrow \mathcal{R}(w) \subseteq \{v \in W \mid \mathcal{R}(v) \cap X \in \mathcal{N}(v)\}\big)$
  - *Αν* $|\mathcal{R}(w)| = n$ *:περιττός, τότε*
    $\mathcal{N}(w) = \{X \subseteq \mathcal{R}(w) \mid |X| > n/2\}$

    αλλιώς

    $\mathcal{N}(w) = \{X \subseteq \mathcal{R}(w) \mid |X| > n/2\} \cup B$,
    όπου $B \subseteq H = \{X \subseteq \mathcal{R}(w) \mid |X| = n/2\}$ *τ.π.* $(\forall X \in H)(X \in B \iff W \backslash X \notin B)$

Τότε, το $\mathfrak{F}$ *θα ονομάζεται* $\mathbf{kbe_f}$-*πλαίσιο.*

Με την ερμηνεία αυτή λύνεται δυστυχώς το μισό πρόβλημα. Μπορεί μεν να αποδειχθεί ότι η **KBE** είναι ορθή ως προς την κλάση των kbe_f-πλαισίων, όχι όμως ότι είναι πλήρης ως προς αυτήν. Η τροπική λογική Λ_{kbe_f}, δηλ. όλοι οι τύποι που είναι έγκυροι στα kbe_f-πλαίσια, είναι μεν υπερσύνολο της **KBE**, αλλά «πολύ μεγάλο» ώστε να μπορεί να αποδειχθεί ο αντίστροφος εγκλεισμός. Πρέπει λοιπόν να επεκταθεί η κλάση kbe_f, έτσι ώστε να περιοριστεί η λογική της. Κι αυτό μπορεί να γίνει με εύλογο τρόπο, αν αναλογιστούμε ότι τα kbe_f-πλαίσια είναι όλα πεπερασμένης διακλάδωσης, μια και στον Ορισμό 3.2.1, για κάθε κόσμο w το $\mathcal{R}(w)$ είναι πεπερασμένο σύνολο. Θα επεκτείνουμε λοιπόν αυτήν την κλάση πλαισίων, επιτρέποντας και πλαίσια άπειρης διακλάδωσης, τα οποία όμως θα είναι τέτοια ώστε να είναι έγκυρα όλα τα αξιώματα της **KBE**. Ειδικότερα, θα δούμε αν οι ιδιότητες που αντιστοιχούν στα **CCE** και **EK**, έχουν νόημα στα πλαίσια άπειρης διακλάδωσης, κι αν είναι συμβατά με ό,τι θα μπορούσε να θεωρηθεί ως «πλειονότητα» σε άπειρα σύνολα.

Επομένως, πριν συνεχίσουμε με τον ορισμό μιας τέτοιας επαυξημένης κλάσης πλαισίων, θα δούμε τι έχει γίνει στη βιβλιογραφία για τον ορισμό «πλειονοτήτων» (ακόμα και σε άπειρα σύνολα) καθώς και ποια λύση προτείνουμε. Κατόπιν, θα υιοθετήσουμε αυτήν τη λύση στον ορισμό της νέας κλάσης πλαισίων, και μετά θα δούμε αν αποδεικνύεται η ορθότητα αλλά και η πληρότητα της **KBE** ως προς αυτήν την κλάση.

[5] Δηλ. $(\forall w \in W)|\mathcal{R}(w)| < \omega$

Ασθενή υπερφίλτρα

Ένας τρόπος να προσεγγιστεί η έννοια της «πλειονότητας» είναι μέσω των «μεγάλων υποσυνόλων» ενός αρχικού, μη κενού συνόλου W. Τόσο στη Συνολοθεωρία, όσο και στη Θεωρία Μοντέλων (βλ. για παράδειγμα στο [19] και [4] αντιστοίχως) τα «μεγάλα υποσύνολα» περιγράφονται με την έννοια του *φίλτρου πάνω στο* W. Ο ορισμός του τι είναι φίλτρο, καθώς και όλων των υπολοίπων εννοιών που θα αναφερθούν, φαίνονται στον Πίνακα 3.1. Ερμηνεία με φίλτρα δόθηκε στη λεγόμενη 'modal conditional logic for default reasoning' στο [2]. Τα *υπερφίλτρα πάνω στο* W είναι μια άλλη δημοφιλής έννοια που περιγράφει «μεγάλα υποσύνολα» στη Συνολοθεωρία. Πρόκειται ουσιαστικά για φίλτρα που είναι πλήρη ως προς το $\mathcal{P}(W)$. Σε μια άλλη προσπάθεια να περιγραφούν «πλειονότητες», οι V. Jauregui [18] και K. Schlechta [28] χρησιμοποιούν ανεξαρτήτως ο καθένας μεταξύ τους τις ισοδύναμες έννοιες *μεγάλα* και *σημαντικά* υποσύνολα ενός δοσμένου συνόλου. Η πιο ακριβής αλλά και πιο περίπλοκη, παρεμφερής έννοια είναι εκείνη του *χώρου πλειονοτήτων* των E. Pacuit και S. Salame [25, 27] που σχετίζεται άμεσα με την ερμηνεία της λεγόμενης graded modal logic. Στον Πίνακα 3.1 που περιέχει τις ιδιότητες όλων αυτών, έχουμε συμπεριλάβει και τη δική μας πρόταση, τα *ασθενή υπερφίλτρα*:

Ορισμός 3.2.2 *Έστω $W \neq \varnothing$ και $C \subseteq \mathcal{P}(W)$. Το C θα ονομάζεται* **ασθενές υπερφίλτρο πάνω στο** W *ανν ισχύει*

(wu1) $(\forall X \subseteq W)(X \in C \iff W \setminus X \notin C)$

(wu2) $(\forall X \in C)(\forall Y \subseteq W)(X \subseteq Y \Longrightarrow Y \in C)$

Για να προχωρήσουμε στη σύγκριση αυτών των εννοιών, ας τις δούμε όλες μαζί στον Πίνακα 3.1 (όπου $W \neq \varnothing$ και $C \subseteq \mathcal{P}(W)$).

Πριν δούμε δε, ποια πλεονεκτήματα έχουν τα ασθενή υπερφίλτρα απέναντι στις προαναφερθείσες έννοιες όσον αφορά στην περιγραφή πλειονοτήτων, πρέπει να αποδείξουμε ότι αυτά υπάρχουν κι ότι όντως διαφοροποιούνται από την πιο ισχυρή έννοια των υπερφίλτρων.

Παρατήρηση 3.2.3 *Έστω τυχαίο σύνολο W τ.π. $|W| > 2$. Τότε υπάρχει ασθενές υπερφίλτρο πάνω στο W που δεν είναι υπερφίλτρο πάνω σ' αυτό.*

Απόδειξη. i. Αν $|W| = n \in \mathbb{N}$, όπου n : περιττός, τότε ας ορίσουμε το σύνολο $C = \{X \subseteq W \mid |X| > n/2\}$, κι ας ελέγξουμε τις δύο ιδιότητες των ασθενών υπερφίλτρων.

(wu1) Έστω $X \subseteq W$. Τότε
$$X \in C \iff |X| > n/2 \iff |W \setminus X| < n/2 \iff W \setminus X \notin C$$

(wu2) Έστω $X \in C$ και $Y \subseteq W$ τ.π. $X \subset Y$. Τότε $|X| < |Y|$. Επίσης, εξ ορισμού του C, $|X| \geq n/2$, άρα $|Y| > n/2$, δηλ. $Y \in C$.

Τώρα, ας δούμε ότι το C δεν αποτελεί υπερφίλτρο. Έστω λοιπόν τυχαίο $a \in W$ και $X \subseteq W \setminus \{a\}$ τ.π. $|X| = \frac{n-1}{2}$. Τότε, $|X \cup \{a\}| > n/2$ και $|W \setminus X| > n/2$, άρα, $X \cup \{a\} \in C$ και $W \setminus X \in C$. Όμως, $(X \cup \{a\}) \cap (W \setminus X) = \{a\}$, κι έτσι, $|(X \cup \{a\}) \cap (W \setminus X)| < n/2$, άρα $(X \cup \{a\}) \cap (W \setminus X) \notin C$, πράγμα που σημαίνει ότι το C δεν είναι κλειστό ως προς τομή.

ii. Αν $|W| = n \in \mathbb{N}$, όπου n : άρτιος, τότε ορίζουμε το σύνολο $C = \{X \subseteq W \mid |X| > n/2\} \cup B$, όπου $B \subseteq H = \{X \subseteq W \mid |X| = n/2\}$ τ.π. $(\forall X \in H)(X \in B \iff W \setminus X \notin B)$. Ας ελέγξουμε τώρα τις δύο ιδιότητες των ασθενών υπερφίλτρων. Απ' τη στιγμή που η **(wu2)** αποδεικνύεται ακριβώς όπως προηγουμένως, ας εστιάσουμε στην άλλη.

	φίλτρο	υπερφίλτρο	μεγάλα υποσύνολα	σημαντικά υποσύνολα	χώρος πλειονοτήτων	ασθενές υπερφίλτρο
$C \neq \varnothing$	•		•	•		
$(\forall X \in C)(\forall Y \subseteq W)$ $(X \subseteq Y \Rightarrow Y \in C)$	•	•	•	•		•
$(\forall X, Y \in C)$ $X \cap Y \in C$	•	•				
$(\forall X \subseteq W)$ $(X \in C \Rightarrow W \setminus X \notin C)$		•	•			•
$(\forall X \subseteq W)$ $(X \notin C \Rightarrow W \setminus X \in C)$		•			•	•
$(\forall X, Y \in C)$ $X \cap Y \neq \varnothing$				•		
$(\forall X, Y \in C)$ $(Y \neq W \setminus X \Rightarrow X \cap Y \neq \varnothing)$					•	
$(\forall X \in C)(\forall \text{ πεπερ.} F \subseteq X)(\forall Y \subseteq W)$ $\big(X \cap Y = \varnothing \ \& \ F \leq_c Y \Rightarrow$ $(X \setminus F) \cup Y \in C\big)$					•	

Πίνακας 3.1: Έννοιες πλειονοτήτων

(**wu1**) Έστω $X \subseteq W$. Τότε

$$X \in C \iff |X| > n/2 \;\; \text{ή} \;\; \big(|X| = n/2 \;\; \text{και} \;\; X \in B\big) \iff$$
$$|W \setminus X| < n/2 \;\; \text{ή} \;\; \big(|W \setminus X| = n/2 \;\; \text{και} \;\; W \setminus X \notin B\big) \iff$$
$$|W \setminus X| \leq n/2 \;\; \text{και} \;\; W \setminus X \notin B \iff W \setminus X \notin C$$

Για να δούμε και σ' αυτήν την περίπτωση ότι το C δεν αποτελεί υπερφίλτρο, ας θεωρήσουμε τυχαίο $X \in B$ (υπάρχει, αφού αν κάποιο τυχαίο σύνολο με $n/2$ μέλη δεν ανήκει στο B, τότε εξ ορισμού θα ανήκει σ' αυτό το συμπλήρωμά του που έχει επίσης $n/2$ μέλη). Έστω επίσης κάποιο $a \in X$. Τότε, $|(W \setminus X) \cup \{a\}| > n/2$, άρα $(W \setminus X) \cup \{a\} \in C$. Όμως, $((W \setminus X) \cup \{a\}) \cap X = \{a\}$, άρα $|((W \setminus X) \cup \{a\}) \cap X| < n/2$, επομένως $((W \setminus X) \cup \{a\}) \cap X \notin C$, κι έτσι το C δεν είναι κλειστό ως προς τομή.

iii. Αν $|W| \geq \omega$, τότε ας θεωρήσουμε κάποιο $a \in W$ κι ας ορίσουμε το σύνολο

$$C = \big(\{X \subseteq W \mid a \in X\} \setminus \{\{a\}\}\big) \cup \{W \setminus \{a\}\}$$

(**wu1**) Έστω $X \subseteq W$. Τότε

$$X \in C \iff \big(a \in X \;\; \text{και} \;\; X \neq \{a\}\big) \;\; \text{ή} \;\; X = W \setminus \{a\} \iff$$
$$\big(a \in X \;\; \text{ή} \;\; X = W \setminus \{a\}\big) \;\; \text{και} \;\; \big(X \neq \{a\} \;\; \text{ή} \;\; X = W \setminus \{a\}\big) \iff$$
$$\big(a \notin W \setminus X \;\; \text{ή} \;\; W \setminus X = \{a\}\big) \;\; \text{και} \;\; W \setminus X \neq W \setminus \{a\} \iff W \setminus X \notin C$$

(**wu2**) Έστω $X \in C$ και $Y \subseteq W$ τ.π. $X \subset Y$. Αν $a \in X$ και $X \neq \{a\}$, τότε προφανώς $a \in Y$, ενώ αν ίσχυε ότι $Y = \{a\}$, τότε $X = \varnothing$, πράγμα άτοπο, δηλ. $Y \neq \{a\}$. Έτσι, $Y \in C$. Αν $X = W \setminus \{a\}$, τότε $Y = W$, κι αφού $a \in W$ και $W \neq \{a\}$ ως άπειρο σύνολο, $Y = W \in C$.

Έτσι, το C είναι ασθενές υπερφίλτρο. Για να δούμε ότι δεν είναι υπερφίλτρο, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, αν θεωρήσουμε $b, c \in W$ τ.π. $b \neq a$, $c \neq a$, και $b \neq c$, τότε $\{a, b\} \in C$ και $\{a, c\} \in C$, αλλά $\{a, b\} \cap \{a, c\} \notin C$, που σημαίνει ότι το C δεν είναι κλειστό ως προς τομή. ■

Τόσο τα φίλτρα, όσο και τα υπερφίλτρα είναι κλειστά ως προς τομή. Αυτό σημαίνει ότι στα πλαίσια, στα οποία το σύνολο $\mathcal{N}(w)$ είναι φίλτρο ή υπερφίλτρο για κάποιον κόσμο w, θα ίσχυε στον w ο τύπος $\mathsf{E}\varphi \wedge \mathsf{E}(\varphi \supset \psi) \supset \mathsf{E}\psi$, πράγμα το οποίο δεν είναι καθολικά αποδεκτό. Για μια αιτιολόγηση αυτού πβ. το παράδειγμα (v) στην Παρατήρηση 3.3.4.

Τα «μεγάλα»/«σημαντικά υποσύνολα» των Jauregui και Schlechta δεν είναι απαραιτήτως πλήρη ως προς το $\mathcal{P}(W)$. Έτσι, είναι δυνατόν σε κάποιον κόσμο w το $\mathcal{N}(w)$ να μην περιέχει το σύνολο $\mathcal{R}(w) \cap |\varphi|$, ούτε όμως το $\mathcal{R}(w) \setminus (\mathcal{R}(w) \cap |\varphi|)$ (το οποίο ταυτίζεται με το $\mathcal{R}(w) \cap |\neg\varphi|$). Επομένως, είναι δυνατό να μην ισχύει $\mathsf{E}\varphi$, ούτε $\mathsf{E}\neg\varphi$, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την απαίτηση (3) της εισαγωγής του παρόντος κεφαλαίου, η οποία όμως φαντάζει εκ των ων ουκ άνευ, μια και, αν δεν εκτιμώ ότι ισχύει κάτι, τότε εκτιμώ ότι αυτό δεν ισχύει.

Τέλος, όσον αφορά στο χώρο πλειονοτήτων των E. Pacuit και S. Salame, η προσέγγισή τους απαιτεί τα αξιώματα της graded modal logic, τα οποία είναι υπερβολικά ακριβή για να χρησιμοποιηθούν σε μια επιστημική λογική. Ακόμα και η ίδια η τροπική γλώσσα που πρέπει να χρησιμοποιηθεί είναι υπερβολικά ακριβής. Για παράδειγμα, χρησιμοποιούνται τύποι της μορφής $\Diamond_n \varphi$ που ερμηνεύονται ως «το φ ισχύει σε περισσότερους από n $\mathcal{R}$-επόμενους κόσμους». Πράγμα το οποίο δεν μπορεί να συνδεθεί καθόλου με μια επιστημική λογική, μια και ο αντιλήπτορας δεν μπορεί σε καμιά περίπτωση να έχει επίγνωση του πλήθους των επιστημικώς μη διαφοροποιήσιμων κόσμων από τον κόσμο που βρίσκεται.

Όμως, οι ιδιότητες (**wu1**) και (**wu2**) των ασθενών υπερφίλτρων που – όπως θα δούμε – περιγράφονται από τα αξιώματα (**CCE**) και (**EK**) αντιστοίχως, εκφράζουν εύλογες ιδιότητες «πλειονοτήτων» ακόμα και για άπειρα σύνολα: ένα υποσύνολο είναι πλειονότητα ανν το συμπλήρωμά του δεν είναι, καθώς και, αν ένα σύνολο είναι πλειονότητα, τότε και κάθε υπερσύνολό του πρέπει να θεωρείται επίσης ως τέτοια.

Όσον αφορά στην ιδιότητα (**wu1**) ίσως κάποιος να είχε αντιρρήσεις τόσο ως προς τη συνέπεια, όσο και ως προς την πληρότητα που εκφράζει, ιδίως όταν εφαρμόζεται σε άπειρα σύνολα. Ας τα δούμε λοιπόν ένα προς ένα. Με τον όρο «συνέπεια» στην ιδιότητα (**wu1**) εννοούμε το γεγονός ότι αν ένα υποσύνολο αποτελεί πλειονότητα, τότε το συμπλήρωμά του δεν είναι. Σ' αυτό θα μπορούσε κάποιος να αντιτείνει το παράδειγμα του συνόλου των άρτιων κι εκείνου των περιττών φυσικών, και να παρατηρήσει ότι θα μπορούσαν κάλλιστα και τα δύο να θεωρηθούν «πλειονότητες». Η απάντησή μας σ' αυτό είναι ότι θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τον όρο «πλειονότητα» με την έννοια του «λίγο πάνω απ' το μισό». Έτσι, απ' τη στιγμή που κάποιο από τα δύο θεωρηθεί (συμβατικώς) «πλειονότητα», το «υπόλοιπο» δεν μπορεί να είναι. Με τον όρο «πληρότητα» στην ιδιότητα (**wu1**) εννοούμε το γεγονός ότι αν ένα υποσύνολο δεν αποτελεί πλειονότητα, τότε το συμπλήρωμά του θα είναι. Κι εδώ θα μπορούσε ο δικηγόρος του διαβόλου να αντιτείνει και πάλι το παράδειγμα του συνόλου των άρτιων κι εκείνου των περιττών φυσικών, αλλά αντιστρόφως με προηγουμένως, λέγοντας ότι θα μπορούσε κάλλιστα κανένα από τα δύο να μη θεωρηθεί «πλειονότητα». Η απάντησή μας σ' αυτό είναι ότι και κανένας δεν μας απαγορεύει να το πράξουμε, μια και η περίπτωση θυμίζει κόψη του ξυραφιού (αρκεί φυσικά, αν θεωρήσουμε κάποιο «πλειονότητα» να μη θεωρήσουμε ως τέτοια και το συμπλήρωμά του, ώστε να ισχύει και η «συνέπεια»). Εξάλλου, κάτι παρεμφερές πράξαμε στην περίπτωση του Ορισμού 3.2.1 που οι $\mathcal{R}$-επόμενοι ενός κόσμου ήταν n σε πλήθος και το n ήταν άρτιο. Τότε, θεωρήσαμε συμβατικώς ως πλειονότητες τα μισά υποσύνολα από εκείνα που είχαν $n/2$ μέλη. Έχουμε την αίσθηση ότι σε τέτοιες «ακραίες» περιπτώσεις, ό,τι κι αν θεωρήσουμε συμβατικώς, αν δεν είναι αντιφατικό με άλλες απαιτήσεις, είναι αποδεκτό.

Το μεγαλύτερο όμως πλεονέκτημα των ασθενών υπερφίλτρων είναι ότι οι ιδιότητές τους αντιστοιχούν στις απαιτήσεις (3) και (4) της εισαγωγής του παρόντος κεφαλαίου. Αν αποδεικνυόταν τελικά ότι η **KBE** είναι πλήρης ως προς την επέκταση της κλάσης kbe_f που περιλαμβάνει και πλαίσια άπειρης διακλάδωσης τ.π. το $\mathcal{N}(w)$ να αποτελεί ασθενές υπερφίλτρο πάνω στο άπειρο $\mathcal{R}(w)$, τότε η χρήση των ασθενών υπερφίλτρων στην επέκταση αυτή θα μπορούσε να θεωρηθεί επιτυχημένη.

kbe-πλαίσια/μοντέλα

Μετά τα λεχθέντα της προηγούμενης παραγράφου, φαντάζει προφανής η επέκταση που πρέπει να γίνει στα kbe_f-πλαίσια. Όμως, για λόγους τεχνικούς που αφορούν στην απόδειξη πληρότητας, είμαστε υποχρεωμένοι να περιορίσουμε τα σύνολα στα οποία μπορούν να ισχύουν οι προτασιακές μεταβλητές και να μην επιτρέψουμε όλα τα υποσύνολα του W. Το σύνολο αυτών των επιτρεπτών υποσυνόλων του W είναι το A του επόμενου ορισμού (όσον αφορά στις ιδιότητες που πρέπει να πληροί, πβ. την Πρόταση 3.2.7). Η επέκταση λοιπόν θα περιλαμβάνει *γενικευμένα* πλαίσια γειτονιάς (Scott-Montague) ως προς τον τελεστή E. Στον ορισμό που ακολουθεί οι ιδιότητες (**cce**) και (**ek**) είναι ουσιαστικά οι (**wu1**) και (**wu2**) αντιστοίχως του Ορισμού 3.2.2 των ασθενών υπερφίλτρων, προσαρμοσμένες κατάλληλα, μια και πρόκειται για ασθενή υπερφίλτρα πάνω στο $\mathcal{R}(w)$.

Ορισμός 3.2.4 *Έστω τετράδα* $\mathfrak{F} = \langle W, A, \mathcal{R}, \mathcal{N} \rangle$, *όπου*

- $W \neq \varnothing$

- $A \subseteq \mathcal{P}(W)$ *είναι μια συλλογή* επιτρεπτών *υποσυνόλων του* W*, για την οποία ισχύουν:*
  - **(a1)** $\varnothing \in A$, *και* $(\forall X, Y \in A)$
  - **(a2)** $W \setminus X \in A$
  - **(a3)** $X \cup Y \in A$
  - **(a4)** $\{w \in W \mid \mathcal{R}(w) \subseteq X\} \in A$
  - **(a5)** $\{w \in W \mid \mathcal{R}(w) \cap X \in \mathcal{N}(w)\} \in A$
- $\mathcal{R} \subseteq W \times W$ *είναι μια ανακλαστική, μεταβατική, και κατευθυνόμενη σχέση.*
- $\mathcal{N} : W \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ *τ.π.* $(\forall w \in W)$
  - **(nr)** $\mathcal{N}(w) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{R}(w))$
  - **(be)** $FC \in \mathcal{N}(w)$,
    όπου FC *είναι το τελικό σύμπλοκο της* **S4.2**-*δομής* $\langle W, \mathcal{R}\rangle$ (πβ. Παράγραφο 1.2).
  - **(pie)** $(\forall X \in A)\big(\mathcal{R}(w) \cap X \in \mathcal{N}(w) \Longrightarrow \mathcal{R}(w) \subseteq \{v \in W \mid \mathcal{R}(v) \cap X \in \mathcal{N}(v)\}\big)$

  Αν $|\mathcal{R}(w)| = n \in \mathbb{N}$*, τότε*

  (f) *Αν* n *:περιττός, τότε*

  $$\mathcal{N}(w) = \{X \subseteq \mathcal{R}(w) \mid |X| > n/2\}$$

  αλλιώς

  $$\mathcal{N}(w) = \{X \subseteq \mathcal{R}(w) \mid |X| > n/2\} \cup B,$$
  όπου $B \subseteq H = \{X \subseteq \mathcal{R}(w) \mid |X| = n/2\}$ *τ.π.*
  $(\forall X \in H)(X \in B \iff W \setminus X \notin B)$

  Αν $|\mathcal{R}(w)| \geq \omega$*, τότε*

  (cce) $(\forall X \in A)\ \big(\mathcal{R}(w) \cap X \in \mathcal{N}(w) \iff \mathcal{R}(w) \cap (W \setminus X) \notin \mathcal{N}(w)\big)$

  (ek) $(\forall T \in \mathcal{N}(w))(\forall X \in A)\ \big(T \subseteq \mathcal{R}(w) \cap X \Longrightarrow \mathcal{R}(w) \cap X \in \mathcal{N}(w)\big)$

Τότε, το $\mathfrak{F}$ *θα ονομάζεται* **kbe-πλαίσιο**. *Ένα* $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V\rangle$ *θα ονομάζεται* **kbe-μοντέλο**, *αν είναι βασισμένο σε κάποιο kbe-πλαίσιο* $\mathfrak{F}$ *και η* $V : \Phi \to A$ *είναι μια αποτίμηση που καθορίζει ότι η ισχύς των προτασιακών μεταβλητών περιορίζεται μόνο στα επιτρεπτά σύνολα (γι' αυτό και θα ονομάζεται* επιτρεπτή αποτίμηση*).*

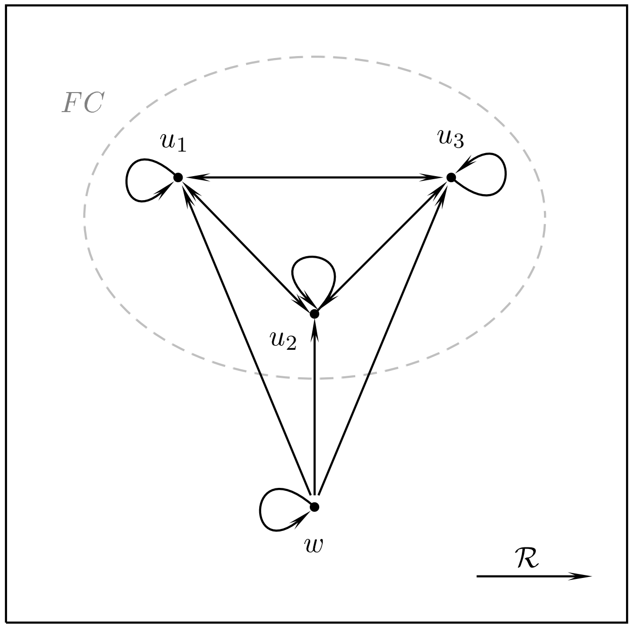
Παρατήρηση 3.2.5 *Η κλάση των kbe-πλαισίων είναι μη κενή.*

Απόδειξη. Έστω το πλαίσιο $\mathfrak{F}_1 = \langle W, A, \mathcal{R}, \mathcal{N}\rangle$ με σύνολο κόσμων $W = \{w, u_1, u_2, u_3\}$ και σχέση $\mathcal{R}$ που διασυνδέει επιστημικώς μη διαφοροποιήσιμους κόσμους όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1. Έστω επίσης $A = \mathcal{P}(W)$ και

$$\mathcal{N}(w) = \big\{X \subseteq W \mid |X| \geq 3\big\} \cup \big\{\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\}, \{u_2, u_3\}\big\}$$
$$\mathcal{N}(u_1) = \mathcal{N}(u_2) = \mathcal{N}(u_3) = \big\{\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\}, \{u_2, u_3\}, FC\big\},$$

όπου φυσικά $FC = \{u_1, u_2, u_3\}$ είναι το τελικό σύμπλοκο του (όπως εύκολα φαίνεται) **S4.2**-μοντέλου $\langle W, \mathcal{R}\rangle$.

Με λίγο κόπο μπορεί να ελεγχθεί ότι ισχύουν όλες οι ιδιότητες του Ορισμού 3.2.4 κι έτσι να διαφανεί ότι το $\mathfrak{F}_1$ είναι ένα kbe-πλαίσιο. ∎



Σχήμα 3.1: Τα W και $\mathcal{R}$ του πλαισίου $\mathfrak{F}_1$

Τώρα, δοθέντος ενός μοντέλου $\mathfrak{M} = \langle W, A, \mathcal{R}, \mathcal{N}, V\rangle$ για τη γλώσσα $\mathcal{L}_{KBE}$, η αποτίμησή του $V : \Phi \to A$ μπορεί να επεκταθεί σε όλους τους τύπους της $\mathcal{L}_{KBE}$ με το συνήθη τρόπο, κάνοντας μόνον μικρές, φυσικές αλλαγές όσον αφορά στον τελεστή E:

Ορισμός 3.2.6 *Έστω τυχαίο μοντέλο $\mathfrak{M} = \langle W, A, \mathcal{R}, \mathcal{N}, V\rangle$ για τη γλώσσα $\mathcal{L}_{KBE}$. Η συνάρτηση $\overline{V} : \mathcal{L}_{KBE} \to \mathcal{P}(W)$ ορίζεται αναδρομικώς ως εξής:*

- $\overline{V}(p) = V(p), \quad (\forall p \in \Phi)$
- $\overline{V}(\bot) = \varnothing$

και $(\forall \varphi, \psi \in \mathcal{L}_{KBE})$

- $\overline{V}(\varphi \supset \psi) = (W \setminus \overline{V}(\varphi)) \cup \overline{V}(\psi)$
- $\overline{V}(\mathsf{K}\varphi) = \{w \in W \mid \mathcal{R}(w) \subseteq \overline{V}(\varphi)\}$
- $\overline{V}(\mathsf{E}\varphi) = \{w \in W \mid \mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\varphi) \in \mathcal{N}(w)\}$

Οι ιδιότητες (**a1**) έως (**a5**) των kbe-μοντέλων (Ορισμός 3.2.4) αποτελούν ακριβώς ό,τι χρειάζεται για να αποδειχθεί τετριμμένως η επόμενη.

Πρόταση 3.2.7 *Έστω ένα kbe-μοντέλο $\mathfrak{M} = \langle W, A, \mathcal{R}, \mathcal{N}, V\rangle$ καθώς και η συνάρτηση $\overline{V}$ του Ορισμού 3.2.6. Τότε, $(\forall \varphi \in \mathcal{L}_{KBE})$ $\overline{V}(\varphi) \in A$, κι έτσι η $\overline{V}$ αποτελεί επέκταση της $V : \Phi \to A$ σε όλους του τύπους.*

Απ' τους Ορισμούς 3.2.4 και 3.2.6 προκύπτει αμέσως η ακόλουθη παρατήρηση, η οποία τελικά αντικατοπτρίζει τις διαισθήσεις μας για τις γνώσεις και τις εκτιμήσεις.

Παρατήρηση 3.2.8 *Έστω $\mathfrak{M}$ ένα kbe-μοντέλο και w κάποιος κόσμος του. Τότε*

α) $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{K}\varphi$ *ανν* $(\forall v \in W)(w\mathcal{R}v \Rightarrow \mathfrak{M}, v \Vdash \varphi)$*, δηλ. στον w γνωρίζει ο αντιλήπτορας το φ ακριβώς τότε, αν σε κάθε επιστημικώς μη διαφοροποιήσιμο κόσμο από τον w ισχύει το φ. Αυτό είναι όντως ό,τι θα θέλαμε (πβ. ιδιότητα $(*)$ στην Παράγραφο 1.2).*

β) Ας υποθέσουμε ότι οι επιστημικώς μη διαφοροποιήσιμοι κόσμοι από τον w είναι πεπερασμένοι το πλήθος, έστω n. Τότε, $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{E}\varphi$ *ανν* $\mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\varphi) \in \mathcal{N}(w)$*, δηλ. στον w εκτιμά ο αντιλήπτορας ότι ισχύει το φ ακριβώς τότε, αν οι επιστημικώς μη διαφοροποιήσιμοι κόσμοι από τον w, στους οποίους ισχύει το φ, είναι περισσότεροι ή ίσοι με $n/2$, πράγμα που είναι ισοδύναμο με το ότι το φ ισχύει στην πλειονότητα των επιστημικώς μη διαφοροποιήσιμων κόσμων από τον w. Κι αυτό είναι όντως αυτό που θέλαμε (πβ. εισαγωγή στο παρόν κεφάλαιο).*

3.3 Ορθότητα της KBE

Θεώρημα 3.3.1 (Ορθότητα) *Η λογική* **KBE** *είναι ορθή ως προς την κλάση των kbe-πλαισίων, δηλ.* $\mathbf{KBE} \subseteq \Lambda_{kbe}$.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδειχθεί ότι όλα τα αξιώματα της **KBE** είναι έγκυρα σε κάθε kbe-πλαίσιο, μια και η απόδειξη ότι οι κανόνες **MP** και $\mathbf{RN}_{\mathsf{K}}$ διατηρούν την εγκυρότητα, είναι τετριμμένη. Έστω λοιπόν τυχαίο kbe-πλαίσιο $\mathfrak{F} = \langle W, A, \mathcal{R}, \mathcal{N} \rangle$.

Κατ' αρχάς, απ' τη στιγμή που το $\mathfrak{F}$ είναι Kripke-πλαίσιο ως προς K και η αντίστοιχη σχέση $\mathcal{R}$ είναι ανακλαστική, μεταβατική, και κατευθυνόμενη, αποδεικνύεται εύκολα (βλ. για παράδειγμα [3], [14]) ότι στο $\mathfrak{F}$ είναι έγκυρα τα αξιώματα **K**, **T**, **4**, και **G** (το οποίο, υπό το φως του ορισμού **DB**, ταυτίζεται με το **CB**).

Έστω λοιπόν τώρα τυχαίο kbe-μοντέλο $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, καθώς και τυχαίο $w \in W$.

BE. Έστω ότι $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{B}\varphi$. Τότε, αν FC είναι το τελικό σύμπλοκο του **S4.2**-πλαισίου $\langle W, \mathcal{R} \rangle$, απ' την Παρατήρηση 1.3.2 προκύπτει ότι $\mathfrak{M}, FC \Vdash \varphi$, δηλ. $FC \subseteq \overline{V}(\varphi)$. Όμως, από Παρατήρηση 1.2.3(ii), $FC \subseteq \mathcal{R}(w)$, άρα, $FC \subseteq \mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\varphi)$. Έτσι, αν $|\mathcal{R}(w)| \in \mathbb{N}$, τότε από τα (**be**) και (**f**) του Ορισμού 3.2.4 προκύπτει ότι $\mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\varphi) \in \mathcal{N}(w)$. Ενώ, αν $|\mathcal{R}(w)| \geq \omega$, λόγω 3.2.7, $\overline{V}(\varphi) \in A$, κι έτσι απ' το (**be**) και (**ek**) του 3.2.4, προκύπτει και πάλι $\mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\varphi) \in \mathcal{N}(w)$, δηλ. από 3.2.6, $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{E}\varphi$.

CCE. Κατ' αρχάς θα δείξουμε ότι

$$\mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\varphi) \in \mathcal{N}(w) \iff \mathcal{R}(w) \cap (W \setminus \overline{V}(\varphi)) \notin \mathcal{N}(w) \qquad (*)$$

Αν $|\mathcal{R}(w)| = n \in \mathbb{N}$, τότε απ' τον Ορισμό 3.2.4(**f**) έχουμε

Αν n : περιττός, τότε

$$\mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\varphi) \in \mathcal{N}(w) \iff |\mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\varphi)| > n/2 \iff$$
$$|\mathcal{R}(w) \cap (W \setminus \overline{V}(\varphi))| < n/2 \iff \mathcal{R}(w) \cap (W \setminus \overline{V}(\varphi)) \notin \mathcal{N}(w)$$

Αν n : άρτιος, τότε

$$\mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\varphi) \in \mathcal{N}(w) \iff$$
$$|\mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\varphi)| > n/2 \ \text{ή} \ \big(|\mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\varphi)| = n/2 \ \text{και} \ \mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\varphi) \in B\big) \iff$$
$$|\mathcal{R}(w) \cap (W \setminus \overline{V}(\varphi))| < n/2 \ \text{ή}$$
$$\big(|\mathcal{R}(w) \cap (W \setminus \overline{V}(\varphi))| = n/2 \ \text{και} \ \mathcal{R}(w) \cap (W \setminus \overline{V}(\varphi)) \notin B\big) \iff$$
$$|\mathcal{R}(w) \cap (W \setminus \overline{V}(\varphi))| \leq n/2 \ \text{και} \ \mathcal{R}(w) \cap (W \setminus \overline{V}(\varphi)) \notin B \iff$$
$$\mathcal{R}(w) \cap (W \setminus \overline{V}(\varphi)) \notin \mathcal{N}(w)$$

Αν $|\mathcal{R}(w)| \geq \omega$, τότε η $(*)$ προκύπτει αμέσως από την Πρόταση 3.2.7 και τον Ορισμό 3.2.4 (**cce**).

Άρα η $(*)$ ισχύει σε κάθε περίπτωση, κι έτσι έχουμε
$\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{E}\varphi \overset{3.2.6}{\iff} \mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\varphi) \in \mathcal{N}(w) \overset{(*)}{\iff} \mathcal{R}(w) \cap (W \setminus \overline{V}(\varphi)) \notin \mathcal{N}(w) \iff \mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\neg\varphi)) \notin \mathcal{N}(w) \overset{3.2.6}{\iff} \mathfrak{M}, w \Vdash \neg\mathsf{E}\neg\varphi$.

EK. Ας υποτεθεί ότι $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{E}\varphi \wedge \mathsf{K}(\varphi \supset \psi)$. Τότε απ' τον Ορισμό 3.2.6,
$\mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\varphi) \in \mathcal{N}(w)$ (1)
και $\mathcal{R}(w) \subseteq \overline{V}(\varphi \supset \psi)$ (2)
Έστω τώρα τυχαίο $v \in \mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\varphi)$. Τότε προφανώς, $v \notin \overline{V}(\neg\varphi)$, όμως λόγω (2), $v \in \overline{V}(\neg\varphi)$ ή $v \in \overline{V}(\psi)$, που σημαίνει ότι $v \in \overline{V}(\psi)$. Οπότε προκύπτει ότι
$\mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\varphi) \subseteq \mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\psi)$ (3)
Αν $|\mathcal{R}(w)| = n \in \mathbb{N}$, τότε, σε περίπτωση που $\mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\varphi) \subset \mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\psi)$, τότε $|\mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\varphi)| < |\mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\psi)|$. Επίσης, απ' την (1) και τον Ορισμό 3.2.4(**f**) έχουμε ότι $|\mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\varphi)| \geq n/2$, άρα $|\mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\psi)| > n/2$, δηλ. και πάλι απ' τον Ορισμό 3.2.4(**f**), $\mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\psi) \in \mathcal{N}(w)$. Σε περίπτωση που $\mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\varphi) = \mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\psi)$, τότε προκύπτει από (1) προφανώς και πάλι, $\mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\psi) \in \mathcal{N}(w)$.
Αν $|\mathcal{R}(w)| \geq \omega$, τότε από (1), (3), Πρόταση 3.2.7, και (**ek**) του Ορισμού 3.2.4, προκύπτει και πάλι ότι $\mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\psi) \in \mathcal{N}(w)$.
Επομένως, απ' τον Ορισμό 3.2.6, έχουμε $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{E}\psi$.

PIE. Έστω ότι $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{E}\varphi$. Τότε (χρησιμοποιώντας συνεχώς τον Ορισμό 3.2.6), $\mathcal{R}(w) \cap \overline{V}(\varphi) \in \mathcal{N}(w)$, έτσι από την ιδιότητα (**pie**) του 3.2.4, $\mathcal{R}(w) \subseteq \{v \in W \mid \mathcal{R}(v) \cap \overline{V}(\varphi) \in \mathcal{N}(v)\}$, δηλ., $\mathcal{R}(w) \subseteq \overline{V}(\mathsf{E}\varphi)$, ή αλλιώς, $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{KE}\varphi$.

■

Τώρα προκύπτει τετριμμένως το επόμενο σημαντικό αποτέλεσμα.

Πόρισμα 3.3.2 *Η* **KBE** *είναι συνεπής.*

Αποδειξη. Αν ήταν αντιφατική, τότε $\perp \in$ **KBE**, άρα απ' το Θεώρημα ορθότητας 3.3.1, $\perp \in \Lambda_{kbe}$, δηλ. λόγω της Παρατήρησης 3.2.5, ο $\perp$ θα ήταν έγκυρος στο πλαίσιο $\mathfrak{F}_1$, πράγμα που είναι προφανώς άτοπο. ■

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την ορθότητα της **KBE** ως προς τα kbe-πλαίσια, μπορούμε να διαψεύσουμε αρκετούς τύπους που περιγράφουν ιδιότητες σχετιζόμενες με αυτογνωσία (όσες δεν είδαμε στην Παρατήρηση 3.1.4), καθώς και άλλες ιδιότητες των εκτιμήσεων που θα σχολιαστούν αμέσως μετά.

Παρατήρηση 3.3.3 *Υπάρχουν τύποι φ τ.π.*

i. $\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{B}\varphi \notin$ **KBE**

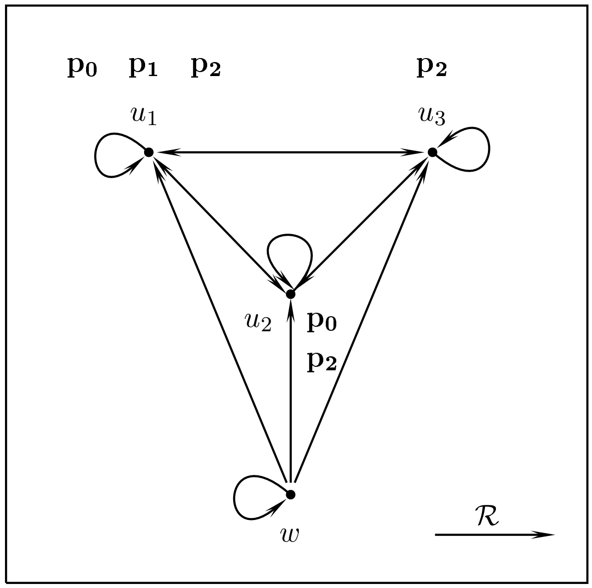
ii. $\neg\mathsf{B}\neg\varphi \supset \mathsf{B}\varphi \notin$ **KBE**

iii. $\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{KK}\varphi,\ \mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{KB}\varphi \notin$ **KBE**
$\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{BK}\varphi,\ \mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{BB}\varphi \notin$ **KBE**
$\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{EK}\varphi,\ \mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{EB}\varphi \notin$ **KBE**

iv. $\mathsf{EK}\varphi \supset \mathsf{K}\varphi \notin \mathbf{KBE}$

v. $\mathsf{E}\varphi \wedge \mathsf{E}(\varphi \supset \psi) \supset \mathsf{E}\psi \notin \mathbf{KBE}$

Απόδειξη. Έστω μοντέλο $\mathfrak{M}_1 = \langle \mathfrak{F}_1, V \rangle$ βασισμένο στο πλαίσιο $\mathfrak{F}_1 = \langle W, A, \mathcal{R}, \mathcal{N} \rangle$ της Παρατήρησης 3.2.5, με αποτίμηση V, η οποία είναι όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2. Απ' τη στιγμή



Σχήμα 3.2: Τα W, $\mathcal{R}$, και V του μοντέλου $\mathfrak{M}_1$

που $A = \mathcal{P}(W)$, η αποτίμηση V είναι αποδεκτή, κι αφού - σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.2.5 - το $\mathfrak{F}_1$ είναι kbe-πλαίσιο, το $\mathfrak{M}_1$ είναι kbe-μοντέλο. Έτσι, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.3.1, για να αποδειχθούν τα ζητούμενα αρκεί για κάθε περίπτωση να βρεθεί κόσμος τού $\mathfrak{M}_1$, στον οποίον να διαψεύδεται ο αντίστοιχος τύπος.

Κατ' αρχάς βλέπουμε ότι $\mathfrak{M}_1, w \Vdash \mathsf{E}p_0 \wedge \neg\mathsf{B}p_0 \wedge \neg\mathsf{B}\neg p_0 \wedge \mathsf{EK}p_2 \wedge \neg\mathsf{K}p_2 \wedge \mathsf{E}(p_0 \supset p_1) \wedge \neg\mathsf{E}p_1$, οπότε διαψεύδονται αμέσως οι περιπτώσεις i, ii, iv, και v.

Επίσης παρατηρούμε ότι $\mathfrak{M}_1, w \Vdash \mathsf{E}p_0 \wedge \neg\mathsf{EB}p_0$, άρα διαψεύδεται ο τύπος $\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{EB}\varphi$. Έτσι, λόγω των αξιωμάτων **KB** και **BE** καθώς και των κανόνων $\mathbf{RM}_{\mathsf{K}}$, $\mathbf{RM}_{\mathsf{B}}$[6], και $\mathbf{RM}_{\mathsf{E}}$ (από Παρατήρηση 3.1.3), αν κάποιος από τους υπόλοιπους τύπους της περίπτωσης iii ανήκε στην **KBE**, τότε θα ίσχυε $\vdash_{\mathbf{KBE}} \mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{EB}\varphi$, πράγμα άτοπο. Άρα διαψεύδονται όλοι οι τύποι της iii. ■

Θα ήθελα να προσθέσω λίγα σχόλια για τις ιδιότητες της προηγούμενης παρατήρησης που διαψεύστηκαν, προσπαθώντας να δω αν οι διαψεύσεις αυτές είναι διαισθητικές ή όχι.

Παρατήρηση 3.3.4 (i) *Κατ' αρχάς, σε αντιδιαστολή με το γεγονός ότι* $\mathsf{B}\varphi \supset \mathsf{E}\varphi \in \mathbf{KBE}$ *(δηλ. ότι οι πεποιθήσεις είναι εκτιμήσεις) θα περίμενε κάποιος μια λογική που περιγράφει με εύλογο τρόπο γνώσεις, πεποιθήσεις, και εκτιμήσεις (όπως η* **KBE***) να μην περιέχει το αντίστροφο, δηλ. το* $\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{B}\varphi$*, μια και οι εκτιμήσεις έχουν χαμηλότερο βαθμό βεβαιότητας από τις πεποιθήσεις. Αυτό ακριβώς αποδείχτηκε στο i της Παρατήρησης 3.3.3.*

[6]Για το ότι $\mathbf{KB} \in \mathbf{S4.2}$ – άρα και $\mathbf{KB} \in \mathbf{KBE}$ – βλ. Πρόταση 1.1.3. Για το ότι η **S4.2** – άρα και η **KBE** – είναι κλειστή ως προς $\mathbf{RM}_{\mathsf{B}}$, βλ. Υποσημείωση 3 στην απόδειξη της Παρατήρησης 3.1.4.

(ii) *Επίσης, παρόλο που* $\neg\mathsf{E}\varphi \equiv \mathsf{E}\neg\varphi \in \mathbf{KBE}$ *(δηλ. το να μην εκτιμώ ότι ισχύει κάτι είναι το ίδιο και το αυτό με το να εκτιμώ ότι δεν ισχύει) θα περίμενε κάποιος να μην ισχύει αυτό για τις πεποιθήσεις*[7] *(και φυσικά ούτε για τις γνώσεις) μια και – όπως αναφέρθηκε στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου, στο παράδειγμα με τους αγνωστικιστές – οι πεποιθήσεις (κι ακόμα περισσότερο οι γνώσεις) χτίζονται δύσκολα. Το ii της προηγούμενης παρατήρησης λέει αυτό ακριβώς· και φυσικά η παρατήρηση αυτή δεν ισχύει μόνο στην* **KBE** *αλλά και στην* $\mathbf{S4.2}+\mathbf{DB}$*, όπως μπορεί να φανεί εύκολα με ένα αντιπαράδειγμα*[8].

(iii) *Παρόλο που ο αντιλήπτορας έχει αυτογνωσία της εκτίμησης (και στους τρεις βαθμούς της, όπως είδαμε στο i της Παρατήρησης 3.1.4), το iii της Παρατήρησης 3.3.3 δείχνει ότι η εκτίμηση για κάτι δεν μπορεί να συνεπάγεται ότι ο αντιλήπτορας έχει επίγνωση (σε οποιοδήποτε βαθμό) μιας νοητικής κατάστασης ισχυρότερης της εκτίμησης. Πράγμα που φαντάζει εύλογο. Παραπέρα όμως θα μπορούσε να αναρωτηθεί κάποιος για ποιο λόγο δεν ισχύει αυτό και στην περίπτωση της μη εκτίμησης (Παρατήρηση 3.1.4(iii)). Γιατί εκεί είδαμε ότι η μη εκτίμηση για κάτι οδηγούσε τον αντιλήπτορα στο να έχει επίγνωση (και στους τρεις βαθμούς της) και της άγνοιας, και της μη πεποίθησης για αυτό. Κι αυτό όμως πρέπει να θεωρηθεί εύλογο, μόλις παρατηρήσουμε ότι η άγνοια και η μη πεποίθηση αποτελούν νοητικές καταστάσεις ασθενέστερες της μη εκτίμησης (αν δεν εκτιμώ ότι ισχύει κάτι, φυσικά και δεν το γνωρίζω, ούτε καν το πιστεύω). Έτσι, η μη εκτίμηση για κάτι είναι λογικό να συνεπάγεται την επίγνωση του αντιλήπτορα και για την άγνοια, και για τη μη πεποίθησή του για αυτό.*

Από τους τύπους του iii της Παρατήρησης 3.3.3 θα ήθελα να σταθώ για λίγο ειδικά στον $\mathsf{E}\varphi \supset \mathsf{EK}\varphi$. *Μετά απ' ό,τι ειπώθηκε στην εισαγωγή του παρόντος κεφαλαίου, το γεγονός ότι δεν ανήκει στη λογική* **KBE** *είναι καλοδεχούμενο. Επίσης, ας σημειωθεί ότι αν ο τύπος αυτός ανήκε στην* **KBE***, υπό το φως του ότι* $\mathsf{EK}\varphi \supset \mathsf{B}\varphi \in \mathbf{KBE}$ *(Παρατήρηση 3.1.4(v)) και του* **BE***, θα προέκυπτε ότι* $\mathsf{E}\varphi \equiv \mathsf{B}\varphi \in \mathbf{KBE}$*, οπότε θα κατέρρεε η προσπάθειά μας να οριστεί η εκτίμηση ως κάτι ασθενέστερο της πεποίθησης.*

(iv) *Παρομοίως, είναι καλοδεχούμενο το ότι διαψεύδεται στο iv ο τύπος* $\mathsf{EK}\varphi \supset \mathsf{K}\varphi$. *Μοιάζει με το* 'infallibility argument' *ή αλλιώς* 'paradox of the perfect believer' *[13, Κεφ.2.4] και μάλιστα σε ακόμα ισχυρότερη εκδοχή, αφού υπό το φως του* **T** *περιγράφει ότι για να είναι κάτι αληθές αρκεί απλώς και μόνο να εκτιμά ο αντιλήπτορας ότι το γνωρίζει...*

(v) *Τέλος, ο τύπος του v είναι ουσιαστικά το αντίστοιχο του αξιώματος* **K** *για τον τελεστή* E. *Απ' τη στιγμή που τόσο το* **K** *όσο και το αντίστοιχό του για τον τελεστή* B *ανήκουν στην* **KBE** *(βλ. Παράγραφο 1.1 και κυρίως την Πρόταση 1.1.3), κι απ' τη στιγμή που ίσως να φαντάζει εύλογο να θεωρήσουμε ότι αν εκτιμώ κάτι, κι αν εκτιμώ ότι αυτό συνεπάγεται κάτι δεύτερο, τότε πρέπει να εκτιμώ και το δεύτερο, θα έπρεπε ο τύπος του v να ανήκει στην* **KBE**. *Είναι όμως αυτός ο συλλογισμός έγκυρος; Ας θυμηθούμε ότι έχουμε κατά νου να ερμηνεύσουμε το «εκτιμώ κάτι» ως «θεωρώ πιο πιθανό να ισχύει αυτό παρά να μην ισχύει», κι ας δούμε ένα παράδειγμα.*

Ας θεωρήσουμε ένα φανάρι ρύθμισης κυκλοφορίας, στο οποίο το κόκκινο είναι περισσότερο χρόνο αναμμένο απ' ό,τι είναι σβηστό, κι ότι το πορτοκαλί διαρκεί πάρα πολύ λίγο σχετικά με τα άλλα χρώματα. Έτσι, είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι όταν πλησιάζει κάποιος στο φανάρι, πρέπει να εκτιμά ότι θα το βρει κόκκινο (r*), με την έννοια ότι αυτό είναι πιο πιθανό, δηλ. ότι ισχύει* $\mathsf{E}r$. *Ας θεωρήσουμε επίσης ότι το φανάρι λειτουργεί όπως στο εξωτερικό, όπου το πορτοκαλί ανάβει όχι μόνο όταν ακολουθεί κόκκινο, αλλά και για λίγο μαζί με το κόκκινο όταν*

---

[7] Εννοώ η κατεύθυνση από αριστερά προς τα δεξιά, διότι η άλλη ισχύει λόγω του αξιώματος **CB**.

[8] Αν θεωρήσουμε επιστημικό μοντέλο όπως στο Σχήμα 1.5 της Παραγράφου 1.3, στο οποίο να έχουν προστεθεί οι ακμές $v\mathcal{R}u$ και $u\mathcal{R}v$ – για να γίνει $\mathbf{S4.2}$-πλαίσιο – και στο οποίο να ισχύει η p_0 μόνο στον κόσμο v. Τότε στο w δεν ισχύει ούτε $\mathsf{B}p_0$, ούτε $\mathsf{B}\neg p_0$.

ακολουθεί πράσινο, έτσι ώστε ο χρόνος που διαρκεί το πράσινο, μαζί με το χρόνο που διαρκεί το πορτοκαλί, να είναι συνολικά κατά τι περισσότερος απ' το χρόνο του κόκκινου. Άρα, κάποιος εκτιμά ότι ισχύει κι αυτό. Ότι δηλ. το φανάρι δεν θα το βρει κόκκινο ή θα βρει αναμμένο το πορτοκαλί (y). Αυτό σημαίνει ότι ισχύει $\mathsf{E}(\neg r \vee y)$, δηλ. $\mathsf{E}(r \supset y)$). Αν λοιπόν ήταν έγκυρο το αξίωμα **K** *για τον τελεστή* E, *θα 'πρεπε να συμπεράνουμε ότι ισχύει* $\mathsf{E}y$. *Όμως, δεν πρέπει να θεωρούμε λογικό να εκτιμά κάποιος που φτάνει στο φανάρι ότι θα το βρει πορτοκαλί, μια και αυτό είναι κάτι σπάνιο...*

Πριν προχωρήσουμε στην πληρότητα της **KBE** ως προς τα kbe-πλαίσια, ας σταθούμε λίγο στο εξής. Παρατηρώντας κάποιος τις ιδιότητες (**cce**) και (**ek**), και συγκρίνοντάς τις με ό,τι ειπώθηκε στην Παράγραφο 3.2 και κυρίως με τις ιδιότητες (**wu1**) και (**wu2**) του Ορισμού 3.2.2 των ασθενών υπερφίλτρων, βλέπει ότι σχετίζονται άμεσα με τον ορισμό των πλειονοτήτων. Όμως, η ιδιότητα (**pie**) που σύμφωνα με το Θεώρημα Πληρότητας 3.3.1 αντιστοιχεί στο αξίωμα **PIE**, δεν φαίνεται να εμπλέκεται στον ορισμό αυτόν. Προκύπτει λοιπόν το εύλογο ερώτημα, μήπως δεν είναι απαραίτητο να απαιτήσουμε ρητώς από τα kbe-πλαίσια να την ικανοποιούν, μήπως τελικά προκύπτει από τις υπόλοιπες ιδιότητες, μήπως δηλ. το αξίωμα **PIE** αποδεικνύεται από τα υπόλοιπα της **KBE**; Το ακόλουθο πόρισμα το ξεκαθαρίζει.

Πόρισμα 3.3.5 *Το αξίωμα* **PIE** *είναι ανεξάρτητο των υπολοίπων της* **KBE**.

Απόδειξη. Έστω **KBE**$^-$ η λογική που ορίζεται όπως η **KBE** στον Ορισμό 3.1.1 χωρίς όμως το αξίωμα **PIE**. Θα αποδείξουμε ότι **PIE** $\notin$ **KBE**$^-$. Κατ' αρχάς, ας ονομάσουμε kbe$^-$-πλαίσια εκείνα που έχουν όλες τις ιδιότητες των kbe-πλαισίων (Ορισμός 3.2.4) εκτός της (**pie**). Ακολουθώντας την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1 και παραλείποντας μόνο την περίπτωση του αξιώματος **PIE**, βλέπουμε αμέσως ότι η **KBE**$^-$ είναι ορθή ως προς τα kbe$^-$-πλαίσια. Έτσι, αρκεί να βρούμε κάποιο kbe$^-$-πλαίσιο, στο οποίο το **PIE** να μην είναι έγκυρο. Έστω λοιπόν το μοντέλο $\mathfrak{M}^- = \langle W, A, \mathcal{R}, \mathcal{N}, V \rangle$ με σύνολο κόσμων $W = \{w, v, u_1, u_2, u_3\}$, και με σχέση $\mathcal{R}$ και αποτίμηση V όπως φαίνονται στο Σχήμα 3.3.

Έστω επίσης $A = \mathcal{P}(W)$ και

$\mathcal{N}(w) = \{X \subseteq W \mid |X| \geq 3\}$

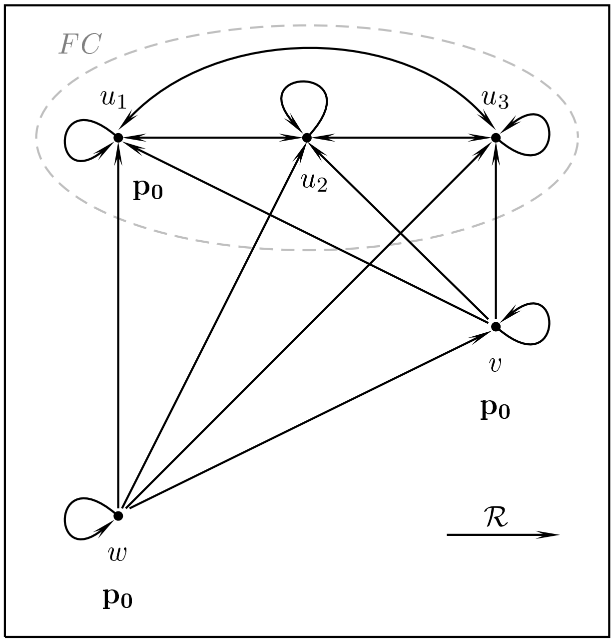
$\mathcal{N}(v) = \big\{X \subseteq \{v, u_1, u_2, u_3\} \mid |X| \geq 3\big\} \cup \big\{\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\}, \{u_1, v\}\big\}$

$\mathcal{N}(u_1) = \mathcal{N}(u_2) = \mathcal{N}(u_3) = \{X \subseteq FC \mid |X| \geq 2\}$, όπου φυσικά $FC = \{u_1, u_2, u_3\}$ είναι το τελικό σύμπλοκο του **S4.2**-μοντέλου $\langle W, \mathcal{R} \rangle$.

Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι ισχύουν όλες οι ιδιότητες του Ορισμού 3.2.4 εκτός της (**pie**), κι έτσι να αποδειχθεί ότι το υποκείμενο πλαίσιο του $\mathfrak{M}^-$ είναι ένα kbe$^-$-πλαίσιο. Επιπροσθέτως, απ' τη στιγμή που $A = \mathcal{P}(W)$, η αποτίμηση V είναι αποδεκτή, κι έτσι το $\mathfrak{M}^-$ αποτελεί ένα kbe$^-$-μοντέλο. Τέλος, φαίνεται εύκολα ότι $\mathfrak{M}^-, w \Vdash \mathsf{E}p_0 \wedge \neg \mathsf{KE}p_0$. ∎

3.4 Πληρότητα της KBE

Στην παράγραφο αυτή θα αποδειχθεί η πληρότητα της **KBE** ως προς τα kbe-πλαίσια. Θα χρειαστούμε όμως μια σειρά από ορισμούς και λήμματα, στα οποία για λόγους ευκολίας θα συμβολίζω με Λ τη λογική μας **KBE**. Επίσης, θα χρησιμοποιώ τις συντομογραφίες $\sigma\Lambda$, $\alpha\Lambda$, και $\mu\sigma\Lambda$ για να περιγράψω θεωρίες συνεπείς με τη Λ, αντιφατικές με τη Λ, και μεγιστικώς



Σχήμα 3.3: Τα W, $\mathcal{R}$, και V του μοντέλου $\mathfrak{M}^-$

συνεπείς με τη Λ αντιστοίχως[9]. Μια και η απόδειξη θα γίνει μέσω της γνωστής μεθόδου της κανονιστικότητας, ξεκινώ με το κανονιστικό (canonical) μοντέλο της Λ.

Ορισμός 3.4.1 *Το* κανονιστικό μοντέλο $\mathfrak{M}^\Lambda$ *της* Λ *είναι η πεντάδα*

$$\langle W^\Lambda, A^\Lambda, \mathcal{R}^\Lambda, \mathcal{N}^\Lambda, V^\Lambda \rangle$$

όπου

i. $W^\Lambda = \{\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{KBE} \mid \Gamma : \mu\sigma\Lambda\}$

ii. $A^\Lambda = \{\Theta \subseteq W^\Lambda \mid (\exists \varphi \in \mathcal{L}_{KBE})\ \Theta = [\varphi]\}$
όπου
$[\varphi] = \{\Delta \in W^\Lambda \mid \varphi \in \Delta\}$.

iii. $\mathcal{R}^\Lambda = \{(\Gamma, \Delta) \in W^\Lambda \times W^\Lambda \mid (\forall \varphi \in \mathcal{L}_{KBE})(\mathsf{K}\varphi \in \Gamma \Rightarrow \varphi \in \Delta)\}$

iv. $(\forall \Gamma \in W^\Lambda)$
$\mathcal{N}^\Lambda(\Gamma) = \{\mathcal{R}^\Lambda(\Gamma) \cap \Theta \subseteq W^\Lambda \mid (\exists \varphi \in \mathcal{L}_{KBE})(\Theta = [\varphi]\ \&\ \mathsf{E}\varphi \in \Gamma)\} \cup \{\Sigma\}$
όπου
$\Sigma = \{\Delta \in W^\Lambda \mid (\forall \varphi \in \mathcal{L}_{KBE})\ \varphi \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{K}\neg\varphi \in \Delta\}$

v. $(\forall p \in \Phi)\ V^\Lambda(p) = [p]$

Το πλαίσιο $\mathfrak{F}^\Lambda$ *που είναι υποκείμενο τού μοντέλου* $\mathfrak{M}^\Lambda$ *ονομάζεται* κανονιστικό πλαίσιο *της* Λ.

---

[9] Για το τι σημαίνει ότι μια θεωρία I είναι συνεπής με την τροπική λογική Λ (πράγμα που είπαμε ότι σημειώνεται ως $\sigma\Lambda$), ισχύει ακριβώς ό,τι ειπώθηκε στην Υποσημείωση 6 του Λήμματος 2.2.13, δηλ. ότι σημαίνει $I \nvdash_\Lambda \bot$. Υπενθυμίζεται όμως (πβ. Υποσημείωση 2 στην Παρατήρηση 3.3.3) ότι το $\vdash$ συμβολίζει (στο παρόν και στο επόμενο κεφάλαιο) ασθενή αποδειξιμότητα.

Μια θεωρία Γ θα καλείται *μεγιστικώς συνεπής με τη* Λ (συμβ. $\mu\sigma\Lambda$) ανν αποτελεί $\sigma\Lambda$-θεωρία και για κάθε $\varphi \notin \Gamma$, η $\Gamma \cup \{\varphi\}$ δεν είναι $\sigma\Lambda$-θεωρία.

Ξεκινώ με ένα κλασικό λήμμα (που ισχύει για κάθε τροπική λογική Λ).

Λήμμα 3.4.2 (Lindenbaum) *Έστω T μια σΛ-θεωρία. Τότε, υπάρχει μσΛ-θεωρία Γ τ.π. $T \subseteq \Gamma$.*

Απόδειξη. βλ. [3, σελ.197] ∎

Έτσι μπορούμε να πιστοποιήσουμε ότι όντως το $\mathfrak{M}^\Lambda$ υπάρχει.

Παρατήρηση 3.4.3 $W^\Lambda \neq \varnothing$

Απόδειξη. Λόγω του Πορίσματος 3.3.2, η Λ είναι συνεπής, άρα η $\{\top\}$ είναι σΛ-θεωρία, οπότε από το Λήμμα του Lindenbaum 3.4.2, υπάρχει μσΛ-θεωρία (που περιέχει το $\top$), κι έτσι, $W^\Lambda \neq \varnothing$. ∎

Το επόμενο κλασικό Λήμμα ισχύει για κάθε τροπική λογική.

Λήμμα 3.4.4 $(\forall \Gamma \in W^\Lambda)(\forall \varphi, \psi \in \mathcal{L}_{KBE})$

i. *Αν $\varphi, \varphi \supset \psi \in \Gamma$, τότε $\psi \in \Gamma$*

ii. $\varphi \in \Gamma$ *ή* $\neg\varphi \in \Gamma$

iii. *Αν $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, τότε $\varphi \in \Gamma$ ή $\psi \in \Gamma$*

Επίσης,

iv. $(\forall \varphi \in \mathcal{L}_{KBE})\big(\varphi \in \Lambda \iff (\forall \Gamma \in W^\Lambda)\ \varphi \in \Gamma\big)$

Απόδειξη. βλ. [5, σελ.53] ∎

Έπεται μια χρήσιμη παραλλαγή του ορισμού της $\mathcal{R}^\Lambda$, την οποία και παραθέτω δίχως απόδειξη, μια και είναι άμεση συνέπεια του ορισμού και του προηγούμενου Λήμματος 3.4.4(ii).

Παρατήρηση 3.4.5 $(\forall \Gamma, \Delta \in W^\Lambda)\big(\Gamma \mathcal{R}^\Lambda \Delta \iff (\forall \varphi \in \mathcal{L}_{KBE})(\varphi \in \Delta \Rightarrow \neg\mathsf{K}\neg\varphi \in \Gamma)\big)$

Το επόμενο κλασικό Λήμμα ισχύει για κάθε κανονική, τροπική λογική.

Λήμμα 3.4.6 (Existence Lemma) $(\forall \Gamma \in W^\Lambda)(\forall \varphi \in \mathcal{L}_{KBE})$

$$\neg\mathsf{K}\neg\varphi \in \Gamma \iff (\exists \Delta \in W^\Lambda)(\Delta \in \mathcal{R}^\Lambda(\Gamma)\ \&\ \varphi \in \Delta)$$

ή ισοδύναμα

$$\mathsf{K}\varphi \in \Gamma \iff (\forall \Delta \in W^\Lambda)(\Delta \in \mathcal{R}^\Lambda(\Gamma) \Rightarrow \varphi \in \Delta)$$

Απόδειξη. βλ. [3, σελ.198] ∎

Λήμμα 3.4.7 $(\forall \Gamma \in W^\Lambda)(\forall \varphi, \psi \in \mathcal{L}_{KBE})$

$$(\mathcal{R}^\Lambda(\Gamma) \cap [\varphi] \subseteq \mathcal{R}^\Lambda(\Gamma) \cap [\psi]\ \ \&\ \mathsf{E}\varphi \in \Gamma) \implies \mathsf{E}\psi \in \Gamma$$

Αποδειξη. Θεωρώντας ότι ισχύει η υπόθεση, έχουμε

$$(\forall \Delta \in W^{\Lambda})\big((\Delta \in \mathcal{R}^{\Lambda}(\Gamma) \ \& \ \varphi \in \Delta) \Rightarrow \psi \in \Delta\big)$$

Έτσι, απ' το Λήμμα 3.4.4,

$$(\forall \Delta \in W^{\Lambda})(\Delta \in \mathcal{R}^{\Lambda}(\Gamma) \Rightarrow \varphi \supset \psi \in \Delta)$$

Οπότε, λόγω του Λήμματος 3.4.6, $\mathsf{K}(\varphi \supset \psi) \in \Gamma$. Όμως, εξ υποθέσεως, $\mathsf{E}\varphi \in \Gamma$. Επίσης, $\mathbf{EK} \in \Lambda$, καθώς και, λόγω 3.4.4, $\Lambda \subseteq \Gamma$. Έτσι, από 3.4.4(i), $\mathsf{E}\psi \in \Gamma$. ■

Λήμμα 3.4.8 *Έστω το σύνολο $FC = \{\Delta \in W^{\Lambda} \mid (\forall \Gamma \in W^{\Lambda})\ \Gamma\mathcal{R}^{\Lambda}\Delta\}$, καθώς και το Σ του Ορισμού 3.4.1. Τότε*

i. $|\Sigma| \geq \omega$

ii. $\Sigma = FC$

iii. $(\forall \Delta \in \Sigma)(\forall z \in W^{\Lambda})(\Delta\mathcal{R}^{\Lambda}z \Rightarrow z \in \Sigma)$

iv. $(\forall \Gamma \in W^{\Lambda})(\forall \varphi \in \mathcal{L}_{KBE})(\Sigma \subseteq \mathcal{R}^{\Lambda}(\Gamma) \cap [\varphi] \Rightarrow \mathsf{E}\varphi \in \Gamma)$

Αποδειξη.

i. Κατ' αρχάς, θα χρειαστεί να δείξουμε ότι $\mathsf{B}(\varphi \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{K}\neg\varphi) \in \Lambda$.

1.	$\neg\mathsf{B}\neg\varphi \vee \mathsf{B}\neg\varphi$	$\mathbf{PC}$
2.	$\mathsf{K}\neg\mathsf{B}\neg\varphi \vee \mathsf{B}\neg\varphi$	$1, \mathbf{NIB}, \mathbf{PC}, \mathbf{MP}$
3.	$\mathsf{B}\neg\mathsf{B}\neg\varphi \vee \mathsf{B}\neg\varphi$	$2, \mathbf{KB}, \mathbf{PC}, \mathbf{MP}$
4.	$\mathsf{B}(\neg\mathsf{B}\neg\varphi \vee \neg\varphi)$	$3, \mathbf{DB}, \mathbf{RM}_{\mathsf{K}}, \mathbf{PC}, \mathbf{MP}$
5.	$\neg\mathsf{B}\neg\varphi \vee \neg\varphi \supset (\varphi \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{K}\neg\varphi)$	$4, \mathbf{DB}, \mathbf{PC}, \mathbf{MP}$
6.	$\mathsf{B}(\neg\mathsf{B}\neg\varphi \vee \neg\varphi) \supset \mathsf{B}(\varphi \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{K}\neg\varphi)$	$5, \mathbf{RM}_{\mathsf{B}}$
7.	$\mathsf{B}(\varphi \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{K}\neg\varphi)$	$4, 6, \mathbf{MP}$

Έστω τώρα οι θεωρίες $T = \{\varphi \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{K}\neg\varphi \mid \varphi \in \mathcal{L}_{KBE}\}$ και $T_j = T \cup \{\neg p_j\} \cup \{p_i \in \Phi \mid i \in \mathbb{N}\backslash\{j\}\}$ $(\forall j \in \mathbb{N})$. Ας υποθέσουμε, προς άτοπο, ότι η T_j είναι μια αΛ-θεωρία, δηλ. ότι $T_j \vdash_{\Lambda} \bot$. Αυτό όμως θα σήμαινε ότι θα υπήρχαν $\psi_1, \ldots, \psi_n \in T_j$ τ.π. $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \supset \bot \in \Lambda$. Στη γενικότερη περίπτωση (οι υπόλοιπες αντιμετωπίζονται ομοίως) θα ισχύει

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq m} (\varphi_i^{(1)} \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{K}\neg\varphi_i^{(1)}) \wedge \neg p_j \wedge p_{i_1} \wedge \ldots \wedge p_{i_k} \supset \bot \in \Lambda$$

(όπου φυσικά $n = m + k + 1$). Τότε όμως, απ' τη μια θα είχαμε

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq m} (\varphi_i^{(1)} \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{K}\neg\varphi_i^{(1)}) \wedge p_{i_1} \wedge \ldots \wedge p_{i_k} \supset p_j \in \Lambda$$

ενώ απ' την άλλη, εφαρμόζοντας τον κανόνα ομοιόμορφης αντικατάστασης (αντικαθιστώντας το p_j με $\neg p_j$)

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq m} (\varphi_i^{(2)} \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{K}\neg\varphi_i^{(2)}) \wedge p_{i_1} \wedge \ldots \wedge p_{i_k} \supset \neg p_j \in \Lambda$$

οπότε

$$\bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq r \leq 2}} (\varphi_i^{(r)} \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{K}\neg\varphi_i^{(r)}) \wedge p_{i_1} \wedge \ldots \wedge p_{i_k} \supset \bot \in \Lambda$$

Κάνοντας τώρα k το πλήθος ομοιόμορφες αντικαταστάσεις, αντικαθιστώντας κάθε p_{i_s} με το $\neg p_{i_s}$ $(1 \leq s \leq k)$, προκύπτει όπως προηγουμένως[10]

[10] Στην πραγματικότητα προκύπτει με μια επαγωγή στο k.

$$\bigwedge_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq r\leq 2^{k+1}}} (\varphi_i^{(r)} \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{K}\neg\varphi_i^{(r)}) \supset \bot \in \Lambda$$

Όμως, με χρήση των **DB**, $\mathbf{RM}_{\mathsf{K}}$, **PC**, και **MP** θα προέκυπτε ότι

$$\bigwedge_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq r\leq 2^{k+1}}} \mathsf{B}(\varphi_i^{(r)} \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{K}\neg\varphi_i^{(r)}) \supset \mathsf{B}\bot \in \Lambda$$

Οπότε, με βοήθεια της αρχικής τυπικής απόδειξης, $\mathsf{B}\bot \in \Lambda$, δηλ. από **CB** και **DB**, $\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\top \in \Lambda$, ή από **T**, $\neg\mathsf{K}\top \in \Lambda$. Όμως προφανώς, $\top \in \Lambda$, κι έτσι από $\mathbf{RN}_{\mathsf{K}}$, $\mathsf{K}\top \in \Lambda$, οπότε η Λ είναι αντιφατική, πράγμα που είναι άτοπο λόγω Πορίσματος 3.3.2. Άρα, για κάθε $j \in \mathbb{N}$, η T_j είναι $\sigma\Lambda$, κι έτσι, απ' το Λήμμα του Lindenbaum 3.4.2, υπάρχουν $\mu\sigma\Lambda$-θεωρίες Δ_j, κάθε μια απ' τις οποίες περιέχει την T_j, άρα και την T, πράγμα που σημαίνει ότι $\Delta_j \in \Sigma$. Έστω τώρα $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$ τ.π. $j_1 \neq j_2$. Αν ίσχυε $\Delta_{j_1} = \Delta_{j_2}$, τότε $\neg p_{j_1} \in \Delta_{j_2}$, πράγμα που είναι προφανώς άτοπο, αφού $p_{j_1} \in \Delta_{j_2}$ και η Δ_{j_2} είναι συνεπής θεωρία. Έτσι, οι Δ_j είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους, κι έτσι το Σ περιέχει αριθμησίμως άπειρες το πλήθος θεωρίες.

ii. ($\subseteq$) Έστω $\Delta \in \Sigma$ και $\Gamma \in W^{\Lambda}$. Επειδή το αξίωμα **G** (που υπό το φως του **DB** είναι ισοδύναμο με το **CB**) είναι κανονιστικό για την ιδιότητα της κατευθυνσιμότητας (βλ. [5, σελ.182]), οποιαδήποτε κανονική λογική το περιέχει θα έχει κατευθυνόμενο, κανονιστικό μοντέλο. Άρα, η $\mathcal{R}^{\Lambda}$ είναι κατευθυνόμενη, που σημαίνει ότι θα υπάρχει $\mathsf{Z} \in W^{\Lambda}$ τ.π. $\Gamma\mathcal{R}^{\Lambda}\mathsf{Z}$ και $\Delta\mathcal{R}^{\Lambda}\mathsf{Z}$. Έστω τώρα τυχαίο $\varphi \in \Delta$. Επειδή $\Delta \in \Sigma$, από 3.4.4(i), $\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\neg\varphi \in \Delta$, κι απ' τη στιγμή που $\Delta\mathcal{R}^{\Lambda}\mathsf{Z}$, εκ του Ορισμού 3.4.1(iii), $\neg\mathsf{K}\neg\varphi \in \mathsf{Z}$. Έτσι, απ' την Παρατήρηση 3.4.5 έπεται ότι $\mathsf{Z}\mathcal{R}^{\Lambda}\Delta$. Όμως, το αξίωμα **4** είναι κανονιστικό για την ιδιότητα της μεταβατικότητας (βλ. [3, σελ.204]), έτσι η $\mathcal{R}^{\Lambda}$ είναι μεταβατική, κι αφού $\Gamma\mathcal{R}^{\Lambda}\mathsf{Z}$, θα ισχύει $\Gamma\mathcal{R}^{\Lambda}\Delta$. Άρα, $\Delta \in FC$.

($\supseteq$) Έστω $\Delta \in FC$ και $\varphi \in \mathcal{L}_{KBE}$. Αν $\neg\varphi \in \Delta$, τότε, από 3.4.4, $\varphi \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{K}\neg\varphi \in \Delta$. Αν $\neg\varphi \notin \Delta$, τότε, και πάλι από 3.4.4, $\varphi \in \Delta$. Έστω τώρα τυχαίο $\mathsf{Z} \in W^{\Lambda}$ τ.π. $\Delta\mathcal{R}^{\Lambda}\mathsf{Z}$. Αφού $\Delta \in FC$, θα ισχύει $\mathsf{Z}\mathcal{R}^{\Lambda}\Delta$, κι επειδή $\varphi \in \Delta$, από Παρατήρηση 3.4.5, $\neg\mathsf{K}\neg\varphi \in \mathsf{Z}$. Έτσι, απ' το Λήμμα 3.4.6 προκύπτει ότι $\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\neg\varphi \in \Delta$, ή από Λήμμα 3.4.4, $\varphi \wedge \mathsf{K}\neg\mathsf{K}\neg\varphi \in \Delta$, άρα και πάλι, $\varphi \supset \mathsf{K}\neg\mathsf{K}\neg\varphi \in \Delta$. Συνεπώς, $\Delta \in \Sigma$.

iii. Έστω $\Delta \in \Sigma$ καθώς και $\mathsf{Z} \in W^{\Lambda}$ τ.π. $\Delta\mathcal{R}^{\Lambda}\mathsf{Z}$. Έστω επίσης και τυχαίο $\Gamma \in W^{\Lambda}$. Επειδή όμως $\Delta \in \Sigma$, από το ii, $\Delta \in FC$, δηλ. $\Gamma\mathcal{R}^{\Lambda}\Delta$. Κι επειδή, όπως ειπώθηκε και στο ii, η $\mathcal{R}^{\Lambda}$ είναι μεταβατική, $\Gamma\mathcal{R}^{\Lambda}\mathsf{Z}$, που σημαίνει ότι $\mathsf{Z} \in FC$, ή απ' το ii, $\mathsf{Z} \in \Sigma$.

iv. Ας θεωρήσουμε τυχαία $\Gamma \in W^{\Lambda}$ και $\varphi \in \mathcal{L}_{KBE}$ τ.π. $\Sigma \subseteq \mathcal{R}^{\Lambda}(\Gamma) \cap [\varphi]$. Από i, υπάρχει κάποιο $\Delta \in \Sigma$, δηλ. από ii, $\Delta \in FC$, άρα, $\Gamma\mathcal{R}^{\Lambda}\Delta$. Έστω στη συνέχεια και τυχαίο $\mathsf{Z} \in W^{\Lambda}$ τ.π. $\Delta\mathcal{R}^{\Lambda}\mathsf{Z}$. Τότε, από iii, $\mathsf{Z} \in \Sigma$, δηλ. εξ υποθέσεως, $\mathsf{Z} \in [\varphi]$, ή $\varphi \in \mathsf{Z}$. Αυτό όμως συνεπάγεται, από Λήμμα 3.4.6, ότι $\mathsf{K}\varphi \in \Delta$. Δηλ. βρέθηκε $\Delta \in W^{\Lambda}$ τ.π. $\Gamma\mathcal{R}^{\Lambda}\Delta$ και $\mathsf{K}\varphi \in \Delta$. Έτσι και πάλι από το Λήμμα 3.4.6, $\neg\mathsf{K}\neg\mathsf{K}\varphi \in \Gamma$, ή από **DB**, $\mathsf{B}\varphi \in \Gamma$, και τέλος, από το αξίωμα **BE** κι απ' το Λήμμα 3.4.4, $\mathsf{E}\varphi \in \Gamma$. ∎

Πόρισμα 3.4.9 $(\forall \Gamma \in W^{\Lambda})(\forall \varphi \in \mathcal{L}_{KBE})(\mathcal{R}^{\Lambda}(\Gamma) \cap [\varphi] \in \mathcal{N}^{\Lambda}(\Gamma) \iff \mathsf{E}\varphi \in \Gamma)$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε κατ' αρχάς ότι $\mathcal{R}^{\Lambda}(\Gamma) \cap [\varphi] \in \mathcal{N}^{\Lambda}(\Gamma)$. Τότε έχουμε δύο περιπτώσεις:

- Υπάρχει $\psi \in \mathcal{L}_{KBE}$ τ.π. $\mathcal{R}^{\Lambda}(\Gamma) \cap [\varphi] = \mathcal{R}^{\Lambda}(\Gamma) \cap [\psi]$ και $\mathsf{E}\psi \in \Gamma$.
  Όμως τότε, απ' το Λήμμα 3.4.7, $\mathsf{E}\varphi \in \Gamma$.
- $\mathcal{R}^{\Lambda}(\Gamma) \cap [\varphi] = \Sigma$. Τότε, απ' ευθείας απ' το Λήμμα 3.4.8(iv), και πάλι $\mathsf{E}\varphi \in \Gamma$.

Αντιστρόφως, αν $\mathsf{E}\varphi \in \Gamma$, τότε προκύπτει αμέσως απ' τον Ορισμό 3.4.1(iv), $\mathcal{R}^\Lambda(\Gamma)\cap[\varphi] \in \mathcal{N}^\Lambda(\Gamma)$. ∎

Λήμμα 3.4.10 (Truth Lemma) $(\forall \Gamma \in W^\Lambda)(\forall \varphi \in \mathcal{L}_{KBE})$

$$\mathfrak{M}^\Lambda, \Gamma \Vdash \varphi \iff \varphi \in \Gamma$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στην πολυπλοκότητα των τύπων. Απ' τη στιγμή που η επαγωγική βάση έπεται αμέσως απ' τον ορισμό της V^Λ κι απ' το Λήμμα 3.4.4 (για το $\bot$) και το επαγωγικό βήμα για το $\supset$ είναι άμεση συνέπεια της επαγωγικής υπόθεσης, επικεντρωνόμαστε στις περιπτώσεις των τελεστών.

$$\mathfrak{M}^\Lambda, \Gamma \Vdash \mathsf{K}\varphi \overset{\text{Ορ. 3.2.6}}{\iff} (\forall \Delta \in W^\Lambda)(\Delta \in \mathcal{R}^\Lambda(\Gamma) \Rightarrow \mathfrak{M}^\Lambda, \Delta \Vdash \varphi) \overset{\text{Επαγ.Υπόθ.}}{\iff}$$
$$(\forall \Delta \in W^\Lambda)(\Delta \in \mathcal{R}^\Lambda(\Gamma) \Rightarrow \varphi \in \Delta) \overset{\text{Λήμμα 3.4.6}}{\iff} \mathsf{K}\varphi \in \Gamma$$

Πριν συνεχίσουμε με τη δεύτερη περίπτωση, ας παρατηρήσουμε ότι $(\forall \Delta \in W^\Lambda)$

$$\Delta \in \overline{V^\Lambda}(\varphi) \iff \mathfrak{M}^\Lambda, \Delta \Vdash \varphi \overset{\text{Επαγ.Υπόθ.}}{\iff} \varphi \in \Delta \iff \Delta \in [\varphi]$$

κι έτσι

$$\overline{V^\Lambda}(\varphi) = [\varphi] \qquad (*)$$

Έχουμε λοιπόν

$$\mathfrak{M}^\Lambda, \Gamma \Vdash \mathsf{E}\varphi \overset{\text{Ορ. 3.2.6}}{\iff} \mathcal{R}^\Lambda(\Gamma) \cap \overline{V^\Lambda}(\varphi) \in \mathcal{N}^\Lambda(\Gamma) \overset{(*)}{\iff} \mathcal{R}^\Lambda(\Gamma) \cap [\varphi] \in \mathcal{N}^\Lambda(\Gamma) \overset{\text{Πόρ. 3.4.9}}{\iff} \mathsf{E}\varphi \in \Gamma$$

∎

Λήμμα 3.4.11 $(\forall \varphi, \psi \mathcal{L}_{KBE})$

i. $W^\Lambda \setminus [\varphi] = [\neg\varphi]$

ii. $[\varphi] \cup [\psi] = [\varphi \vee \psi]$

iii. $\{\Gamma \in W^\Lambda \mid \mathcal{R}^\Lambda(\Gamma) \subseteq [\varphi]\} = [\mathsf{K}\varphi]$

iv. $\{\Gamma \in W^\Lambda \mid \mathcal{R}^\Lambda(\Gamma) \cap [\varphi] \in \mathcal{N}^\Lambda(\Gamma)\} = [\mathsf{E}\varphi]$

Απόδειξη. Έστω τυχαίο $\Gamma \in W^\Lambda$.

i. $\Gamma \in W^\Lambda \setminus [\varphi] \iff \varphi \notin \Gamma \overset{\text{Λήμμα 3.4.4(ii)}}{\iff} \neg\varphi \in \Gamma \iff \Gamma \in [\neg\varphi]$

ii. $\Gamma \in [\varphi] \cup [\psi] \iff (\Gamma \in [\varphi] \text{ ή } \Gamma \in [\psi]) \iff (\varphi \in \Gamma \text{ ή } \psi \in \Gamma) \overset{\text{Λήμμα 3.4.4(iii)}}{\iff}$
$\varphi \vee \psi \in \Gamma \iff \Gamma \in [\varphi \vee \psi]$

iii. $\mathcal{R}^\Lambda(\Gamma) \subseteq [\varphi] \iff (\forall \Delta \in W^\Lambda)(\Delta \in \mathcal{R}^\Lambda(\Gamma) \Rightarrow \Delta \in [\varphi]) \iff$
$(\forall \Delta \in W^\Lambda)(\Delta \in \mathcal{R}^\Lambda(\Gamma) \Rightarrow \varphi \in \Delta) \overset{\text{Λήμμα 3.4.6}}{\iff} \mathsf{K}\varphi \in \Gamma \iff \Gamma \in [\mathsf{K}\varphi]$

iv. $\mathcal{R}^\Lambda(\Gamma) \cap [\varphi] \in \mathcal{N}^\Lambda(\Gamma) \overset{\text{Πόρ. 3.4.9}}{\iff} \mathsf{E}\varphi \in \Gamma \iff \Gamma \in [\mathsf{E}\varphi]$

∎

Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το κεντρικό θεώρημα αυτής της παραγράφου.

Θεώρημα 3.4.12 (Πληρότητα) *Η λογική* **KBE** *είναι ισχυρώς πλήρης ως προς την κλάση των kbe-πλαισίων.*

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας ένα κλασικό αποτέλεσμα (βλ. [3, σελ.194]) αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $\sigma\Lambda$-θεωρία είναι ικανοποιήσιμη σε ένα kbe-μοντέλο. Αν είχαμε αποδείξει ότι το $\mathfrak{M}^\Lambda$ είναι kbe-μοντέλο, τότε, για την τυχαία $\sigma\Lambda$-θεωρία T, από το Λήμμα του Lindenbaum 3.4.2, θα υπήρχε $\mu\sigma\Lambda$-θεωρία $\mathsf{\Gamma}$ τ.π. $T \subseteq \mathsf{\Gamma}$, κι έτσι, από το Truth Lemma 3.4.10, θα προέκυπτε ότι $\mathfrak{M}^\Lambda, \mathsf{\Gamma} \Vdash T$, και η απόδειξη θα είχε τελειώσει. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το $\mathfrak{M}^\Lambda$ είναι kbe-μοντέλο.

- Στην Παρατήρηση 3.4.3 αποδείχθηκε ότι $W^\Lambda \neq \varnothing$.
- $A^\Lambda \subseteq \mathcal{P}(W^\Lambda)$, και

  (a1) Αν υπήρχε $\mu\sigma\Lambda$-θεωρία $\mathsf{\Delta}$ τ.π. $\perp \in \mathsf{\Delta}$, τότε αυτή θα ήταν αντιφατική, πράγμα άτοπο, άρα, $\varnothing = [\perp] \in A^\Lambda$.

  Τα **(a2)** έως **(a5)** προκύπτουν αμέσως από τα σημεία i. έως iv. του Λήμματος 3.4.11.

- Επειδή τα αξιώματα **T**, **4**, και **G** (που λόγω του **DB** ισοδυναμεί με το **CB**) είναι κανονιστικά για τις ιδιότητες της ανακλαστικότητας, της μεταβατικότητας (βλ. [3, σελ.204]), και της κατευθυνσιμότητας (βλ. [5, σελ.182]) αντιστοίχως, κάθε κανονική λογική που τα περιέχει (άρα και η Λ) θα έχει ανακλαστικό, μεταβατικό, και κατευθυνόμενο, κανονιστικό μοντέλο.

- Έστω κάποιο $\mathsf{\Gamma} \in W^\Lambda$.

  (nr) Αν $X \in \mathcal{N}^\Lambda(\mathsf{\Gamma})$, τότε, $X = \mathcal{R}^\Lambda(\mathsf{\Gamma}) \cap [\varphi] \subseteq \mathcal{R}^\Lambda(\mathsf{\Gamma})$ ή $X = \Sigma$. Αλλά και στη δεύτερη περίπτωση, λόγω του Λήμματος 3.4.8, $X = FC \subseteq \mathcal{R}^\Lambda(\mathsf{\Gamma})$. Έτσι, $\mathcal{N}^\Lambda(\mathsf{\Gamma}) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{R}^\Lambda(\mathsf{\Gamma}))$.

  (be) Όπως είδαμε προηγουμένως, η $\mathcal{R}^\Lambda$ είναι ανακλαστική, μεταβατική, και κατευθυνόμενη σχέση, οπότε η δομή $\langle W^\Lambda, \mathcal{R}^\Lambda \rangle$ αποτελεί **S4.2**-μοντέλο. Επίσης, λόγω του ορισμού του FC (στο Λήμμα 3.4.8), αυτό αποτελεί το τελικό σύμπλοκο της δομής αυτής (βλ. Ορισμό 1.2.1(ii)), ενώ, από το Λήμμα 3.4.8(ii) και τον Ορισμό 3.4.1(iv) προκύπτει ότι $FC \in \mathcal{N}^\Lambda(\mathsf{\Gamma})$.

  (pie) Έστω και πάλι τυχαίο $X \in A^\Lambda$ (δηλ. $X = [\varphi]$ για κάποιον τύπο φ) κι ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{R}^\Lambda(\mathsf{\Gamma}) \cap [\varphi] \in \mathcal{N}^\Lambda(\mathsf{\Gamma})$. Τότε, από το Πόρισμα 3.4.9 προκύπτει ότι $\mathsf{E}\varphi \in \mathsf{\Gamma}$. Έτσι, απ' τη στιγμή που το αξίωμα **PIE** $\in \Lambda \subseteq \mathsf{\Gamma}$, $\mathsf{KE}\varphi \in \mathsf{\Gamma}$ (1)
  Ας θεωρήσουμε τώρα κάποιο $\mathsf{\Delta} \in \mathcal{R}^\Lambda(\mathsf{\Gamma})$. Τότε, απ' το Λήμμα 3.4.6 και το (1), προκύπτει ότι $\mathsf{E}\varphi \in \mathsf{\Delta}$, κι έτσι, εκ του Ορισμού 3.4.1(iv), $\mathcal{R}^\Lambda(\mathsf{\Delta}) \cap [\varphi] \in \mathcal{N}^\Lambda(\mathsf{\Delta})$. Αποδείχθηκε δηλ. ότι $\mathcal{R}^\Lambda(\mathsf{\Gamma}) \subseteq \{\mathsf{\Delta} \in W^\Lambda \mid \mathcal{R}^\Lambda(\mathsf{\Delta}) \cap [\varphi] \in \mathcal{N}^\Lambda(\mathsf{\Delta})\}$.

  Απ' τον ορισμό του FC στο Λήμμα 3.4.8 προκύπτει ότι $FC \subseteq \mathcal{R}^\Lambda(\mathsf{\Gamma})$, κι έτσι, από τα (i) και (ii) του ίδιου λήμματος, $|\mathcal{R}^\Lambda(\mathsf{\Gamma})| \geq \omega$, άρα, λόγω του Ορισμού 3.2.4, αρκεί να ελέγξουμε τις ιδιότητες **(cce)** και **(ek)**. Ιδού.

  (cce) Έστω κάποιο $X \in A^\Lambda$. Τότε θα υπάρχει τύπος φ τ.π. $X = [\varphi]$.
  Αν $\mathcal{R}^\Lambda(\mathsf{\Gamma}) \cap [\varphi] \in \mathcal{N}^\Lambda(\mathsf{\Gamma})$, τότε, από το Πόρισμα 3.4.9, $\mathsf{E}\varphi \in \mathsf{\Gamma}$. Άρα, απ' τη στιγμή που **CCE** $\in \Lambda \subseteq \mathsf{\Gamma}$, $\neg\mathsf{E}\neg\varphi \in \mathsf{\Gamma}$, οπότε, αφού το $\mathsf{\Gamma}$ είναι συνεπές, $\mathsf{E}\neg\varphi \notin \mathsf{\Gamma}$. Ας υποθέσουμε λοιπόν τώρα, προς άτοπο, ότι $\mathcal{R}^\Lambda(\mathsf{\Gamma}) \cap [\neg\varphi] \in \mathcal{N}^\Lambda(\mathsf{\Gamma})$. Τότε, και πάλι λόγω του Πορίσματος 3.4.9, $\mathsf{E}\neg\varphi \in \mathsf{\Gamma}$, πράγμα που είναι άτοπο. Συνεπώς, $\mathcal{R}^\Lambda(\mathsf{\Gamma}) \cap [\neg\varphi] \notin \mathcal{N}^\Lambda(\mathsf{\Gamma})$,

που σημαίνει, από το (**a2**) αυτής της απόδειξης, ότι $\mathcal{R}^\Lambda(\mathsf{\Gamma}) \cap (W^\Lambda \setminus [\varphi]) \notin \mathcal{N}^\Lambda(\mathsf{\Gamma})$. Αντιστρόφως, ας θεωρήσουμε ότι $\mathcal{R}^\Lambda(\mathsf{\Gamma}) \cap [\varphi] \notin \mathcal{N}^\Lambda(\mathsf{\Gamma})$. Τότε, απ' τον Ορισμό 3.4.1(iv), $\mathsf{E}\varphi \notin \mathsf{\Gamma}$, έτσι, απ' τη στιγμή που το $\mathsf{\Gamma}$ είναι $\mu\sigma\Lambda$, $\neg\mathsf{E}\varphi \in \mathsf{\Gamma}$, οπότε, μια και $\mathbf{CCE} \in \Lambda \subseteq \mathsf{\Gamma}$, $\mathsf{E}\neg\varphi \in \mathsf{\Gamma}$, συνεπώς, $\mathcal{R}^\Lambda(\mathsf{\Gamma}) \cap [\neg\varphi] \in \mathcal{N}^\Lambda(\mathsf{\Gamma})$, και από το (**a2**), $\mathcal{R}^\Lambda(\mathsf{\Gamma}) \cap (W^\Lambda \setminus [\varphi]) \in \mathcal{N}^\Lambda(\mathsf{\Gamma})$.

(**ek**) Έστω $T \in \mathcal{N}^\Lambda(\mathsf{\Gamma})$ και $[\psi] \in A^\Lambda$ (όπου ψ τυχαίος τύπος) τ.π. $T \subseteq \mathcal{R}^\Lambda(\mathsf{\Gamma}) \cap [\psi]$. Επειδή $T \in \mathcal{N}^\Lambda(\mathsf{\Gamma})$, θα υπάρχει τύπος φ τ.π. $T = \mathcal{R}^\Lambda(\mathsf{\Gamma}) \cap [\varphi]$ και $\mathsf{E}\varphi \in \mathsf{\Gamma}$, ή θα ισχύει $T = \Sigma$. Όμως, επειδή $T \subseteq \mathcal{R}^\Lambda(\mathsf{\Gamma}) \cap [\psi]$, λόγω των Λημμάτων 3.4.7 και 3.4.8(iv), έπεται και στις δύο περιπτώσεις, $\mathsf{E}\psi \in \mathsf{\Gamma}$, δηλ. απ' τον Ορισμό 3.4.1(iv), $\mathcal{R}^\Lambda(\mathsf{\Gamma}) \cap [\psi] \in \mathcal{N}^\Lambda(\mathsf{\Gamma})$.

∎

'Where is the knowledge we have lost in information?'
T. S. Eliot

4
Εμπλέκοντας νέα πληροφορία

Έχοντας ασχοληθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο με μια λογική που περιγράφει την επιστημική κατάσταση ενός αντιλήπτορα στις τρεις διαβαθμίσεις της, θα προσπαθήσουμε στο παρόν κεφάλαιο να δούμε τι αλλαγές μπορεί να επιφέρει στην κατάσταση αυτή μια επιπλέον πληροφόρησή του. Θα θεωρήσουμε n το πλήθος πηγές που πληροφορούν τον αντιλήπτορα για την ισχύ ενός τύπου φ, και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι αυτός δεν είναι απαραιτήτως tabula rasa ως προς το φ, θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε την καινούρια του επιστημική κατάσταση. Μια και έχουμε προκρίνει (στην Παράγραφο 1.1) τη λογική **S4.2** ως την καταλληλότερη για να περιγράψει κανείς επιστημικές καταστάσεις, και συνακόλουθα την **KBE** όταν οι επιστημικές καταστάσεις εμπεριέχουν εκτίμηση, προφανώς θα θεωρήσουμε ότι τόσο πριν την πληροφόρηση, όσο και μετά απ' αυτήν, η επιστημική κατάσταση του αντιλήπτορα περιγράφεται από την **KBE**. Όσον αφορά στην πληροφορία που προέρχεται απ' τις πηγές, και η οποία προκαλεί τη μετάβαση από την πρότερη κατάσταση στην επόμενη, η λογική που θα φτιάξουμε θα απαιτεί μόνο, η επίδραση της πληροφορίας αυτής να είναι ανεξάρτητη της διατύπωσής της, δηλ. της συντακτικής μορφής του τύπου που την περιγράφει.

Η έννοια της *επιστημικής αλλαγής* (την οποία σκοπεύουμε να περιγράψουμε) είναι πολύ σημαντική για τον τομέα της *Αναπαράστασης Γνώσης*. Ήταν μάλιστα το έναυσμα για την άνθιση μιας ολόκληρης περιοχής της που είναι γνωστή ως *Belief Revision* (βλ. για παράδειγμα [26]). Η λεγόμενη *Δυναμική Επιστημική Λογική* (ΔΕΛ) αποτελεί μια τροπική προσέγγιση στο φαινόμενο της επιστημικής αλλαγής (βλ. για παράδειγμα [34]). Η δική μας προσπάθεια δε, σε πρώτη ανάγνωση των προθέσεών της δείχνει να είναι κάτι τέτοιο.

Όμως, το σενάριο στη δική μας προσέγγιση είναι απλούστερο, κι έτσι θα το αντιμετωπίσουμε με πιο «συμβατικές» τροπικές μεθόδους. Οι βασικές διαφορές του από εκείνο της ΔΕΛ είναι οι εξής: (1) η δική μας προσπάθεια στοχεύει στην περιγραφή της αλλαγής της γνώσης κ.λπ. ενός μόνο αντιλήπτορα και όχι μιας ομάδας, όπως κάνει η ΔΕΛ· (2) εμείς δίνουμε βάση στην πολλαπλή πληροφόρηση από διάφορες πηγές και στην ενδεχόμενη αντιφατικότητα που ενέχει [1], πράγμα που δεν απασχολεί εκείνη· (3) η λογική μας ενδιαφέρεται για μια κάποια διαβάθμιση στην επιστημική κατάσταση του αντιλήπτορα, γι' αυτό και μιλά για γνώσεις/πεποιθήσεις/εκτιμήσεις, ενώ εκείνη ασχολείται με τη γνώση καθενός αντιλήπτορα καθώς και την κοινή γνώση όλων.

Είναι λογικό λοιπόν τόσο οι τροπικοί τελεστές που θα χρησιμοποιήσουμε στη λογική μας, όσο και τα αξιώματά της, να διαφέρουν πολύ από εκείνα της ΔΕΛ. Κατ' αρχάς, για την περιγραφή της προσληφθείσας πληροφορίας εκείνη χρησιμοποιεί άπειρους το πλήθος τελεστές, έναν για

[1] Δεν αποκλείουμε επίσης η ίδια πηγή να δίνει αντιφατική πληροφόρηση.

κάθε τύπο που περιγράφει την πληροφορία που δίνεται. Στη δική μας προσέγγιση απαιτούνται πεπερασμένοι το πλήθος (και μάλιστα ανεξάρτητοι ο ένας απ' τον άλλον), ένας για κάθε πληροφορούσα πηγή.

4.1 Η λογική KBEI

Θα χρησιμοποιήσουμε μια τροπική γλώσσα $\mathcal{L}_I$ που θα αποτελεί ουσιαστικά μια τροποποίηση - επέκταση της $\mathcal{L}_{KBE}$ και η οποία θα περιέχει τα κλασικά προτασιακά σύμβολα της $\mathcal{L}_{KBE}$, δύο «αντίγραφα» των τροπικών τελεστών της (K και E) και του τελεστή συντομογραφίας της (B), καθώς και n το πλήθος τροπικούς τελεστές I, στους οποίους θα βασιστούν δύο εξαρτημένοι τελεστές συντομογραφίας A και S. Πιο συγκεκριμένα, η γλώσσα μας θα έχει τους ακόλουθους $n + 4$ τελεστές:

- Ο τύπος $\mathsf{K}_b\varphi$ θα διαβάζεται ως "*ο αντιλήπτορας γνωρίζει <u>πριν</u> την πρόσληψη της πληροφορίας ότι ισχύει το* φ" ή αλλιώς ότι
  "*το* φ *αποτελεί γνώση για κείνον <u>πριν</u> την πρόσληψη της πληροφορίας*".
- Ο τύπος $\mathsf{E}_b\varphi$ θα διαβάζεται ως "*ο αντιλήπτορας εκτιμά <u>πριν</u> την πρόσληψη της πληροφορίας ότι ισχύει το* φ" δηλ. ότι
  "*θεωρεί πιο «πιθανό» <u>πριν</u> την πρόσληψη της πληροφορίας να ισχύει το* φ *παρά να μην ισχύει*" ή αλλιώς ότι
  "*το* φ *αποτελεί εκτίμηση του αντιλήπτορα <u>πριν</u> την πρόσληψη της πληροφορίας*".
- Ο τύπος $\mathsf{K}_a\varphi$ θα διαβάζεται ως "*ο αντιλήπτορας γνωρίζει <u>μετά</u> την πρόσληψη της πληροφορίας ότι ισχύει το* φ".
- Ο τύπος $\mathsf{E}_a\varphi$ θα διαβάζεται ως "*ο αντιλήπτορας εκτιμά <u>μετά</u> την πρόσληψη της πληροφορίας ότι ισχύει το* φ".
- Καθένας απ' τους n το πλήθος τελεστές $\mathsf{I}_j\varphi$ ($j \in D = \{1, \ldots, n\}$) θα διαβάζεται ως "*η πηγή πληροφόρησης υπ' αριθμό* j *<u>πληροφορεί</u> τον αντιλήπτορα ότι ισχύει το* φ".

Για τους τελεστές συντομογραφίας θέλουμε να ισχύουν τα εξής:

- Ο τύπος $\mathsf{B}_b\varphi$ θα διαβάζεται ως "*ο αντιλήπτορας πιστεύει <u>πριν</u> την πρόσληψη της πληροφορίας ότι ισχύει το* φ" ή αλλιώς ότι
  "*το* φ *αποτελεί πεποίθησή του <u>πριν</u> την πρόσληψη της πληροφορίας*".
- Ο τύπος $\mathsf{B}_a\varphi$ θα διαβάζεται ως "*ο αντιλήπτορας πιστεύει <u>μετά</u> την πρόσληψη της πληροφορίας ότι ισχύει το* φ".
- Ο τύπος $\mathsf{A}\varphi$ θα διαβάζεται ως "*ο αντιλήπτορας έχει <u>αποχρώσες ενδείξεις</u> για την αλήθεια του* φ".
- Ο τύπος $\mathsf{S}\varphi$ θα διαβάζεται ως "*ο αντιλήπτορας έχει <u>ισχυρές ενδείξεις</u> για την αλήθεια του* φ".

Απ' τη στιγμή που αυτοί οι τελεστές θα είναι εξαρτημένοι απ' τους βασικούς, πρέπει να τους ορίσουμε με βάση αυτούς. Για την «πεποίθηση» ισχύουν όσα έχουμε περιγράψει στις Παραγράφους 1.1 και 3.1. Επίσης, θα θεωρούμε ότι υπάρχουν «**αποχρώσες ενδείξεις**» για το φ ανν *τουλάχιστον μία* πηγή πληροφορεί τον αντιλήπτορα ότι ισχύει το φ ενώ *καμία* δεν τον πληροφορεί ότι ισχύει το $\neg\varphi$. Απ' την άλλη πλευρά, θα θεωρούμε ότι υπάρχουν «**ισχυρές ενδείξεις**» για το φ ανν *όλες* οι πηγές τον πληροφορούν ότι το φ είναι αλήθεια ενώ *καμία* δεν ισχυρίζεται ότι αληθεύει το $\neg\varphi$. Ιδού:

Συντομογραφίες

DB$_\mathbf{b}$. $\mathsf{B}_b\varphi \equiv \neg\mathsf{K}_b\neg\mathsf{K}_b\varphi$ **DB$_\mathbf{a}$.** $\mathsf{B}_a\varphi \equiv \neg\mathsf{K}_a\neg\mathsf{K}_a\varphi$

AI. $\mathsf{A}\varphi \equiv \bigvee_{j\in D}\mathsf{I}_j\varphi \wedge \bigwedge_{j\in D}\neg\mathsf{I}_j\neg\varphi$

SI. $\mathsf{S}\varphi \equiv \bigwedge_{j\in D}(\mathsf{I}_j\varphi \wedge \neg\mathsf{I}_j\neg\varphi)$

Η λογική που θα οριστεί στην παράγραφο αυτή, και που θα ονομαστεί **KBEI**, είναι ουσιαστικά μια επέκταση της **KBE** που περιέχει δύο «αντίγραφά» της – ένα που περιγράφει τις πρότερες γνώσεις/πεποιθήσεις/εκτιμήσεις, και ένα εκείνες μετά την πρόσληψη πληροφορίας – όπως και τύπους που περιγράφουν την πρόσληψη της πληροφορίας αυτής καθώς και την επίδρασή της στις γνώσεις/πεποιθήσεις/εκτιμήσεις.

(1) Αξιώματα

K$_\mathbf{b}$.	$\mathsf{K}_b\varphi \wedge \mathsf{K}_b(\varphi \supset \psi) \supset \mathsf{K}_b\psi$	**K$_\mathbf{a}$.**	$\mathsf{K}_a\varphi \wedge \mathsf{K}_a(\varphi \supset \psi) \supset \mathsf{K}_a\psi$
T$_\mathbf{b}$.	$\mathsf{K}_b\varphi \supset \varphi$	**T$_\mathbf{a}$.**	$\mathsf{K}_a\varphi \supset \varphi$
4$_\mathbf{b}$.	$\mathsf{K}_b\varphi \supset \mathsf{K}_b\mathsf{K}_b\varphi$	**4$_\mathbf{a}$.**	$\mathsf{K}_a\varphi \supset \mathsf{K}_a\mathsf{K}_a\varphi$
CB$_\mathbf{b}$.	$\mathsf{B}_b\varphi \supset \neg\mathsf{B}_b\neg\varphi$	**CB$_\mathbf{a}$.**	$\mathsf{B}_a\varphi \supset \neg\mathsf{B}_a\neg\varphi$
BE$_\mathbf{b}$.	$\mathsf{B}_b\varphi \supset \mathsf{E}_b\varphi$	**BE$_\mathbf{a}$.**	$\mathsf{B}_a\varphi \supset \mathsf{E}_a\varphi$
CCE$_\mathbf{b}$.	$\mathsf{E}_b\varphi \equiv \neg\mathsf{E}_b\neg\varphi$	**CCE$_\mathbf{a}$.**	$\mathsf{E}_a\varphi \equiv \neg\mathsf{E}_a\neg\varphi$
EK$_\mathbf{b}$.	$\mathsf{E}_b\varphi \wedge \mathsf{K}_b(\varphi \supset \psi) \supset \mathsf{E}_b\psi$	**EK$_\mathbf{a}$.**	$\mathsf{E}_a\varphi \wedge \mathsf{K}_a(\varphi \supset \psi) \supset \mathsf{E}_a\psi$
PIE$_\mathbf{b}$.	$\mathsf{E}_b\varphi \supset \mathsf{K}_b\mathsf{E}_b\varphi$	**PIE$_\mathbf{a}$.**	$\mathsf{E}_a\varphi \supset \mathsf{K}_a\mathsf{E}_a\varphi$

Τώρα θα παρουσιαστούν τα «κυριότερα» αξιώματα της **KBEI**, τα οποία διασυνδέουν το «πριν» με το «μετά». Η βασική παρατήρηση γι' αυτά είναι ότι απ' τη μια θεωρείται η γνώση αδιαπραγμάτευτη (απ' τη στιγμή που ο αντιλήπτορας γνωρίζει κάτι είναι εντελώς σίγουρος γι' αυτό και δεν αλλάζει γνώμη), ενώ απ' την άλλη, οι μεταβάσεις μεταξύ πεποιθήσεων και εκτιμήσεων είναι δυνατές. Επίσης, αλλαγή προς γνώση δεν προβλέπεται απ' τη λογική μας. Ο τρόπος κατάκτησης της γνώσης είναι κάτι που ξεπερνά τις προσπάθειες στα πλαίσια αυτής της εργασίας. Όπως διαφάνηκε κι απ' την Παράγραφο 1.3 όταν μιλούσαμε για τα επιστημικά μοντέλα, δεν ασχολούμαστε με το τι είναι αυτό που καθορίζει μια αποτίμηση, που δίνει αληθοτιμή στις προτασιακές μεταβλητές (και το οποίο εμμέσως προσδιορίζει τι αποτελεί γνώση). Θεωρήσαμε τους λόγους προσδιορισμού της αποτίμησης δεδομένους «εξ αποκαλύψεως».

(2) Αξιώματα (συνέχεια)

KK. $\mathsf{K}_b\varphi \supset \mathsf{K}_a\varphi$

Η γνώση είναι αδιαπραγμάτευτη.

BB. $\mathsf{B}_b\varphi \wedge \neg\mathsf{A}\neg\varphi \supset \mathsf{B}_a\varphi$

Αν ο αντιλήπτορας πιστεύει σε κάτι και δεν έχει αποχρώσες ενδείξεις για το αντίθετό του, δεν έχει λόγους να αλλάξει γνώμη για αυτό.

BE. $\mathsf{B}_b\varphi \wedge \mathsf{A}\neg\varphi \supset \mathsf{E}_a\varphi$
Αν ο αντιλήπτορας πιστεύει σε κάτι αλλά έχει αποχρώσες ενδείξεις για το αντίθετό του, τότε αναγκάζεται να μετριάσει το βαθμό σιγουριάς του για αυτό, κι έτσι απλώς εκτιμά ότι ισχύει.

EB. $\mathsf{E}_b\varphi \wedge \mathsf{S}\varphi \supset \mathsf{B}_a\varphi$
Αν ο αντιλήπτορας εκτιμά ότι ισχύει κάτι και έχει επιπλέον αποχρώσες ενδείξεις για αυτό, τότε αυξάνει ο βαθμός σιγουριάς του κάνοντάς τον να πιστεύει ότι αυτό ισχύει.

EE. $\mathsf{E}_b\varphi \wedge \neg\mathsf{A}\neg\varphi \supset \mathsf{E}_a\varphi$
Πρόκειται για την αντίστοιχη περίπτωση με το αξίωμα **BB** αλλά για την εκτίμηση. *Αν ο αντιλήπτορας εκτιμά ότι ισχύει κάτι και δεν έχει αποχρώσες ενδείξεις για το αντίθετό του, δεν έχει λόγους να αλλάξει γνώμη για αυτό.*

EEN. $\neg\mathsf{B}_b\varphi \wedge \mathsf{E}_b\varphi \wedge \mathsf{A}\neg\varphi \supset \mathsf{E}_a\neg\varphi$
Πρόκειται για την αντίστοιχη περίπτωση με το αξίωμα **BE** αλλά για την εκτίμηση. *Αν ο αντιλήπτορας εκτιμά απλώς ότι ισχύει κάτι – δίχως να το πιστεύει – αλλά έχει αποχρώσες ενδείξεις για το αντίθετό του, τότε αυτή η πληροφορία τον αναγκάζει να αποδεχθεί ότι είναι πια πιο πιθανό να μην ισχύει αυτό παρά να ισχύει. Έτσι, εκτιμά πια ότι δεν ισχύει.*

Παρατήρηση 4.1.1 Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το $\neg\mathsf{B}_b\varphi$ στην υπόθεση του αξιώματος **EEN** είναι απαραίτητο, μια και αν έλειπε, τότε τα $\mathbf{BE_b}$ και **EEN** θα έδιναν ότι $\mathsf{B}_b\varphi \wedge \mathsf{A}\neg\varphi \supset \mathsf{E}_a\neg\varphi$, πράγμα που, λόγω των **BE** και **CCE**, θα έκαναν τη λογική μας αντιφατική. Όλες οι άλλες περιπτώσεις αξιωμάτων δείχνουν να μην αλληλοαναιρούνται. Όμως, το ότι όντως συμβαίνει αυτό μέλλει να φανεί μέσω της απόδειξης της συνέπειας της λογικής που θα ορίσουμε.

Σε αντιστοιχία με όσα ειπώθηκαν στην παράγραφο 3.1 για τη λογική **KBE**, οι τελεστές K_b και K_a θα είναι κανονικοί (ως επιστημικοί τελεστές της γνώσης· βλ. Παράγραφο 1.1) και για τους E_b και E_a δεν θα εφαρμόσουμε επιπρόσθετους κανόνες κλειστότητας (θα προκύπτουν οι αντίστοιχοι **RN**, δίχως όμως να είναι κανονικοί αφού και πάλι δεν θα ισχύουν τα αντίστοιχα του **K** αξιώματα· βλ. Παρατήρηση 3.3.3(v)).

Παρατηρώντας ότι οποτεδήποτε μια πηγή πληροφορεί τον αντιλήπτορα για κάτι, τότε ουσιαστικά τον πληροφορεί για όλες τις συντακτικά ισοδύναμες μορφές αυτού, καταλαβαίνουμε ότι όσον αφορά στους τελεστές I που περιγράφουν την παροχή πληροφορίας, το μοναδικό που πρέπει να απαιτήσουμε είναι η κλειστότητα ως προς τον κανόνα **RE**. Δηλ. αν οι φ και ψ είναι ισοδύναμοι, τότε και οι $\mathsf{I}\varphi$ και $\mathsf{I}\psi$ θα είναι ισοδύναμοι. Αυτό σημαίνει ότι η λογική που θα ορίσουμε θα είναι κλασική ως προς τους τελεστές I_j[2]. Έτσι, ορίζουμε τέλος:

(3) <u>Κανόνες συμπερασμού</u>

$$\mathbf{RN}_{\mathsf{K_b}}.\ \frac{\varphi}{\mathsf{K}_b\varphi} \qquad \mathbf{RN}_{\mathsf{K_a}}.\ \frac{\varphi}{\mathsf{K}_a\varphi} \qquad \mathbf{RE}_{\mathsf{I_j}}.\ \frac{\varphi \equiv \psi}{\mathsf{I}_j\varphi \equiv \mathsf{I}_j\psi} \quad (j \in D)$$

Ορισμός 4.1.2 **KBEI** *είναι η προτασιακή, τροπική λογική που αξιωματικοποιείται από τα σύνολα αξιωμάτων (1) και (2), και που είναι κλειστή ως προς το σύνολο κανόνων (3).*

[2] Για την έννοια «κλασική τροπική λογική» βλ. για παράδειγμα [5, σελ.231].

Από τις ιδιότητες της Παραγράφου 1.1 κι από την Παρατήρηση 3.1.3 προκύπτει αμέσως η επόμενη:

Παρατήρηση 4.1.3 *Η **KBEI** είναι κλειστή ως προς τους κανόνες*

$$\mathbf{RE}_{\mathsf{K}_b}.\ \frac{\varphi \equiv \psi}{\mathsf{K}_b\varphi \equiv \mathsf{K}_b\psi} \qquad \mathbf{RE}_{\mathsf{B}_b}.\ \frac{\varphi \equiv \psi}{\mathsf{B}_b\varphi \equiv \mathsf{B}_b\psi} \qquad \mathbf{RE}_{\mathsf{E}_b}.\ \frac{\varphi \equiv \psi}{\mathsf{E}_b\varphi \equiv \mathsf{E}_b\psi}$$

ως προς τους αντίστοιχους για τους δείκτες a, καθώς και ως προς τους

$$\mathbf{RE}_{\mathsf{A}}.\ \frac{\varphi \equiv \psi}{\mathsf{A}\varphi \equiv \mathsf{A}\psi} \qquad \mathbf{RE}_{\mathsf{S}}.\ \frac{\varphi \equiv \psi}{\mathsf{S}\varphi \equiv \mathsf{S}\psi}$$

Πριν δούμε κάποια παραδείγματα τύπων της **KBEI** παραθέτω το Σχήμα 4.1, το οποίο ίσως να βοηθά στο να φανούν με μια ματιά οι αλλαγές που περιγράφουν τα αξιώματα (2) της **KBEI** στις πεποιθήσεις και στις εκτιμήσεις. Ας υποθέσουμε ένα σύνολο τύπων Γ μεγιστικώς συνεπές με την **KBEI** (ας υποθέσουμε προς το παρόν – θα αποδειχθεί αργότερα – ότι η λογική μας είναι συνεπής, κι έτσι ότι υπάρχει ένα τέτοιο σύνολο τύπων). Το Γ θα περιέχει δηλ. ό,τι γνωρίζει/πιστεύει/εκτιμά ένας αντιλήπτορας και που μπορεί να αποδειχθεί στα πλαίσια της **KBEI**. Στο σχήμα θα απεικονίζονται όλοι οι τύποι της γλώσσας $\mathcal{L}_I$, διαχωρισμένοι σε δύο ομάδες. Στην ομάδα του μεγαλύτερου λευκού, κυκλικού δίσκου θα ανήκουν εκείνοι οι τύποι φ, για τους οποίους ο $\mathsf{E}_b\varphi$ ανήκει στο Γ. Ενώ στο μεγαλύτερο μαύρο, κυκλικό δακτύλιο θα ανήκουν εκείνοι οι τύποι φ, για τους οποίους ο $\mathsf{E}_b\neg\varphi$ ανήκει στο Γ. Λόγω του **CCE** και των ιδιοτήτων των $\mu\sigma$**KBEI**-θεωριών, κάθε τύπος ή θα ανήκει στη λευκή ή στη μαύρη περιοχή. Τόσο η λευκή όσο και η μαύρη περιοχή έχουν υποσύνολα. Τα γραμμοσκιασμένα με κατακόρυφες γραμμές περιέχουν ό,τι πιστεύει ο αντιλήπτορας, ενώ εκείνα με την οριζόντια γραμμοσκίαση (υποσύνολα των προηγούμενων) περιέχουν ό,τι γνωρίζει ο αντιλήπτορας. Τα βέλη περιγράφουν τα αξιώματα. Συνδέουν τύπους πριν τη λήψη της πληροφορίας με τύπους μετά τη λήψη[3].

Προσπαθώντας να βρούμε τύπους της **KBEI** που να περιγράφουν ιδιότητες άξιες λόγου, βλέπουμε κατ' αρχάς ότι χρησιμοποιώντας τις τυπικές αποδείξεις της Παρατήρησης 3.1.4 (με την τετριμμένη προσθήκη των δεικτών b και a) ισχύει το εξής:

Παρατήρηση 4.1.4 *Όλοι οι τύποι της Παρατήρησης 3.1.4 όπου όλοι οι τελεστές που εμφανίζονται σ' αυτούς έχουν δείκτη b (ή όπου όλοι έχουν δείκτη a) αποτελούν τυπικά θεωρήματα της **KBEI**.*

Οι επόμενες ιδιότητες αφορούν στους νέους τελεστές που δεν υπήρχαν στην **KBE**.

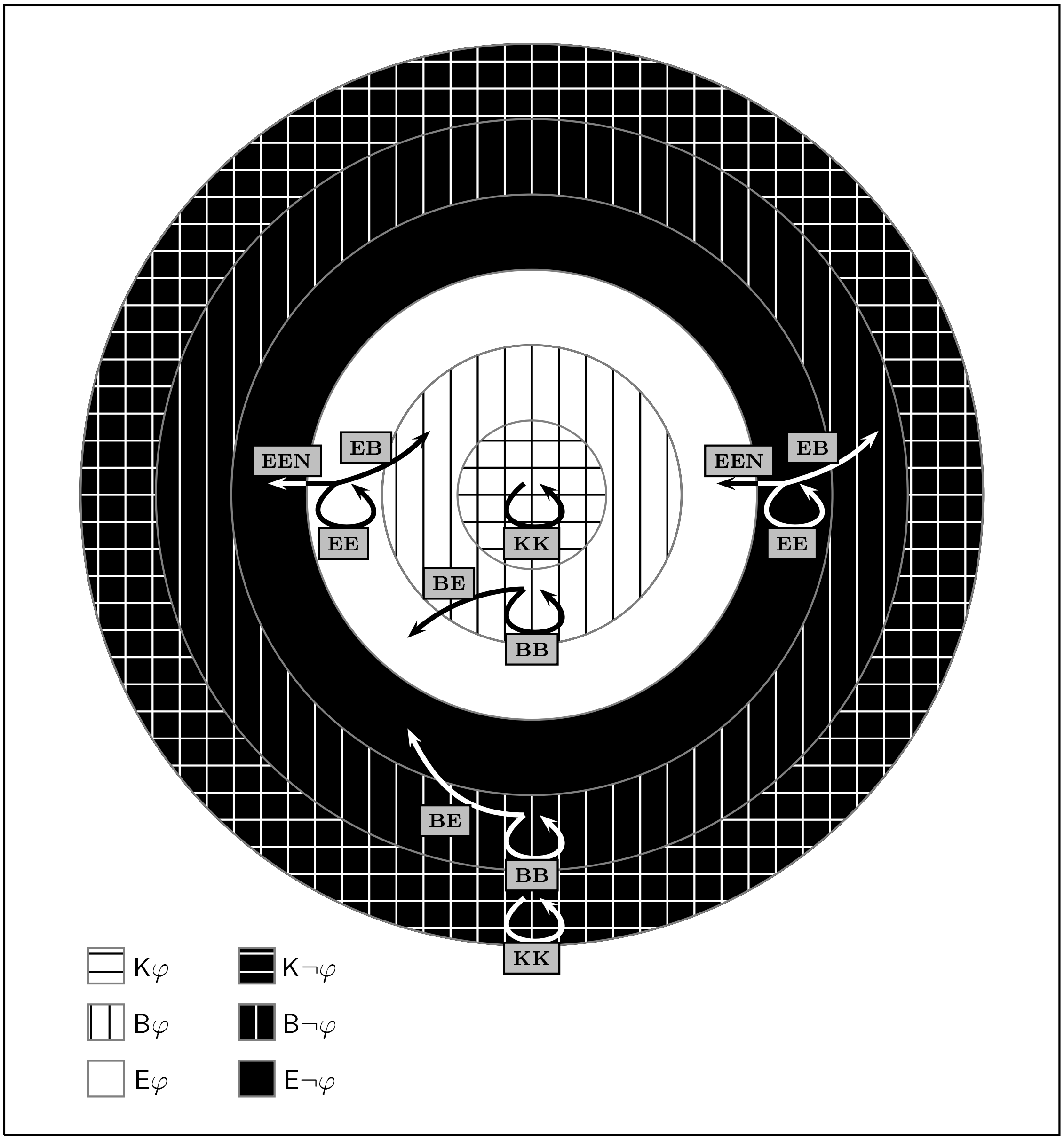
Παρατήρηση 4.1.5

(i) $\vdash_{\mathbf{KBEI}} \mathsf{A}\varphi \supset \neg\mathsf{A}\neg\varphi$ *(οι αποχρώσες ενδείξεις είναι συνεπείς)*

(ii) $\vdash_{\mathbf{KBEI}} \mathsf{S}\varphi \supset \mathsf{A}\varphi$ *(οι ισχυρές ενδείξεις είναι και αποχρώσες)*

(iii) $\vdash_{\mathbf{KBEI}} \mathsf{I}_k\varphi \wedge \mathsf{I}_j\neg\varphi \supset \neg\mathsf{A}\varphi \wedge \neg\mathsf{A}\neg\varphi \quad (k,j \in D)$
(η αντιφατική πληροφόρηση δεν αποτελεί αποχρώσα ένδειξη)

[3] Στην πραγματικότητα θα έπρεπε να είχαμε δύο ασπρόμαυρους δίσκους, έναν για το πριν και έναν για το μετά, και τα βέλη να οδηγούν από τον ένα στον άλλον. Όμως νομίζω ότι οι μεταβάσεις είναι πιο ευκρινείς όταν απεικονίζονται σε έναν.



Σχήμα 4.1: Τα αξιώματα (2) της **KBEI**

(iv) *Η αντιφατική πληροφόρηση δεν επηρεάζει τον αντιλήπτορα, δηλ.*

1. $\vdash_{\mathbf{KBEI}} \mathsf{K}_b\varphi \wedge \mathsf{I}_k\varphi \wedge \mathsf{I}_j\neg\varphi \supset \mathsf{K}_a\varphi \quad (k,j \in D)$
2. $\vdash_{\mathbf{KBEI}} \mathsf{B}_b\varphi \wedge \mathsf{I}_k\varphi \wedge \mathsf{I}_j\neg\varphi \supset \mathsf{B}_a\varphi \quad (k,j \in D)$
3. $\vdash_{\mathbf{KBEI}} \mathsf{E}_b\varphi \wedge \mathsf{I}_k\varphi \wedge \mathsf{I}_j\neg\varphi \supset \mathsf{E}_a\varphi \quad (k,j \in D)$

Αποδειξη. Οι τυπικές αποδείξεις για τα (i) και (ii) είναι τετριμμένες.

(iii)

1.	$\mathsf{I}_j\neg\varphi \supset \neg(\bigvee_{i\in D} \mathsf{I}_i\varphi \wedge \bigwedge_{i\in D} \neg\mathsf{I}_i\neg\varphi)$	ταυτολογία
2.	$\mathsf{I}_j\neg\varphi \supset \neg\mathsf{A}\varphi$	$1, \mathbf{AI}, \mathbf{PC}, \mathbf{MP}$
3.	$\mathsf{I}_k\neg\neg\varphi \supset \neg(\bigvee_{i\in D} \mathsf{I}_i\neg\varphi \wedge \bigwedge_{i\in D} \neg\mathsf{I}_i\neg\neg\varphi)$	ταυτολογία
4.	$\mathsf{I}_k\neg\neg\varphi \supset \neg\mathsf{A}\neg\varphi$	$3, \mathbf{AI}, \mathbf{PC}, \mathbf{MP}$
5.	$\varphi \equiv \neg\neg\varphi$	ταυτολογία
6.	$\mathsf{I}_k\varphi \equiv \mathsf{I}_k\neg\neg\varphi$	$5, \mathbf{RE}_{\mathsf{I}_\mathbf{k}}$
7.	$\mathsf{I}_k\varphi \supset \neg\mathsf{A}\neg\varphi$	$6, 4, \mathbf{PC}, \mathbf{MP}$
8.	$\mathsf{I}_k\varphi \wedge \mathsf{I}_j\neg\varphi \supset \neg\mathsf{A}\varphi \wedge \neg\mathsf{A}\neg\varphi$	$7, 2, \mathbf{PC}, \mathbf{MP}$

(iv) Και οι τρεις τυπικές αποδείξεις είναι προφανείς, αν χρησιμοποιηθεί η (iii) και τα αξιώματα **KK**, **BB**, και **EE** αντιστοίχως. ∎

Τα αξιώματα **KK** έως **EEN** περιγράφουν με σαφή και εύλογο τρόπο πώς αλλάζει η πεποίθηση και η εκτίμηση του αντιλήπτορα για το φ αναλόγως με τη δοθείσα πληροφόρηση για το φ. Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα, στο οποίο η πληροφόρηση δεν αφορά στο φ αλλά στην ίδια την εκτίμηση που έχει ο αντιλήπτορας για το φ.

Παράδειγμα 4.1.6 *Έστω ότι ο αντιλήπτορας πιστεύει στο φ κι ότι πληροφορείται από κάποια πηγή ότι (ο ίδιος) δεν εκτιμά καν το φ ενώ καμιά πηγή δεν λέει ότι το εκτιμά (έτσι ώστε καμιά πηγή να μη φάσκει και αντιφάσκει για την πληροφορία αυτή). Τότε προφανώς, υπάρχουν αποχρώσες ενδείξεις ότι ο αντιλήπτορας δεν εκτιμά ότι ισχύει το φ, παρόλο που αυτό είναι ψευδές μια και εκείνος πιστεύει στο φ. Τι μπορούμε τότε να συνάγουμε στη λογική μας; Ιδού μια σχετική τυπική απόδειξη.*

1.	$\mathsf{B}_b\varphi \wedge \mathsf{I}_j\neg\mathsf{E}_b\varphi \wedge \bigwedge_{k\in D} \neg\mathsf{I}_k\mathsf{E}_b\varphi \supset \mathsf{B}_b\varphi \wedge \mathsf{A}\neg\mathsf{E}_b\varphi$	$\mathbf{AI}, \mathbf{PC}, \mathbf{MP}$
2.	$\mathsf{B}_b\varphi \supset \mathsf{K}_b\mathsf{B}_b\varphi$	**PIB** (βλ. Παράγραφο 1.1)
3.	$\mathsf{B}_b\varphi \supset \mathsf{E}_b\varphi$	$\mathbf{BE_b}$
4.	$\mathsf{K}_b\mathsf{B}_b\varphi \supset \mathsf{K}_b\mathsf{E}_b\varphi$	$3, \mathbf{RM}_{\mathsf{K_b}}$ (Παρατήρηση 3.1.2)
5.	$\mathsf{K}_b\mathsf{E}_b\varphi \supset \mathsf{B}_b\mathsf{E}_b\varphi$	**KB** (βλ. Παράγραφο 1.1)
6.	$\mathsf{B}_b\varphi \supset \mathsf{B}_b\mathsf{E}_b\varphi$	$2, 4, 5, \mathbf{PC}, \mathbf{MP}$
7.	$\mathsf{B}_b\varphi \wedge \mathsf{A}\neg\mathsf{E}_b\varphi \supset \mathsf{B}_b\mathsf{E}_b\varphi \wedge \mathsf{A}\neg\mathsf{E}_b\varphi$	$6, \mathbf{PC}, \mathbf{MP}$
8.	$\mathsf{B}_b\mathsf{E}_b\varphi \wedge \mathsf{A}\neg\mathsf{E}_b\varphi \supset \mathsf{E}_a\mathsf{E}_b\varphi$	**BE**
9.	$\mathsf{B}_b\varphi \wedge \mathsf{I}_j\neg\mathsf{E}_b\varphi \wedge \bigwedge_{k\in D} \neg\mathsf{I}_k\mathsf{E}_b\varphi \supset \mathsf{E}_a\mathsf{E}_b\varphi$	$1, 7, 8, \mathbf{PC}, \mathbf{MP}$

Έτσι, ο αντιλήπτορας εκτιμά μετά απ' αυτήν την πληροφόρηση ότι απλώς εκτιμούσε πριν το φ. Δείχνει δηλ. να «εξασθενεί η μνήμη του» ως προς το τι πίστευε. Δίχως όμως να εκτιμά *πια κάτι που να έρχεται σε αντίθεση με ό,τι όντως συνέβαινε. Η εκτίμησή του για το παρελθόν είναι σωστή, απλώς ασθενέστερη.*

Τι θα συνέβαινε όμως αν στην αρχή δεν πίστευε ο αντιλήπτορας στο φ αλλά απλώς εκτιμούσε ότι ισχύει αυτό. Θα είχε και πάλι εξασθένηση στη μνήμη του; Και σε ποιο βαθμό; Για να απαντηθεί αυτό, ας δούμε το αντίστοιχο του **BE** *αξίωμα, το* **EEN**, *που σχετίζεται με την εκτίμηση. Για να μπορούσε να χρησιμοποιηθεί αυτό σε μια αντίστοιχη με την παραπάνω τυπική απόδειξη, θα έπρεπε να αποδειχθεί επιπροσθέτως στην* **KBEI** *ότι τα συγκεκριμένα δεδομένα συνεπάγονται $\neg\mathsf{B}_b\mathsf{E}_b\varphi$. Όμως, όπως ακριβώς αποδείχθηκε στην Παρατήρηση 3.1.4(i), ο τύπος $\mathsf{E}_b\varphi \supset \mathsf{B}_b\mathsf{E}_b\varphi$ αποτελεί τυπικό θεώρημα της* **KBEI**, *άρα δεν θα μπορούσαμε να συνάγουμε το $\neg\mathsf{B}_b\mathsf{E}_b\varphi$. Όντως, μετά την απόδειξη ορθότητας της λογικής* **KBEI** *ως προς κάποια ερμηνεία που θα παρουσιαστεί στην επόμενη παράγραφο, μπορεί κάποιος να δει σχετικά εύκολα ότι $\neg\mathsf{B}_b\varphi \wedge \mathsf{E}_b\varphi \wedge \mathsf{A}\neg\mathsf{E}_b\varphi \supset \mathsf{E}_a\neg\mathsf{E}_b\varphi \notin$* **KBEI**.

Απ' την άλλη πλευρά, επειδή δεν υπάρχει αντίστοιχο αξίωμα στη λογική αυτή, δεν μπορεί να αποδειχθεί ούτε ότι το $\neg\mathsf{B}_b\varphi \wedge \mathsf{E}_b\varphi \wedge \mathsf{A}\neg\mathsf{E}_b\varphi \supset \mathsf{E}_a\mathsf{E}_b\varphi$ αποτελεί τυπικό θεώρημά της (κι αυτό μπορεί να φανεί εύκολα μετά την ορθότητα στην επόμενη παράγραφο). Βλέπουμε λοιπόν ότι στην περίπτωση αυτή «η μνήμη» του αντιλήπτορα «εξασθενεί» τόσο, ώστε μετά από αυτήν την ψευδή πληροφόρησή του δεν μπορεί να εκτιμήσει αν εκτιμούσε πριν το φ ή όχι.

4.2 Ερμηνείες

Όπως ακριβώς συνέβη με τα *kbe*, τα πλαίσια και τα μοντέλα της **KBE**, έτσι και τώρα οι δομές, με τις οποίες θα ερμηνευτεί η λογική **KBEI**, θα αποτελούν σχεσιακές (Kripke) δομές πιθανών κόσμων για τους τελεστές K_b και K_a και καταλλήλως τροποποιημένες, γενικευμένες δομές γειτονιάς (Scott-Montague) ως προς τους τελεστές E_b και E_a. Για άλλες λεπτομέρειες περί των ερμηνειών αυτών βλ. παράγραφο 3.2. Όσον αφορά στους καινούριους τροπικούς τελεστές I_j $_{(j \in D)}$ της **KBEI**, θα ερμηνευτούν κι αυτοί με γενικευμένες δομές γειτονιάς (Scott-Montague), επίσης τροποποιημένες. Η επιλογή αυτή είναι ουσιαστικώς επιβεβλημένη απ' τη στιγμή που αποφασίσαμε να ισχύει για τους I_j ο κανόνας RE_j, να είναι δηλ. η **KBEI** κλασική ως προς τους τελεστές αυτούς (πβ. [5][Κεφ.9]).

Ορισμός 4.2.1 *Έστω το δομημένο σύνολο $\mathfrak{F} = \langle W, A, \mathcal{R}_b, \mathcal{R}_a, \mathcal{N}_b, \mathcal{N}_a, \mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_n \rangle$, όπου*

- $W \neq \varnothing$
- $A \subseteq \mathcal{P}(W)$ *είναι μια συλλογή* επιτρεπτών *υποσυνόλων του W, για την οποία ισχύουν*
  - **(a1)** $\varnothing \in A$, *και* $(\forall X, Y \in A)$
  - **(a2)** $W \setminus X \in A$
  - **(a3)** $X \cup Y \in A$
  - **($\mathbf{a4_b}$)** $\{w \in W \mid \mathcal{R}_b(w) \subseteq X\} \in A$ *(ομοίως και για $_a$)*
  - **($\mathbf{a5_b}$)** $\{w \in W \mid \mathcal{R}_b(w) \cap X \in \mathcal{N}_b(w)\} \in A$ *(ομοίως και για $_a$)*
  - **(a6)** $\{w \in W \mid X \in \mathcal{N}_j(w)\} \in A$ $_{(j \in D = \{1,\ldots,n\})}$
- $\mathcal{R}_b, \mathcal{R}_a \subseteq W \times W$ *είναι ανακλαστικές, μεταβατικές, και κατευθυνόμενες σχέσεις τ.π.*
  - **(kk)** $\mathcal{R}_a \subseteq \mathcal{R}_b$
- $\mathcal{N}_b : W \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ *τ.π.* $(\forall w \in W)$

$(\mathbf{nr_b})$ $\mathcal{N}_b(w) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{R}_b(w))$

$(\mathbf{be_b})$ $FC_b \in \mathcal{N}_b(w)$,
όπου FC_b είναι το τελικό σύμπλοκο της $\mathbf{S4.2}$*-δομής* $\langle W, \mathcal{R}_b \rangle$ (πβ. Παράγραφο 1.2).

$(\mathbf{pie_b})$ $(\forall X \in A)\big(\mathcal{R}_b(w) \cap X \in \mathcal{N}_b(w) \Longrightarrow \mathcal{R}_b(w) \subseteq \{v \in W \mid \mathcal{R}_b(v) \cap X \in \mathcal{N}_b(v)\}\big)$

Αν $|\mathcal{R}_b(w)| = m \in \mathbb{N}$, *τότε*

$(\mathbf{f_b})$ *Αν* m *:περιττός, τότε*
$\mathcal{N}_b(w) = \{X \subseteq \mathcal{R}_b(w) \mid |X| > m/2\}$
αλλιώς
$\mathcal{N}_b(w) = \{X \subseteq \mathcal{R}_b(w) \mid |X| > m/2\} \cup B_b$, *όπου*
$B_b \subseteq \{X \subseteq \mathcal{R}_b(w) \mid |X| = m/2\}$ *τ.π.*
$(\forall X \subseteq \mathcal{R}_b(w))(X \in B_b \iff \mathcal{R}_b(w) \setminus X \notin B_b)$

Αν $|\mathcal{R}_b(w)| \geq \omega$, *τότε*

$(\mathbf{cce_b})$ $(\forall X \in A)\ \big(\mathcal{R}_b(w) \cap X \in \mathcal{N}_b(w) \iff \mathcal{R}_b(w) \cap (W \setminus X) \notin \mathcal{N}_b(w)\big)$

$(\mathbf{ek_b})$ $(\forall T \in \mathcal{N}_b(w))(\forall X \in A)\ \big(T \subseteq \mathcal{R}_b(w) \cap X \Longrightarrow \mathcal{R}_b(w) \cap X \in \mathcal{N}_b(w)\big)$

Οι ίδιες ακριβώς ιδιότητες πρέπει να ισχύουν και για το $\mathcal{N}_a$ (ως προς το $\mathcal{R}_a$).

- $\mathcal{N}_j : W \to \mathcal{P}(A)$ $_{(j \in D)}$ *τ.π.* $(\forall w \in W, X \in A)$

  αν οριστούν οι παρακάτω βοηθητικές σχέσεις από το W στο A

  $\mathfrak{b}_b(w, X) \iff \mathcal{R}_b(w) \nsubseteq \{v \in W \mid \mathcal{R}_b(v) \nsubseteq X\}$ *(το ίδιο και για $_a$)*

  $\mathfrak{e}_b(w, X) \iff \mathcal{R}_b(w) \cap X \in \mathcal{N}_b(w)$ *(το ίδιο και για $_a$)*

  $\mathfrak{a}(w, X) \iff (\exists j \in D)\ X \in \mathcal{N}_j(w)\ \&\ (\forall j \in D)\ W \setminus X \notin \mathcal{N}_j(w)$

  $\mathfrak{s}(w, X) \iff (\forall j \in D)\big(X \in \mathcal{N}_j(w)\ \&\ W \setminus X \notin \mathcal{N}_j(w)\big)$

  να ισχύουν οι ιδιότητες

  $(\mathbf{bb})$ $\mathfrak{b}_b(w, X)\ \&\ \neg\mathfrak{a}(w, W \setminus X) \Longrightarrow \mathfrak{b}_a(w, X)$

  $(\mathbf{be})$ $\mathfrak{b}_b(w, X)\ \&\ \mathfrak{a}(w, W \setminus X) \Longrightarrow \mathfrak{e}_a(w, X)$

  $(\mathbf{eb})$ $\mathfrak{e}_b(w, X)\ \&\ \mathfrak{s}(w, X) \Longrightarrow \mathfrak{b}_a(w, X)$

  $(\mathbf{ee})$ $\mathfrak{e}_b(w, X)\ \&\ \neg\mathfrak{a}(w, W \setminus X) \Longrightarrow \mathfrak{e}_a(w, X)$

  $(\mathbf{een})$ $\neg\mathfrak{b}_b(w, X)\ \&\ \mathfrak{e}_b(w, X)\ \&\ \mathfrak{a}(w, W \setminus X) \Longrightarrow \mathfrak{e}_a(w, W \setminus X)$

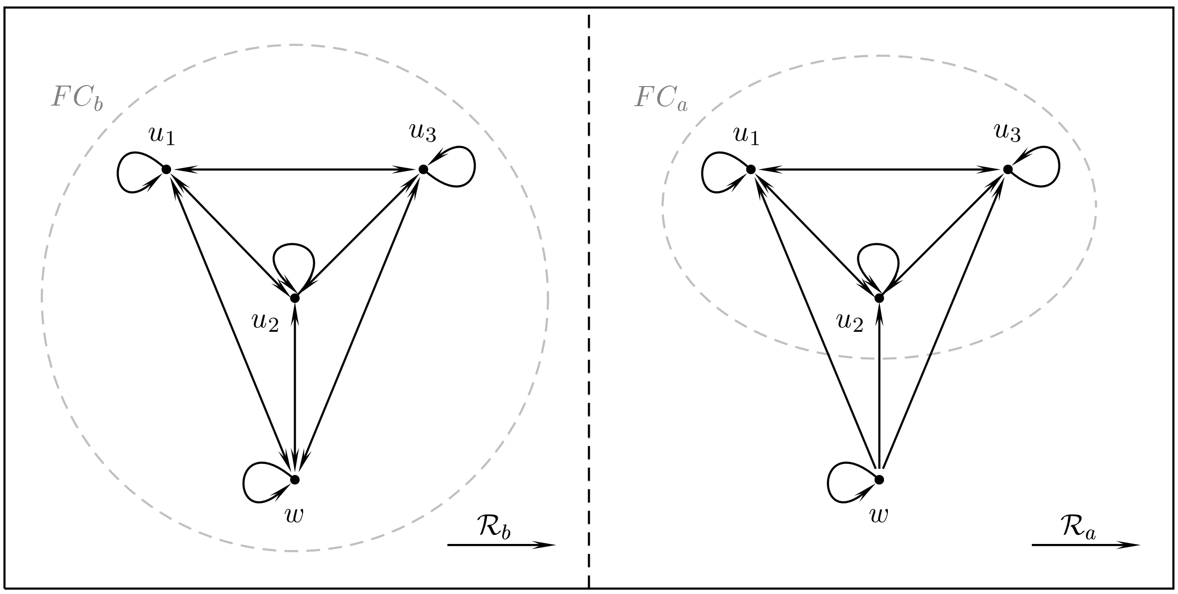
Αν ισχύουν όλα αυτά, τότε το $\mathfrak{F}$ θα ονομάζεται **kbei-πλαίσιο**. *Ένα $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$ θα ονομάζεται* **kbei-μοντέλο**, *αν είναι βασισμένο σε κάποιο kbei-πλαίσιο $\mathfrak{F}$ και η $V : \Phi \to A$ είναι μια αποτίμηση που καθορίζει ότι η ισχύς των προτασιακών μεταβλητών περιορίζεται μόνο στα επιτρεπτά σύνολα (γι' αυτό και θα ονομάζεται* επιτρεπτή αποτίμηση*).*

Σημείωση 4.2.2 Η ιδιότητα $(\mathbf{a2})$ των kbei-πλαισίων εγγυάται ότι οι συμβολισμοί $\mathfrak{a}(w, W \setminus X)$ και $\mathfrak{e}_a(w, W \setminus X)$ (όπου $X \in A$) έχουν νόημα.

Σε πρώτη ματιά δεν είναι προφανές αν υπάρχουν δομές που να ικανοποιούν όλες τις απαιτήσεις του Ορισμού 4.2.1. Θα μπορούσε κάλλιστα να υπήρχαν μεταξύ αυτών αντικρουόμενες ιδιότητες, όπως ακριβώς συμβαίνει για παράδειγμα με τη λογική του Thomason ($\mathbf{K}_t\mathbf{Tho}$), για την οποία ισχύει ότι, οι ιδιότητες των πλαισίων, ως προς τα οποία θα ήταν ορθή η λογική αυτή μαζί με το αξίωμα McKinsey, είναι αντικρουόμενες (βλ. [3, Κεφ.4.4]). Ευτυχώς στην περίπτωσή μας δεν ισχύει αυτό, δηλ. υπάρχουν kbei-πλαίσια, και σε συνδυασμό με την απόδειξη ορθότητας της επόμενης παραγράφου φαίνεται ότι υπάρχουν δομές που ορίζονται από την **KBEI** (οπότε αυτή είναι και συνεπής).

Παρατήρηση 4.2.3 *Η κλάση των kbei-πλαισίων είναι μη κενή.*

Απόδειξη. Έστω το πλαίσιο $\mathfrak{F}_2 = \langle W, A, \mathcal{R}_b, \mathcal{R}_a, \mathcal{N}_b, \mathcal{N}_a, \mathcal{N}_1 \rangle$ με σύνολο κόσμων $W = \{w, u_1, u_2, u_3\}$. Στο Σχήμα 4.2 φαίνεται αριστερά η σχέση $\mathcal{R}_b$, ενώ δεξιά η $\mathcal{R}_a$ (που ταυτίζεται μ' εκείνη του παραδείγματος 3.2.5). Και οι δύο σχέσεις διασυνδέουν μη διαφοροποιήσιμους κόσμους όπως σε όλα τα επιστημικά μοντέλα.



Σχήμα 4.2: Τα W, $\mathcal{R}_b$, και $\mathcal{R}_a$ του πλαισίου $\mathfrak{F}_2$

Έστω επίσης ότι $A = \{\varnothing, \{w\}, FC_a, W\}$ και

$$\mathcal{N}_b(w) = \mathcal{N}_b(u_1) = \mathcal{N}_b(u_2) = \mathcal{N}_b(u_3) = \{X \subseteq W \mid |X| \geq 3\} \cup \{\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\}, \{u_2, u_3\}\},$$
$$\mathcal{N}_a(w) = \mathcal{N}_b(w),$$
$$\mathcal{N}_a(u_1) = \mathcal{N}_a(u_2) = \mathcal{N}_a(u_3) = \{\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\}, \{u_2, u_3\}, FC_a\},$$
$$\mathcal{N}_1(w) = \mathcal{N}_1(u_1) = \mathcal{N}_a(u_2) = \mathcal{N}_a(u_3) = \{FC_a\},$$

όπου φυσικά $FC_b = W$ είναι το τελικό σύμπλοκο της **S4.2**-δομής $\langle W, \mathcal{R}_b \rangle$, ενώ $FC_a = \{u_1, u_2, u_3\}$ είναι το τελικό σύμπλοκο της **S4.2**-δομής $\langle W, \mathcal{R}_a \rangle$.

Παρατηρούμε δηλ. κατ' αρχάς ότι οι $\mathcal{R}_b$ και $\mathcal{R}_a$ είναι ανακλαστικές, μεταβατικές, και κατευθυνόμενες σχέσεις (αφού είπαμε ότι είναι **S4.2**-δομές). Επίσης βλέπουμε ότι ισχύει γι' αυτές και η ιδιότητα (**kk**), κι ότι για το A ισχύουν οι ιδιότητες (**a1**) έως (**a6**). Εύκολα διαφαίνεται επίσης ότι ισχύουν οι ($\mathbf{nr_b}$) έως ($\mathbf{pie_b}$) και η ($\mathbf{f_b}$), καθώς και οι ($\mathbf{nr_a}$) έως ($\mathbf{pie_a}$) και ($\mathbf{f_a}$) (μια και η $\mathcal{R}_a$ ταυτίζεται με την $\mathcal{R}$ του Παραδείγματος 3.2.5). Απομένει λοιπόν να ελέγξουμε τις (**bb**) έως (**een**), πράγμα το οποίο είναι εύκολο μόλις δούμε τις αληθοτιμές των βοηθητικών ιδιοτήτων $\mathfrak{b}_b$ έως $\mathfrak{s}$ για όλες τις τιμές $t \in W$ και $X \in A$. Οι τιμές αυτές για όλους τους κόσμους $t \in W$

έχουν ως εξής:

X	$\mathfrak{b}_b(t,X)$	$\mathfrak{a}(t,W\setminus X)$	$\mathfrak{s}(t,X)$	$\mathfrak{e}_b(t,X)$	$\mathfrak{b}_a(t,X)$	$\mathfrak{e}_a(t,X)$	$\mathfrak{e}_a(t,W\setminus X)$
$\varnothing$	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A
W	A	Ψ	Ψ	A	A	A	Ψ
$\{w\}$	Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A
FC_a	Ψ	Ψ	A	A	A	A	Ψ

Άρα το $\mathfrak{F}_2$ είναι kbei-πλαίσιο. ∎

Ακριβώς όπως πράξαμε και για τη γλώσσα $\mathcal{L}_{KBE}$, μπορούμε να επεκτείνουμε την αποτίμηση $V:\Phi\to A$ ενός μοντέλου (για την $\mathcal{L}_I$) $\mathfrak{M}=\langle W,A,\mathcal{R}_b,\mathcal{R}_a,\mathcal{N}_b,\mathcal{N}_a,\mathcal{N}_1,\ldots,\mathcal{N}_n,V\rangle$ σε όλους τους τύπους της $\mathcal{L}_I$ με το συνήθη τρόπο, κάνοντας μόνο μια μικρή αλλαγή όσον αφορά στους τελεστές E_b και E_a.

Ορισμός 4.2.4 *Έστω τυχαίο μοντέλο $\mathfrak{M}=\langle W,A,\mathcal{R}_b,\mathcal{R}_a,\mathcal{N}_b,\mathcal{N}_a,\mathcal{N}_1,\ldots,\mathcal{N}_n,V\rangle$ για την $\mathcal{L}_I$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\overline{V}:\mathcal{L}_I\to\mathcal{P}(W)$ αναδρομικώς ως εξής:*

- $\overline{V}(p)=V(p), \quad (\forall p\in\Phi)$
- $\overline{V}(\bot)=\varnothing$

και $(\forall\varphi,\psi\in\mathcal{L}_I)$

- $\overline{V}(\varphi\supset\psi)=(W\setminus\overline{V}(\varphi))\cup\overline{V}(\psi)$
- $\overline{V}(\mathsf{K}_b\varphi)=\{w\in W\mid\mathcal{R}_b(w)\subseteq\overline{V}(\varphi)\}$ *(ομοίως και για $_a$)*
- $\overline{V}(\mathsf{E}_b\varphi)=\{w\in W\mid\mathcal{R}_b(w)\cap\overline{V}(\varphi)\in\mathcal{N}_b(w)\}$ *(ομοίως και για $_a$)*
- $\overline{V}(\mathsf{I}_j\varphi)=\{w\in W\mid\overline{V}(\varphi)\in\mathcal{N}_j(w)\}$ $\scriptstyle (j\in D)$

Και πάλι οι ιδιότητες (**a1**) έως (**a6**) των kbei-μοντέλων (Ορισμός 4.2.1) μπορούν να χρησιμοποιηθούν τετριμμένως για να αποδειχθεί ότι η $\overline{V}$ είναι όντως επέκταση της V σε όλους τους τύπους:

Πρόταση 4.2.5 *Έστω ένα kbei-μοντέλο $\mathfrak{M}=\langle W,A,\mathcal{R}_b,\mathcal{R}_a,\mathcal{N}_b,\mathcal{N}_a,\mathcal{N}_1,\ldots,\mathcal{N}_n,V\rangle$ καθώς και η συνάρτηση $\overline{V}$ του Ορισμού 4.2.4. Τότε, $(\forall\varphi\in\mathcal{L}_I)$ $\overline{V}(\varphi)\in A$, κι έτσι η $\overline{V}$ αποτελεί επέκταση της $V:\Phi\to A$ σε όλους τους τύπους.*

Σημείωση 4.2.6 *Και πάλι μπορούμε να γράφουμε $\mathfrak{M},w\Vdash\varphi$ αντί για $w\in\overline{V}(\varphi)$· όπως και $|\varphi|$ αντί για $\overline{V}(\varphi)$, αν είναι ξεκάθαρο για ποια V πρόκειται.*

Ιδού τώρα ένα χρήσιμο λήμμα που θα βοηθήσει όχι μόνο στις αποδείξεις ορθότητας/πληρότητας αλλά και στο να αποκτήσουμε μια κάποια διαίσθηση για τους τελεστές (βασικούς και παραγόμενους) της **KBEI**.

Λήμμα 4.2.7 *Έστω $\mathfrak{M}=\langle W,A,\mathcal{R}_b,\mathcal{R}_a,\mathcal{N}_b,\mathcal{N}_a,\mathcal{N}_1,\ldots,\mathcal{N}_n,V\rangle$ ένα kbei-μοντέλο, $w\in W$, και $\varphi\in\mathcal{L}_I$. Τότε,*

(i) $\mathfrak{M},w\Vdash\mathsf{B}_b\varphi\iff\mathfrak{b}_b(w,|\varphi|)$ *(ομοίως και για $_a$)*

(ii) $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{E}_b\varphi \iff \mathfrak{e}_b(w, |\varphi|)$ *(ομοίως και για $_a$)*

(iii) $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{A}\varphi \iff \mathfrak{a}(w, |\varphi|)$

(iv) $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{S}\varphi \iff \mathfrak{s}(w, |\varphi|)$

Αποδειξη. Έστω $w \in W$ και τύπος φ. Κατ' αρχάς, από Πρόταση 4.2.5, παρατηρούμε ότι $|\varphi| \in A$, κι έτσι έχει νόημα η εμφάνιση του συνόλου $|\varphi|$ στις ιδιότητες $\mathfrak{b}_b$ έως $\mathfrak{s}$ στην εκφώνηση του λήμματος.

(i) $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{B}_b\varphi \overset{\mathbf{DB_b}}{\iff} \mathfrak{M}, w \Vdash \neg\mathsf{K}_b\neg\mathsf{K}_b\varphi \overset{\text{Ορ.}4.2.4}{\iff} \mathcal{R}_b(w) \nsubseteq |\neg\mathsf{K}_b\varphi| \iff$
$\mathcal{R}_b(w) \nsubseteq \{v \in W \mid \mathfrak{M}, v \Vdash \neg\mathsf{K}_b\varphi\} \overset{\text{Ορ.}4.2.4}{\iff} \mathcal{R}_b(w) \nsubseteq \{v \in W \mid \mathcal{R}_b(v) \nsubseteq |\varphi|\} \overset{\text{Ορ.}4.2.1}{\iff}$
$\mathfrak{b}_b(w, |\varphi|)$

Η απόδειξη για το δείκτη a διαφέρει μόνο ως προς αυτόν.

(ii) $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{E}_b\varphi \overset{\text{Ορ.}4.2.4}{\iff} \mathcal{R}_b(w) \cap |\varphi| \in \mathcal{N}_b(w) \overset{\text{Ορ.}4.2.1}{\iff} \mathfrak{e}_b(w, |\varphi|)$

Η απόδειξη για το δείκτη a διαφέρει και πάλι μόνο ως προς αυτόν.

(iii) $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{A}\varphi \overset{\mathbf{AI}}{\iff} \mathfrak{M}, w \Vdash \bigvee_{j\in D} \mathsf{I}_j\varphi \wedge \bigwedge_{j\in D} \neg\mathsf{I}_j\neg\varphi \iff$
$(\exists j \in D)\ \mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{I}_j\varphi\ \&\ (\forall j \in D)\ \mathfrak{M}, w \Vdash \neg\mathsf{I}_j\neg\varphi \overset{\text{Ορ.}4.2.4}{\iff}$
$(\exists j \in D)\ |\varphi| \in \mathcal{N}_j(w)\ \&\ (\forall j \in D)\ |\neg\varphi| \notin \mathcal{N}_j(w) \overset{\text{Ορ.}4.2.4}{\iff}$
$(\exists j \in D)\ |\varphi| \in \mathcal{N}_j(w)\ \&\ (\forall j \in D)\ W \setminus |\varphi| \notin \mathcal{N}_j(w) \overset{\text{Ορ.}4.2.1}{\iff} \mathfrak{a}(w, |\varphi|)$

(iv) $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{S}\varphi \overset{\mathbf{SI}}{\iff} \mathfrak{M}, w \Vdash \bigwedge_{j\in D}(\mathsf{I}_j\varphi \wedge \neg\mathsf{I}_j\neg\varphi) \iff$
$(\forall j \in D)(\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{I}_j\varphi\ \&\ \mathfrak{M}, w \Vdash \neg\mathsf{I}_j\neg\varphi) \overset{\text{Ορ.}4.2.4}{\iff}$
$(\forall j \in D)(|\varphi| \in \mathcal{N}_j(w)\ \&\ |\neg\varphi| \notin \mathcal{N}_j(w)) \overset{\text{Ορ.}4.2.4}{\iff}$
$(\forall j \in D)(|\varphi| \in \mathcal{N}_j(w)\ \&\ W \setminus |\varphi| \notin \mathcal{N}_j(w)) \overset{\text{Ορ.}4.2.1}{\iff} \mathfrak{s}(w, |\varphi|)$

∎

Ό,τι αναφέρθηκε στην Παρατήρηση 3.2.8 και που αφορούσε στις διαισθήσεις μας για την ερμηνεία των τελεστών K και E ισχύει κι εδώ στο ακέραιο. Μόνο που στην περίπτωση της **KBEI** και των ερμηνειών της παίζουν προφανώς ρόλο και οι δείκτες b και a. Επιπλέον, υπό το φως του προηγούμενου λήμματος και του Ορισμού 4.2.4, μπορεί να γίνει η ακόλουθη

Παρατήρηση 4.2.8 *Έστω $\mathfrak{M}$ ένα kbei-μοντέλο, w κάποιος κόσμος του, και φ τύπος της $\mathcal{L}_I$. Τότε*

α) Υπάρχει επιστημικώς μη διαφοροποιήσιμος κόσμος από τον w, στον οποίον ο αντιλήπτορας γνωρίζει ότι ισχύει ο φ πριν (μετά) τη λήψη της πληροφορίας, αν και μόνον αν εκείνος πιστεύει στον w ότι ισχύει ο φ πριν (μετά) τη λήψη της πληροφορίας, δηλ. ισχύει ισοδύναμα $\mathfrak{b}_b(w, |\varphi|)$ ή $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{B}_b\varphi$ (και αντιστοίχως $\mathfrak{b}_a(w, |\varphi|)$ ή $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{B}_a\varphi$)

β) Ας υποθέσουμε ότι οι επιστημικώς μη διαφοροποιήσιμοι κόσμοι από τον w πριν (μετά) τη λήψη της πληροφορίας είναι πεπερασμένοι το πλήθος. Τότε, από όλους τους επιστημικώς μη διαφοροποιήσιμους κόσμους από τον w, εκείνοι στους οποίους ισχύει ο φ αποτελούν πλειονότητα πριν (μετά) τη λήψη της πληροφορίας, αν και μόνον αν ο αντιλήπτορας εκτιμά ότι ισχύει ο φ, δηλ. έχουμε ισοδύναμα $\mathfrak{e}_b(w, |\varphi|)$ ή $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{E}_b\varphi$ (και αντιστοίχως $\mathfrak{e}_a(w, |\varphi|)$ ή $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{E}_a\varphi$)

Όσον αφορά δε στους καινούριους τελεστές της **KBEI***,*

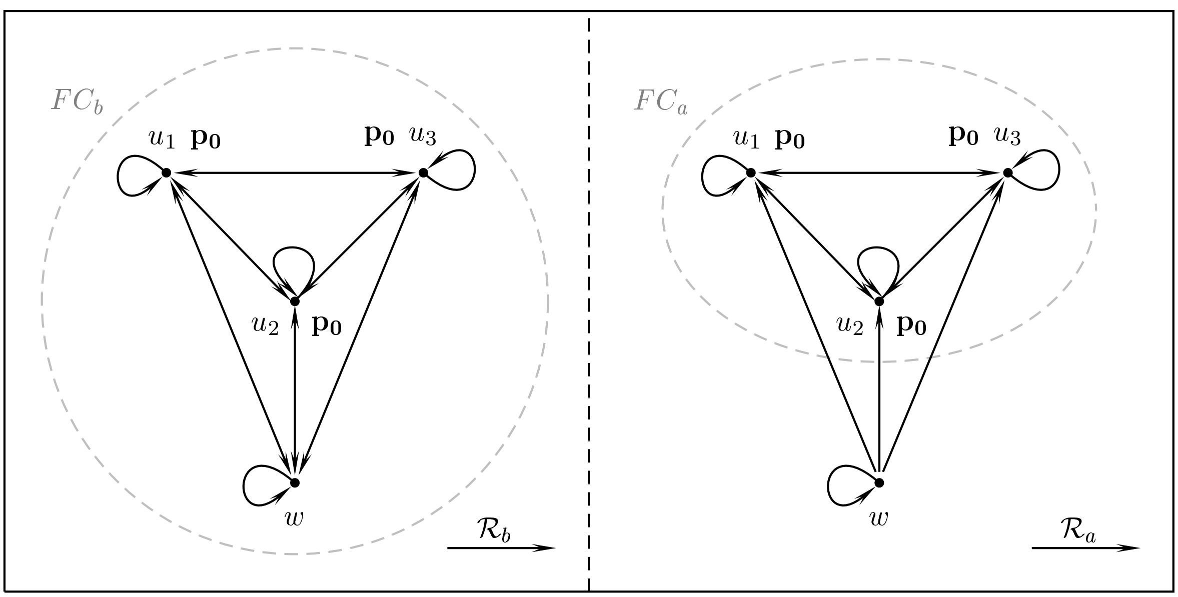
γ) $|\varphi| \in \mathcal{N}_j(w)$ (για κάποιο $j \in D$), αν και μόνον αν η πηγή με αριθμό j ενημερώνει τον αντιλήπτορα (όταν αυτός βρίσκεται στον w) ότι ισχύει ο φ, δηλ. $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{I}_j\varphi$

δ) υπάρχει πηγή που πληροφορεί τον αντιλήπτορα (όταν αυτός βρίσκεται στον w) ότι ισχύει ο φ, ενώ καμιά δεν τον ενημερώνει ότι ισχύει ο $\neg\varphi$, αν και μόνον αν $\mathfrak{a}(w, |\varphi|)$ ή $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{A}\varphi$

ε) όλες οι πηγές πληροφορούν τον αντιλήπτορα (όταν αυτός βρίσκεται στον w) ότι ισχύει ο φ, ενώ καμιά δεν τον ενημερώνει ότι ισχύει ο $\neg\varphi$, αν και μόνον αν $\mathfrak{s}(w, |\varphi|)$ ή $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{S}\varphi$.

Έχοντας αυτά υπ' όψιν, ας δούμε το ακόλουθο.

Παράδειγμα 4.2.9 *Έστω το μοντέλο $\mathfrak{M}_2 = \langle \mathfrak{F}_2, V \rangle$, βασισμένο στο πλαίσιο της απόδειξης της Παρατήρησης 4.2.3, όπου $V(p_0) = FC_a$ και $(\forall q \in \Phi \setminus \{p_0\})\ V(q) = \varnothing$ (βλ. Σχήμα 4.3). Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι $V(q) \in A$ για όλες τις προτασιακές μεταβλητές q, άρα η V είναι επιτρεπτή αποτίμηση, κι έτσι, μια και το $\mathfrak{F}_2$ είναι, απ' την απόδειξη της Παρατήρησης 4.2.3, kbei-πλαίσιο, το $\mathfrak{M}_2$ είναι kbei-μοντέλο.*



Σχήμα 4.3: Τα W, $\mathcal{R}_b$, $\mathcal{R}_a$, και V του μοντέλου $\mathfrak{M}_2$

Απ' τη στιγμή που $\mathcal{N}_1(w) = \mathcal{N}_1(u_1) = \mathcal{N}_a(u_2) = \mathcal{N}_a(u_3) = \{FC_a\}$, αυτό σημαίνει ότι η μοναδική πηγή, για κάθε τύπο που είναι αληθής στο τελικό σύμπλοκο FC_a, πληροφορεί τον αντιλήπτορα (σε όποιον κόσμο κι αν βρίσκεται εκείνος) ότι αυτός ισχύει. Άρα, η πηγή ενημερώνει ότι ισχύει ο p_0, ενώ δεν δίνει καμιά πληροφορία για άλλες προτασιακές μεταβλητές.

Επίσης είναι προφανές ότι πληροφορεί και για την ισχύ όλων των τύπων που αληθεύουν ακριβώς στο FC_a, όπως για παράδειγμα για τους $p_0 \wedge \neg p_1$, $\neg p_1 \supset p_0$, κ.τ.ό. Επιπροσθέτως, απ' τη στιγμή που $\{w\} \notin \mathcal{N}_1(w)$ (όπως ακριβώς και για τους υπόλοιπους κόσμους), η πηγή δεν πληροφορεί για τον $\neg p_0$, κι αφού υπάρχει μόνο μια πηγή, διαθέτει ο αντιλήπτορας ισχυρές (άρα και αποχρώσες) ενδείξεις για την ισχύ του p, δηλ. έχουμε $\mathfrak{M}_2 \Vdash \mathsf{S}p_0$ και $\mathfrak{M}_2 \Vdash \mathsf{A}p_0$, ή αλλιώς $\mathfrak{s}(w, |p_0|)$ και $\mathfrak{a}(w, |p_0|)$ (όπως ακριβώς και για τους υπόλοιπους κόσμους).

Τώρα, απ' τη στιγμή που $|p_0| = FC_a \in \mathcal{N}_b(w)$ (όπως και για τους υπόλοιπους κόσμους), θα ισχύει $\mathfrak{M}_2 \Vdash \mathsf{E}_b p_0$ ή $\mathfrak{e}_b(w, |p_0|)$ (και στους υπόλοιπους κόσμους το ίδιο). Ας παρατηρήσουμε εδώ ότι, αφού δεν υπάρχει επόμενος κόσμος κανενός, στον οποίον να ισχύει $\mathsf{K}_b p_0$, δεν ισχύει πουθενά $\mathsf{B}_b p_0$, δηλ. όπου κι αν βρίσκεται ο αντιλήπτορας, πριν να ενημερωθεί απ' την πηγή, εκτιμά ότι ισχύει ο p_0, χωρίς όμως να το πιστεύει.

Όμως, μετά την ενημέρωσή του, αφού σε κάθε κόσμο τού FC_a ισχύει p_0, θα ισχύει παντού εκεί $\mathsf{K}_a p_0$ (ας μην ξεχνάμε ότι πρόκειται για το τελικό σύμπλοκο της δομής $\langle W, \mathcal{R}_a \rangle$), άρα $\mathfrak{M}_2 \Vdash \mathsf{B}_b p_0$, δηλ. μετά την πληροφόρηση του αντιλήπτορα απ' την πηγή, ο βαθμός βεβαιότητάς του για το p_0 μεγάλωσε· από την απλή εκτίμηση στην πεποίθηση. Στο παράδειγμα λοιπόν αυτό η ιδιότητα (**eb**) *των kbei-μοντέλων ισχύει μη τετριμμένως. Φυσικά, ισχύουν και οι υπόλοιπες ιδιότητες των μοντέλων αυτών, μια και, όπως παρατηρήσαμε στο τέλος της απόδειξης της Παρατήρησης 4.2.3, το υποκείμενό του πλαίσιο είναι kbei. Από αυτές, εκτός της* (**eb**)*, μη τετριμμένως ισχύει και η* (**ee**).

Ίσως αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι, αν $\{w\} \in \mathcal{N}_j(w)$ για κάποιο $j \in D$ (ίσως και για 1), τότε θα ενημερωνόταν ο αντιλήπτορας ότι ισχύει ο $\neg p_0$, που σημαίνει ότι θα είχε αντιφατική πληροφόρηση, κι έτσι δεν θα υπήρχαν αποχρώσες ενδείξεις για την ισχύ του p_0. Αυτό όμως θα σήμαινε ότι δεν θα ενισχυόταν η άποψή του για την αλήθεια του p_0 (όπως έγινε προηγουμένως). Δηλ. αυτό το μοντέλο, για να συνέχιζε να ήταν kbei, θα έπρεπε να είχε ως επιστημική σχέση $\mathcal{R}_a$ μετά την πληροφόρηση, την ίδια που είχε και πριν (την $\mathcal{R}_b$), κι έτσι θα φαινόταν με μια ματιά ότι η άποψη του αντιλήπτορα δεν άλλαξε.

4.3 Χαρακτηρισμός της KBEI

Θεώρημα 4.3.1 (Ορθότητα) *Η λογική* **KBEI** *είναι ορθή ως προς την κλάση των kbei-πλαισίων.*

Απόδειξη. Μια και οι κανόνες **MP**, $\mathbf{RN}_{\mathsf{K}_b}$, $\mathbf{RN}_{\mathsf{K}_a}$, και $\mathbf{RE}_{\mathsf{I_j}}$ $(j \in D)$ διατηρούν την εγκυρότητα, αρκεί να αποδειχθεί ότι όλα τα αξιώματα της **KBEI** είναι έγκυρα σε κάθε kbei-πλαίσιο. Έστω λοιπόν τυχαίο kbe-πλαίσιο $\mathfrak{F} = \langle W, A, \mathcal{R}_b, \mathcal{R}_a, \mathcal{N}_b, \mathcal{N}_a, \mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_n \rangle$. Τα αξιώματα $\mathbf{K_b}$ έως $\mathbf{PIE_b}$, όπως και τα $\mathbf{K_a}$ έως $\mathbf{PIE_a}$, αποδεικνύεται ότι είναι έγκυρα στο $\mathfrak{F}$ με ακριβώς ίδιο τρόπο όπως στο Θεώρημα 3.3.1 (αναφερόμενοι στα τελικά σύμπλοκα FC_b και FC_a, αντί για το FC που εμφανίζεται στην απόδειξη του θεωρήματος αυτού). Για τα υπόλοιπα αξιώματα, ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο μοντέλο $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$ βασισμένο στο $\mathfrak{F}$, καθώς και τυχαίον κόσμο $w \in W$.

KK. Αν $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{K}_b \varphi$, τότε, απ' τον Ορισμό 4.2.4, $\mathcal{R}_b(w) \subseteq |\varphi|$. Όμως, απ' την ιδιότητα (**kk**) των kbei-μοντέλων, $\mathcal{R}_a \subseteq \mathcal{R}_b$, άρα, $\mathcal{R}_a(w) \subseteq |\varphi|$, έτσι, λόγω και πάλι του Ορισμού 4.2.4, $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{K}_a \varphi$.

BB. Αν $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{B}_b \varphi \wedge \neg \mathsf{A} \neg \varphi$. τότε, απ' το Λήμμα 4.2.7(i),(iii), $\mathfrak{b}_b(w, |\varphi|)$ και $\neg \mathfrak{a}(w, |\neg \varphi|)$ (δηλ. από Ορισμό 4.2.4, $\neg \mathfrak{a}(w, W \setminus |\varphi|)$), έτσι, απ' την ιδιότητα (**bb**) των kbei-μοντέλων, $\mathfrak{b}_a(w, |\varphi|)$, που σημαίνει, λόγω του Λήμματος 4.2.7(i), ότι $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{B}_a \varphi$.

BE. Αν $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{B}_b\varphi \wedge \mathsf{A}\neg\varphi$, τότε και πάλι απ' το Λήμμα 4.2.7(i),(iii), $\mathfrak{b}_b(w, |\varphi|)$ και $\mathfrak{a}(w, |\neg\varphi|)$ (ή από Ορισμό 4.2.4, $\mathfrak{a}(w, W \setminus |\varphi|)$), άρα, από την (**be**) των kbei-μοντέλων, $\mathfrak{e}_a(w, |\varphi|)$, δηλ. λόγω του Λήμματος 4.2.7(ii), $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{E}_a\varphi$.

EB. Αν $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{E}_b\varphi \wedge \mathsf{S}\varphi$, έπεται απ' το Λήμμα 4.2.7(ii),(iv), $\mathfrak{e}_b(w, |\varphi|)$ και $\mathfrak{s}(w, |\varphi|)$, κι έτσι, από την (**eb**), $\mathfrak{b}_a(w, |\varphi|)$, ή λόγω του Λήμματος 4.2.7(i), $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{B}_a\varphi$.

EE. Αν $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{E}_b\varphi \wedge \neg\mathsf{A}\neg\varphi$, τότε από 4.2.7(ii),(iii), $\mathfrak{e}_b(w, |\varphi|)$ και $\neg\mathfrak{a}(w, |\neg\varphi|)$ (δηλ. από Ορισμό 4.2.4, $\neg\mathfrak{a}(w, W \setminus |\varphi|)$), άρα, από (**ee**), $\mathfrak{e}_a(w, |\varphi|)$, δηλ. από 4.2.7(ii), $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{E}_a\varphi$.

EEN. Αν $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\mathsf{B}_b\varphi \wedge \mathsf{E}_b\varphi \wedge \mathsf{A}\neg\varphi$, τότε απ' το Λήμμα 4.2.7(i)-(iii), $\neg\mathfrak{b}_b(w, |\varphi|)$, $\mathfrak{e}_b(w, |\varphi|)$, και $\mathfrak{a}(w, |\neg\varphi|)$ (ή από Ορισμό 4.2.4, $\mathfrak{a}(w, W \setminus |\varphi|)$), άρα, από (**een**), $\mathfrak{e}_a(w, W \setminus |\varphi|)$, δηλ. από 4.2.4, $\mathfrak{e}_a(w, |\neg\varphi|)$, κι έτσι, απ' το Λήμμα 4.2.7(ii), $\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{E}_a\neg\varphi$.

∎

Χρησιμοποιώντας τώρα την ορθότητα της **KBEI** ως προς τα kbei-πλαισία, καθώς και την Παρατήρηση 4.2.3, παίρνουμε αμέσως το επόμενο.

Πόρισμα 4.3.2 *Η* **KBEI** *είναι συνεπής.*

Για να αποδείξουμε την πληρότητα της **KBEI** ως προς τα kbei-πλαισία θα ακολουθήσουμε και πάλι την τεχνική μέσω του κανονιστικού μοντέλου· και για να απλοποιήσουμε κάπως το συμβολισμό θα ονομάσουμε Λ την **KBEI**.

Ορισμός 4.3.3 *Το κανονιστικό μοντέλο* $\mathfrak{M}^\Lambda$ *της* Λ *είναι η δομή*

$$\langle W^\Lambda, A^\Lambda, \mathcal{R}_b^\Lambda, \mathcal{R}_a^\Lambda, \mathcal{N}_b^\Lambda, \mathcal{N}_a^\Lambda, \mathcal{N}_1^\Lambda, \ldots, \mathcal{N}_n^\Lambda, V^\Lambda\rangle$$

όπου

i. $W^\Lambda = \{\Gamma \subseteq \mathcal{L}_I \mid \Gamma : \mu\sigma\Lambda\}$

ii. $A^\Lambda = \{\Theta \subseteq W^\Lambda \mid (\exists\varphi \in \mathcal{L}_I)\ \Theta = [\varphi]\}$
όπου
$[\varphi] = \{\Delta \in W^\Lambda \mid \varphi \in \Delta\}$.

iii. $\mathcal{R}_b^\Lambda = \{(\Gamma, \Delta) \in W^\Lambda \times W^\Lambda \mid (\forall\varphi \in \mathcal{L}_I)(\mathsf{K}_b\varphi \in \Gamma \Rightarrow \varphi \in \Delta)\}$
Ομοίως και για το δείκτη a.

iv. $(\forall\Gamma \in W^\Lambda)$
$\mathcal{N}_b^\Lambda(\Gamma) = \{\mathcal{R}_b^\Lambda(\Gamma) \cap \Theta \subseteq W^\Lambda \mid (\exists\varphi \in \mathcal{L}_I)(\Theta = [\varphi]\ \&\ \mathsf{E}_b\varphi \in \Gamma)\} \cup \{\Sigma_b\}$
όπου
$\Sigma_b = \{\Delta \in W^\Lambda \mid (\forall\varphi \in \mathcal{L}_I)\ \varphi \supset \mathsf{K}_b\neg\mathsf{K}_b\neg\varphi \in \Delta\}$
Ομοίως και για το δείκτη a.

v. $(\forall j \in D)(\forall\Gamma \in W^\Lambda)\ \mathcal{N}_j^\Lambda(\Gamma) = \{\Theta \in A^\Lambda \mid (\exists\varphi \in \mathcal{L}_I)(\Theta = [\varphi]\ \&\ \mathsf{I}_j\varphi \in \Gamma)\}$

vi. $(\forall p \in \Phi)\ V^\Lambda(p) = [p]$

Το πλαίσιο $\mathfrak{F}^\Lambda$ *που είναι υποκείμενο του μοντέλου* $\mathfrak{M}^\Lambda$ *ονομάζεται κανονιστικό πλαίσιο της* Λ.

Κατ' αρχάς, χρησιμοποιώντας τη συνέπεια της Λ (Πόρισμα 4.3.2), το Λήμμα του Lindenbaum (3.4.2) δίνει αμέσως ότι το $\mathfrak{M}^\Lambda$ υπάρχει:

Παρατήρηση 4.3.4 $W^{\Lambda} \neq \varnothing$

Όπως ακριβώς στη λογική **KBE**, έτσι και στην **KBEI** – με χρήση των δεικτών a και b στις προφανείς θέσεις τους – ισχύει η Παρατήρηση 3.4.5, τα Λήμματα 3.4.6 (Existence Lemma), 3.4.7, 3.4.8, καθώς και το Πόρισμα 3.4.9. Προκειμένου λοιπόν να προχωρήσουμε στην απόδειξη της πληρότητας, θα χρειαστούμε και τα επόμενα τρία λήμματα.

Λήμμα 4.3.5 $(\forall j \in D)(\forall \varphi, \psi \in \mathcal{L}_I)(\forall \Gamma \in W^{\Lambda})\big([\varphi] = [\psi] \Longrightarrow (\mathsf{I}_j\varphi \in \Gamma \Leftrightarrow \mathsf{I}_j\psi \in \Gamma)\big)$

Απόδειξη. Έστω ότι $[\varphi] = [\psi]$. Τότε, για κάθε $\Gamma \in W^{\Lambda}$, $\Gamma \in [\varphi] \Leftrightarrow \Gamma \in [\psi]$, δηλ. $\varphi \in \Gamma \Leftrightarrow \psi \in \Gamma$, έτσι, απ' τη στιγμή που το Γ είναι μια $\mu\sigma\Lambda$-θεωρία, απ' το Λήμμα 3.4.4, $\varphi \equiv \psi \in \Gamma$, άρα, από 3.4.4(iv), $\varphi \equiv \psi \in \Lambda$, οπότε, απ' τον κανόνα $\mathbf{RE}_{\mathsf{I_j}}$, $\mathsf{I}_j\varphi \equiv \mathsf{I}_j\psi \in \Lambda$, επομένως, και πάλι απ' το Λήμμα 3.4.4, για κάθε $\Gamma \in W^{\Lambda}$, $\mathsf{I}_j\varphi \equiv \mathsf{I}_j\psi \in \Gamma$, έτσι, $\mathsf{I}_j\varphi \in \Gamma \Leftrightarrow \mathsf{I}_j\psi \in \Gamma$. ∎

Λήμμα 4.3.6 *Έστω Γ μια $\mu\sigma\Lambda$-θεωρία και $[\varphi] \in A^{\Lambda}$ ένα επιτρεπτό σύνολο του $\mathfrak{M}^{\Lambda}$. Τότε,*

i. $(\forall j \in D)([\varphi] \in \mathcal{N}_j^{\Lambda}(\Gamma) \iff \mathsf{I}_j\varphi \in \Gamma)$

ii. $\mathcal{R}_b^{\Lambda}(\Gamma) \subseteq [\varphi] \iff \mathsf{K}_b\varphi \in \Gamma$ *(ομοίως και για $_a$)*

iii. $\mathfrak{b}_b(\Gamma, [\varphi]) \iff \mathsf{B}_b\varphi \in \Gamma$ *(ομοίως και για $_a$)*

iv. $\mathfrak{e}_b(\Gamma, [\varphi]) \iff \mathsf{E}_b\varphi \in \Gamma$ *(ομοίως και για $_a$)*

v. $\mathfrak{a}(\Gamma, [\varphi]) \iff \mathsf{A}\varphi \in \Gamma$

vi. $\mathfrak{s}(\Gamma, [\varphi]) \iff \mathsf{S}\varphi \in \Gamma$

Απόδειξη. Έστω $\Gamma \in W^{\Lambda}$ και $[\varphi] \in A^{\Lambda}$.

i. Για το τυχαίο $j \in D$, αν $[\varphi] \in \mathcal{N}_j^{\Lambda}(\Gamma)$, τότε, απ' τον Ορισμό 4.3.3, θα υπάρχει $\psi \in \mathcal{L}_I$ τ.π. $[\varphi] = [\psi]$ και $\mathsf{I}_j\psi \in \Gamma$, κι έτσι, απ' το Λήμμα 4.3.5, $\mathsf{I}_j\varphi \in \Gamma$. Το αντίστροφο προκύπτει αμέσως από τον Ορισμό 4.3.3.

ii. Έστω ότι $\mathcal{R}_b^{\Lambda}(\Gamma) \subseteq [\varphi]$. Τότε, για κάθε $\Delta \in W^{\Lambda}$, αν $\Gamma\mathcal{R}_b^{\Lambda}\Delta$, τότε $\Delta \in [\varphi]$, δηλ. $\varphi \in \Delta$, κι έτσι, απ' το Λήμμα 3.4.6 (Existence Lemma), $\mathsf{K}_b\varphi \in \Gamma$. Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι $\mathsf{K}_b\varphi \in \Gamma$. Τότε, για κάθε $\Delta \in W^{\Lambda}$, αν $\Gamma\mathcal{R}_b^{\Lambda}\Delta$, τότε προκύπτει αμέσως απ' τον Ορισμό 4.3.3, $\varphi \in \Delta$, δηλ. $\Delta \in [\varphi]$. Επομένως, $\mathcal{R}_b^{\Lambda}(\Gamma) \subseteq [\varphi]$.
Η απόδειξη για το δείκτη a είναι πανομοιότυπη.

iii. $\mathfrak{b}_b(\Gamma, [\varphi]) \overset{\text{Ορ.4.2.1}}{\iff} \mathcal{R}_b^{\Lambda}(\Gamma) \nsubseteq \{\Delta \in W^{\Lambda} \mid \mathcal{R}_b^{\Lambda}(\Delta) \nsubseteq [\varphi]\} \overset{\text{ii.}}{\iff} \mathcal{R}_b^{\Lambda}(\Gamma) \nsubseteq \{\Delta \in W^{\Lambda} \mid \mathsf{K}_b\varphi \notin \Delta\} \iff (\exists \Delta \in W^{\Lambda})(\Gamma\mathcal{R}_b^{\Lambda}\Delta \;\&\; \mathsf{K}_b\varphi \in \Delta) \overset{\text{Λήμμα 3.4.6}}{\iff} \neg\mathsf{K}_b\neg\mathsf{K}_b\varphi \in \Gamma \overset{\mathbf{DB_b}}{\iff} \mathsf{B}_b\varphi \in \Gamma$
Ομοίως αποδεικνύεται και η περίπτωση με δείκτη a.

iv. $\mathfrak{e}_b(\Gamma, [\varphi]) \overset{\text{Ορ.4.2.1}}{\iff} \mathcal{R}_b(\Gamma) \cap [\varphi] \in \mathcal{N}_b(\Gamma) \overset{\text{Πόρ.3.4.9}}{\iff} \mathsf{E}_b\varphi \in \Gamma$. Ομοίως και για $_a$.

v. $\mathfrak{a}(\Gamma, [\varphi]) \overset{\text{Ορ.4.2.1}}{\iff} (\exists j \in D)\ [\varphi] \in \mathcal{N}_j^{\Lambda}(\Gamma) \;\&\; (\forall j \in D)\ W^{\Lambda} \setminus [\varphi] \notin \mathcal{N}_j^{\Lambda}(\Gamma) \overset{\text{i.,Λήμμα 3.4.11(i)}}{\iff} (\exists j \in D)\ \mathsf{I}_j\varphi \in \Gamma \;\&\; (\forall j \in D)\ \mathsf{I}_j\neg\varphi \notin \Gamma \overset{\text{Λήμμα 3.4.4(ii)}}{\iff} \bigvee_{j\in D} \mathsf{I}_j\varphi \in \Gamma \;\&\; \bigwedge_{j\in D} \neg\mathsf{I}_j\neg\varphi \in \Gamma \overset{\text{Λήμμα 3.4.4,}\mathbf{AI}}{\iff} \mathsf{A}\varphi \in \Gamma$.

vi. $\mathfrak{s}(\Gamma, [\varphi]) \overset{\text{Ορ.4.2.1}}{\iff} (\forall j \in D)\big([\varphi] \in \mathcal{N}_j^\Lambda(\Gamma) \ \&\ W^\Lambda \setminus [\varphi] \notin \mathcal{N}_j^\Lambda(\Gamma)\big) \overset{\text{i.,Λήμμα 3.4.11(i)}}{\iff}$
$(\forall j \in D)(\mathsf{I}_j\varphi \in \Gamma \ \&\ \mathsf{I}_j\neg\varphi \notin \Gamma) \overset{\text{Λήμμα 3.4.4(ii)}}{\iff} (\forall j \in D)(\mathsf{I}_j\varphi \in \Gamma \ \&\ \neg\mathsf{I}_j\neg\varphi \in \Gamma) \overset{\text{Λήμμα 3.4.4,}\mathbf{SI}}{\iff}$
$\mathsf{S}\varphi \in \Gamma$.

■

Λήμμα 4.3.7 (Truth Lemma) $(\forall \Gamma \in W^\Lambda)(\forall \varphi \in \mathcal{L}_I)$

$$\mathfrak{M}^\Lambda, \Gamma \Vdash \varphi \iff \varphi \in \Gamma$$

Απόδειξη. Η απόδειξη, με επαγωγή στην πολυπλοκότητα των τύπων, είναι ακριβώς όπως στο Λήμμα 3.4.10, με μόνη προσθήκη την περίπτωση των τελεστών I_j στο επαγωγικό βήμα. Θα χρειαστούμε την επόμενη ισότητα που αποδείχθηκε στο 3.4.10.

$$|\varphi| \overset{\text{ορ.}}{=} \overline{V^\Lambda}(\varphi) = [\varphi] \qquad (*)$$

Έχουμε λοιπόν για τυχαίο $j \in D$,

$$\mathfrak{M}^\Lambda, \Gamma \Vdash \mathsf{I}_j\varphi \overset{\text{Ορ. 4.2.4}}{\iff} |\varphi| \in \mathcal{N}_j^\Lambda(\Gamma) \overset{(*)}{\iff} [\varphi] \in \mathcal{N}_j^\Lambda(\Gamma) \overset{\text{Λήμμα 4.3.6(i)}}{\iff} \mathsf{I}_j\varphi \in \Gamma$$

■

Τώρα διαθέτουμε όλα τα απαιτούμενα λήμματα για την απόδειξη της πληρότητας.

Θεώρημα 4.3.8 (Πληρότητα) *Η λογική* **KBEI** *είναι ισχυρώς πλήρης ως προς την κλάση των kbei-πλαισίων.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας και πάλι (όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.12) την Πρόταση στο [3, σελ.194]), καθώς και τα Λήμματα 3.4.2, 4.3.7, βλέπουμε ότι αρκεί να αποδειχθεί ότι το $\mathfrak{M}^\Lambda$ είναι ένα kbei-μοντέλο. Ιδού:

- Στην Παρατήρηση 4.3.4 είδαμε ότι $W^\Lambda \neq \varnothing$.
- $A^\Lambda \subseteq \mathcal{P}(W^\Lambda)$, και τα (**a1**) έως (**a5$_\mathbf{b}$**) (και για τους δύο δείκτες b και a) προκύπτουν ακριβώς όπως στο Θεώρημα 3.4.12. Απομένει το επόμενο.
  - (**a6**) Για τυχαίον τύπο φ και $j \in D$, $\{\Gamma \in W^\Lambda \mid [\varphi] \in \mathcal{N}_j^\Lambda(\Gamma)\} \overset{\text{Λήμμα 4.3.6(i)}}{=} \{\Gamma \in W^\Lambda \mid \mathsf{I}_j\varphi \in \Gamma\} = [\mathsf{I}_j\varphi]$, το οποίο προφανώς ανήκει στο A^Λ.
- Για τους λόγους που αναφέρθηκαν στο Θεώρημα 3.4.12, οι σχέσεις $\mathcal{R}_b^\Lambda$ και $\mathcal{R}_a^\Lambda$ είναι ανακλαστικές, μεταβατικές, και κατευθυνόμενες. Επίσης:
  - (**kk**) Έστω $\Gamma, \Delta \in W^\Lambda$ τ.π. $\Gamma\mathcal{R}_a^\Lambda\Delta$. Τότε, $\forall\varphi \in \mathcal{L}_I$, αν $\mathsf{K}_b\varphi \in \Gamma$, τότε, απ' τη στιγμή που $\mathbf{KK} \in \Lambda$, λόγω του Λήμματος 3.4.4, $\mathsf{K}_a\varphi \in \Gamma$, έτσι, απ' τον Ορισμό 4.3.3, $\varphi \in \Delta$. Άρα, και πάλι απ' τον Ορισμό 4.3.3, $\Gamma\mathcal{R}_b^\Lambda\Delta$. Αποδείχθηκε δηλ. ότι $\mathcal{R}_a^\Lambda \subseteq \mathcal{R}_b^\Lambda$.
- Ακριβώς όπως στο Θεώρημα 3.4.12 αποδεικνύονται οι ιδιότητες (**nr$_\mathbf{b}$**) έως (**pie$_\mathbf{b}$**), καθώς και οι (**cce$_\mathbf{b}$**), (**ek$_\mathbf{b}$**), μια και, ακριβώς όπως και στο 3.4.12, το σύνολο $\mathcal{R}_b^\Lambda(\Gamma)$ είναι άπειρο $(\forall\Gamma \in W^\Lambda)$. Οι ίδιες αποδείξεις ισχύουν και για το δείκτη a.
- Απομένουν λοιπόν οι ιδιότητες για τις $\mathcal{N}_j^\Lambda$ $(j\in D)$. Έστω τυχαία $\Gamma \in W^\Lambda$ και $[\varphi] \in A^\Lambda$.

(bb) Αν $\mathfrak{b}_b(\mathsf{r}, [\varphi])$ και $\neg\mathfrak{a}(\mathsf{r}, W^\Lambda \setminus [\varphi])$ (δηλ. λόγω του Λήμματος 3.4.11(i), $\neg\mathfrak{a}(\mathsf{r}, [\neg\varphi])$), τότε, απ' το Λήμμα 4.3.6(iii) και (v), $\mathsf{B}_b\varphi \in \mathsf{r}$ και $\mathsf{A}\neg\varphi \notin \mathsf{r}$ (δηλ. λόγω του Λήμματος 3.4.4(ii), $\neg\mathsf{A}\neg\varphi \in \mathsf{r}$), κι έτσι, επειδή $\mathbf{bb} \in \Lambda$, και πάλι απ' το Λήμμα 3.4.4, $\mathsf{B}_a\varphi \in \mathsf{r}$, δηλ. απ' το Λήμμα 4.3.6(iii), $\mathfrak{b}_a(\mathsf{r}, [\varphi])$.

(be) Αν $\mathfrak{b}_b(\mathsf{r}, [\varphi])$ και $\mathfrak{a}(\mathsf{r}, W^\Lambda \setminus [\varphi])$ (δηλ. και πάλι λόγω του Λήμματος 3.4.11(i), $\mathfrak{a}(\mathsf{r}, [\neg\varphi])$), τότε, απ' το Λήμμα 4.3.6(iii) και (v), $\mathsf{B}_b\varphi \in \mathsf{r}$ και $\mathsf{A}\neg\varphi \in \mathsf{r}$, οπότε, επειδή $\mathbf{be} \in \Lambda$, απ' το Λήμμα 3.4.4, $\mathsf{E}_a\varphi \in \mathsf{r}$, έτσι, απ' το Λήμμα 4.3.6(iv), $\mathfrak{e}_a(\mathsf{r}, [\varphi])$.

(eb) Αν $\mathfrak{e}_b(\mathsf{r}, [\varphi])$ και $\mathfrak{s}(\mathsf{r}, [\varphi])$, τότε, απ' το Λήμμα 4.3.6(iv) και (vi), $\mathsf{E}_b\varphi \in \mathsf{r}$ και $\mathsf{S}\varphi \in \mathsf{r}$, άρα, λόγω του ότι $\mathbf{eb} \in \Lambda$, απ' το Λήμμα 3.4.4, $\mathsf{B}_a\varphi \in \mathsf{r}$, που σημαίνει, απ' το Λήμμα 4.3.6(iii), $\mathfrak{b}_a(\mathsf{r}, [\varphi])$.

(ee) Αν $\mathfrak{e}_b(\mathsf{r}, [\varphi])$ και $\neg\mathfrak{a}(\mathsf{r}, W^\Lambda \setminus [\varphi])$ (δηλ. λόγω του Λήμματος 3.4.11(i), $\neg\mathfrak{a}(\mathsf{r}, [\neg\varphi])$), τότε, απ' το Λήμμα 4.3.6(iv) και (v), $\mathsf{E}_b\varphi \in \mathsf{r}$ και $\mathsf{A}\neg\varphi \notin \mathsf{r}$ (δηλ. λόγω του Λήμματος 3.4.4(ii), $\neg\mathsf{A}\neg\varphi \in \mathsf{r}$), επομένως, επειδή $\mathbf{ee} \in \Lambda$, απ' το Λήμμα 3.4.4, $\mathsf{E}_a\varphi \in \mathsf{r}$, άρα, απ' το Λήμμα 4.3.6(iv), $\mathfrak{e}_a(\mathsf{r}, [\varphi])$.

(een) Αν $\neg\mathfrak{b}_b(\mathsf{r}, [\varphi])$, $\mathfrak{e}_b(\mathsf{r}, [\varphi])$, και $\mathfrak{a}(\mathsf{r}, W^\Lambda \setminus [\varphi])$ (δηλ. λόγω του Λήμματος 3.4.11(i), $\mathfrak{a}(\mathsf{r}, [\neg\varphi])$), τότε, απ' το Λήμμα 4.3.6(iii)-(v), $\mathsf{B}_b\varphi \notin \mathsf{r}$ (δηλ. λόγω του Λήμματος 3.4.4(ii), $\neg\mathsf{B}_b\varphi \in \mathsf{r}$), $\mathsf{E}_b\varphi \in \mathsf{r}$, και $\mathsf{A}\neg\varphi \in \mathsf{r}$, άρα, λόγω του ότι $\mathbf{een} \in \Lambda$, απ' το Λήμμα 3.4.4, $\mathsf{E}_a\neg\varphi \in \mathsf{r}$, άρα, απ' το Λήμμα 4.3.6(iv), $\mathfrak{e}_a(\mathsf{r}, [\neg\varphi])$, δηλ. λόγω του Λήμματος 3.4.11(i), $\mathfrak{e}_a(\mathsf{r}, W^\Lambda \setminus [\varphi])$.

∎

Συμπεράσματα και μελλοντική εργασία

Η παρούσα εργασία αποτελείται από ένα κεφάλαιο, στο οποίο παρουσιάστηκαν γνωστές έννοιες και αποτελέσματα, και από τρία κεφάλαια, στα οποία παρουσιάστηκαν νέες ιδέες.

Έτσι, στο πρώτο, αναφέρθηκε η έννοια των επιστημικών τροπικών λογικών, και ειδικότερα η **S4.2**. Είδαμε ότι οι λογικές που αξιωματικοποιούνται από εύλογα αξιώματα περί της γνώσης και της πεποίθησης (είτε πρόκειται για τη λογική του Lenzen, είτε για κείνη του Stalnaker) τελικά ταυτίζονται με την $\mathbf{S4.2}_{\mathsf{KB}}$, δηλ. με την επέκταση της **S4.2** κατά ένα αξίωμα που ορίζει την πεποίθηση με βάση τη γνώση ως εξής, «πιστεύω σε κάτι σημαίνει ότι δεν είμαι σίγουρος[4] ότι δεν το γνωρίζω» (Πρόταση 1.1.3). Συναγάγαμε απ' αυτό, ακολουθώντας τον Lenzen, ότι «η **S4.2** αναπαριστά την εχέφρονα λογική της γνώσης», και είδαμε ότι το αξίωμα **5** που ενσαρκώνει την επίγνωση της άγνοιας (δηλ. ότι «αν δεν γνωρίζω κάτι, τότε είμαι σίγουρος πως δεν το γνωρίζω») και που ήταν απορριπτέο κατά τον Hintikka, δεν αποτελεί τυπικό θεώρημα της **S4.2**.

Κατόπιν στο ίδιο κεφάλαιο, είδαμε την έννοια των πλαισίων και των μοντέλων Kripke, και πιο συγκεκριμένα, τη μορφή που έχουν τα πλαίσια/μοντέλα της **S4.2**. Μετά, αναφέραμε ορισμούς, ιδιότητες, και παραδείγματα των συμπλόκων, από τα οποία ακριβώς αποτελούνται τα μοντέλα αυτά.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάστηκαν κατ' αρχάς οι σταθερές θεωρίες κατά Stalnaker, και παρατηρήθηκε ότι αυτές από τη μια δεν διαφοροποιούν μεταξύ τους γνώση και πεποίθηση, κι απ' την άλλη, εμπεριέχουν με τη μορφή ιδιότητας κλειστότητας την επίγνωση της άγνοιας. Προκειμένου να αντιμετωπιστούν τα δύο αυτά σημεία, παρουσιάστηκαν εναλλακτικώς καινούριες γνωσιακές (- δοξασιακές) δομές, οι KB_P-δομές. Γι' αυτές αποδείχθηκαν κάποιες ιδιότητες, μία εκ των οποίων (Παρατήρηση 2.2.11) καθόριζε τη σχέση μεταξύ γνωσιακών και δοξασιακών θεωριών που συναποτελούν τις KB_P, λέγοντας ότι ό,τι πιστεύει ο αντιλήπτορας σε κάθε περίπτωση ενός επιστημικού **S4.2**-μοντέλου, ταυτίζεται με ό,τι γνωρίζει σε μια συγκεκριμένη περίπτωση (που αντιστοιχεί σ' εκείνη του τελικού συμπλόκου του μοντέλου).

Μετά, παρατέθηκαν δύο αποτελέσματα που συνδέουν τις KB_P-δομές με τα μοντέλα της **S4.2**. Στο Θεώρημα 2.3.4 αποδείχθηκε ότι για κάθε **S4.2**-μοντέλο, οι γνωσιακές και δοξασιακές θεωρίες του αποτελούν μια KB_P-δομή, ενώ στο Θεώρημα 2.3.13 το αντίστροφο. Χρησιμοποιώντας μάλιστα μια απόδειξη που έμοιαζε αρκετά μ' εκείνη του πρώτου θεωρήματος, δόθηκε ένα παράδειγμα KB_P-δομής, στην οποία δεν ισχύει η επίγνωση της άγνοιας (Πόρισμα 2.3.6). Στο τέλος του κεφαλαίου, ήρθε ένα παράδειγμα με την πρόθεση να γίνουν οι έννοιες αυτές πιο ξεκάθαρες.

Στο κεφάλαιο τρία, αφού διαπιστώθηκε ότι η έννοια της πεποίθησης, όπως αυτή περιγράφεται στην **S4.2**, είναι ενδεχομένως πιο ισχυρή από εκείνη που είναι επιθυμητή σε αρκετές περιπτώσεις, έγινε επέκταση της γλώσσας της **S4.2**, ώστε να περιλαμβάνει έναν καινούριο τελεστή (E) που να περιγράφει αυτήν ακριβώς την τροπικότητα, της «ασθενούς» πεποίθησης. Η τροπικότητα αυτή ονομάστηκε «εκτίμηση», και διαφάνηκε ότι είναι επιθυμητή η ερμηνεία της ως εξής, «εκτιμώ ότι ισχύει κάτι ανν θεωρώ ότι είναι πιο πιθανό να ισχύει παρά να μην ισχύει». Έτσι, στα πλαίσια της

[4] Χρησιμοποιώ το «είμαι σίγουρος» και το «γνωρίζω» με την ίδια έννοια. Επιλέγω κάθε φορά ένα απ' τα δύο, αναλόγως με ποιο είναι πιο κατάλληλο, κατά τη γνώμη μου, ώστε να γίνει η φράση πιο εύληπτη.

νέας τροπικής γλώσσας, θέλαμε οι τρεις τροπικοί τελεστές (K, B, και E) να ερμηνευτούν κατά τέτοιο τρόπο, ώστε οι αντίστοιχες τροπικότητες να μπορούν να διαταχθούν κατά φθίνοντα βαθμό βεβαιότητας ως εξής: η γνώση να σημαίνει σιγουριά, η πίστη να σημαίνει βεβαιότητα σε ισχυρό βαθμό, και η εκτίμηση να σημαίνει βεβαιότητα «επί ξυρού ακμής», μόλις πριν γείρει η πλάστιγγα υπέρ του αντιθέτου.

Απ' τη στιγμή που τα αξιώματα για τη γνώση και την πεποίθηση ήταν δεδομένα (εκείνα της **S4.2**), δόθηκε βάση σ' εκείνα που πρέπει να περιγράφουν την εκτίμηση καθώς και τη σχέση της με τις άλλες τροπικότητες. Η καινούρια λογική ονομάστηκε **KBE** και αποδείχθηκαν κάποιες ιδιότητες - τυπικά θεωρήματά της. Ίσως αξίζει να αναφερθεί το $\mathsf{EK}\varphi \equiv \mathsf{B}\varphi$ (Παρατήρηση 3.1.4(v)) που διατείνεται ότι θα μπορούσε να δοθεί, χωρίς να αλλάξει τίποτε, εναλλακτικός ορισμός της πεποίθησης ως εξής, «πιστεύω κάτι ανν εκτιμώ ότι το γνωρίζω» δηλ. «ανν θεωρώ ότι είναι πιο πιθανό να το γνωρίζω παρά να το αγνοώ».

Έπειτα παρουσιάστηκαν τα μοντέλα της **KBE**, τα οποία ήταν συνδυασμός μοντέλων Kripke (που ερμήνευαν τον τελεστή K) και παραλλαγμένων, γενικευμένων μοντέλων Scott-Montague (που ερμήνευαν τον E). Προκειμένου να έχουν οι αντίστοιχες τροπικότητες ακριβώς τις ιδιότητες που θέλαμε, έπρεπε τα μοντέλα αυτά με τη σειρά τους να ικανοποιούν κάποιες συγκεκριμένες συνολοθεωρητικές ιδιότητες. Έτσι, εισηγάγαμε την έννοια του ασθενούς υπερφίλτρου, και αποδείξαμε ότι έχει τις απαιτούμενες αυτές ιδιότητες, για παράδειγμα ότι σχετίζεται με συλλογές υποσυνόλων-πλειονοτήτων ενός συνόλου. Αφού έγινε αυτό, οι αποδείξεις ορθότητας - πληρότητας της **KBE** ως προς τα πλαίσια αυτά, ήρθαν σχεδόν με φυσικό τρόπο, ακολουθώντας «κλασικές» μεθόδους της τροπικής λογικής. Ίσως αξίζει να αναφερθεί επιπροσθέτως, ότι αποδείχθηκε η ανεξαρτησία ενός αξιώματος της **KBE** από τα υπόλοιπα, μια και αυτό δεν ήταν τόσο προφανές εξ αρχής (Πόρισμα 3.3.5).

Σκοπός του τελευταίου κεφαλαίου ήταν να περιγραφεί, μέσω μιας λογικής, η αλλαγή που επιφέρει στις γνώσεις/πεποιθήσεις/εκτιμήσεις ενός αντιλήπτορα η επιπλέον πληροφόρησή του από κάποιες πηγές. Όπως ήταν φυσικό, η γλώσσα επεκτάθηκε και πάλι ώστε να περιλαμβάνει νέους τελεστές (τους I_j) που να περιγράφουν την τροπικότητα «ο αντιλήπτορας πληροφορείται απ' την πηγή j». Επίσης, οι τελεστές της γλώσσας της **KBE** εμφανίζονταν σε δύο διαφορετικές εκδοχές, μία με δείκτη b για την επιστημική κατάσταση του αντιλήπτορα πριν την πληροφόρηση, και μία με δείκτη a για εκείνη μετά. Τα αξιώματα που περιέγραφαν την επιστημική αλλαγή ήταν έξι, κι αν εξαιρέσει κανείς τη γνώση, η οποία θεωρήθηκε αναλλοίωτη, αποτύπωναν τις μεταβάσεις μεταξύ πεποιθήσεων και εκτιμήσεων (βλ. Σχήμα 4.1). Τα αξιώματα αυτά, μαζί με τις δύο εκδοχές εκείνων της **KBE** (για το πριν, και το μετά) αξιωματικοποίησαν τη νέα λογική που ονομάστηκε **KBEI**.

Κατόπιν, παρουσιάστηκαν κάποιες ιδιότητες της **KBEI**, καθώς και τα μοντέλα της, που προφανώς βασίστηκαν σ' εκείνα της **KBE**. Όσον αφορά στους νέους τελεστές I_j, ερμηνεύτηκαν χρησιμοποιώντας την ιδέα των γενικευμένων μοντέλων Scott-Montague (μη παραλλαγμένων τη φορά αυτή). Το κεφάλαιο έκλεισε με τα θεωρήματα ορθότητας - πληρότητας, που είναι σε τέτοιες προσεγγίσεις εκ των ων ουκ άνευ.

Μελλοντική εργασία.

Όσον αφορά σε δουλειά που μπορεί να γίνει στο μέλλον, βασιζόμενη στα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας, φαντάζει εύλογη η γενίκευση των KB_P-δομών ώστε να συμπεριλάβουν και την εκτίμηση. Έτσι, προκύπτει το ερώτημα, μπορούν να αποδειχθούν αποτελέσματα αντίστοιχα των Θεωρημάτων 2.3.4 και 2.3.13 που να συνδέουν τις νέες επεκτεταμένες αυτές δομές με την **KBE**;

Φυσικά, θα μπορούσε κάποιος να ασχοληθεί και με ερωτήματα αποκρισιμότητας και πολυπλοκότητας. Απ' τη στιγμή δε, που οι σταθερές θεωρίες κατά Stalnaker είναι αποκρίσιμες (και μάλιστα το πρόβλημα ανήκει στην κλάση πολυπλοκότητας Δ_2^P [24, σελ.247]) είναι σχεδόν σίγουρο ότι κάτι αντίστοιχο ισχύει και για τις KB_P-δομές, τουλάχιστον ως προς την αποκρισιμότητα. Απλώς πρέπει κάποιος να δει τις λεπτομέρειες. Ομοίως, με τη μέθοδο του φιλτραρίσματος μπορεί να αποδειχθεί ότι οι λογικές **KBE** και **KBEI** έχουν την ιδιότητα πεπερασμένου μοντέλου, άρα είναι αποκρίσιμες. Τώρα, σε ποια κλάση πολυπλοκότητας ανήκει το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας ενός τύπου στα αντίστοιχα μοντέλα (ως προς τα οποία είναι ορθές και πλήρεις οι λογικές αυτές, δηλ. ως προς τα *kbe*- και *kbei*-μοντέλα) είναι σίγουρα πιο δύσκολο. Θεωρώ απίθανο να είναι NP-πλήρες όπως για την **S5**, ή ακόμα και PSPACE-πλήρες όπως για την **S4**· ίσως EXP-hard όπως για κάποιες δυναμικές τροπικές λογικές, ή ακόμη ψηλότερα; Πάντως η μέθοδος του φιλτραρίσματος δίνει συνήθως αλγορίθμους NEXP...

Μια άλλη ιδέα που δείχνει πολύ δελεαστική κατά τη γνώμη μου, είναι η εμφύτευση του τελεστή της εκτίμησης στην πρωτοβάθμια επιστημική τροπική λογική. Ποια είναι η σχέση των νέων de dicto και de re τύπων (που παράγονται με τον τελεστή της εκτίμησης) μεταξύ τους, αλλά και με τους αντίστοιχους τύπους που περιέχουν τον τελεστή της γνώσης; Τι μορφή έχουν τα αντίστοιχα μοντέλα; Πώς επιδρά ο καινούριος τελεστής πάνω στις σταθερές; Νομίζω ότι έτσι ανοίγει ένα πεδίο πληθώρας ερωτημάτων που – τουλάχιστον σε μένα – δείχνουν άξια διερεύνησης.

Βιβλιογραφία

[1] P. Battigalli and G. Bonanno. Recent Results on Belief, Knowledge and the Epistemic Foundations of Game Theory. *Research in Economics*, 53:149–225, 1999.

[2] S. Ben-David and R. Ben-Eliyahu-Zohary. A modal logic for subjective default reasoning. *Artif. Intell.*, 116(1–2):217–236, 2000.

[3] P. Blackburn, M. de Rijke, and Y. Venema. *Modal Logic*. Number 53 in Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press, 2001.

[4] C. C. Chang and H. J. Keisler. *Model Theory*, volume 73 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North Holland, Amsterdam, 3rd edition, 1990.

[5] B. F. Chellas. *Modal Logic, an Introduction*. Cambridge University Press, 1980.

[6] D. Dubois, Chr. A. Welty, and M.-A. Williams, editors. *Principles of Knowledge Representation and Reasoning: Proceedings of the Ninth International Conference (KR2004), Whistler, Canada, June 2-5, 2004*. AAAI Press, 2004.

[7] M. A. E. Dummett and E.J. Lemmon. Modal logics between S4 and S5. *Z. Math. Logik*, 5:250–264, 1959.

[8] R. Fagin, J. Halpern, Y. Moses, and M. Vardi. *Reasoning about Knowledge*. MIT Press, 2003.

[9] M. C. Fitting. *Basic Modal Logic*, pages 368–448. Volume 1 of Gabbay et al. [10], 1993.

[10] D. M. Gabbay, C. J. Hogger, and J. A.Robinson, editors. *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*. Oxford University Press, 1993.

[11] D. M. Gabbay and J. Woods, editors. *Logic and the Modalities in the Twentieth Century*, volume 7 of *Handbook of the History of Logic*. North-Holland, 2006.

[12] E. Gettier. Is justified true belief knowledge? *Analysis*, 23(6):121–123, 1963.

[13] P. Gochet and P. Gribomont. *Epistemic logic*, pages 99 – 195. Volume 7 of Gabbay and Woods [11], 2006.

[14] R. Goldblatt. *Logics of Time and Computation*. Number 7 in CSLI Lecture Notes. Center for the Study of Language and Information, Stanford University, 2nd edition, 1992.

[15] R. Goldblatt. Mathematical Modal Logic: a View of its Evolution. *Journal of Applied Logic*, 1(5–6):309–392, 2003.

[16] J. Halpern. Should knowledge entail belief? *J. Philos. Logic*, 25(5):483–494, 1996.

[17] J. Hintikka. *Knowledge and Belief: an Introduction to the Logic of the two notions*. Cornell University Press, Ithaca, NY, 1962.

[18] V. Jauregui. The 'Majority' and 'by Default' Modalities. In *Australian Conference on Artificial Intelligence*, pages 263–272, 2007.

[19] T. Jech. *Set Theory*. Springer, 3rd millenium edition, 2002.

[20] S. Kripke. Semantic analysis of modal logic I, normal propositional calculi. *Z. Math. Logik*, 9:67–96, 1963.

[21] K. Lehrer. *Theory of Knowledge*. Routledge, 1990.

[22] W. Lenzen. Epistemologische Betrachtungen zu [S4,S5]. *Erkenntnis*, 14:33–56, 1979.

[23] C. I. Lewis. *A Survey of Symbolic Logic*. University of California Press, 1918.

[24] V. W. Marek and M. Truszczyński. *Non-Monotonic Logic: Context-dependent Reasoning*. Springer-Verlag, 1993.

[25] E. Pacuit and S. Salame. Majority logic. In Dubois et al. [6], pages 598–605.

[26] P. Peppas. *Belief Revision*, pages 317 – 359. In van Harmelen et al. [35], 2008.

[27] S. Salame. *Majority Logic and Majority Spaces in contrast with Ultrafilters*. PhD thesis, Graduate Center, City University of New York, 2006.

[28] K. Schlechta. Defaults as generalized quantifiers. *J. Logic Comput.*, 5(4):473–494, 1995.

[29] R. Stalnaker. The Problem of Logical Omniscience. *Synthese*, 89:425–440, 1991.

[30] R. Stalnaker. A note on non-monotonic modal logic. *Artificial Intelligence*, 64:183–196, 1993. Revised version of the unpublished note originally circulated in 1980.

[31] R. Stalnaker. *Context and Content: Essays on Intentionality in Speech and Thought*. Oxford University Press, 1999.

[32] R. Stalnaker. On logics of knowledge and belief. *Philos. Stud.*, 128(1):169–199, 2006.

[33] J. van Benthem. *Modal Logic for Open Minds*. CSLI Publications, 2010.

[34] H. van Ditmarsch, W. van der Hoek, and B. Kooi. *Dynamic Epistemic Logic*. Springer, 2007.

[35] F. van Harmelen, V. Lifschitz, and B. Porter, editors. *Handbook of Knowledge Representation*. Elsevier, 2008.

[36] F. Voorbraak. *As Far as I Know - Epistemic Logic and Uncertainty*. PhD thesis, Department of Philosophy, Utrecht University, 1993.

[37] M. Wooldridge. *An Introduction to MultiAgent Systems*. John Wiley & Sons, 2009.

Ευρετήριο συμβολισμών και όρων