

MSO-Αποτίμηση & Αυτόματα:
από τα Δυαδικά Δέντρα στην XML &
στις Δομές Φραγμένου Δεντροπλάτους

Λαμπρινή Καλαντζή

Διπλωματική εργασία

Νοέμβριος 2004

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα στη Λογική και
Θεωρία Αλγορίθμων και Υπολογισμού
μΠΛΥ

Περίληψη

Το βασικό πρόβλημα που παρουσιάζεται στη διπλωματική αυτή είναι το πρόβλημα της αποτίμησης για την μοναδιαία δευτεροβάθμια λογική (Monadic Second Order logic-MSO) σε δομές που είναι δυαδικά δέντρα, μέσω της κλασικής “ισοδυναμίας” της MSO με τα αυτόματα δέντρων. Με αναγωγή του αρχικού προβλήματος σε πρόβλημα αυτομάτων, αποδεικνύεται ότι η πολυπλοκότητα του προβλήματος είναι γραμμική συνάρτηση του μεγέθους του δέντρου και του μεγέθους της εξόδου.

Παρουσιάζονται επίσης δύο επεκτάσεις των αποτελεσμάτων που αφορούν τα δυαδικά δέντρα: η μία σχετίζεται με το πρόβλημα της αποτίμησης μονομελών ερωτήσεων σε δέντρα που μοντελοποιούν XML-έγγραφα και η άλλη με προβλήματα MSO-αποτίμησης σε δομές φραγμένου δεντροπλάτους.

Περιεχόμενα

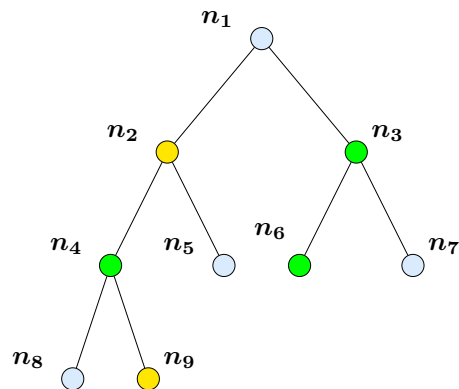
1	Εισαγωγή	1
2	Βασικές έννοιες	3
2.1	Λογική, Δέντρα, Αυτόματα	3
2.2	Θέματα κωδικοποίησης	7
2.3	Δεντροδιασπάσεις	8
3	Το πρόβλημα της MSO-αποτίμησης σε χρωματισμένα δέντρα	10
3.1	Το αρχικό πρόβλημα τροποποιημένο	11
3.2	Σχέση MSO-λογικής και αυτομάτων για δέντρα	12
3.2.1	Ισοδυναμία MSO λογικής σε δέντρα και αυτομάτων για δέντρα	12
3.2.2	Επεκτάσεις των χρωματισμένων δέντρων	13
3.2.3	Η κλάση $C_{\Gamma, \varphi}$ των δέντρων που είναι φ -επεκτάσεις κάποιου Γ -δέντρου είναι αναγνωρίσιμη: το αυτόματο \mathfrak{A}_φ	14
3.2.4	Η κατασκευή του αυτομάτου \mathfrak{A}_φ	16
3.2.5	Παραδείγματα αυτομάτων \mathfrak{A}_φ	20
3.3	Η αναγωγή του αρχικού μας προβλήματος στο ισοδύναμο πρόβλημα αυτομάτων.	22
3.3.1	Βασικές έννοιες που σχετίζονται με το πρόβλημα αυτομάτων και την επίλυσή του	23
3.3.2	Ο απλός και ο απλός -'συνολικός' αλγόριθμος: βελτιστοποίηση	26
3.4	Ο αλγόριθμος των Flum, Frick, Grohe	29
3.4.1	Ο υπολογισμός	30
3.4.2	Ορθότητα των υπολογισμών.	33
3.4.3	Αποτελέσματα πολυπλοκότητας	35
3.5	Μικρές παραλλαγές του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe	42
3.5.1	Οι χρήσιμες μεταβάσεις του δεδομένου αυτομάτου \mathfrak{A}_φ : προκαταρκτικό στάδιο βελτιστοποίησης	43
3.5.2	Η states triangle-based εκδοχή του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe	43
3.5.3	Οι μεταβάσεις ενός κόμβου: η transition-based εκδοχή του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe	44
3.6	Από το αρχικό αυτόματο \mathfrak{A}_φ στον ορισμό νέων αυτομάτων: ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις	48
3.6.1	Δύο ισοδύναμα bottom-up Γ -αυτόματα	48
3.6.2	Ένα bottom-up μη ντετερμινιστικό Γ -αυτόματο που συγκεντρώνει όλη την πληροφορία του \mathfrak{A}_φ : νέα διατύπωση του αρχικού προβλήματος	49
3.7	Νέες προσεγγίσεις βελτιστοποίησης για το πρόβλημα του υπολογισμού των \mathfrak{A}_φ -δεκτών αναθέσεων	50
3.7.1	Υπολογισμός των επιτυχημένων καταστάσεων κάθε κόμβου σε δύο βήματα: ένα top-down πέρασμα και μετά ένα bottom-up;	51
3.8	Μεταφράσεις στη σχεσιακή άλγεβρα	52

3.8.1	Ορισμός βασικών σχέσεων	55
3.8.2	Ο αλγόριθμος των Flum, Frick, Grohe	57
3.8.3	Μετάφραση στη σχεσιακή άλγεβρα της transition-based εκδοχής του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe: Ο αλγόριθμος του Γιαννακάκη	58
3.8.4	Λιγότερα από τρία περάσματα του δεδομένου δέντρου.	60
4	Αυτόματα για το πρόβλημα της αποτίμησης σε XML-δέντρα δεδομένων	64
4.1	Αυτόματα ερωτήσεων	64
4.1.1	Δέντρα: βασικές έννοιες	65
4.1.2	Αυτόματα ερωτήσεων για δέντρα φραγμένης τάξης	66
4.2	Μονομελείς ερωτήσεις και αυτόματα δέντρων που επιλέγουν	70
4.2.1	Εισαγωγικές έννοιες	70
4.2.2	Αυτόματο που επιλέγει	71
4.2.3	Το πρόβλημα της αποτίμησης για STA-ερωτήσεις σε δυαδικά στιγμιότυπα	74
5	Το πρόβλημα της MSO-αποτίμησης σε δομές φραγμένου δεντροπλάτους	76
5.1	Αναγωγή του αρχικού προβλήματος σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα MSO-αποτίμησης σε χρωματισμένα δέντρα	76
5.1.1	Οι δεντροδιασπάσεις μια δομής	76
5.1.2	Κωδικοποίηση μιας δομής στο δέντρο μιας ειδικής δεντροδιάσπασης της: το αντίστοιχο χρωματισμένο δέντρο	77
5.1.3	Αντιστοίχιση ενός στοιχείου και ενός υποσυνόλου του A σε μια πλειάδα υποσυνόλων του T	79
5.1.4	Συνθήκες ώστε μια τυχαία πλειάδα υποσυνόλων του T να αποτελεί κωδικοποίηση ενός στοιχείου ή ενός υποσυνόλου του A	80
5.1.5	Μετάφραση ενός MSO[τ]-τύπου φ σε έναν MSO[τ^*]-τύπο φ^*	81
5.1.6	Τα βήματα του αλγορίθμου: αποτελέσματα πολυπλοκότητας	83
A	Η MSO₀	84
B	Ακυκλικές συζευκτικές ερωτήσεις της πρωτοβάθμιας λογικής	85
	Ευρετήριο συμβόλων	90
	Ευρετήριο Ορων	92

1 Εισαγωγή

Το πρόβλημα της αποτίμησης για την μοναδιαία δευτεροβάθμια λογική (πρόβλημα της MSO-αποτίμησης) ορίζεται ως εξής: δεδομένης μιας πεπερασμένης δομής και δεδομένου ενός MSO-τύπου, θέλουμε να υπολογίσουμε τις αναθέσεις που ικανοποιούν τον τύπο φ στη δεδομένη δομή. Είναι γνωστό ότι η πολυπλοκότητα του παραπάνω προβλήματος είναι PSPACE-complete. Συχνά περιορίζοντας το σύνολο των προς θεώρηση δομών μπορούν να εφαρμοστούν αποτελεσματικές μέθοδοι αποτίμησης που οδηγούν σε καλύτερα αποτελέσματα πολυπλοκότητας. Μια τέτοια περίπτωση αποτελούν οι δομές φραγμένου δεντροπλάτους με τις οποίες ασχολούμαστε στην παρούσα εργασία.

Πιο συγκεκριμένα, στην Ενότητα 3 παρουσιάζεται το πρόβλημα της αποτίμησης για τη μοναδιαία δευτεροβάθμια λογική σε χρωματισμένα δέντρα. Ένα χρωματισμένο δέντρο είναι ένα δυαδικό δέντρο όπου κάθε εσωτερικός κόμβος έχει ακριβώς δύο παιδιά, και υπάρχει μία συνάρτηση που χρωματίζει τους κόμβους του δέντρου. Ανάλογα με το αν τα παιδιά των εσωτερικών κόμβων του δυαδικού δέντρου είναι διατεταγμένα ή όχι τα χρωματισμένα δέντρα διακρίνονται σε διατεταγμένα και μη διατεταγμένα. Η επίλυση του προβλήματος βασίζεται στη γνωστή ισοδυναμία μεταξύ μοναδιαίας δευτεροβάθμιας λογικής σε δενδρικές δομές και αυτομάτων για δέντρα (Doner [10], Thatcher & Wright [21]). Έτσι το αρχικό πρόβλημα ανάγεται σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα αυτομάτων. Με τον τρόπο αυτό τα αντίστοιχα προβλήματα αποτίμησης αποκτούν γραμμική πολυπλοκότητα. Για την επίλυση του μετασχηματισμένου προβλήματος αυτομάτων παρουσιάζουμε αναλυτικά τον αλγόριθμο των Flum, Frick, Grohe [13]. Εξετάζουμε πιθανές παραλλαγές του αλγόριθμου και δίνουμε μεταφράσεις των διάφορων προσεγγίσεων σε σχεσιακή άλγεβρα.



Σχήμα 1: Ένα παράδειγμα χρωματισμένου δέντρου με εννιά κόμβους.

Στην Ενότητα 4 παρουσιάζεται ένα στιγμιότυπο του προβλήματος της αποτίμησης σε χρωματισμένα δέντρα που σχετίζεται με υποβολή ερωτήσεων σε XML-έγγραφο. Ένα XML-έγγραφο είναι στην ουσία ένα χρωματισμένο δέντρο μη φραγμένου βαθμού (ο

αριθμός των παιδιού ενός κόμβου δε φράσσεται). Τα τελευταία κωδικοποιούνται σε δυαδικά χρωματισμένα. Οι ερωτήσεις που μας ενδιαφέρουν στα πλαίσια των XML-δέντρων εφράζονται από μονομελείς MSO-τύπους. Παρουσιάζουμε δύο μοντέλα αυτομάτων που έχουν προταθεί για το αντίστοιχο πρόβλημα αποτίμησης: τα αυτόματα ερώτησης (Query Automata) και τα αυτόματα δέντρων που επιλέγουν (Selecting Tree Automata). Τέλος σχολιάζουμε τη σχέση των τελευταίων με τον αλγόριθμο αποτίμησης για τα χρωματισμένα δέντρα της Ενότητας 3.

Στην Ενότητα 5 ασχολούμαστε με το ίδιο πρόβλημα αλλά για δομές φραγμένου δεντροπλάτους. Ο Courcelle στο [7] απέδειξε ότι το πρόβλημα του ελέγχου μοντέλου (Model Checking) σε δομές φραγμένου δεντροπλάτους είναι γραμμική συνάρτηση του μεγέθους της δομής. Η πολυπλοκότητα του αντίστοιχου προβλήματος αποτίμησης είναι γραμμική συνάρτηση του μεγέθους της δομής και του μεγέθους της εξόδου [13]. Με τον τρόπο αυτό πολλά δύσκολα προβλήματα της θεωρίας γραφημάτων αποκτούν γραμμική πολυπλοκότητα στις εν λόγω δομές. Παρουσιάζουμε τα βασικά σημεία της τελευταίας προσέγγισης. Το χαρακτηριστικό των δομών μικρού δεντροπλάτους είναι ότι η υποκείμενη δομή τους παρουσιάζει μεγάλη ομοιότητα με τα δέντρα. Η βασική ιδέα επίλυσης είναι ο μετασχηματισμός του αρχικού προβλήματος σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα αποτίμησης για χρωματισμένα δέντρα. Ο μετασχηματισμός βασίζεται στην έννοια της δεντροδιάσπασης μιας δομής.

Ευχαριστίες. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Σταύρο Κοσμαδάκη και την κ. Ευγενία Φουστούκου. Ειδικά την τελευταία γιατί μέσω των μαθημάτων της στο Μ.Π.Α.Α. γνώρισα πολλά ενδιαφέροντα θέματα του ευρύτερου χώρου της Λογικής στην Πληροφορική: σε κάποια από αυτά βασίστηκε η παρούσα εργασία. Την ευχαριστώ επίσης ιδιαίτερα για την υπομονή και για τον χρόνο που διέθεσε στο να παρακολουθεί στενά την προετοιμασία αυτής της διπλωματικής με πολλές ιδέες, σχόλια και διορθώσεις, καθώς και για το φιλικό κλίμα επικοινωνίας και την γενικότερη υποστήριξη.

2 Βασικές έννοιες

Παραθέτουμε τους βασικούς ορισμούς που σχετίζονται με τη λογική και τις δομές που μελετάμε και τα αυτόματα δέντρων. Ορίζεται επίσης η έννοια της δεντροδιάσπασης και αναφέρονται εισαγωγικά στοιχεία και βασικά αποτελέσματα.

2.1 Λογική, Δέντρα, Αυτόματα

Έννοιες της λογικής. Ένα λεξικό τ (*vocabulary*) είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από σύμβολα σχέσης (*relation symbols*). Μία τ -δομή \mathcal{A} είναι ένα ζευγάρι $(A, (R^A)_{R \in \tau})$, όπου το A είναι ένα μη κενό σύνολο το οποίο ονομάζεται το σύμπαν της δομής \mathcal{A} και $R^A \subseteq A^r$ για κάθε r -μελές σύμβολο σχέσης $R \in \tau$.

Θεωρούμε ένα σύνολο τ' από σύμβολα σχέσης, το οποίο είναι υποσύνολο του συνόλου τ ($\tau' \subseteq \tau$). Ο περιορισμός της τ -δομής \mathcal{A} στο τ' είναι η τ' -δομή $(A, (R^A)_{R \in \tau'})$ και συμβολίζεται με $\mathcal{A}|_{\tau'}$. Αν \mathcal{C} μια κλάση τ -δομών, ο περιορισμός της \mathcal{C} στο τ' είναι η κλάση τ' -δομών $\mathcal{C}|_{\tau'} = \{\mathcal{A}|_{\tau'} \mid \mathcal{A} \in \mathcal{C}\}$.

Εάν \mathcal{C} είναι μια κλάση δομών, συμβολίζουμε με $\mathcal{C}[\tau]$ την υποκλάση όλων των τ -δομών στην \mathcal{C} .

Το πρόβλημα της L -αποτίμησης στην κλάση \mathcal{C} . Δεδομένης μιας δομής \mathcal{A} και ενός τύπου $\varphi(x_1, \dots, x_m)$, συμβολίζουμε τις αναθέσεις που ικανοποιούν τον τύπο φ στη δομή \mathcal{A} με $\text{sat_assign}(\varphi, \mathcal{A})^1$. Δηλαδή

$$\text{sat_assign}(\varphi, \mathcal{A}) = \{(b_1, \dots, b_m) \mid \mathcal{A} \models \varphi(b_1, \dots, b_m)\}.$$

Δεδομένης κάποιας λογικής L και μιας κλάσης δομών \mathcal{C} , το πρόβλημα της αποτίμησης για τη λογική L σε δομές που ανήκουν στην κλάση \mathcal{C} ή πρόβλημα της L -αποτίμησης στην \mathcal{C} (*evaluation problem for L on \mathcal{C}*) ορίζεται από τα εξής στιγμιότυπα:

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none">- Είσοδος: δομή $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$, τύπος $\varphi(x_1, \dots, x_m) \in L$.- Πρόβλημα: Υπολογισμός του $\text{sat_assign}(\varphi, \mathcal{A})$. |
|---|

Μοναδιαία δευτεροβάθμια λογική (MSO logic). Η μοναδιαία δευτεροβάθμια λογική (*monadic second-order logic* or MSO) (βλέπε [12] και [22] για περισσότερες λεπτομέρειες) είναι μια επέκταση της πρωτοβάθμιας λογικής η οποία επιτρέπει την ποσοδείκηση πάνω σε σύνολα. Εκτός από τα σύμβολα της πρωτοβάθμιας λογικής, το αλφάβητό της περιέχει δευτεροβάθμιες μεταβλητές X, Y, Z, \dots που αποτιμούνται από σύνολα στοιχείων του σύμπαντος της αντίστοιχης δομής. Το σύνολο των τύπων της πάνω σε ένα λεξικό τ είναι εκείνο που παράγεται από τους κανόνες της πρωτοβάθμιας λογικής, επεκτεταμένο με έναν κανόνα που ορίζει ατομικούς τύπους της μορφής $X(x)$, όπου X μεταβλητή

¹ Παρατηρούμε ότι είναι μια m -μελής σχέση. Στη βιβλιογραφία χρησιμοποιείται συνήθως ο συμβολισμός $\text{sat}(\varphi, \mathcal{A})$ για το ίδιο σύνολο.

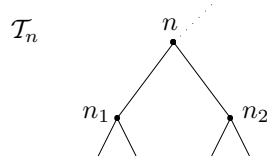
συνόλου και x πρωτοβάθμια μεταβλητή, με την προφανή σημασία ότι 'το x ανήκει στο X '. Υπάρχει ένας ακόμα κανόνας παραγωγής MSO-τύπων ο οποίος λέει ότι αν ο φ είναι ένας MSO-τύπος και η X μια μεταβλητή συνόλου, τότε οι $\exists X\varphi$ και $\forall X\varphi$ είναι MSO-τύποι. Η σημασιολογία ορίζεται κατά τον φυσικό τρόπο.

Γράφοι, μη διατεταγμένα δέντρα. Ένας γράφος είναι μια $\{E\}$ -δομή $\mathcal{G} = (G, E^{\mathcal{G}})$, όπου η $E^{\mathcal{G}} \subseteq G^2$ είναι μια αντι-αυτοπαθής και συμμετρική διμελής σχέση. Ένα μη διατεταγμένο δέντρο είναι ένας συνεκτικός ακυκλικός γράφος $\mathcal{T} = (T, E^{\mathcal{T}})$. Σε ένα δέντρο \mathcal{T} , ορίζουμε πάντα τυχαία μία ρίζα $r^{\mathcal{T}} \in T$. Προκύπτει έτσι μία φυσική μερική διάταξη $\leq^{\mathcal{T}}$ στο σύνολο T τέτοια ώστε

$$n \leq^{\mathcal{T}} u \iff \text{ο κόμβος } n \text{ εμφανίζεται στο μοναδικό μονοπάτι από τη ρίζα } r^{\mathcal{T}} \text{ στον κόμβο } u.$$

Όταν $(n, u) \in E^{\mathcal{T}}$ και $n \leq^{\mathcal{T}} u$, λέμε ότι ο u είναι παιδί του n ή ότι ο n είναι πατέρας του u . Προκύπτει έτσι μια διμελής σχέση πατέρα-παιδιού $E_{\leq}^{\mathcal{T}}$ με την προφανή σημασία.

Το υποδέντρο \mathcal{T}_n ενός δέντρου \mathcal{T} είναι εκείνο το υποδέντρο του \mathcal{T} που έχει ρίζα τον κόμβο n . Δηλαδή αποτελείται από τον κόμβο n και όλους τους κόμβους u για τους οποίους $n \leq^{\mathcal{T}} u$.



Ένα γεμάτο (*full*) δυαδικό δέντρο είναι ένα δέντρο στο οποίο κάθε κόμβος έχει είτε δύο παιδιά ή κανένα.

Χρωματισμένοι γράφοι, μη διατεταγμένα χρωματισμένα δέντρα. Ένας χρωματισμένος γράφος (*colored graph*) είναι μια $\{E, P_1, \dots, P_n\}$ -δομή $\mathcal{B} = (B, E^{\mathcal{B}}, P_1^{\mathcal{B}}, \dots, P_n^{\mathcal{B}})$, όπου ο $(B, E^{\mathcal{B}})$ είναι ένας γράφος και οι μονομελείς σχέσεις $P_1^{\mathcal{B}}, \dots, P_n^{\mathcal{B}} \subseteq B$ αποτελούν μια διαμέριση του σύμπαντος B . Ονομάζουμε τον $(B, E^{\mathcal{B}})$ υποκείμενο γράφο του χρωματισμένου γράφου $(B, E^{\mathcal{B}}, P_1^{\mathcal{B}}, \dots, P_n^{\mathcal{B}})$.

Θεωρούμε Γ ένα πεπερασμένο αλφάβητο. Έστω π_{Γ} το λεξικό $\{E, (P_{\gamma})_{\gamma \in \Gamma}\}$. Ο χρωματισμένος γράφος $\mathcal{C} = (C, E^{\mathcal{C}}, (P_{\gamma}^{\mathcal{C}})_{\gamma \in \Gamma})$ ονομάζεται Γ -χρωματισμένος γράφος ή απλά Γ -γράφος. Δηλαδή οι κορυφές ενός Γ -γράφου διαμερίζονται με τη βοήθεια των χρωμάτων του Γ .

Όταν ο υποκείμενος γράφος ενός χρωματισμένου γράφου είναι γεμάτο δυαδικό δέντρο τότε ο χρωματισμένος γράφος είναι χρωματισμένο δέντρο (και αντίστοιχα ο Γ -γράφος Γ -δέντρο).

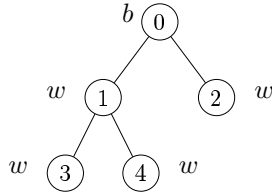
Διατεταγμένα χρωματισμένα δέντρα. Τα χρωματισμένα δέντρα που ορίστηκαν παραπάνω είναι μη διατεταγμένα, δηλαδή τα υποκείμενα δέντρα τους $(T, E^{\mathcal{T}})$ είναι μη διατεταγμένα (*unordered*), με την έννοια ότι δεν υπάρχει διάταξη στα παιδιά ενός κόμβου.

Εντελώς ανάλογα ορίζονται τα διατεταγμένα (ordered) χρωματισμένα δέντρα. Πιο συγκεκριμένα ένα διατεταγμένο Γ -δέντρο \mathcal{T} είναι μια π_Γ^o -δομή, όπου $\pi_\Gamma^o = \{S_1, S_2, (P_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}\}$, με υποκείμενο δέντρο το διατεταγμένο γεμάτο δυαδικό δέντρο (T, S_1^T, S_2^T) . Οι διμελείς σχέσεις S_1^T, S_2^T είναι οι σχέσεις αριστερού και δεξιού παιδιού αντίστοιχα.

Ένα διατεταγμένο δυαδικό δέντρο ορίζεται ισοδύναμα από την τριάδα (T, s_1, s_2) , όπου T το σύνολο κόμβων του δέντρου και s_1, s_2 είναι οι συναρτήσεις αριστερού και δεξιού παιδιού. Ανάλογα ένα διατεταγμένο Γ -δέντρο $(T, S_1^T, S_2^T, (P_\gamma^T)_{\gamma \in \Gamma})$ μπορεί να οριστεί από το ζεύγος $((T, s_1, s_2), c)$. Η $c : T \rightarrow \Gamma$ ονομάζεται *συνάρτηση χρωματισμού* και ορίζεται με βάση την ισοδυναμία $c(n) = \gamma$ αν $n \in P_\gamma^T$. Λέμε ότι ο κόμβος n ενός χρωματισμένου δέντρου \mathcal{T} έχει χρώμα γ όταν $c(n) = \gamma$.

Στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι τα Γ -δέντρα μας είναι διατεταγμένα και δε θα το αναφέρουμε. Στην αντίθετη περίπτωση θα το αναφέρουμε.

Παράδειγμα 2.1. Θεωρούμε το αλφάβητο χρωμάτων $\Gamma = \{b, w\}$. Το ακόλουθο Γ -δέντρο



μπορεί να ειπωθεί ως π_Γ -δομή \mathcal{T} (μη διατεταγμένο) ή ως π_Γ^o -δομή \mathcal{T}' (διατεταγμένο) με $T = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $E_\leq^T = \{(0, 1), (0, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ (η E^T προκύπτει από την E_\leq^T θεωρώντας επιπλέον τα συμμετρικά ζεύγη της), $P_w^T = P_w^{T'} = \{1, 2, 3, 4\}$, $P_b^T = P_b^{T'} = \{0\}$, $S_1^{T'} = \{(0, 1), (1, 3)\}$, $S_2^{T'} = \{(0, 2), (1, 4)\}$. Για τον ισοδύναμο ορισμό του \mathcal{T}' έχουμε $s_1 = \{0 \mapsto 1, 1 \mapsto 3\}$, $s_2 = \{0 \mapsto 2, 1 \mapsto 4\}$, $c = \{0 \mapsto b, 1 \mapsto w, 2 \mapsto w, 3 \mapsto w, 4 \mapsto w\}$. \diamond

Αυτόματα δέντρων. Ένα *bottom-up ντετερμινιστικό αυτόματο Γ -δέντρου* (ή Γ -αυτόματο) είναι μια τετράδα $\mathfrak{A} = (Q, \delta, \Delta, F)$, όπου Q είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, το σύνολο των καταστάσεων, $\Delta : \Gamma \rightarrow Q$ είναι η *συνάρτηση εκκίνησης* (starting function), $F \subseteq Q$ είναι το σύνολο των καταστάσεων που αποδέχονται (accepting states) και $\delta : Q \times Q \times \Gamma \rightarrow Q$ είναι η *συνάρτηση μετάβασης* (transition function).

Η εκτέλεση (run) του αυτομάτου \mathfrak{A} σε ένα Γ -δέντρο $\mathcal{T} = ((T, s_1, s_2), c)$ είναι μια συνάρτηση ρ από το σύνολο T των κόμβων του \mathcal{T} στο σύνολο Q των καταστάσεων του \mathfrak{A} ($\rho : T \rightarrow Q$) και ορίζεται από τα φύλλα προς τη ρίζα ως εξής:

- $\rho(n) = \Delta(c(n))$, εάν το n είναι φύλλο και
- $\rho(n) = \delta(\rho(s_1(n)), \rho(s_2(n)), c(n))$, εάν ο n είναι εσωτερικός κόμβος.

Μέσω της εκτέλεσης ρ , ένα αυτόματο αποδίδει κατάσταση σε κάθε κόμβο $n \in T$. Οι αντίστοιχοι υπολογισμοί πραγματοποιούνται σε χρόνο που είναι γραμμική συνάρτηση του μεγέθους του δέντρου.

Το αυτόματο \mathfrak{A} δέχεται (*accepts*) το Γ -δέντρο \mathcal{T} ή το Γ -δέντρο \mathcal{T} είναι δεκτό από το αυτόματο \mathfrak{A} , εάν $\rho(r^{\mathcal{T}}) \in F$, δηλαδή εάν η τιμή της εκτέλεσης του \mathfrak{A} στη ρίζα $r^{\mathcal{T}}$ του \mathcal{T} είναι κατάσταση που αποδέχεται. Ονομάζουμε μια τέτοια εκτέλεση *επιτυχημένη εκτέλεση* (δηλαδή ένα δέντρο είναι δεκτό αν η αντίστοιχη εκτέλεση είναι επιτυχημένη).

Η έννοια της μετάβασης. Η εκτέλεση ενός αυτομάτου δέντρου χρησιμοποιεί μια ισότητα της αντίστοιχης συνάρτησης μετάβασης δ , για να αποδώσει κατάσταση σε έναν εσωτερικό κόμβο n . Κάθε τέτοια ισότητα, η οποία έχει γενική μορφή $q_n = \delta(q_{n_1}, q_{n_2}, \gamma)$, μπορεί να ειδωθεί ως μια μετάβαση. Ονομάζουμε *μετάβαση* που αντιστοιχεί σε μια ισότητα $\delta(q_{n_1}, q_{n_2}, \gamma) = q_n$ την πλειάδα $(q_n, q_{n_1}, q_{n_2}, \gamma)$.

$$\delta(q_{n_1}, q_{n_2}, \gamma) = q_n \iff \begin{array}{c} \triangle \\ \text{---} q_n \text{---} \\ \text{---} q_{n_1} \text{---} \gamma \text{---} q_{n_2} \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

Ανάλογα μια *μετάβαση εκκίνησης* που αντιστοιχεί σε μια ισότητα $\Delta(\gamma) = q_n$ έχει τη μορφή (q_n, γ) . Δηλαδή οι συναρτήσεις Δ, δ ενός αυτομάτου μπορούν πολύ φυσικά να οριστούν ως σύνολα μεταβάσεων. Έτσι, μια εκτέλεση μπορεί να θεωρηθεί ότι υπολογίζεται μέσω της επιλογής και σύνθεσης των αντίστοιχων μεταβάσεων σε κάθε διακλάδωση. Θα επανέλθουμε και στη συνέχεια στην έννοια της μετάβασης με περισσότερες λεπτομέρειες.

Η εκτέλεση του αυτομάτου αντιστοιχεί σε ένα Q -δέντρο. Μέσω της εκτέλεσης ρ , το αυτόματο \mathfrak{A} αντιστοιχεί μια κατάσταση $\rho(n)$ σε κάθε κόμβο $n \in T$. Ανάλογα μπορούμε να πούμε ότι η ρ αντιστοιχεί σε κάθε τμήμα του δέντρου που αποτελείται από έναν εσωτερικό κόμβο n και τα παιδιά του n_1, n_2 (δηλαδή σε μία διακλάδωση) ένα *τρίγωνο καταστάσεων* $\rho_{n,n_1,n_2} = (\rho(n), \rho(n_1), \rho(n_2))$. Το ρ_{n,n_1,n_2} είναι το υποκείμενο τρίγωνο καταστάσεων της μετάβασης $(\rho(n), \rho(n_1), \rho(n_2), c(n))$ μέσω της οποίας η εκτέλεση ρ αποδίδει κατάσταση στον κόμβο n . Γενικότερα, η εκτέλεση ρ ενός αυτομάτου σε ένα Γ -δέντρο \mathcal{T} μπορεί να ειδωθεί ως ένα Q -δέντρο καταστάσεων $\rho(\mathcal{T}) = ((T, s_1, s_2), \rho)$.

Μη διατεταγμένα Γ -δέντρα: συμμετρική συνάρτηση μετάβασης. Θεωρούμε ένα μη διατεταγμένο Γ -δέντρο $\mathcal{T} = (T, E^{\mathcal{T}}, (P_{\gamma}^{\mathcal{T}})_{\gamma \in \Gamma})$. Ανάλογα με την περίπτωση που το δέντρο είναι διατεταγμένο, το \mathcal{T} μπορεί να οριστεί ισοδύναμα από το ζεύγος $((T, s), c)$, όπου το (T, s) αποτελεί ισοδύναμο ορισμό του μη διατεταγμένου δυαδικού δέντρου $(T, E^{\mathcal{T}})$. Πιο συγκεκριμένα η s είναι η συνάρτηση των παιδιών ενός εσωτερικού κόμβου n (δηλαδή αν n_1, n_2 είναι τα παιδιά του n , τότε $s(n) = \{n_1, n_2\}$). Η c είναι η γνωστή μας συνάρτηση χρωματισμού.

Το bottom-up ντετερμινιστικό αυτόματο μη διατεταγμένου Γ -δέντρου ορίζεται όπως το αντίστοιχο αυτόματο διατεταγμένου Γ -δέντρου, δηλαδή από μία τετράδα $\mathfrak{A} = (Q, \delta, \Delta, F)$, με τη μόνη διαφορά ότι η συνάρτηση μετάβασης δ είναι μια συνάρτηση από το $[Q]^{\leq 2} \times \Gamma$ στο Q . Με $[Q]^{\leq 2}$ συμβολίζουμε το σύνολο από μονοσύνολα και δισύνολα

με στοιχεία από το σύνολο καταστάσεων Q , δηλαδή το σύνολο $\{\{q, q'\} \mid q, q' \in Q\}^2$. Ανάλογα, η εκτέλεση του παραπάνω αυτομάτου σε ένα Γ -δέντρο $T = ((T, s), c)$ είναι μια συνάρτηση ρ από το σύνολο T των κορυφών του T στο σύνολο Q των καταστάσεων του \mathfrak{A} ($\rho : T \rightarrow Q$) και ορίζεται από τα φύλλα προς τη ρίζα ως εξής:

- $\rho(n) = \Delta(c(n))$, εάν το n είναι φύλλο και
- $\rho(n) = \delta(\rho(s(n)), c(n))$, εάν ο n είναι εσωτερικός κόμβος.

Παρατηρούμε ότι η εκτέλεση του $\mathfrak{A} = (Q, \delta, \Delta, F)$, μπορεί να προσομοιωθεί από τη εκτέλεση ενός αυτομάτου $\mathfrak{A}' = (Q, \delta', \Delta, F)$ διατεταγμένου δέντρου με συμμετρική συνάρτηση μετάβασης δ'^3 . Δηλαδή θα είναι $\delta(\{q, q'\}, \gamma) = \delta'(q, q', \gamma) = \delta'(q', q, \gamma)$.⁴

2.2 Θέματα κωδικοποίησης

Παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες κωδικοποίησης που χρησιμοποιούνται στις Ενότητες 3 και 5.

Μέγεθος $\|A\|$ ενός αντικειμένου A . Για ένα αντικείμενο A , ονομάζουμε μέγεθος (*size*) του A , συμβολίζοντάς το με $\|A\|$, το μήκος της κωδικοποίησής του. Όταν το A είναι σύνολο, ο συμβολισμός $|A|$ χρησιμοποιείται για τον πληθάρημο (*cardinality*) του A . Συμβολίζουμε την κωδικοποίηση ενός αντικειμένου A με $[A]$.

Κωδικοποίηση μιας τ -δομής \mathcal{A} . Για να αναπαραστήσουμε μια τ -δομή σε μία RAM, θα πρέπει αρχικά να κωδικοποιήσουμε το λεξικό της τ . Έτσι κάθε σύμβολο σχέσης αναπαριστάται με ένα ζευγάρι φυσικών αριθμών. Πιο συγκεκριμένα, το ζευγάρι (i, j) αντιστοιχεί στο i -οστό j -μελές σύμβολο σχέσης του τ . Η κωδικοποίηση $[\tau]$ είναι μια ακολουθία $1 + 2|\tau|$ φυσικών αριθμών· ο πρώτος αντιστοιχεί στον πληθάρημο του τ και οι υπόλοιποι $2|\tau|$ στα $|\tau|$ ζευγάρια των συμβόλων σχέσης. Δηλαδή $\|\tau\| = 1 + 2|\tau|$.

Ανάλογα η κωδικοποίηση $[A]$ τη δομής είναι μια ακολουθία φυσικών αριθμών, η οποία ξεκινάει με την κωδικοποίηση του λεξικού της. Ακολουθούν οι πληθάρημοι $|A|$, $|R^A|$, $R \in \tau$. Οι επόμενοι $|A|$ αριθμοί είναι τα στοιχεία του σύμπαντος της δομής. Μετά από αυτούς, ακολουθεί η αναπαράσταση των σχέσεων της δομής· σε κάθε r -μελή σχέση R^A αντιστοιχεί μια ακολουθία από $r \cdot |R^A|$ ακεραίους που αποτελούν τις πλειάδες της R^A . Δηλαδή το μέγεθος μιας τ -δομής \mathcal{A} είναι

$$\|\mathcal{A}\| = \|\tau\| + 1 + |\tau| + |A| + \sum_{\substack{R \in \tau \\ r\text{-μελές}}} r \cdot |R^A|$$

²Ανάλογα ορίζεται το $[Q_1, Q_2]^{\leq 2} = \{\{q, q'\} \mid q \in Q_1, q' \in Q_2\}$.

³Ένα αυτόματο έχει συμμετρική συνάρτηση μετάβασης όταν $\delta(q_i, q_j, \gamma) = \delta(q_j, q_i, \gamma)$, για κάθε $\gamma \in \Gamma$ και για κάθε $q_i, q_j \in Q$.

⁴Σημειώνουμε ότι όταν έχουμε συμμετρική συνάρτηση μετάβασης δ , αρκεί να γνωρίζουμε την τιμή της δ στο σύνολο $Q * Q \subseteq Q^2$. Θεωρούμε μια τυχαία διάταξη για τα στοιχεία του συνόλου καταστάσεων Q . Είναι $Q * Q = \{(q, q') \mid (q, q') \in Q \times Q \text{ και } q \geq q'\}$.

Θεωρούμε ότι η συνάρτηση $o : [Q]^{\leq 2} \rightarrow Q * Q$, διατάσει τα στοιχεία του $[Q]^{\leq 2}$ σύμφωνα με την παραπάνω διάταξη: $o(\{q, q'\}) = (q, q')$, όπου $q \geq q'$ και $o(\{q\}) = (q, q)$. Τότε $\delta(\{q, q'\}, \gamma) = \delta'(o(\{q, q'\}), \gamma)$.

$$= \Theta(|\tau| + |A| + \sum_{R \in \tau} \|R^A\|).$$

Παράδειγμα 2.2. Θεωρούμε το διατεταγμένο Γ -δέντρο, $\Gamma = \{w, b\}$, που αναπαρίσταται λογικά από την τ_Γ^o -δομή T . Θυμίζουμε ότι $\tau_\Gamma^o = \{S_1, S_2, P_w, P_b\}$. Είναι $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $P_w^T = \{2, 3, 4, 5\}$, $P_b^T = \{1\}$, $S_1^T = \{(1, 2), (2, 4)\}$, $S_2^T = \{(1, 3), (2, 5)\}$. Είναι

$$[\tau_\Gamma^o] = (\underbrace{4}_{|\tau_\Gamma^o|}, \underbrace{1, 2}_{S_1}, \underbrace{2, 2}_{S_2}, \underbrace{1, 1}_{P_w}, \underbrace{2, 1}_{P_b}),$$

$$[T] = (\underbrace{\dots}_{|\tau_\Gamma^o|}, \underbrace{5}_{|T|}, \underbrace{2}_{|S_1|}, \underbrace{2}_{|S_2|}, \underbrace{4}_{|P_w|}, \underbrace{1}_{P_b}, \underbrace{1, 2, 3, 4, 5}_T, \underbrace{1, 2, 2, 4}_{S_1^T}, \underbrace{1, 3, 2, 5}_{S_2^T}, \underbrace{2, 3, 4, 5}_{P_w^T}, \underbrace{1}_{P_b^T}).$$

◇

Κωδικοποίηση ενός τύπου από μια ακολουθία φυσικών αριθμών. Θεωρούμε ότι οι πρωτοβάθμιες μεταβλητές των τύπων μας είναι v_0, v_1, \dots και οι μοναδιαίες δευτεροβάθμιες είναι V_0, V_1, \dots . Στην ουσία οι τύποι μας αποτελούν ακολουθίες από σύμβολα: $\exists, \forall, \vee, \wedge, \rightarrow, \neg, (,), =$, μεταβλητές και σύμβολα σχέσης. Κατάλληλη αντιστοίχιση των συμβόλων αυτών με φυσικούς αριθμούς, οδηγεί στην κωδικοποίηση ενός τύπου με τη βοήθεια ακολουθίας φυσικών αριθμών. Θεωρείται ότι η κωδικοποίηση ενός τύπου ξεκινάει με την κωδικοποίηση του λεξικού του, ενώ ακολουθεί η κωδικοποίηση των συμβόλων του. Το $\|\varphi\|$ δηλώνει το μήκος της κωδικοποίησης του τύπου φ .

Σημειώνουμε επίσης ότι γενικά θεωρείται ως υποκείμενο μοντέλο υπολογισμού το συνήθες RAM μοντέλο με πρόσθεση και αφαίρεση, ενώ θεωρείται ότι όλοι οι καταχωρητές αρχικοποιούνται στο '0'. Στις αντίστοιχες αναλύσεις πολυπλοκότητας χρησιμοποιείται το ομοιόμορφο μέτρο κόστους.

2.3 Δεντροδιασπάσεις (tree-decompositions)

Γενικά για την έννοια της δεντροδιάσπασης. Οι γράφοι μικρού δεντροπλάτους παρουσιάζουν μεγάλη ομοιότητα με τα δέντρα κατά έναν συγκεκριμένο τρόπο που περιγράφεται με ακρίβεια από την δεντροδιάσπαση του αντίστοιχου γράφου. Η σημασία της έννοιας της δεντροδιάσπασης είναι ότι μέσω αυτής πολλά υπολογιστικά δύσκολα προβλήματα, μπορούν να επιλυθούν αποτελεσματικά σε γράφους μικρού δεντροπλάτους. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι τα αντίστοιχα προβλήματα σε δέντρα μπορούν να επιλυθούν μέσω ενός περάσματος των κόμβων του δέντρου και υπολογισμούς σταθερού χρόνου σε κάθε κόμβο (βλέπε επίσης [5]).

Δεντροδιασπάσεις υπεργράφων. Ένας υπεργράφος \mathcal{H} είναι ένα ζευγάρι $(H, E^{\mathcal{H}})$, που αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο H που ονομάζεται σύνολο κορυφών, και ένα σύνολο $E^{\mathcal{H}}$ που περιέχει μη κενά υποσύνολα του συνόλου H , τα οποία ονομάζονται υπερακμές.

Μια δεντροδιάσπαση (tree-decomposition) ενός υπεργράφου $\mathcal{H} = (H, E^{\mathcal{H}})$ είναι ένα ζευγάρι (T, \mathcal{X}) , όπου T είναι ένα δέντρο (T, E^T) και $\mathcal{X} = (X_t)_{t \in T}$ μία οικογένεια

υποσυνόλων του συνόλου H των κορυφών του υπεργράφου \mathcal{H} (δηλαδή $X_t \subseteq H, t \in T$) τέτοια ώστε

1. Για κάθε κορυφή $v \in H$, το σύνολο $\{t \in T \mid v \in X_t\}$ είναι μη κενό και συνεκτικό.
2. Για κάθε υπερακμή $e \in E^{\mathcal{H}}$, υπάρχει ένας κόμβος $t \in T$ τέτοια ώστε $e \subseteq X_t$.

Τα σύνολα $(X_t)_{t \in T}$ ονομάζονται *blocks* της δέντροδιάσπασης (T, \mathcal{X}) που αντιστοιχούν στους κόμβους $t \in T$. Το πλάτος (*width*) w μίας δέντροδιάσπασης είναι ίσο με $\max\{|X_t| \mid t \in T\} - 1$. Μια δέντροδιάσπαση (T, \mathcal{X}) πλάτους w (δηλαδή για την οποία $w(T, \mathcal{X}) = w$) ονομάζεται w -δέντροδιάσπαση. Συμβολίζουμε με $\text{TreeDecomp}(\mathcal{H})$ το σύνολο των δέντροδιασπάσεων ενός υπεργράφου \mathcal{H} . Το δέντροπλάτος (*tree-width*) $\text{tw}(\mathcal{H})$ ενός υπεργράφου \mathcal{H} είναι το ελάχιστο πλάτος ανάμεσα σε όλα τα πλάτη των *tree-decomposition* του υπεργράφου. Δηλαδή:

$$\text{tw}(\mathcal{H}) = \min\{w(T, \mathcal{X}) \mid (T, \mathcal{X}) \in \text{TreeDecomp}(\mathcal{H})\}.$$

Επίσης, θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό T_v για το σύνολο $\{t \in T \mid v \in X_t\}$ που ορίζει το υποδέντρο T_v που αντιστοιχεί στην κορυφή $v \in H$, δηλαδή το υποδέντρο $(T_v, E^{\mathcal{T}} \cap (T_v \times T_v))$.

Αντιστοίχιση μιας κορυφής και μιας υπερακμής του υπεργράφου σε κόμβο. Θεωρούμε μία δέντροδιάσπαση $(T, (X_t)_{t \in T})$ ενός υπεργράφου $\mathcal{H} = (H, E^{\mathcal{H}})$. Κόμβος $\text{node}_{(T, \mathcal{X})}(v)$ μιας κορυφής $v \in H$ ως προς την (T, \mathcal{X}) ονομάζεται ο ελάχιστος κόμβος (ως προς τη σχέση \leq^T) $t \in T$ για τον οποίο $v \in X_t$ (δηλαδή η ρίζα του υποδέντρου $(T_v, E^{\mathcal{T}} \cap (T_v \times T_v))$). Ανάλογα κόμβος $\text{node}_{(T, \mathcal{X})}(e)$ μιας υπερακμής $e \in E^{\mathcal{H}}$ ως προς τη δεδομένη δέντροδιάσπαση (T, \mathcal{X}) είναι ο ελάχιστος κόμβος $t \in T$ για τον οποίο $e \subseteq X_t$.

Στη συνέχεια όταν η δέντροδιάσπαση $(T, (X_t)_{t \in T})$ εννοείται από τα συμφραζόμενα, θα παραλείπουμε την αναφορά της και θα γράφουμε $\text{node}(v)$ και $\text{node}(e)$ αντίστοιχα.

ΛΗΜΜΑ 2.1 ([13]). Δεδομένου ενός υπεργράφου $\mathcal{H} = (H, E^{\mathcal{H}})$ και δεδομένης μιας *tree-decomposition* $(T, (X_t)_{t \in T})$ του \mathcal{H} , υπάρχει αλγόριθμος γραμμικού χρόνου ο οποίος υπολογίζει την οικογένεια $(\text{node}(x))_{x \in H \cup E^{\mathcal{H}}}$.

Υπολογισμός δέντροδιασπάσεων. Ισχύει το παρακάτω για την πολυκλοχότητα του υπολογισμού μιας δέντροδιάσπασης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1 ([6]). Δεδομένου ενός υπεργράφου $\mathcal{H} = (H, E^{\mathcal{H}})$, υπάρχει ένα πολυώνυμο $p(x)$ και ένας αλγόριθμος, ο οποίος υπολογίζει μία δέντροδιάσπαση του \mathcal{H} πλάτους $w = \text{tw}(\mathcal{H})$ σε χρόνο $2^{p(w)}|H|$.

Θα αναφέρουμε περισσότερες λεπτομέρειες στην Ενότητα 5.1, όταν θα αναφερθούμε στις δομές φραγμένου δέντροπλάτους.

3 Το πρόβλημα της MSO-αποτίμησης σε δομές που είναι χρωματισμένα δέντρα

Ασχολούμαστε στην ενότητα αυτή με το πρόβλημα της αποτίμησης για τη μοναδιαία δευτεροβάθμια λογική (MSO) σε δομές που είναι χρωματισμένα δέντρα. Οι βασικές ιδέες των τεχνικών στις οποίες βασίζεται η επίλυση του προβλήματος αυτού αναπτύχθηκαν κατά τη μελέτη προβλημάτων απόφασης της λογικής και πιο συγκεκριμένα της ασθενούς μοναδιαίας δευτεροβάθμιας θεωρίας των συναρτήσεων των δύο επόμενων. Η θεωρία των συναρτήσεων των δύο επόμενων παρουσιάζει σημαντικές ομοιότητες με τη μοναδιαία δευτεροβάθμια θεωρία των δυαδικών δέντρων όπου τα σύμβολα σχέσεων S_1 και S_2 χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν το αριστερό και δεξί παιδί αντίστοιχα (Doner [8, 10], Thatcher & Wright [21]). Σημειώνεται ότι τα αντίστοιχα αποτελέσματα είναι στη ουσία επέκταση των αποτελεσμάτων του Büchi [4] για λέξεις (βλέπε επίσης Thomas [22] για περισσότερες λεπτομέρειες).

Η κεντρική ιδέα για την επίλυση των παραπάνω προβλημάτων είναι η σύνδεση της μοναδιαίας δευτεροβάθμιας λογικής με τα αυτόματα. Στη σύνδεση αυτή βασίζεται και η επίλυση του προβλήματος της εύρεσης των αναθέσεων για τη MSO λογική σε δομές που είναι χρωματισμένα δέντρα¹:

- Είσοδος: Γ-δέντρο T , MSO-τύπος $\varphi(X_1, \dots, X_l, x_1, \dots, x_m)$.
- Πρόβλημα: Υπολογισμός του $\text{sat_assign}(\varphi, T)$.

Λόγω της σύνδεσης αυτής είναι εφικτή η αναγωγή του αρχικού πρόβλημα του υπολογισμού των αναθέσεων, όπως αυτό ορίστηκε παραπάνω, σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα αυτομάτων. Όπως θα δούμε στην Ενότητα 3.1 μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να θεωρούμε ότι ο αρχικός τύπος δεν έχει ελεύθερες πρωτοβάθμιες μεταβλητές. Έτσι ορίζεται η τροποποιημένη μορφή του αρχικού προβλήματος που δεν είναι τίποτα άλλο από το παραπάνω πρόβλημα αλλά για δεδομένους τύπους που δεν έχουν ελεύθερες πρωτοβάθμιες μεταβλητές. Το πρόβλημα αυτό μελετάμε στις επόμενες ενότητες.

Πιο συγκεκριμένα, στην Ενότητα 3.2 παρουσιάζεται η ισοδυναμία μεταξύ MSO-λογικής σε δέντρα και αυτομάτων για δέντρα. Σημειώνουμε ότι οι Ενότητες 3.1 και 3.2 αποτελούν το θεωρητικό υπόβαθρο της αναγωγής του αρχικού προβλήματος στο ισοδύναμο πρόβλημα αυτομάτων και μπορούν να παραλειφθούν από τον αναγνώστη που δεν ενδιαφέρεται για τις τεχνικές λεπτομέρειες της αναγωγής. Στην Ενότητα 3.3 ορίζεται το ισοδύναμο πρόβλημα αυτομάτων.

Στη συνέχεια, στην Ενότητα 3.4, παρουσιάζεται αναλυτικά ο αλγόριθμος των Flum, Frick, Grohe [13] για την επίλυση του προβλήματος αυτομάτων. Σημειώνεται ότι η προσέγγιση αυτή βασίζεται σε ιδέες του [3]. Το βασικό αποτέλεσμα συνοψίζεται στο Θεώρημα 3.2, σύμφωνα με το οποίο το πρόβλημα της αποτίμησης για MSO-τύπους

¹Στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι ο τύπος και η δομή έχουν το ίδιο λεξικό και δε θα το αναφέρουμε όταν αυτό εννοείται από τα συμφραζόμενα.

σε χρωματισμένα δέντρα επιλύεται σε χρόνο $f(\|\varphi\|) \cdot (\|T\| + \|\text{sat_assign}(\varphi, T)\|)$, για κατάλληλη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Στις ενότητες που ακολουθούν, σχολιάζονται μικρές παραλλαγές του παραπάνω αλγορίθμου, καθώς και διάφορες βελτιστοποιήσεις. Τέλος, στην Ενότητα 3.8 δίνονται οι μεταφράσεις των διαφόρων προσεγγίσεων σε σχεσιακή άλγεβρα.

3.1 Το αρχικό πρόβλημα τροποποιημένο

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται το προπαρασκευαστικό βήμα της αναγωγής του αρχικού προβλήματος σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα αυτομάτων ([13]). Σημειώνουμε ότι στο [13] το υποκείμενο δυαδικό ορίζεται στο λεξικό $\{E\}$ και άρα είναι μη διατεταγμένο. Δηλαδή τα αντίστοιχα χρωματισμένα δέντρα είναι τ_T -δομές και οι τύποι ανήκουν στην $\text{MSO}[\tau_T]$. Τα αποτελέσματα αυτά επεκτείνονται εντελώς φυσικά και για την περίπτωση που το υποκείμενο δυαδικό δέντρο ορίζεται στο λεξικό $\{S_1, S_2\}$, δηλαδή όταν είναι διατεταγμένο. Τότε τα χρωματισμένα δέντρα είναι τ_T^r -δομές και οι δεδομένοι τύποι ανήκουν στην $\text{MSO}[\tau_T^r]$. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, τα βήματα μετασχηματισμού και οι αντίστοιχες αποδείξεις είναι ανεξάρτητες από το αν το λεξικό μας είναι το τ_T ή το τ_T^r .

Κάθε MSO-τύπος φ μπορεί να μετατραπεί σε έναν εκφραστικά ισοδύναμο MSO-τύπο φ' χωρίς ελεύθερες πρωτοβάθμιες μεταβλητές. Κάθε MSO-τύπος $\varphi(X_1, \dots, X_l, x_1, \dots, x_m)$ μπορεί εύκολα να μεταφραστεί σε έναν εκφραστικά ισοδύναμο τύπο φ' που έχει μόνο δευτεροβάθμιες ελεύθερες μεταβλητές. Η ιδέα είναι να μιμηθούμε τα στοιχεία με μονοσύνολα. Πιο συγκεκριμένα, στον νέο τύπο φ' , οι x_i , $i = 1, \dots, m$ γίνονται δεσμευμένες (από ελεύθερες που ήταν στον φ). Θεωρούμε m νέες μοναδιαίες δευτεροβάθμιες μεταβλητές Y_1, \dots, Y_m , που δεν εμφανίζονται στον φ . Ορίζουμε έναν τύπο $\varphi_1(x_1, \dots, x_m, Y_1, \dots, Y_m)$ που εκφράζει ότι κάθε μοναδιαία δευτεροβάθμια μεταβλητή Y_i αντιστοιχεί σε μονοσύνολο που περιέχει την τιμή της x_i , για κάθε $i = 1, \dots, m$. Ο νέος τύπος φ' έχει την παρακάτω μορφή:

$$\varphi'(X_1, \dots, X_l, Y_1, \dots, Y_m) = \exists x_1, \dots, \exists x_m \left(\varphi(X_1, \dots, X_l, x_1, \dots, x_m) \wedge \varphi_1(x_1, \dots, x_m, Y_1, \dots, Y_m) \right),$$

όπου $\varphi_1(x_1, \dots, x_m, Y_1, \dots, Y_m) = \bigwedge_{i=1}^m [Y_i(x_i) \wedge \forall x (Y_i(x) \rightarrow x = x_i)]$.

Στην ουσία οι δύο τύποι φ και φ' εκφράζουν την ίδια ιδιότητα, απλά ο φ την εκφράζει σαν ιδιότητα ενός στοιχείου c_i (με το οποίο αποτιμάται η μεταβλητή x_i) ενώ ο φ' την εκφράζει σαν ιδιότητα του μονοσυνόλου $\{c_i\}$ (που αποτελεί την τιμή της Y_i).

Δηλαδή για οποιαδήποτε δομή \mathcal{A} με σύμπαν A και για $\bar{B} = (B_1, \dots, B_l) \in (\text{Pow}(A))^l$, $\bar{C} = (C_1, \dots, C_m) \in (\text{Pow}(A))^m$ και $\bar{c} = (c_1, \dots, c_m) \in A^m$, ισχύει το παρακάτω :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi'(\bar{B}, \bar{C}) &\iff \text{Υπάρχουν } c_1, \dots, c_m \in A \text{ τέτοια ώστε} \\ &C_i = \{c_i\}, \text{ για } i = 1, \dots, m \text{ (δηλ. } \mathcal{A} \models \varphi_1(\bar{c}, \bar{C}) \text{)} \\ &\text{και } \mathcal{A} \models \varphi(\bar{B}, \bar{c}). \end{aligned}$$

²Με $\text{Pow}(A)$ συμβολίζεται το δυναμοσύνολο του συνόλου A .

Παράδειγμα 3.1. Έστω $\Gamma = \{w, b\}$ (το b (black) αντιστοιχεί στο μαύρο χρώμα και το w (white) στο άσπρο χρώμα), τότε $\tau_\Gamma = \{E, P_w, P_b\}$. Και έστω επίσης κάποιο Γ -δέντρο $T = (T, E^T, P_w^T, P_b^T)$. Θεωρούμε την ιδιότητα 'ο x έχει δύο παιδιά χρώματος w ' η οποία εκφράζεται στο λεξικό τ_Γ με τον πρωτοβάθμιο τύπο $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \exists y_1 \exists y_2 ((y_1 \neq y_2) \wedge E(x, y_1) \wedge E(x, y_2) \wedge P_w(y_1) \wedge P_w(y_2)).$$

Θεωρούμε τον τύπο $\varphi_1(x, Y) = Y(x) \wedge \forall y (Y(y) \rightarrow y = x)$. Ο τύπος $\varphi(x)$ μετατρέπεται στον τύπο $\varphi'(Y)$:

$$\varphi'(Y) = \exists x (\varphi(x) \wedge \varphi_1(x, Y)).$$

Οι τύποι $\varphi(x)$ και $\varphi'(Y)$ εκφράζουν την ίδια ιδιότητα, απλά ο $\varphi(x)$ την εκφράζει σαν ιδιότητα ενός στοιχείου $c \in T$ ενώ ο $\varphi'(Y)$ την εκφράζει σαν ιδιότητα του μονοσυνόλου $\{c\}$.

Παρατηρούμε ότι στο λεξικό $\tau_\Gamma^o = \{S_1, S_2, P_w, P_b\}$ η ίδια ιδιότητα εκφράζεται από τον τύπο:

$$\phi(x) = \exists y_1 \exists y_2 (S_1(x, y_1) \wedge S_2(x, y_2) \wedge P_w(y_1) \wedge P_w(y_2)),$$

ο οποίος μετατρέπεται με τον ίδιο τρόπο στον τύπο $\phi'(Y) = \exists x (\phi(x) \wedge \varphi_1(x, Y))$. \diamond

Αρχικό πρόβλημα (τροποποιημένη μορφή). Παρατηρούμε λοιπόν ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να ορίσουμε το αρχικό μας πρόβλημα ως εξής:

- Είσοδος: Γ -δέντρο T , MSO-τύπος $\varphi(X_1, \dots, X_k)$.
- Πρόβλημα: Υπολογισμός του $\text{sat_assign}(\varphi, T)$.

3.2 Σχέση MSO-λογικής και αυτομάτων για δέντρα: ανάγοντας το αρχικό πρόβλημα σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα αυτομάτων

Παρουσιάζουμε (Ενότητα 3.2.1) το θεώρημα των Doner [10], Thatcher & Wright [21]. Στη συνέχεια (Ενότητα 3.2.2) ορίζεται η έννοια της επέκτασης, η οποία είναι βασική τόσο για την αναγωγή σε πρόβλημα αυτομάτων όσο και για την ανάλυση του προβλήματος αυτού. Τέλος στην Ενότητα 3.2.3 βλέπουμε πώς το θεώρημα των Doner, Thatcher & Wright χρησιμοποιείται για να αποδείξουμε ότι μια συγκεκριμένη κλάση χρωματισμένων δέντρων είναι αναγνωρίσιμη. Στο πόρισμα αυτής της Ενότητας βασίζεται η αναγωγή του τροποποιημένου αρχικού προβλήματος σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα αυτομάτων.

3.2.1 Ισοδυναμία MSO λογικής σε δέντρα και αυτομάτων για δέντρα

Παρουσιάζουμε το θεώρημα που περιγράφει την ισοδυναμία MSO λογικής και αυτομάτων για την περίπτωση των χρωματισμένων δέντρων. Πριν από αυτό δίνουμε δύο βασικούς ορισμούς.

Μια κλάση χρωματισμένων δέντρων είναι *αναγνωρίσιμη (recognizable)*, εάν είναι η κλάση των χρωματισμένων δέντρων που γίνονται δεκτά από κάποιο αυτόματο δέντρου.

Επίσης, μια κλάση πεπερασμένων δομών \mathcal{C} είναι *ορίσιμη* σε κάποια λογική, εάν υπάρχει πρόταση φ της λογικής τέτοια ώστε $\mathcal{C} = \text{Mod}(\varphi)$, δηλαδή $\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \models \varphi\}$.

Η ισοδυναμία μεταξύ MSO-λογικής σε δομές που είναι δέντρα από τη μία και αυτόματα για δέντρα από την άλλη, περιγράφεται στο ακόλουθο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1 (DONER [10], THATCHER & WRIGHT [21]). *Μια κλάση χρωματισμένων δέντρων είναι αναγνωρίσιμη αν και μόνο αν είναι ορίσιμη στην MSO.*

Επιπρόσθετα, υπάρχει ένας αλγόριθμος ο οποίος μπορεί να κατασκευάσει το αυτόματο δέντρου που αντιστοιχεί σε μια δοθείσα MSO-πρόταση και αντίστροφα.

Σημειώνουμε ότι το μέγεθος του αυτόματου είναι υπερεκθετική συνάρτηση του μεγέθους της αντίστοιχης πρότασης (βλέπε Ενότητα 3.2.4 για περισσότερες λεπτομέρειες).

3.2.2 Επεκτάσεις των χρωματισμένων δέντρων

Θυμίζουμε ότι γενικά ένα χρωματισμένο δέντρο μπορεί να οριστεί από ένα ζεύγος $(tree, c)$, όπου $tree$ είναι το υποκείμενο δυαδικό δέντρο και c η συνάρτηση χρωματισμού. Θυμίζουμε επίσης ότι ανάλογα με το αν το υποκείμενο δέντρο είναι διατεταγμένο ή όχι, το $tree$ ορίζεται ως τριάδα (T, s_1, s_2) ή ως ζεύγος (T, s) αντίστοιχα.

Οι k -επεκτάσεις ενός Γ -δέντρου. Δεδομένου ενός Γ -δέντρου $\mathcal{T} = (tree, c)$ και δεδομένης μιας πλειάδας $\overline{B} = (B_1, \dots, B_k) \in (\text{Pow}(T))^k$, η \overline{B} -επέκταση του \mathcal{T} , που συμβολίζεται με $(\mathcal{T}; \overline{B})$, είναι ένα νέο Γ_k -δέντρο ($\Gamma_k = \Gamma \times \{0, 1\}^k$) που κωδικοποιεί την πλειάδα \overline{B} . Η κωδικοποίηση πραγματοποιείται στη συνάρτηση $c_{(B_1, \dots, B_k)}$ με την οποία επεκτείνουμε την συνάρτηση χρωματισμού του \mathcal{T} . Η συνάρτηση $c_{(B_1, \dots, B_k)} : T \rightarrow \{0, 1\}^k$ ορίζεται ως εξής: για κάθε $n \in T$, $c_{\overline{B}}(n) = c_{(B_1, \dots, B_k)}(n) = (c_{B_1}(n), \dots, c_{B_k}(n))$ όπου $c_{B_i}(n) = 1$ αν $n \in B_i$, για $i = 1, \dots, k$. Η \overline{B} -επέκταση $(\mathcal{T}; \overline{B})$ του $\mathcal{T} = (tree, c)$ είναι το Γ_k -δέντρο $(tree, c; c_{\overline{B}})$, όπου $c; c_{\overline{B}} : T \rightarrow \Gamma_k$, και ισχύει $c; c_{\overline{B}}(n) = (c(n), c_{B_1}(n), \dots, c_{B_k}(n))$. Η $c(n)$ συνιστώσα του χρώματος $c; c_{\overline{B}}(n)$ ενός κόμβου n της επέκτασης $(\mathcal{T}; \overline{B})$, ονομάζεται *χρώμα* του n : το $c_{\overline{B}}(n)$ ονομάζεται *επιπρόσθετο χρώμα* του κόμβου n . Η συνάρτηση $c_{\overline{B}}$ ονομάζεται *συνάρτηση επιπρόσθετου χρωματισμού* της $(\mathcal{T}; \overline{B})$.

Ονομάζουμε το σύνολο των επεκτάσεων $(\mathcal{T}; \overline{B})$, $\overline{B} \in (\text{Pow}(T))^k$, κλάση των (\mathcal{T}, k) -επεκτάσεων ή κλάση των k -επεκτάσεων του \mathcal{T} . Όταν το \mathcal{T} εννοείται από τα συμφραζόμενα θα αναφερόμαστε στο ίδιο σύνολο απλά ως k -επεκτάσεις. Επίσης για τον ίδιο λόγο συχνά αναφερόμαστε σε μια k -επέκταση απλά με τον όρο επέκταση.

Οι φ -επεκτάσεις. Δεδομένου ενός Γ -δέντρου \mathcal{T} και δεδομένου ενός τύπου $\varphi(X_1, \dots, X_k)$, ονομάζουμε φ -επέκταση του \mathcal{T} κάθε k -επέκταση $(\mathcal{T}; B_1, \dots, B_k)$ για την οποία η πλειάδα $(B_1, \dots, B_k) \in \text{sat_assign}(\varphi, \mathcal{T})$. Ονομάζουμε το σύνολο των φ -επεκτάσεων του \mathcal{T} , (\mathcal{T}, φ) -επεκτάσεις.

Παράδειγμα 3.2. Δεδομένου ενός Γ -δέντρου \mathcal{T} , $\Gamma = \{b, w\}$, με σύνολο κόμβων $T = \{n, n_1, n_2\}$ και συνάρτηση χρωματισμού $c = \{n \mapsto b, n_1 \mapsto w, n_2 \mapsto w\}$, κωδικοποιούμε την πλειάδα $\overline{B} = (\{n, n_1\}, \{n_1, n_2\}) \in (\text{Pow}(T))^2$ στη συνάρτηση επιπρόσθετου χρωματισμού $c_{\overline{B}} = \{n \mapsto (1, 0), n_1 \mapsto (1, 1), n_2 \mapsto (0, 1)\}$. Η επέκταση $(\mathcal{T}; \overline{B})$ είναι το Γ_2 -δέντρο $(tree, c; c_{\overline{B}}) = (tree, \{n \mapsto (b, 1, 0), n_1 \mapsto (w, 1, 1), n_2 \mapsto (w, 0, 1)\})$. \diamond

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.1. Η πλειάδα (B_1, \dots, B_k) που κωδικοποιείται από την επέκταση $(\mathcal{T}; B_1, \dots, B_k)$, υπολογίζεται ως εξής: $B_i = \{n \in T \mid c_{B_i} = 1\}$, $i = 1, \dots, k$. \square

3.2.3 Η κλάση $\mathcal{C}_{\Gamma, \varphi}$ των δέντρων που είναι φ -επεκτάσεις κάποιου Γ -δέντρου είναι αναγνωρίσιμη: το αυτόματο \mathfrak{A}_φ

Θεωρούμε έναν $\text{MSO}[\tau_\Gamma]$ -τύπο $\varphi(X_1, \dots, X_k)$. Θα δούμε στην ενότητα αυτή ότι είναι εφικτή η κατασκευή ενός Γ_k -αυτομάτου \mathfrak{A}_φ τέτοιου ώστε για κάθε Γ -δέντρο \mathcal{T} και $\bar{B} = (B_1, \dots, B_k) \in (\text{Pow}(T))^k$, να ισχύει: $\mathcal{T} \models \varphi(\bar{B})$ ανν το \mathfrak{A}_φ δέχεται την $(\mathcal{T}; \bar{B})$. Το παραπάνω αποτελεί άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.1 (Doner, Thatcher & Wright) της Πρότασης 3.1 σύμφωνα με την οποία η κλάση των Γ_k -δέντρων που είναι φ -επεκτάσεις κάποιου Γ -δέντρου είναι $\text{MSO}[\tau_{\Gamma_k}]$ -ορίσιμη.

Η κλάση των Γ_k -δέντρων που είναι φ -επεκτάσεις κάποιου Γ -δέντρου είναι $\text{MSO}[\tau_{\Gamma_k}]$ -ορίσιμη.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1. Δεδομένου ενός αλφάβητου Γ και δεδομένου ενός $\text{MSO}[\tau_\Gamma]$ -τύπου $\varphi(X_1, \dots, X_k)$, η κλάση των Γ_k -δέντρων που είναι φ -επεκτάσεις κάποιου Γ -δέντρου είναι ορίσιμη μέσω της $\text{MSO}[\tau_{\Gamma_k}]$ -πρότασης:

$$\varphi' = \exists X_1 \dots \exists X_k \exists (Y_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \varphi^{**}(X_1, \dots, X_k, (Y_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}),$$

όπου ο $\text{MSO}[\tau_{\Gamma_k}]$ -τύπος $\varphi^{**}(\bar{X}, (Y_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ προκύπτει από τον $\text{MSO}[\tau_\Gamma \cup \tau_{\Gamma_k}]$ -τύπο

$$\varphi^*(\bar{X}) = \varphi(\bar{X}) \wedge \forall t \left(\bigwedge_{(\gamma, \bar{\varepsilon}) \in \Gamma_k} (P_{(\gamma, \bar{\varepsilon})}(t) \longleftrightarrow P_\gamma(t) \wedge \bigwedge_{i: \varepsilon_i=1} X_i(t) \wedge \bigwedge_{i: \varepsilon_i=0} \neg X_i(t)) \right)$$

αντικαθιστώντας όλα τα σύμβολα σχέσης $P_\gamma \in \tau_\Gamma$, $\gamma \in \Gamma$, που εμφανίζονται σε αυτόν με νέες μοναδιαίες δευτεροβάθμιες μεταβλητές Y_γ , $\gamma \in \Gamma$.

Πρίν παρουσιάσουμε την απόδειξη, δίνουμε έναν ορισμό που θα μας χρειαστεί. Θεωρούμε μια τ -δομή $\mathcal{A} = (M, (R^A)_{R \in \tau})$ και θεωρούμε μια τ' -δομή $\mathcal{B} = (M, (R^B)_{R \in \tau'})$, για τις οποίες ισχύει: $R^A = R^B$ για κάθε $R \in (\tau \cap \tau')$. Όταν ισχύουν τα παραπάνω, ορίζουμε μια νέα $(\tau \cup \tau')$ -δομή $\mathcal{C} = (M, (R^C)_{R \in (\tau \cup \tau')})$, την οποία συμβολίζουμε με $(\mathcal{A}; \mathcal{B})$, ως εξής: $R^C = R^A = R^B$ για κάθε $R \in (\tau \cap \tau')$, $R^C = R^A$ για κάθε $R \in \tau \setminus (\tau \cap \tau')$ και $R^C = R^B$ για κάθε $R \in \tau' \setminus (\tau \cap \tau')$. Παρατηρούμε ότι $(\mathcal{A}; \mathcal{B})|_\tau = \mathcal{A}$ και $(\mathcal{A}; \mathcal{B})|_{\tau'} = \mathcal{B}$.

Για παράδειγμα, θεωρούμε μια τ_Γ -δομή $\mathcal{T} = (T, E^T, (P_\gamma^T)_{\gamma \in \Gamma})$ που ορίζει ένα μη διατεταγμένο Γ -δέντρο και μια τ_{Γ_k} -δομή $\mathcal{T}' = (T, E^{T'}, (P_{\gamma'}^{T'})_{\gamma' \in \Gamma_k})$ που ορίζει μια (T, k) -επέκταση. Παρατηρούμε ότι ορίζεται η $(\mathcal{T}; \mathcal{T}')$ και είναι η $(\tau_\Gamma \cup \tau_{\Gamma_k})$ -δομή $\mathcal{T}^* = (T, E^{T^*}, (P_\gamma^{T^*})_{\gamma \in \Gamma}, (P_{\gamma'}^{T^*})_{\gamma' \in \Gamma'})$ όπου $E^{T^*} = E^T = E^{T'}$, $P_\gamma^{T^*} = P_\gamma^T$ και $P_{\gamma'}^{T^*} = P_{\gamma'}^{T'}$ για $\gamma \in \Gamma$, $\gamma' \in \Gamma_k$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (ΠΡΟΤΑΣΗΣ 3.1). Δεδομένου ενός Γ -δέντρου \mathcal{T} , συμβολίζουμε με $\mathcal{C}_{\mathcal{T}, \varphi}$ τα Γ_k -δέντρα που αποτελούν φ -επεκτάσεις του \mathcal{T} . Παρατηρούμε ότι η κλάση $\mathcal{C}_{\Gamma, \varphi}$ των Γ_k -δέντρων που αποτελούν φ -επεκτάσεις κάποιου Γ -δέντρου ορίζεται από τη ένωση

$$\mathcal{C}_{\Gamma, \varphi} = \bigcup_{\mathcal{T} \text{ } \Gamma\text{-δέντρο}} \mathcal{C}_{\mathcal{T}, \varphi}.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι η $\mathcal{C}_{\Gamma, \varphi}$ είναι ορίσιμη μέσω της $\text{MSO}[\tau_{\Gamma_k}]$ -πρότασης φ' . Θεωρούμε ένα τυχαίο Γ -δέντρο, αρκεί να δείξουμε ότι μεταξύ των k -επεκτάσεων του T , η πρόταση φ' αληθεύει μόνο σε εκείνες τις k -επεκτάσεις που αποτελούν (T, φ) -επεκτάσεις.

Θεωρούμε την κλάση δομών $\mathcal{C}'_{T, k} = \{(T; T') \mid T' \text{ } k\text{-επέκταση του } T\}$. Αποδεικνύουμε αρχικά ότι η $\text{MSO}[\tau_{\Gamma} \cup \tau_{\Gamma_k}]$ -πρόταση $\exists X_1 \dots \exists X_k \varphi^*(\bar{X})$ αληθεύει μόνο στις δομές της $\mathcal{C}'_{T, k}$ που ανήκουν στη υποκλάση της $\mathcal{C}'_{T, \varphi} = \{(T; T') \mid T' \in \mathcal{C}_{T, \varphi}\}$ και σε καμία άλλη δομή της. Θεωρούμε μία πλειάδα $\bar{B} \in \text{sat_assign}(\varphi, T)$ και την αντίστοιχη φ -επέκταση $T' = (T; \bar{B})$. Ορίζουμε την $(\tau_{\Gamma} \cup \tau_{\Gamma_k})$ -δομή $\mathcal{T}_B^* = (T; T')$. Θα δείξουμε ότι η πλειάδα $\bar{B} \in \text{sat_assign}(\varphi^*, \mathcal{T}_B^*)$. Προφανώς $\bar{B} \in \text{sat_assign}(\varphi, \mathcal{T}_B^*)$, γιατί $\varphi(\bar{X}) \in \text{MSO}[\tau_{\Gamma}]$, $\mathcal{T}_B^*|_{\tau_{\Gamma}} = T$ (δηλαδή τα σύμβολα του τ_{Γ} ερμηνεύονται κατά τον ίδιο τρόπο στην \mathcal{T}_B^* και στην T) και από την υπόθεση έχουμε ότι $\bar{B} \in \text{sat_assign}(\varphi, T)$. Απομένει να δείξουμε ότι

$$\mathcal{T}_B^* \models \forall t \left(\bigwedge_{(\gamma, \bar{\epsilon}) \in \Gamma_k} (P_{(\gamma, \bar{\epsilon})}(t) \longleftrightarrow P_{\gamma}(t) \wedge \bigwedge_{i: \epsilon_i=1} B_i(t) \wedge \bigwedge_{i: \epsilon_i=0} \neg B_i(t)) \right).$$

Αρκεί ισοδύναμα να δείξουμε ότι για κάθε στοιχείο $t \in T$ και για όλα τα $(\gamma, \bar{\epsilon}) \in \Gamma_k$ ισχύει

$$\mathcal{T}_B^* \models P_{(\gamma, \bar{\epsilon})}(t) \text{ ανν } T \models P_{\gamma}(t) \wedge \bigwedge_{i: \epsilon_i=1} B_i(t) \wedge \bigwedge_{i: \epsilon_i=0} \neg B_i(t).$$

Η ισοδύναμα να δείξουμε ότι για κάθε στοιχείο $t \in T$ και για όλα τα $(\gamma, \bar{\epsilon}) \in \Gamma_k$ ισχύει

$$t \in P_{(\gamma, (\epsilon_1, \dots, \epsilon_k))}^{T'} \text{ ανν } t \in P_{\gamma}^T \text{ και } t \in B_i \text{ για κάθε } i \text{ τ.ω. } \epsilon_i = 1 \text{ και } t \notin B_j \text{ για κάθε } j \text{ τ.ω. } \epsilon_j = 0.$$

Δηλαδή $P_{(\gamma, (\epsilon_1, \dots, \epsilon_k))}^{T'}$ ανν $t \in P_{\gamma}^T$ και $t \in B_i$ ανν $\epsilon_i = 1$. Η παραπάνω ισοδυναμία ισχύει από τον ορισμό της επέκτασης T' . Επιπλέον η \bar{B} είναι η μοναδική ανάθεση που ικανοποιεί τον $\varphi^*(\bar{X})$ στην \mathcal{T}_B^* .

Στη συνέχεια, θεωρούμε νέες μοναδιαίες δευτεροβάθμιες μεταβλητές Y_{γ} , $\gamma \in \Gamma$. Θεωρούμε την $\text{MSO}[\tau_{\Gamma_k}]$ πρόταση $\varphi' = \exists X_1 \dots \exists X_k \exists (Y_{\gamma})_{\gamma \in \Gamma} \varphi^{**}(\bar{X}, (Y_{\gamma})_{\gamma \in \Gamma})$, όπου ο $\varphi^{**}(\bar{X}, (Y_{\gamma})_{\gamma \in \Gamma})$ είναι ο τύπος που προκύπτει από τον $\varphi^*(\bar{X})$ αντικαθιστώντας όλα τα σύμβολα σχέσης $P_{\gamma} \in \tau_{\Gamma}$ που εμφανίζονται σε αυτόν με τις νέες μεταβλητές Y_{γ} , $\gamma \in \Gamma$.

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αποδεικνύοντας ότι η μεταξύ των δομών της $\mathcal{C}'_{T, k}$ η πρόταση $\exists X_1 \dots \exists X_k \varphi^*(\bar{X})$ αληθεύει μόνο στις δομές της κλάσης $\mathcal{C}'_{T, \varphi}$ αν και μόνο αν μεταξύ των δομών της $\mathcal{C}'_{T, k}|_{\tau_{\Gamma_k}} = \mathcal{C}_{T, k}$ η $\text{MSO}[\tau_{\Gamma_k}]$ -πρόταση φ' αληθεύει μόνο στις δομές της κλάσης $\mathcal{C}'_{T, \varphi}|_{\tau_{\Gamma_k}} = \mathcal{C}_{T, \varphi}$. Πράγματι, θεωρούμε ότι $(T; T') \in \mathcal{C}'_{T, \varphi}$ ανν $(T; T') \models \exists X_1 \dots \exists X_k \varphi^*(\bar{X})$. Θα δείξουμε τότε ότι $T' \in \mathcal{C}_{T, \varphi}$ ανν $T' \models \varphi'$. Αρκεί να δείξουμε ότι $(T; T') \models \exists X_1 \dots \exists X_k \varphi^*(\bar{X})$ ανν $T' \models \varphi'$. Αν $(T; T') \models \exists X_1 \dots \exists X_k \varphi^*(\bar{X})$, τότε $(T; T') \models \varphi'$ και τότε $T' \models \varphi'$, αφού $\varphi' \in \text{MSO}[\tau_{\Gamma_k}]$ και $(T; T')|_{\tau_{\Gamma_k}} = T'$. Ανάλογα αποδεικνύεται η αντίθετη κατεύθυνση παρατηρώντας ότι η μοναδική ανάθεση που ικανοποιεί τον $\varphi^{**}(\bar{X}, (Y_{\gamma})_{\gamma \in \Gamma})$ στη δομή T' είναι εκείνη για την οποία $Y_{\gamma} = P_{\gamma}^T$, $\gamma \in \Gamma$. ♣

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.2. Η απόδειξη είναι εντελώς ίδια όταν το λεξικό μας είναι το τ_Γ^o και το $\tau_{\Gamma_k}^o$ αντίστοιχα. \square

Παράδειγμα 3.3. Στο παράδειγμα 3.1 είχαμε ορίσει τον τύπο $\varphi(X) \in \text{MSO}[\tau_\Gamma]$, $\Gamma = \{w, b\}$, ως εξής:

$$\varphi(X) = \exists x(X(x) \wedge \forall y(X(y) \rightarrow y = x) \wedge \psi(x)),$$

όπου $\psi(x) = \exists y_1 \exists y_2((y_1 \neq y_2) \wedge E(x, y_1) \wedge E(x, y_2) \wedge P_w(y_1) \wedge P_w(y_2))$.

Η $\text{MSO}[\tau_{\Gamma_1}]$ -πρόταση φ' , $\tau_{\Gamma_1} = \{E, P_{(w,0)}, P_{(w,1)}, P_{(b,0)}, P_{(b,1)}\}$, που ορίζει την κλάση των φ -επεκτάσεων ενός Γ -δέντρου είναι:

$$\begin{aligned} \varphi' = & \exists X \exists Y_b \exists Y_w [(\exists x(X(x) \wedge \forall y(X(y) \rightarrow y = x) \wedge (\exists y_1 \exists y_2((y_1 \neq y_2) \wedge \\ & E(x, y_1) \wedge E(x, y_2) \wedge Y_w(y_1) \wedge Y_w(y_2)))))) \wedge \\ & \forall t((P_{(b,0)}(t) \longleftrightarrow Y_b(t) \wedge \neg X(t)) \wedge (P_{(b,1)}(t) \longleftrightarrow Y_b(t) \wedge X(t)) \wedge \\ & (P_{(w,0)}(t) \longleftrightarrow Y_w(t) \wedge \neg X(t)) \wedge (P_{(w,1)}(t) \longleftrightarrow Y_w(t) \wedge X(t))]. \end{aligned}$$

\diamond

Η κλάση των Γ_k -δέντρων που είναι φ -επεκτάσεις κάποιου Γ -δέντρου είναι αναγνωρίσιμη: το αυτόματο \mathfrak{A}_φ . Όπως ήδη αναφέραμε, το παρακάτω Πόρισμα αποτελεί άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.1 (Doner, Thatcher & Wright) και της Πρότασης 3.1.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.1 (DONER, THATCHER & WRIGHT). Δεδομένου ενός αλφαβήτου Γ και δεδομένου ενός $\text{MSO}[\tau_\Gamma]$ -τύπου $\varphi(X_1, \dots, X_k)$, είναι εφικτή η κατασκευή ενός Γ_k -αυτομά- του \mathfrak{A}_φ τέτοιου ώστε για κάθε Γ -δέντρο T και $\bar{B} = (B_1, \dots, B_k) \in (\text{Pow}(T))^k$, να ισχύει:

$$T \models \varphi(\bar{B}) \text{ ανν το } \mathfrak{A}_\varphi \text{ δέχεται την } (T; \bar{B}).$$

3.2.4 Η κατασκευή του αυτομάτου \mathfrak{A}_φ

Είδαμε στην Ενότητα 3.1 πώς ένας $\text{MSO}[\tau_\Gamma^o]$ -τύπος $\varphi(X_1, \dots, X_l, x_1, \dots, x_m)$ με ελεύθερες πρωτοβάθμιες μεταβλητές μεταφράζεται σε έναν $\text{MSO}[\tau_\Gamma^o]$ -τύπο $\varphi'(X_1, \dots, X_l, Y_1, \dots, Y_m)$ χωρίς ελεύθερες πρωτοβάθμιες μεταβλητές. Θυμίζουμε ότι τρία είναι τα βασικά σημεία αυτής της μετάφρασης: i) η δέσμευση των ελεύθερων πρωτοβάθμιων μεταβλητών x_1, \dots, x_m , ii) η θεώρηση για κάθε x_i μιας νέας μοναδιαίας δευτεροβάθμιας μεταβλητή Y_i που αντιστοιχεί σε μονοσύνολο και iii) η 'ταύτιση' κάθε πρωτοβάθμιας μεταβλητής x_i με τη μοναδιαία δευτεροβάθμια μεταβλητή Y_i .

Μια διαφορετική προσέγγιση που βασίζεται στη ίδια ιδέα, δηλαδή στην 'μίμηση' των στοιχείων από μονοσύνολα, είναι η αντικάσταση όλων των πρωτοβάθμιων μεταβλητών που εμφανίζονται στον αρχικό τύπο από μοναδιαίες δευτεροβάθμιες μεταβλητές που αντιστοιχούν σε μονοσύνολα. Παρουσιάζουμε στη συνέχεια αυτή την προσέγγιση, επειδή οδηγεί σε έναν γενικό τρόπο κατασκευής των αντίστοιχων αυτομάτων, και δίνουμε τον γενικό τρόπο κατασκευής του Γ_k -αυτομάτου \mathfrak{A}_φ , όπου ο $\text{MSO}[\tau_\Gamma^o]$ -τύπος $\varphi(X_1, \dots, X_k)$ δεν έχει καθόλου πρωτοβάθμιες μεταβλητές.

Αντικατάσταση όλων των πρωτοβάθμιων μεταβλητών του αρχικού τύπου: ορισμός νέων ατομικών τύπων. Θεωρούμε ότι ο αρχικός μας τύπος είναι $\varphi(X_1, \dots, X_l, x_1, \dots, x_m)$ και ότι οι πρωτοβάθμιες μεταβλητές του απαριθμούνται: x_1, \dots, x_m . Δύο είναι τα βασικά σημεία μιας τέτοιας μετάφρασης: i) η θεώρηση για κάθε πρωτοβάθμια μεταβλητή x_i μιας νέας μοναδιαίας δευτεροβάθμιας μεταβλητή Y_i που αντιστοιχεί σε μονοσύνολο και ii) η αντικατάσταση κάθε πρωτοβάθμιας μεταβλητής x_i με τη μοναδιαία δευτεροβάθμια μεταβλητή Y_i και η κατάλληλη αντικατάσταση των ατομικών τύπων του αρχικού τύπου από νέους ατομικούς τύπους.

Θυμίζουμε ότι οι ατομικοί τύποι της $\text{MSO}[\tau_1^0]$ είναι:

$$Y(x), S_1(x, y), S_2(x, y), (P_\gamma(x))_{\gamma \in \Gamma}, x = y.$$

Η ανάγκη για τον ορισμό νέων ατομικών τύπων, προκύπτει από το γεγονός ότι η αντικατάσταση όλων των πρωτοβάθμιων μεταβλητών από δευτεροβάθμιες στον αρχικό τύπο μας δίνει τύπους της μορφής $Y(X), S_1(X, Y), S_2(X, Y), P_\gamma(X), X = Y$, οι οποίοι δεν είναι ορισμένοι στην $\text{MSO}[\tau_1^0]$. Για το λόγο αυτό θεωρούμε τους εξής νέους ατομικούς τύπους:

$$Y^*(X), S_1^*(X, Y), S_2^*(X, Y), (P_\gamma^*(X))_{\gamma \in \Gamma}, \text{Equal}^*(X, Y),$$

οι οποίοι εκφράζουν ότι και οι αντίστοιχοι ατομικοί της $\text{MSO}[\tau_1^0]$ αλλά ως ιδιότητα μονοσυνόλου. Δηλαδή η σημασία του $Y^*(X)$ είναι ότι 'το X είναι μονοσύνολο $\{x\}$ τ. ω. $Y(x)$ ', η σημασία των $S_i^*(X, Y)$ είναι ότι 'τα X, Y είναι μονοσύνολα $\{x\}, \{y\}$ με $S_i(x, y)$ ', $i = 1, 2$ και ανάλογα για τα υπόλοιπα³. Θα συμβολίζουμε το λογικό σύστημα με αυτούς τους ατομικούς τύπους MSO^* .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.3. Ανάλογο λογικό σύστημα είναι η MSO_0 , που ορίζεται αναλυτικά στο Παράρτημα Α. Η αντιστοιχία μεταξύ των ατομικών τύπων της MSO_0 και αυτών της MSO^* είναι:

$$\begin{aligned} Y^*(X) &\equiv \text{Sing}(X) \wedge X \subseteq Y. \\ S_i^*(X, Y) &\equiv \text{Suc}_i(X, Y). \\ P_\gamma^*(X) &\equiv \text{Sing}(X) \wedge X \subseteq P_\gamma. \\ \text{Equal}^*(X, Y) &\equiv \text{Sing}(X) \wedge \text{Sing}(Y) \wedge X \subseteq Y. \end{aligned}$$

□

Τα αυτόματα $\mathfrak{A}_{Y^*}, \mathfrak{A}_{S_i^*}, \mathfrak{A}_{P_\gamma^*}, \mathfrak{A}_{\text{Equal}^*}$: κατασκευή του \mathfrak{A}_φ . Δεδομένου ενός $\text{MSO}^*[\tau_1^0]$ -τύπου $\varphi(X_1, \dots, X_k)$, η κατασκευή του αυτόματου \mathfrak{A}_φ γίνεται αναδρομικά από τα αυτόματα που αναγνωρίζουν τους υποτύπους του τύπου φ .

³Είναι δηλαδή εκφραστικά ισοδύναμοι με τους εξής $\text{MSO}[\tau_1^0]$ -τύπους:

$$\begin{aligned} Y^*(X) &\equiv \exists x(X(x) \wedge \text{Singl}(X, x) \wedge Y(x)). \\ S_i^*(X, Y) &\equiv \exists x \exists y[(X(x) \wedge \text{Singl}(X, x) \wedge Y(y) \wedge \text{Singl}(Y, y)) \wedge S_i(x, y)]. \\ P_\gamma^*(X) &\equiv \exists x(X(x) \wedge \text{Singl}(X, x) \wedge P_\gamma(x)). \\ \text{Equal}^*(X, Y) &\equiv \exists x \exists y(X(x) \wedge \text{Singl}(X, x) \wedge Y(y) \wedge \text{Singl}(Y, y) \wedge x = y). \end{aligned}$$

Είναι $\text{Singl}(X, x) = \forall z(X(z) \rightarrow z = x)$.

Θεωρούμε τον ατομικό τύπο $P_\alpha^*(X)$, $\alpha \in \Gamma$. Το αυτόματο $\mathfrak{A}_{P_\alpha^*}$ αναγνωρίζει τα Γ_1 -δέντρα που αποτελούν P_α^* -επεκτάσεις κάποιου Γ -δέντρου. Δηλαδή αναγνωρίζει $(T; B)$ επεκτάσεις, όπου T κάποιο Γ -δέντρο και B μονοσύνολο που περιέχει έναν α κόμβο του T . Θεωρούμε ότι το Γ_1 -αυτόματο $\mathfrak{A}_{P_\alpha^*} = (Q, \Delta, \delta, F)$ και $Q = \{q_0, q_a, q_f\}$, $F = \{q_a\}$. Είναι $\Delta((a, 1)) = q_a$, $\Delta((\gamma, 0)) = q_0$, για κάθε $\gamma \in \Gamma$, και $\Delta((\gamma', 1)) = q_f$ για $\gamma' \in \Gamma \setminus \{a\}$. Επίσης $\delta(q_0, q_0, (a, 1)) = q_a$, $\delta(q_0, q_0, (\gamma', 1)) = q_f$ αν $\gamma' \in \Gamma \setminus \{a\}$, $\delta(q_0, q_0, (\gamma, 0)) = q_0$, $\delta(q_f, q, (\gamma, \epsilon)) = \delta(q, q_f, (\gamma, \epsilon)) = q_f$ όταν $\gamma \in \Gamma$, $q \in Q$, $\epsilon \in \{0, 1\}$. Επιπλέον $\delta(q_a, q_0, (\gamma, 0)) = \delta(q_0, q_a, (\gamma, 0)) = q_a$, $\delta(q_a, q_0, (\gamma, 1)) = \delta(q_0, q_a, (\gamma, 1)) = q_f$ και $\delta(q_a, q_a, (\gamma, \epsilon)) = q_f$ για κάθε $\gamma \in \Gamma$, $\epsilon \in \{0, 1\}$. Οι αντίστοιχες μεταβάσεις δίνονται αναλυτικά στον Πίνακα 1⁴.

$\mathbf{q} = \delta(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, (\alpha, \epsilon))$			
\mathbf{q}	\mathbf{q}_1	\mathbf{q}_2	ϵ
q_0	—	—	0
q_a	—	—	1
q_0	q_0	q_0	0
q_a	q_0	q_0	1
q_f	q_a	q_a	*
q_a	q_a	q_0	0
q_f	q_a	q_0	1
q_a	q_0	q_a	0
q_f	q_0	q_a	1
q_f	q_f	*	*
q_f	*	q_f	*

$\mathbf{q} = \delta(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, (\gamma, \epsilon))$			
\mathbf{q}	\mathbf{q}_1	\mathbf{q}_2	ϵ
q_0	—	—	0
q_f	—	—	1
q_0	q_0	q_0	0
q_f	q_0	q_0	1
q_f	q_a	q_a	*
q_a	q_a	q_0	0
q_f	q_a	q_0	1
q_a	q_0	q_a	0
q_f	q_0	q_a	1
q_f	q_f	*	*
q_f	*	q_f	*

Πίνακας 1: Οι α -, γ -μεταβάσεις, $\gamma \neq \alpha$, του $\mathfrak{A}_{P_\alpha^*}$, $F^{P_\alpha^*} = \{q_a\}$.

Θεωρούμε τον $S_1^*(X, Y)$. Για κάθε Γ -δέντρο T , το Γ_2 -αυτόματο $\mathfrak{A}_{S_1^*}$ αναγνωρίζει τις (B_1, B_2) -επεκτάσεις του T , όπου τα B_1, B_2 είναι μονοσύνολα από κόμβους του T τέτοια ώστε αν $B_1 = \{b_1\}$ και $B_2 = \{b_2\}$, να είναι $T \models S_1(b_1, b_2)$ (δηλαδή στο T το αριστερό παιδί του b_1 είναι το b_2). Θεωρούμε ότι $\mathfrak{A}_{S_1^*} = (Q, \Delta, \delta, F)$, $Q = \{s_a, s_f, s_0, s_1\}$, $F = \{s_a\}$. Οι αντίστοιχες μεταβάσεις δίνονται αναλυτικά στον Πίνακα 2.

Για τον τύπο $Y^*(X)$, το αυτόματο \mathfrak{A}_{Y^*} είναι ένα Γ_2 -αυτόματο που αναγνωρίζει $(T; (B_1, B_2))$ επεκτάσεις, όπου το T είναι Γ -δέντρο, $B_1 = \{n\}$, $n \in T$ και $B_2 \subseteq T$ τέτοιο ώστε $n \in B_2$. Τέλος, το $\mathfrak{A}_{\text{Equal}^*}$ είναι ένα Γ_2 -αυτόματο που αναγνωρίζει τις $(T; (B_1, B_2))$ επεκτάσεις, όπου το T είναι Γ -δέντρο και $B_1 = B_2 = \{n\}$, $n \in T$. Ο ορισμός των αντίστοιχων μεταβάσεων γίνεται εύκολα.

Κάθε τύπος είναι εκφραστικά ισοδύναμος με έναν νέο τύπο στον οποίο εμφανίζονται μόνο τα \neg, \wedge, \exists . Δηλαδή, δεδομένων των αυτομάτων για τους ατομικούς τύπους αρκεί να εξετάσουμε ακριβώς αυτές τις περιπτώσεις. Έτσι, θεωρούμε τον τύπο $\psi(X_1, \dots, X_k)$ και θεωρούμε ότι το αντίστοιχο Γ_k αυτόματο είναι $\mathfrak{A}_\psi = (Q, \Delta, \delta, F)$.

⁴Χρησιμοποιούμε το χαρακτήρα * για να δηλώσουμε ότι το αντίστοιχο όρισμα μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο πεδίο ορισμού του. Οι δύο πρώτες γραμμές κάθε πίνακα αντιστοιχούν στις μεταβάσεις της Δ . Οι 'γκρι' γραμμές αντιστοιχούν στις μεταβάσεις που οδηγούν σε αποτυχία αποδοχής (δηλαδή στις μη χρήσιμες μεταβάσεις του αυτομάτου που ορίζονται στην Ενότητα 3.5.1).

$\mathbf{q} = \delta(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, (\gamma, \epsilon_1, \epsilon_2))$				
\mathbf{q}	\mathbf{q}_1	\mathbf{q}_2	ϵ_1	ϵ_2
s_0	—	—	0	0
s_1	—	—	0	1
s_f	—	—	1	*
s_0	s_0	s_0	0	0
s_1	s_0	s_0	0	1
s_f	s_0	s_0	1	*
s_f	s_0	s_1	*	*
s_f	s_1	s_0	0	*
s_a	s_1	s_0	1	0
s_f	s_1	s_0	1	1
s_f	s_1	s_1	*	*

\mathbf{q}	\mathbf{q}_1	\mathbf{q}_2	ϵ_1	ϵ_2
s_a	s_a	s_0	0	0
s_a	s_0	s_a	0	0
s_f	s_a	s_0	0	1
s_f	s_a	s_0	1	*
s_f	s_0	s_a	0	1
s_f	s_0	s_a	1	*
s_f	s_a	s_a	*	*
s_f	s_f	*	*	*
s_f	*	s_f	*	*

 Πίνακας 2: Οι γ -μεταβάσεις, $\gamma \in \Gamma$, του $\mathfrak{A}_{S_1^*}$, $F^{S_1^*} = \{s_a\}$.

Για τον τύπο $\varphi(\bar{X}) = \neg\psi(\bar{X})$, το αντίστοιχο αυτόματο είναι $\mathfrak{A}_\varphi = (Q, \Delta, \delta, Q \setminus F)$. Για το \wedge , θεωρούμε τους τύπους $\phi_1(Y_1, \dots, Y_l)$ και $\phi_2(Z_1, \dots, Z_m)$. Θεωρούμε ότι τα αντίστοιχα αυτόματα είναι $\mathfrak{A}_{\phi_1} = (Q_1, \Delta_1, \delta_1, F_1)$ και $\mathfrak{A}_{\phi_2} = (Q_2, \Delta_2, \delta_2, F_2)$. Αν $\varphi(X_1, \dots, X_k) = \phi_1(Y_1, \dots, Y_l) \wedge \phi_2(Z_1, \dots, Z_m)$, κατασκευάζουμε το Γ_k -αυτόματο $\mathfrak{A}_{\phi_1 \wedge \phi_2} = (Q, \Delta, \delta, F)$ ως εξής: $Q = Q_1 \times Q_2$, $F = F_1 \times F_2$. Είναι $\Delta((\gamma, \epsilon_1, \dots, \epsilon_k)) = (\Delta_1((\gamma, a_1, \dots, a_l)), \Delta_2((\gamma, e_1, \dots, e_m)))$, όπου θεωρούμε ότι αν $\{Y_1, \dots, Y_l\} \cap \{Z_1, \dots, Z_m\} = \emptyset$ και αν $(X_1, \dots, X_k) = (Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_m)$ είναι $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) = (a_1, \dots, a_l, e_1, \dots, e_m)$. Αν $\{Y_1, \dots, Y_l\} \cap \{Z_1, \dots, Z_m\} \neq \emptyset$ θεωρούμε αντίστοιχες συνθήκες⁵. Ανάλογα για τη δ είναι $\delta((q_{11}, q_{21}), (q_{12}, q_{22}), (\gamma, \bar{\epsilon})) = (\delta_1(q_{11}, q_{12}, (\gamma, \bar{a})), \delta_2(q_{21}, q_{22}, (\gamma, \bar{e})))$.

Τέλος θεωρούμε τον τύπο $\psi(X_1, \dots, X_{k+1})$ και το αντίστοιχο Γ_{k+1} αυτόματο $\mathfrak{A}_\psi = (Q, \Delta, \delta, F)$. Θεωρούμε τον τύπο $\varphi(X_1, \dots, X_k) = \exists X_{k+1} \psi(X_1, \dots, X_{k+1})$ και θεωρούμε ότι το Γ_k αυτόματο $\mathfrak{A}_\varphi = (Q', \Delta', \delta', F')$. Η κατασκευή του \mathfrak{A}_φ από το \mathfrak{A}_ψ είναι ανάλογη της μετατροπής ενός μη ντετερμινιστικού αυτομάτου σε ένα ισοδύναμο ντετερμινιστικό αυτόματο. Δηλαδή είναι $Q' = \text{Pow}(Q)$, $\Delta'((\gamma, e_1, \dots, e_k)) = \{\Delta((\gamma, e_1, \dots, e_{k+1})) \mid e_{k+1} \in \{0, 1\}\}$, $\delta'(Q_1, Q_2, (\gamma, e_1, \dots, e_k)) = \{\delta(q_1, q_2, (\gamma, e_1, \dots, e_{k+1})) \mid q_1 \in Q_1, q_2 \in Q_2, e_{k+1} \in \{0, 1\}\}$ και $F' = \{Q'' \in Q' \mid F \cap Q'' \neq \emptyset\}$ ⁶.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.4. Η παραπάνω κατασκευή αποτελεί απόδειξη της μιας κατεύθυνσης του θεωρήματος των Doner, Thatcher & Wright (Θεώρημα 3.1). Δηλαδή αποτελεί μια απευθείας απόδειξη του αντίστροφου Πορίσματος 3.1. \square

⁵Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να θεωρήσουμε ότι $|\{Y_1, \dots, Y_l\} \cap \{Z_1, \dots, Z_m\}| = n$ και ότι $(X_1, \dots, X_n) = (Y_1, \dots, Y_n) = (Z_1, \dots, Z_n)$. Αν επιπλέον $(X_{n+1}, \dots, X_k) = (Y_{n+1}, \dots, Y_l, Z_{n+1}, \dots, Z_m)$, θα πρέπει $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = (a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n)$ και $(\epsilon_{n+1}, \dots, \epsilon_k) = (a_{n+1}, \dots, a_l, e_{n+1}, \dots, e_m)$.

⁶Παρατηρούμε ότι αν $\psi(X_1, \dots, X_k)$ και $\mathfrak{A}_\psi = (Q, \Delta, \delta, F)$, το αυτόματο που αντιστοιχεί στον τύπο $\varphi(\bar{X}) = \exists \bar{X} \psi(\bar{X})$ είναι $\mathfrak{A}_\varphi = (Q', \Delta', \delta', F')$: $Q' = \text{Pow}(Q)$, $\Delta'(\gamma) = \{\Delta(\gamma) \mid \bar{\epsilon} \in \{0, 1\}^k\}$, $\delta'(Q_1, Q_2, \gamma) = \{\delta(q_1, q_2, (\gamma, \bar{\epsilon})) \mid q_1 \in Q_1, q_2 \in Q_2, \bar{\epsilon} \in \{0, 1\}^k\}$, $F' = \{Q'' \in Q' \mid F \cap Q'' \neq \emptyset\}$.

Πολυπλοκότητα της κατασκευής. Θεωρούμε δεδομένα τα αυτόματα για τους ατομικούς τύπους και εξετάζουμε την αποτελεσματικότητα των μετασχηματισμών κατά τη μετάφραση ενός MSO-τύπου στο αντίστοιχο αυτόματο. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι τα αυτόματα \mathcal{A}_1 και \mathcal{A}_2 για δύο τύπους ϕ_1 και ϕ_2 αντίστοιχα, έχουν το πολύ n καταστάσεις. Τότε, σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση, το αυτόματο που αναγνωρίζει τον τύπο $\phi_1 \wedge \phi_2$ θα έχει το πολύ n^2 καταστάσεις (κατασκευή του καρτεσιανού γινομένου των αντίστοιχων χώρων καταστάσεων). Ανάλογα το αυτόματο για την άρνηση των δεδομένων τύπων θα έχει το πολύ n καταστάσεις, ενώ το αντίστοιχο για την υπαρξιακή ποσοδείκηση θα έχει το πολύ 2^n καταστάσεις. Έτσι στη γενική περίπτωση, αν c είναι ο αριθμός των λογικών συνδέσμων ενός τύπου, τότε ο αριθμός των καταστάσεων του αντίστοιχου αυτομάτου φράσσεται από την

$$2^{2^{\dots^{2^n}}}\}^c.$$

Ο κύριος παράγοντας που συντελεί σε αυτό το μεγάλο μέγεθος είναι ο αριθμός των εναλλαγών ποσοδεικτών στον τύπο· υπάρχει μια εκθετική επανάληψη για κάθε εναλλαγή ποσοδείκτη.

3.2.5 Παραδείγματα αυτομάτων \mathfrak{A}_φ

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια τρία παραδείγματα, δίνοντας τα αυτόματα που αναγνωρίζουν τις αντίστοιχες επεκτάσεις. Η κατασκευή των αυτομάτων γίνεται ‘διασθητικά’· δηλαδή δεν ακολουθείται ο γενικός τρόπος κατασκευής που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα.

Παράδειγμα 3.4. Θα κατασκευάσουμε ένα Γ_1 -αυτόματο \mathfrak{A}_φ που αναγνωρίζει τις φ -επεκτάσεις ενός μη διατεταγμένου Γ -δέντρου, όπου $\varphi(X) \in \text{MSO}[\Gamma]$ ο τύπος του παραδείγματος 3.1 (σελ. 12). Θυμίζουμε ότι $\Gamma = \{w, b\}$ και ότι ο τύπος $\varphi(X)$ εκφράζει την ύπαρξη ενός μονοσυνόλου X με στοιχείο μια κορυφή x που έχει δύο παιδιά χρώματος w . Δηλαδή οι αναθέσεις που ικανοποιούν τον $\varphi(X)$ είναι μονοσύνολα $\{n\}$, όπου ο $n \in T$ είναι εσωτερικός κόμβος με παιδιά χρώματος w . Άρα οι φ -επεκτάσεις ενός Γ -δέντρου είναι τα Γ_1 -δέντρα, στα οποία όλοι οι κόμβοι εκτός από έναν εσωτερικό έχουν επιπρόσθετο χρώμα 0. Επιπλέον ο μοναδικός εσωτερικός κόμβος με επιπρόσθετο χρώμα 1 έχει δύο παιδιά με χρώμα w .

Θεωρούμε ότι το αυτόματο $\mathfrak{A}_\varphi = (Q, \Delta, \delta, F)$ και θεωρούμε ότι $Q = \{q_f, q_w, q_b, q_a\}$. Η σημασία των καταστάσεων είναι η εξής: θεωρούμε ότι οι καταστάσεις q_a, q_f αποδίδονται σε έναν κόμβο n , από την αντίστοιχη εκτέλεση του \mathfrak{A}_φ , όταν το υποδέντρο T_n αποτελεί τμήμα δεκτής ή μη δεκτής επέκτασης αντίστοιχα. Οι καταστάσεις q_w, q_b δηλώνουν απλά ότι η κορυφή έχει αρχικό χρώμα w, b αντίστοιχα. Θεωρούμε ότι $F = \{q_a\}$.

Θυμίζουμε ότι μέσω της συνάρτησης εκκίνησης Δ η εκτέλεση ενός αυτομάτου αποδίδει κατάσταση στα φύλλα. Όπως επισημάναμε παραπάνω, τα φύλλα των φ -επεκτάσεων έχουν επιπρόσθετο χρώμα 0. Άρα η τιμή της Δ για τα φύλλα με επιπρόσθετο χρώμα 1, θα πρέπει να είναι q_f , δηλαδή $\Delta(\gamma, 1) = q_f, \gamma \in \{w, b\}$. Στην αντίθετη περίπτωση (επιπρόσθετο χρώμα 0), η τιμή της Δ θα είναι q_w ή q_b ανάλογα με το αν το χρώμα του φύλλου είναι w ή b αντίστοιχα. Δηλαδή τελικά $\Delta = \{(w, 0) \mapsto q_w, (w, 1) \mapsto q_f, (b, 0) \mapsto$

$q_b, (b, 1) \mapsto q_f$.

Θυμίζουμε επίσης ότι η εκτέλεση ενός αυτομάτου αποδίδει κατάσταση σε κάθε εσωτερικό κόμβο n μέσω της συνάρτησης μετάβασης δ . Έτσι η τιμή της εκτέλεσης του \mathfrak{A}_φ σε έναν εσωτερικό κόμβο n εξαρτάται από τις καταστάσεις q, q' που έχουν τα παιδιά του n και το χρώμα $(c(n), \epsilon)$ του n , όπου $q, q' \in Q$ και $\epsilon \in \{0, 1\}$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις: όταν κάποιο από τα παιδιά ενός εσωτερικού κόμβου n βρίσκεται σε κατάσταση q_f , λόγω της σημασίας της κατάστασης q_f , έχουμε μεταφορά της στον n . Άρα θα είναι $\delta(\{q_f, q\}, (\gamma, \epsilon)) = q_f$, για κάθε $q \in Q$, $\gamma \in \{w, b\}$ και $\epsilon \in \{0, 1\}$. Όταν κανένα από τα παιδιά του n δεν είναι σε q_f , διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με το αν το επιπρόσθετο χρώμα του n είναι 1 ή 0. Παρατηρήσαμε παραπάνω ότι ο μοναδικός κόμβος μιας φ -επέκτασης που έχει επιπρόσθετο χρώμα 1 είναι κάποιος που έχει δύο παιδιά χρώματος w . Άρα κόμβοι με επιπρόσθετο χρώμα 1 που όμως δεν έχουν δύο παιδιά w δεν αποτελούν τμήμα κάποιας φ -επέκτασης (δηλαδή κάποιας \mathfrak{A}_φ -δεκτής επέκτασης). Συμβολίζουμε με q, q' τις καταστάσεις των παιδιών ενός κόμβου n . Τα παραπάνω μεταφράζονται ως εξής: όταν το επιπρόσθετο χρώμα του n είναι 1, η μοναδική περίπτωση που του αποδίδεται κατάσταση q_a είναι όταν $\{q, q'\} = q_w$, (δηλαδή $\delta(\{q_w\}, (\gamma, 1)) = q_a$, $\gamma \in \{w, b\}$). Στις υπόλοιπες περιπτώσεις, η κατάσταση που αποδίδεται στον n είναι προφανώς η q_f . Άρα $\delta(\{q, q'\}, (\gamma, 1)) = q_f$, όταν $\{q, q'\} \in ([Q \setminus \{q_f\}]^{\leq 2} \setminus \{q_w\})^7$, $\gamma \in \{w, b\}$. Απομένει να δούμε τι συμβαίνει όταν το επιπρόσθετο χρώμα του κόμβου n είναι 0, δηλαδή τότε έχουμε μεταφορά της κατάστασης q_a και τι συμβαίνει στις υπόλοιπες περιπτώσεις. Η q_a μεταβιβάζεται από τα παιδιά του n στον n , όταν μόνο ένα από τα παιδιά του n βρίσκεται στην q_a . Δηλαδή $\delta(\{q_a, q\}, (\gamma, 0)) = q_a$, όταν $q \in \{q_w, q_b\}$, $\gamma \in \{w, b\}$. Αυτό ισχύει γιατί η πρώτη φορά που αποδίδεται κατάσταση q_a σε έναν κόμβο είναι όταν ικανοποιεί τον δεδομένο τύπο $\varphi(X)$ με επιπρόσθετο χρώμα 1. Οι αναθέσεις όμως που ικανοποιούν τον $\varphi(X)$ είναι μονοσύνολα και έτσι κάθε φ -επέκταση θα πρέπει να κωδικοποιεί έναν μόνο κόμβο. Για τον ίδιο λόγο όταν και τα δύο παιδιά του n είναι σε κατάσταση q_a , στον n αποδίδεται q_f (δηλαδή $\delta(\{q_a\}, (\gamma, 0)) = q_f$, $\gamma \in \{w, b\}$). Στις υπόλοιπες περιπτώσεις, όταν δηλαδή $\{q, q'\} \in [\{q_w, q_b\}]^{\leq 2}$, είναι $\delta(\{q, q'\}, (\gamma, 0)) = q_\gamma$, $\gamma \in \{w, b\}$. Συνοψίζοντας όλες τις περιπτώσεις η δ ορίζεται αναλυτικά: $\delta = \{(\{q_f, q\}, (\gamma, \epsilon)) \mapsto q_f, (\{q_w\}, (\gamma, 1)) \mapsto q_a, (\{q_w, q_b\}, (\gamma, 1)) \mapsto q_f, (\{q_b\}, (\gamma, 1)) \mapsto q_f, (\{q', q_a\}, (\gamma, 1)) \mapsto q_f, (\{q_w, q_a\}, (\gamma, 0)) \mapsto q_a, (\{q_b, q_a\}, (\gamma, 0)) \mapsto q_a, (\{q_a\}, (\gamma, 0)) \mapsto q_f, (\{q_w\}, (\gamma, 0)) \mapsto q_\gamma, (\{q_w, q_b\}, (\gamma, 0)) \mapsto q_\gamma, (\{q_b\}, (\gamma, 0)) \mapsto q_\gamma\}$, όπου $q \in Q$, $q' \in Q \setminus \{q_f\}$, $\gamma \in \{w, b\}$ και $\epsilon \in \{0, 1\}$. \diamond

Παράδειγμα 3.5. Είδαμε στο Παράδειγμα 3.1 τον $\text{MSO}[\tau_{\Gamma}^{\circ}]$ -τύπο $\phi(X)$ που εκφράζει την ίδια ιδιότητα με τον $\text{MSO}[\tau_{\Gamma}]$ -τύπο $\varphi(X)$ (αλλά στο λεξικό τ_{Γ}°). Το αντίστοιχο αυτόματο διατεταγμένου Γ_1 -δέντρου $\mathfrak{A}_\phi = (Q', \Delta', \delta', F')$ προκύπτει πολύ φυσικά από το αυτόματο μη διατεταγμένου δέντρου $\mathfrak{A}_\varphi = (Q, \Delta, \delta, F)$. Πράγματι, $Q' = Q$, $F' = F$, $\Delta' = \Delta$ και $\delta'(q, q', (\gamma, \epsilon)) = \delta(\{q, q'\}, (\gamma, \epsilon))$. Παρατηρούμε ότι η δ' είναι συμμετρική. \diamond

Παράδειγμα 3.6. Θεωρούμε τον $\text{MSO}[\tau_{\Gamma}^{\circ}]$ τύπο $\psi(X)$ που εκφράζει την ύπαρξη ενός μονοσυνόλου X με στοιχείο μια κορυφή x της οποίας το αριστερό παιδί έχει χρώμα w . Δηλαδή οι αναθέσεις που ικανοποιούν τον $\psi(X)$ είναι μονοσύνολα $\{n\}$, όπου ο

⁷Θυμίζουμε ότι η διαφορά δύο συνόλων ορίζεται $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

$n \in T$ είναι εσωτερικός κόμβος με αριστερό παιδί χρώματος w . Θα κατασκευάσουμε ένα Γ_1 -αυτόματο \mathfrak{A}_ψ που αναγνωρίζει τις ψ -επεκτάσεις ενός διατεταγμένου Γ -δέντρου.

Θεωρούμε ότι το αυτόματο $\mathfrak{A}_\psi = (Q, \Delta, \delta, F)$ με $Q = \{q_f, q_w, q_b, q_a\}$, $F = \{q_a\}$. Εύκολα επαληθεύεται ότι $\Delta = \{(w, 0) \mapsto q_w, (w, 1) \mapsto q_f, (b, 0) \mapsto q_b, (b, 1) \mapsto q_f\}$. Επίσης με ανάλυση ανάλογη του προηγούμενου παραδείγματος: $\delta(q_f, q, (\gamma, \epsilon)) = \delta(q, q_f, (\gamma, \epsilon)) = q_f$, για κάθε $q \in Q$, $\gamma \in \{w, b\}$ και $\epsilon \in \{0, 1\}$. Απομένει να δούμε τον ορισμό της δ στο $Q' \times Q' \times \Gamma_1$, όπου $Q' = \{q_w, q_b, q_a\}$. Επειδή στις ψ -επεκτάσεις οι κόμβοι με επιπρόσθετο χρώμα 1 είναι μόνο αυτοί με αριστερό παιδί χρώματος w : $\delta(q_w, q_w, (\gamma, 1)) = \delta(q_w, q_b, (\gamma, 1)) = q_a$, $\gamma \in \{w, b\}$. Ενώ όταν $(q, q') \in (Q' \times Q') \setminus \{(q_w, q_w), (q_w, q_b)\}$: $\delta(q, q', (\gamma, 1)) = q_f$, $\gamma \in \{w, b\}$. Ανάλογα, όταν το επιπρόσθετο χρώμα είναι 0, $\delta(q_a, q, (\gamma, 0)) = \delta(q, q_a, (\gamma, 0)) = q_a$, για $q \in \{q_w, q_b\}$ και $\delta(q_a, q_a, (\gamma, 0)) = q_f$, $\gamma \in \{w, b\}$. Τέλος όταν $(q, q') \in \{q_w, q_b\}^2$, είναι $\delta(q, q', (\gamma, 0)) = q_\gamma$, $\gamma \in \{w, b\}$. \diamond

3.3 Η αναγωγή του αρχικού μας προβλήματος στο ισοδύναμο πρόβλημα αυτομάτων.

Θυμίζουμε ότι δεδομένου ενός Γ -δέντρου T και δεδομένου ενός MSO-τύπου $\varphi(X_1, \dots, X_k)$, το αρχικό μας πρόβλημα είναι ο υπολογισμός του

$$\text{sat_assign}(\varphi, T) = \{\overline{B} \mid T \models \varphi(\overline{B})\}.$$

Σύμφωνα με το Πρόγραμμα 3.1 (Doner, Thatcher & Wright), για κάθε MSO-τύπο $\varphi(X_1, \dots, X_k)$, είναι επικτική η κατασκευή ενός Γ_k -αυτομάτου \mathfrak{A}_φ τέτοιου ώστε για κάθε Γ -δέντρο T και $\overline{B} = (B_1, \dots, B_k) \in (\text{Pow}(T))^k$, να ισχύει:

$$T \models \varphi(\overline{B}) \text{ ανν το } \mathfrak{A}_\varphi \text{ δέχεται την } (T; \overline{B}).$$

Ονομάζουμε \mathfrak{A}_φ -δεκτές αναθέσεις τις αναθέσεις που κωδικοποιούν οι \mathfrak{A}_φ -δεκτές επεκτάσεις, και τις συμβολίζουμε με $\text{accept_assign}(\mathfrak{A}_\varphi, T)$:

$$\text{accept_assign}(\mathfrak{A}_\varphi, T) = \{\overline{B} \mid \text{το } \mathfrak{A}_\varphi \text{ δέχεται την } (T; \overline{B})\}.$$

Με βάση τα παραπάνω είναι προφανές ότι:

$$\text{accept_assign}(\mathfrak{A}_\varphi, T) = \text{sat_assign}(\varphi, T).$$

Συνοψίζοντας, το πρόβλημα του υπολογισμού του συνόλου $\text{sat_assign}(\varphi, T)$ των αναθέσεων που ικανοποιούν έναν τύπο $\varphi(X_1, \dots, X_k) \in \text{MSO}$ σε ένα δεδομένο Γ -δέντρο T (αρχικό τροποποιημένο πρόβλημα), ανάγεται στο εξής πρόβλημα αυτομάτων:

- Είσοδος: Γ -δέντρο T , Γ_k -αυτόματο \mathfrak{A}_φ .
- Πρόβλημα: Υπολογισμός του $\text{accept_assign}(\mathfrak{A}_\varphi, T)$.

Δηλαδή στη συνέχεια δε θα μιλάμε για τις αναθέσεις που ικανοποιούν τον MSO-τύπο $\varphi(X_1, \dots, X_k)$ αλλά για τις αναθέσεις που γίνονται δεκτές από το δεδομένο αυτόματο \mathfrak{A}_φ .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.5. Ανάλογα με τις \mathfrak{A}_φ -δεκτές αναθέσεις, μπορούμε να ορίσουμε τις \mathfrak{A}_φ -δεκτές συναρτήσεις επιπρόσθετου χρωματισμού :

$$\text{accept_add_col}(\mathfrak{A}_\varphi, T) = \{c_{\overline{B}} \mid \text{το } \mathfrak{A}_\varphi \text{ δέχεται την } (T; \overline{B})\}.$$

Στην ουσία οι \mathfrak{A}_φ -δεκτές συναρτήσεις επιπρόσθετου χρωματισμού $c_{\overline{B}}$ αποτελούν την κωδικοποιημένη αναπαράσταση των \mathfrak{A}_φ -δεκτών αναθέσεων \overline{B} . Θυμίζουμε ότι η κωδικοποίηση βασίζεται στην ισοδυναμία: $n \in B_i$ αν $c_{B_i} = 1$.

Υπάρχει δηλαδή μια '1-1' αντιστοιχία μεταξύ των δεκτών αναθέσεων και των δεκτών συναρτήσεων επιπρόσθετου χρωματισμού. Είναι $\overline{B} \in \text{accept_assign}(\mathfrak{A}_\varphi, T)$ αν $c_{\overline{B}} \in \text{accept_add_col}(\mathfrak{A}_\varphi, T)$. \square

3.3.1 Βασικές έννοιες που σχετίζονται με το πρόβλημα αυτομάτων και την επίλυσή του

Δεδομένου του Γ -δέντρου T και δεδομένου του Γ_k -αυτομάτου \mathfrak{A}_φ που αποτελούν την είσοδο του προβλήματος αυτομάτων, ορίζουμε αναλυτικά βασικές έννοιες του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα δίνουμε τον ορισμό της εκτέλεση του δεδομένου αυτομάτου σε μια επέκταση και ορίζουμε τις εκτελέσεις και επιτυχημένες εκτελέσεις του \mathfrak{A}_φ στις k -επεκτάσεις του T . Ορίζονται επίσης οι υποκείμενες συναρτήσεις επιπρόσθετου χρωματισμού και οι υποκείμενες αναθέσεις μίας εκτέλεσης του \mathfrak{A}_φ . Τέλος παρουσιάζονται διαφορετικές μορφές αναπαράστασης του αυτομάτου.

Οι εκτελέσεις του Γ_k -αυτομάτου \mathfrak{A}_φ στις επεκτάσεις του Γ -δέντρου T . Το αυτόματο $\mathfrak{A}_\varphi = (Q, \Delta, \delta, F)$ είναι ένα bottom-up ντετερμινιστικό Γ_k -αυτόματο. Δεδομένης μιας επέκτασης $(T; \overline{B}) = ((T, s_1, s_2), c; c_{\overline{B}})$, όπου $\overline{B} \in (\text{Pow}(T))^k$, συμβολίζουμε με $\rho_{\overline{B}}$ την εκτέλεση του αυτομάτου \mathfrak{A}_φ στην $(T; \overline{B})$. Η εκτέλεση $\rho_{\overline{B}}$ υπολογίζεται επαγωγικά από τα φύλλα προς τη ρίζα ως εξής:

- $\rho_{\overline{B}}(n) = \Delta((c(n), c_{\overline{B}}(n)))$, εάν ο n είναι φύλλο και
- $\rho_{\overline{B}}(n) = \delta(\rho_{\overline{B}}(s_1(n)), \rho_{\overline{B}}(s_2(n)), (c(n), c_{\overline{B}}(n)))$, εάν ο n είναι εσωτερικός κόμβος.

Η πλειάδα \overline{B} είναι \mathfrak{A}_φ -δεκτή αν η εκτέλεση $\rho_{\overline{B}}$ είναι επιτυχημένη.

Συμβολίζουμε με $\text{pot_runs}(\mathfrak{A}_\varphi, T)$ τις εκτελέσεις του Γ_k -αυτομάτου \mathfrak{A}_φ στις (T, k) -επεκτάσεις: $\text{pot_runs}(\mathfrak{A}_\varphi, T) = \{\rho_{\overline{B}} \mid \overline{B} \in (\text{Pow}(T))^k\}$ και με $\text{succ_runs}(\mathfrak{A}_\varphi, T)$ τις εκτελέσεις του Γ_k -αυτομάτου \mathfrak{A}_φ στις \mathfrak{A}_φ -δεκτές επεκτάσεις του T :

$$\text{succ_runs}(\mathfrak{A}_\varphi, T) = \{\rho_{\overline{B}} \mid \text{το } \mathfrak{A}_\varphi \text{ δέχεται την } (T; \overline{B})\}.$$

Όταν το T εννοείται από τα συμφραζόμενα, θα αναφερόμαστε στις $\text{pot_runs}(\mathfrak{A}_\varphi, T)$ και στις $\text{succ_runs}(\mathfrak{A}_\varphi, T)$ ως εκτελέσεις και επιτυχημένες εκτελέσεις του \mathfrak{A}_φ αντίστοιχα (αντί για εκτελέσεις του \mathfrak{A}_φ στις επεκτάσεις του T).

Οι υποκείμενες συναρτήσεις επιπρόσθετου χρωματισμού και οι υποκείμενες αναθέσεις μιας εκτέλεσης του \mathfrak{A}_φ : ο υπολογισμός τους. Είδαμε παραπάνω πώς δεδομένης της συνάρτησης επιπρόσθετου χρωματισμού $c_{\overline{B}}$ μιας επέκτασης $(T; \overline{B})$, υπολογίζουμε την εκτέλεση $\rho_{\overline{B}}$ του \mathfrak{A}_φ .

Ανάλογα, δεδομένου ενός δέντρου $T = ((T, s_1, s_2), c)$ και δεδομένης μιας εκτέλεσης ρ του \mathfrak{A}_φ σε μια επέκταση του T , μπορούμε να υπολογίσουμε τις υποκείμενες συναρτήσεις επιπρόσθετου χρωματισμού της ρ , δηλαδή τις συναρτήσεις επιπρόσθετου χρωματισμού $c_{\overline{B}}$ για όλες τις επεκτάσεις $(T; \overline{B})$ στις οποίες η $\rho_{\overline{B}}$ ισούται με τη ρ : $\text{add_col}(\rho, T) = \{c_{\overline{B}} \mid \rho_{\overline{B}} = \rho\}$. Συμβολίζουμε με $\text{add_col}(\rho, T_n)$, τις υποκείμενες συναρτήσεις επιπρόσθετου χρωματισμού για την εκτέλεση ρ στο υποδέντρο T_n .

Ο υπολογισμός των υποκείμενων συναρτήσεων επιπρόσθετου χρωματισμού γίνεται επαγωγικά με κατεύθυνση από τα φύλλα προς τη ρίζα:

- εάν ο n είναι φύλλο: $\text{add_col}(\rho, T_n) = \{\{n \mapsto \bar{e}\} \mid \Delta((c(n), \bar{e})) = \rho(n)\}$.
- εάν ο n είναι εσωτερικός κόμβος:

$$\begin{aligned} \text{add_col}(\rho, T_n) = & \{c_1 \cup c_2 \cup \{n \mapsto \bar{e}\} \mid c_1 \in \text{add_col}(\rho, T_{s_1(n)}), \\ & c_2 \in \text{add_col}(\rho, T_{s_2(n)}), \\ & \delta(\rho(s_1(n)), \rho(s_2(n)), (c(n), \bar{e})) = \rho(n)\}. \end{aligned}$$

Οι υποκείμενες αναθέσεις της εκτέλεσης ρ : $\text{assign}(\rho, T) = \{\overline{B} \mid \rho_{\overline{B}} = \rho\}$ υπολογίζονται ανάλογα. Συμβολίζουμε με $\text{assign}(n, \bar{e})$ το διάνυσμα

$$([n]^{\epsilon_1}, \dots, [n]^{\epsilon_k}),$$

όπου $[n]^0 = \emptyset$ και $[n]^1 = \{n\}$ και το ονομάζουμε υποκείμενη ανάθεση του \bar{e} στον κόμβο n .

Επαγωγικά με κατεύθυνση από τα φύλλα προς τη ρίζα έχουμε:

- εάν ο n είναι φύλλο: $\text{assign}(\rho, T_n) = \{\text{assign}(n, \bar{e}) \mid \Delta((c(n), \bar{e})) = \rho(n)\}$.
- εάν ο n είναι εσωτερικός κόμβος⁸:

$$\begin{aligned} \text{assign}(\rho, T_n) = & \{\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \text{assign}(n, \bar{e}) \mid \overline{A}_1 \in \text{assign}(\rho, T_{s_1(n)}), \\ & \overline{A}_2 \in \text{assign}(\rho, T_{s_2(n)}), \\ & \delta(\rho(s_1(n)), \rho(s_2(n)), (c(n), \bar{e})) = \rho(n)\}. \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.6. Προφανώς οι υποκείμενες αναθέσεις των επιτυχημένων εκτελέσεων του δεδομένου αυτομάτου \mathfrak{A}_φ είναι οι \mathfrak{A}_φ -δεχτές αναθέσεις. Δηλαδή

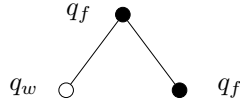
$$\text{accept_assign}(\mathfrak{A}_\varphi, T) = \{\text{assign}(\rho, T) \mid \rho \in \text{succ_runs}(\mathfrak{A}_\varphi, T)\}.$$

Ανάλογα ισχύουν και για τις $\text{accept_add_col}(\mathfrak{A}_\varphi, T)$. □

⁸ Αν $\overline{A}_1 = (A_1^1, \dots, A_1^k)$ και $\overline{A}_2 = (A_2^1, \dots, A_2^k)$, $A_i^j \subseteq T$, $i = 1, 2, j = 1, \dots, k$, τότε $\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 = (A_1^1 \cup A_2^1, \dots, A_1^k \cup A_2^k)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.7. Όπως είναι φυσικό και φαίνεται επίσης από τις παραπάνω εκφράσεις, ο υπολογισμός των $\text{assign}(\varrho, \mathcal{T}_n)$ και $\text{add_col}(\varrho, \mathcal{T}_n)$ είναι εντελώς ανάλογος. Προφανώς αυτό ισχύει σε κάθε περίπτωση που δίνεται μια έκφραση υπολογισμού για τις αναθέσεις: οι αντίστοιχες εκφράσεις υπολογισμού των συναρτήσεων επιπρόσθετου χρωματισμού προκύπτουν από τις πρώτες με το φυσικό τρόπο (η μόνη διαφορά είναι ότι αντί για την $\text{assign}(n, \bar{\epsilon})$ έχουμε $\{n \mapsto \bar{\epsilon}\}$). \square

Παράδειγμα 3.7. Θεωρούμε $\Gamma = \{w, b\}$ και θεωρούμε ότι έχουμε δεδομένο ένα Γ -δέντρο, $\mathcal{T} = ((T, s_1, s_2), c)$, όπου $T = \{n_1, n_2, n_3\}$, $s_1(n_1) = n_2$, $s_2(n_1) = n_3$ και $c = \{n_1 \mapsto b, n_2 \mapsto w, n_3 \mapsto b\}$. Θεωρούμε επίσης ότι έχουμε δεδομένο το Γ_1 -αυτόματο \mathfrak{A}_ψ του Παραδείγματος 3.6. Δεδομένης της εκτέλεσης $\varrho = \{n_1 \mapsto q_f, n_2 \mapsto q_w, n_3 \mapsto q_f\}$:



θα υπολογίσουμε τις υποκείμενες συναρτήσεις επιπρόσθετου χρωματισμού της r αλλά και τις υποκείμενες αναθέσεις.

Από το αυτόματο \mathfrak{A}_ψ έχουμε $\Delta((w, 1)) = q_w$ και $\Delta((b, 0)) = q_f$. Για τα φύλλα n_2, n_3 υπολογίζουμε: $\text{add_col}(\varrho, n_2) = \{\{n_2 \mapsto 1\}\}$, $\text{add_col}(\varrho, n_3) = \{\{n_3 \mapsto 0\}\}$. Επίσης $\delta(q_w, q_f, (b, 0)) = \delta(q_w, q_f, (b, 1)) = q_f$ και έτσι $\text{add_col}(\varrho, \mathcal{T}) = \{\{n_2 \mapsto 1, n_3 \mapsto 0, n_1 \mapsto 0\}, \{\{n_2 \mapsto 1, n_3 \mapsto 0, n_1 \mapsto 1\}\}$.

Ανάλογα υπολογίζονται οι υποκείμενες αναθέσεις. Είναι $[n_2]^1 = \{n_2\}$ και $[n_3]^0 = \emptyset$. Έτσι $\text{assign}(\varrho, n_2) = \{\{n_2\}\}$ και $\text{assign}(\varrho, n_3) = \{\emptyset\}$. Όμοια βρίσκουμε ότι $\text{assign}(\varrho, \mathcal{T}) = \{\{n_2\}, \{n_2, n_1\}\}$. \diamond

Διαφορετικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων Δ, δ του αυτόματου \mathfrak{A}_φ . Με αφορμή την πληροφορία των συναρτήσεων Δ, δ που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω (δηλαδή τα υποκείμενα επιπρόσθετα χρώματα των μεταβάσεων των Δ, δ), παρουσιάζουμε κάποιες διαφορετικές αναπαραστάσεις τους.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι συναρτήσεις εκκίνησης και μετάβασης μπορούν να ειδωθούν ως σύνολα μεταβάσεων. Οι μεταβάσεις μπορούν να διαμεριστούν ανάλογα με το υποκείμενο αρχικό τους χρώμα σε γ -μεταβάσεις, $\gamma \in \Gamma$. Πιο συγκεκριμένα ορίζουμε: $\gamma\text{-start_transitions} = \{(q, \bar{\epsilon}) \mid \Delta((\gamma, \bar{\epsilon})) = q\}$ και $\gamma\text{-transitions} = \{(q, q_1, q_2, \bar{\epsilon}) \mid \delta(q_1, q_2, (\gamma, \bar{\epsilon})) = q\}$.

Επιπλέον οι γ -μεταβάσεις της δ , μπορούν να ειδωθούν ως σύνολα από γ -τρίγωνα καταστάσεων: $\gamma\text{-states_triangles} = \{(q, q_1, q_2) \mid \exists \bar{\epsilon} \tau. \omega. \delta(q_1, q_2, (\gamma, \bar{\epsilon})) = q\}$ και ως σύνολα με στοιχεία τα υποκείμενα επιπρόσθετα χρώματα των γ -τριγώνων καταστάσεων: $\gamma\text{-add_colors}_{q, q_1, q_2} = \{\bar{\epsilon} \mid \delta(q_1, q_2, (\gamma, \bar{\epsilon})) = q\}$ (Πίνακας 3).

Ανάλογα οι γ -μεταβάσεις της Δ , $\gamma \in \Gamma$, μπορούν να ειδωθούν ως γ -καταστάσεις εκκίνησης: $\gamma\text{-start_states} = \{q \mid \exists \bar{\epsilon} \tau. \omega. \Delta((\gamma, \bar{\epsilon})) = q\}$ και ως σύνολα με τα υποκείμενα επιπρόσθετα χρώματα των γ -καταστάσεων εκκίνησης: $\gamma\text{-add_colors}_q = \{\bar{\epsilon} \mid \Delta((\gamma, \bar{\epsilon})) = q\}$ (Πίνακας 4).

Συμβολισμός	Ορισμός
$\gamma_transitions$	$\{(q, q_1, q_2, \bar{e}) \mid \delta(q_1, q_2, (\gamma, \bar{e})) = q\}$
$\gamma_states_triangles$	$\{(q, q_1, q_2) \mid \exists \bar{e} \tau. \omega. \delta(q_1, q_2, (\gamma, \bar{e})) = q\}$
$\gamma_add_colors_{q, q_1, q_2}$	$\{\bar{e} \mid \delta(q_1, q_2, (\gamma, \bar{e})) = q\}$

 Πίνακας 3: Οι αναπαραστάσεις της συνάρτησης δ του \mathfrak{A}_φ .

Συμβολισμός	Ορισμός
$\gamma_start_transitions$	$\{(q, \bar{e}) \mid \Delta((\gamma, \bar{e})) = q\}$
γ_start_states	$\{q \mid \exists \bar{e} \tau. \omega. \Delta((\gamma, \bar{e})) = q\}$
$\gamma_add_colors_q$	$\{\bar{e} \mid \Delta((\gamma, \bar{e})) = q\}$

 Πίνακας 4: Οι αναπαραστάσεις της συνάρτησης Δ του \mathfrak{A}_φ .

3.3.2 Ο απλός και ο απλός -‘συνολικός’ (set-oriented) αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος αυτομάτων: η έννοια της βελτιστοποίησης

Παρουσιάζουμε τον απλό αλγόριθμο του προβλήματος αυτομάτων και σχολιάζουμε την υλοποίησή του σε ένα βήμα-πέρασμα του δεδομένου Γ -δέντρου. Τέλος επισημαίνουμε ορισμένα βασικά σημεία της επίλυσης του προβλήματος και εισάγουμε την έννοια της βελτιστοποίησης του υπολογισμού.

Ο απλός αλγόριθμος για το πρόβλημα αυτομάτων. Περιγράφουμε αρχικά τον απλό αλγόριθμο για τον υπολογισμό των \mathfrak{A}_φ -δεκτών αναθέσεων. Παρατηρούμε ότι οι πιθανές αναθέσεις για τον δεδομένο τύπο $\varphi(X_1, \dots, X_k)$ σε ένα δέντρο με σύνολο κόμβων T είναι όλα τα διανύσματα $(B_1, \dots, B_k) \in (\text{Pow}(T))^k$. Ο απλός αλγόριθμος περιλαμβάνει την θεώρηση όλων των πιθανών αναθέσεων \bar{B} , την κωδικοποίηση τους στις επεκτάσεις $(T; \bar{B})$ μέσω του υπολογισμού συναρτήσεων επιπρόσθετου χρωματισμού $c_{\bar{B}}$ και τον υπολογισμό των αντίστοιχων εκτελέσεων $\rho_{\bar{B}}$. Αν μια εκτέλεση $\rho_{\bar{B}}$ είναι επιτυχημένη, τότε η υποκείμενη ανάθεσή της \bar{B} είναι προφανώς μια \mathfrak{A}_φ -δεκτή ανάθεση. Αν $|T| = m$, οι πιθανές επεκτάσεις είναι $2^{m \cdot k}$ και θα πρέπει να πραγματοποιήσουμε ισάριθμα περάσματα στο δεδομένο δέντρο για τον υπολογισμό των αντίστοιχων εκτελέσεων.

Σημειώνουμε ότι αντί για την αρχική θεώρηση των πιθανών αναθέσεων και την μετέπειτα κωδικοποίησή τους σε συναρτήσεις επιπρόσθετου χρωματισμού, μπορούμε απευθείας να θεωρήσουμε τις πιθανές συναρτήσεις επιπρόσθετου χρωματισμού. Αυτές αντιστοιχούν στις πιθανές ακολουθίες από διανύσματα $\bar{e} \in \{0, 1\}^k$, μήκους m .

Παράδειγμα 3.8. Εφαρμόζουμε την απλή προσέγγιση για τον υπολογισμό των \mathfrak{A}_ψ -δεκτών αναθέσεων στα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος. Οι πιθανές αναθέσεις είναι τα στοιχεία του $\text{Pow}(T)$, $T = \{n_1, n_2, n_3\}$. Δηλαδή αυτές είναι οι: $B_1 = \emptyset$, $B_2 = \{n_1\}$, $B_3 = \{n_2\}$, $B_4 = \{n_3\}$, $B_5 = \{n_1, n_2\}$, $B_6 = \{n_1, n_3\}$, $B_7 = \{n_2, n_3\}$, $B_8 = \{n_1, n_2, n_3\}$. Οι αντίστοιχες συναρτήσεις επιπρόσθετου χρωματισμού είναι: $c_{B_1} = \{n_1 \mapsto 0, n_2 \mapsto 0, n_3 \mapsto 0\}$, $c_{B_2} = \{n_1 \mapsto 1, n_2 \mapsto 0, n_3 \mapsto 0\}$, $c_{B_3} = \{n_1 \mapsto$

$0, n_2 \mapsto 1, n_3 \mapsto 0\}$, $c_{B_4} = \{n_1 \mapsto 0, n_2 \mapsto 0, n_3 \mapsto 1\}$, $c_{B_5} = \{n_1 \mapsto 1, n_2 \mapsto 1, n_3 \mapsto 0\}$, $c_{B_6} = \{n_1 \mapsto 1, n_2 \mapsto 0, n_3 \mapsto 1\}$, $c_{B_7} = \{n_1 \mapsto 0, n_2 \mapsto 1, n_3 \mapsto 1\}$, $c_{B_8} = \{n_1 \mapsto 1, n_2 \mapsto 1, n_3 \mapsto 1\}$. Οι εκτελέσεις του αυτομάτου υπολογίζονται: $\rho_{B_1} = \{n_1 \mapsto q_b, n_2 \mapsto q_w, n_3 \mapsto q_b\}$, $\rho_{B_2} = \{n_1 \mapsto q_a, n_2 \mapsto q_w, n_3 \mapsto q_b\}$, $\rho_{B_3} = \{n_1 \mapsto q_f, n_2 \mapsto q_f, n_3 \mapsto q_b\}$, $\rho_{B_4} = \rho_{B_6} = \{n_1 \mapsto q_f, n_2 \mapsto q_w, n_3 \mapsto q_f\}$, $\rho_{B_7} = \rho_{B_8} = \{n_1 \mapsto q_f, n_2 \mapsto q_f, n_3 \mapsto q_f\}$. Η μοναδική επιτυχημένη εκτέλεση είναι η ρ_{B_2} και έτσι η B_2 είναι η μοναδική \mathfrak{A}_ψ -δεκτή ανάθεση.

Θεωρούμε τη διάταξη n_1, n_2, n_3 για το σύνολο κόμβων. Αναπαριστούμε τις συναρτήσεις επιπρόσθετου χρωματισμού ως ακολουθίες ψηφίων 0, 1 που αντιστοιχούν στην ακολουθία επιπρόσθετων χρωμάτων με βάση την παραπάνω διάταξη κόμβων. Ανάλογα για τις εκτελέσεις. Τα παραπάνω αποτελέσματα συνοψίζονται στον πίνακα:

	assign	add_col	runs
1	\emptyset	0, 0, 0	q_b, q_w, q_b
2	$\{n_1\}$	1, 0, 0	q_a, q_w, q_b
3	$\{n_2\}$	0, 1, 0	q_f, q_f, q_b
4	$\{n_3\}$	0, 0, 1	q_f, q_w, q_f
5	$\{n_1, n_2\}$	1, 1, 0	q_f, q_f, q_b
6	$\{n_1, n_3\}$	1, 0, 1	q_f, q_w, q_f
7	$\{n_2, n_3\}$	0, 1, 1	q_f, q_f, q_f
8	$\{n_1, n_2, n_3\}$	1, 1, 1	q_f, q_f, q_f

◇

Ο απλός-‘συνολικός’ (set-oriented) αλγόριθμος για το πρόβλημα αυτομάτων.

Το βασικό σημείο του απλού-‘συνολικού’ (set-oriented) αλγόριθμου είναι η ταυτόχρονη θεώρηση όλων των επεκτάσεων και ο υπολογισμός όλων των εκτελέσεων σε ένα μοναδικό πέρασμα του αρχικού μας δέντρου. Ονομάζουμε q -αναθέσεις ενός δέντρου \mathcal{T} , τις αναθέσεις \bar{B} για τις οποίες η τιμή των αντίστοιχων εκτελέσεων $\rho_{\bar{B}}$ στη ρίζα του \mathcal{T} ισούται με q . Στην ουσία υπολογίζουμε τις q -αναθέσεις του δεδομένου δέντρου, όπου q οι πιθανές καταστάσεις στη ρίζα. Από αυτές, οι q -αναθέσεις με $q \in F$ είναι οι ζητούμενες \mathfrak{A}_φ -δεκτές αναθέσεις.

Πιο συγκεκριμένα, δεδομένου του αρχικού δέντρου, η ταυτόχρονη θεώρηση των πιθανών επεκτάσεων επιτυγχάνεται θεωρώντας διαδοχικά ως επιπρόσθετο χρώμα κάθε κόμβου όλα τα πιθανά επιπρόσθετα χρώματα $\bar{e} \in \{0, 1\}^k$. Οι q -αναθέσεις υπολογίζονται επαγωγικά από τα φύλλα προς τη ρίζα. Δηλαδή για κάθε κόμβο n , υπολογίζονται οι q -αναθέσεις του υποδέντρου \mathcal{T}_n (θα τις ονομάζουμε στη συνέχεια (n, q) -αναθέσεις και θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\text{assign}(n, q)$), για κάθε πιθανή κατάσταση q στον κόμβο n .

Παρουσιάζουμε με τη μορφή q -αναθέσεων σε κάθε υποδέντρο $((n, q)$ -αναθέσεις) τα αποτελέσματα του προηγούμενου παραδείγματος. Παρατηρούμε ότι οι καταστάσεις που οι εκτελέσεις του αυτομάτου \mathfrak{A}_ψ αποδίδουν στους κόμβους n_1, n_2, n_3 είναι $\{q_b, q_a, q_f\}$, $\{q_w, q_f\}$ και $\{q_b, q_f\}$ αντίστοιχα. Επίσης, για τον κόμβο n_2 , οι q_w -, q_f -αναθέσεις είναι τα μονοσύνολα $\{\emptyset\}$ και $\{\{n_2\}\}$ αντίστοιχα. Για τον n_3 , οι q_b -, q_f -αναθέσεις είναι τα μονοσύνολα $\{\emptyset\}$ και $\{\{n_3\}\}$ αντίστοιχα. Τελικά στη ρίζα n_1 , οι q_b -, q_a -, q_f -αναθέσεις

είναι τα σύνολα $\{\emptyset\}$, $\{\{n_1\}\}$ και $\{\{n_2\}, \{n_3\}, \{n_1, n_2\}, \{n_1, n_3\}, \{n_2, n_3\}, \{n_1, n_2, n_3\}\}$ αντίστοιχα. Η q_a -ανάθεση $\{n_1\}$ είναι η μοναδική δεκτή ανάθεση.

Παρατηρούμε ότι σε ένα φύλλο n , υπολογίζονται στην ουσία οι υποκείμενες αναθέσεις των $c(n)$ _start_states. Πράγματι στον κόμβο n_2 τα υποκείμενα επιπρόσθετα χρώματα των w _start_states καταστάσεων q_w, q_f είναι 0, 1 αντίστοιχα και $\text{assign}(n_2, 0) = \emptyset$, $\text{assign}(n_2, 1) = \{n_2\}$. Ενώ αν ο n είναι εσωτερικός κόμβος με παιδιά n_1, n_2 (αριστερό και δεξί αντίστοιχα), και οι καταστάσεις q, q_1, q_2 είναι πιθανές καταστάσεις των n, n_1, n_2 αντίστοιχα τέτοιες ώστε $\delta(q_1, q_2, \bar{e}) = q$, οι (n, q) -αναθέσεις είναι ενώσεις της μορφής $\bar{B}_1 \cup \bar{B}_2 \cup \bar{A}$. Η \bar{A} είναι η υποκείμενη ανάθεση του \bar{e} στον κόμβο n και η \bar{B}_i είναι q_i -ανάθεση του n_i , $i = 1, 2$. Θα μιλήσουμε αναλυτικά για τον υπολογισμό των (n, q) -αναθέσεων στην επόμενη ενότητα⁹. Σημειώνουμε ωστόσο ότι απαιτείται σημαντικός αριθμός σύνθετων υπολογισμών.

Βελτιστοποίηση του υπολογισμού: Οι πιθανές επιτυχημένες και οι επιτυχημένες καταστάσεις κάθε κόμβου. Με βάση τον παραπάνω απλό αλγόριθμο υπολογίσουμε τις πιθανές αναθέσεις και τις τιμές των αντίστοιχων εκτελέσεων στη ρίζα πραγματοποιώντας ένα μοναδικό πέρασμα του δεδομένου δέντρου. Αυτές για τις οποίες η τιμή της εκτέλεσης στη ρίζα είναι τελική κατάσταση είναι οι \mathfrak{A}_φ -δεκτές αναθέσεις.

Δηλαδή, κατά την παραπάνω προσέγγιση, φθάνοντας στη ρίζα αγνοούμε τις μη δεκτές αναθέσεις παρόλο που τις έχουμε υπολογίσει. Εν γένει ο αριθμός των μη δεκτών αναθέσεων είναι μεγάλος (ορισμένες φορές όλες οι επεκτάσεις είναι μη δεκτές). Έτσι φθάνοντας στη ρίζα έχουμε πραγματοποιήσει ένα σημαντικό αριθμό σύνθετων υπολογισμών άσκοπα. Λέγοντας βελτιστοποίηση του υπολογισμού των \mathfrak{A}_φ -δεκτών αναθέσεων, εννοούμε την εύρεση, πριν φθάσουμε στη ρίζα, τρόπων για τον περιορισμό του υπολογισμού αναθέσεων που δεν είναι \mathfrak{A}_φ -δεκτές.

Οι επιτυχημένες καταστάσεις του \mathfrak{A}_φ σε κάθε κόμβο αποτελούν το κλειδί για τη βελτιστοποίηση του υπολογισμού. Η κύρια ιδέα συνοψίζεται στην 'ισοδυναμία' επιτυχημένων εκτελέσεων και δεκτών αναθέσεων:

$$\text{succ_runs}(\mathfrak{A}_\varphi, T) \leftrightarrow \text{accept_add_col}(\mathfrak{A}_\varphi, T) \leftrightarrow \text{accept_assign}(\mathfrak{A}_\varphi, T).$$

Δηλαδή μπορούμε να αποκλείσουμε τον υπολογισμό μη δεκτών αναθέσεων θεωρώντας μόνο τις επιτυχημένες εκτελέσεις του δεδομένου αυτομάτου. Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τις καταστάσεις που βρίσκεται ένας κόμβος στις επιτυχημένες εκτελέσεις του αυτομάτου (επιτυχημένες καταστάσεις). Αν υπολογίζουμε σε κάθε κόμβο n τις (n, q) -αναθέσεις, όπου q επιτυχημένη κατάσταση του n , φθάνοντας στη ρίζα θα έχουμε υπολογίσει ακριβώς τις \mathfrak{A}_φ -δεκτές αναθέσεις. Οι Flum, Frick, Grohe, στον αλγόριθμο που παρουσιάζεται στην επόμενη ενότητα, ακολουθούν ακριβώς αυτόν τον τρόπο βελτιστοποίησης υπολογίζοντας αρχικά τις επιτυχημένες καταστάσεις κάθε κόμβου.

⁹Οι εκφράσεις του βήματος 3 του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe για τον υπολογισμό των $\text{accept_assign}(n, q)$ (Πίνακας 5, σελίδα 31), δίνουν επίσης τον υπολογισμό των $\text{assign}(n, q)$, όταν q είναι πιθανή κατάσταση του n (η q είναι επιτυχημένη στις $\text{accept_assign}(n, q)$).

3.4 Ο αλγόριθμος των Flum, Frick, Grohe

Πριν προβούμε σε μια βαθύτερη ανάλυση των διαφόρων προσεγγίσεων επίλυσης του προβλήματος μας, παρουσιάζουμε αρχικά τον αλγόριθμο των Flum, Frick, Grohe [13], καθώς τον χρησιμοποιούμε συχνά ως σημείο αναφοράς.

Τα βήματα του αλγορίθμου. Όπως αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα, η βασική ιδέα ενός αποτελεσματικού υπολογισμού των $\text{accept_assign}(\mathfrak{A}_\varphi, T)$ είναι η ισοδυναμία μεταξύ των επιτυχημένων εκτελέσεων του αυτομάτου \mathfrak{A}_φ και των \mathfrak{A}_φ -δεκτών επεκτάσεων του T . Ο αλγόριθμος των Flum, Frick, Grohe υπολογίζει αρχικά τις επιτυχημένες καταστάσεις κάθε κόμβου και στη συνέχεια τις χρησιμοποιεί για τον υπολογισμό των δεκτών αναθέσεων.

Πιο συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος πραγματοποιεί τρία περάσματα στο αρχικό δέντρο. Κατά το πρώτο πέρασμα, που γίνεται με κατεύθυνση από τα φύλλα προς τη ρίζα του δέντρου, υπολογίζονται οι πιθανές καταστάσεις $\text{pot_states}(\mathfrak{A}_\varphi, n)$ κάθε κόμβου $n \in T$, δηλαδή οι καταστάσεις που μπορεί να βρεθεί ένας κόμβος κατά τις εκτελέσεις του αυτομάτου \mathfrak{A}_φ στις επεκτάσεις του T . Το δεύτερο πέρασμα γίνεται με κατεύθυνση από τη ρίζα προς τα φύλλα και υπολογίζονται οι επιτυχημένες καταστάσεις $\text{succ_states}(\mathfrak{A}_\varphi, n)$ για κάθε κόμβο $n \in T$. Στο τελευταίο πέρασμα, το οποίο γίνεται με κατεύθυνση από τα φύλλα προς τη ρίζα υπολογίζονται οι περιορισμοί¹⁰ $\text{accept_assign}(\mathfrak{A}_\varphi, T_n)$ των \mathfrak{A}_φ -δεκτών αναθέσεων του T στα υποδέντρα T_n .

Συνοψίζοντας, κατά τα τρία βήματα του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe υπολογίζονται διαδοχικά τα σύνολα:

1. $\text{pot_states}(\mathfrak{A}_\varphi, n) = \{\varrho(n) \mid \varrho \in \text{pot_runs}(\mathfrak{A}_\varphi, T)\}$.
2. $\text{succ_states}(\mathfrak{A}_\varphi, n) = \{\varrho(n) \mid \varrho \in \text{succ_runs}(\mathfrak{A}_\varphi, T)\}$.
3. $\text{accept_assign}(\mathfrak{A}_\varphi, T_n) = \{\bar{A} \mid \exists \bar{B} \in \text{accept_assign}(\mathfrak{A}_\varphi, T) \text{ τ.ω. } \bar{B}|_{T_n} = \bar{A}\}$.

Για λόγους απλοποίησης του συμβολισμού δε θα αναφέρουμε την παράμετρο \mathfrak{A}_φ στη συνέχεια. Επίσης για τον ίδιο λόγο συχνά θα γράφουμε $\text{accept_assign}(n)$ για να αναφερθούμε στους περιορισμούς των \mathfrak{A}_φ -δεκτών αναθέσεων στο υποδέντρο T_n (δηλαδή αντί για $\text{accept_assign}(\mathfrak{A}_\varphi, T_n)$).

Περιγραφή των υπολογισμών του αλγορίθμου. Θα δούμε στη συνέχεια αναλυτικά πώς υπολογίζονται τα παραπάνω σύνολα. Πριν παρουσιάσουμε τις λεπτομέρειες, περιγράφουμε τις βασικές ιδέες του υπολογισμού των αντίστοιχων συνόλων.

Στο πρώτο βήμα, οι πιθανές καταστάσεις ενός κόμβου n υπολογίζονται θεωρώντας ως επιπρόσθετα χρώματα του κόμβου n , όλα τα πιθανά επιπρόσθετα χρώματα. Δηλαδή τα επιπρόσθετα χρώματα του n σε όλες τις επεκτάσεις του T . Προφανώς αυτά είναι τα στοιχεία του συνόλου $\{0, 1\}^k$. Έτσι, αν ο n είναι φύλλο, υπολογίζονται οι τιμές τις

¹⁰Θεωρούμε την πλειάδα $\bar{B} = (B_1, \dots, B_k) \in (\text{Pow}(T))^k$ και θεωρούμε ένα σύνολο $K \subseteq T$. Ο περιορισμός της \bar{B} στο $K \subseteq T$ ορίζεται ως εξής:

$$\bar{B}|_K = (B_1 \cap K, \dots, B_k \cap K).$$

Ο περιορισμός μιας ανάθεσης \bar{B} στο υποδέντρο T_n είναι ο περιορισμός $\bar{B}|_{T_n}$.

συνάρτησης εκκίνησης Δ στα $(c(n), \bar{\epsilon})$, $\bar{\epsilon} \in \{0, 1\}^k$. Ανάλογα αν ο n είναι εσωτερικός κόμβος, υπολογίζονται οι τιμές της δ για όλες τις πλειάδες $(q_1, q_2, (c(n), \bar{\epsilon}))$, $\bar{\epsilon} \in \{0, 1\}^k$, που θα σχηματιστούν κατά τις εκτελέσεις του \mathfrak{A}_φ στον κόμβο n . Αυτό σημαίνει ότι καταλήγοντας στη ρίζα r , όταν μεταξύ των πιθανών καταστάσεων της r δεν υπάρχει τελική κατάσταση, δεν υπάρχουν \mathfrak{A}_φ -δεκτές επεκτάσεις και άρα ούτε \mathfrak{A}_φ -δεκτές αναθέσεις. Σε αυτή την περίπτωση ο αλγόριθμος τερματίζει στο σημείο αυτό με κενή έξοδο.

Στο δεύτερο βήμα, υπολογίζονται οι επιτυχημένες καταστάσεις της ρίζας r επιλέγοντας απλά εκείνες από τις πιθανές καταστάσεις της ρίζας που είναι τελικές. Προχωρώντας προς τα φύλλα, οι επιτυχημένες καταστάσεις ενός κόμβου n είναι εκείνες (από τις πιθανές καταστάσεις του n) που οδηγούν σε επιτυχημένη κατάσταση στον πατέρα του n .

Στο τελευταίο βήμα, υπολογίζονται αρχικά για κάθε φύλλο n οι περιορισμοί των \mathfrak{A}_φ -δεκτών αναθέσεων στο n (δηλαδή τα σύνολα αναθέσεων $\text{accept_assign}(n)$). Αυτό γίνεται αποκωδικοποιώντας τα υποκείμενα επιπρόσθετα χρώματα των καταστάσεων $q \in \text{succ_states}(n)$ στις αντίστοιχες (n, q) -αναθέσεις. Σχηματίζουμε έτσι επαγωγικά από τα φύλλα προς τη ρίζα τις (n, q) -αναθέσεις \bar{A} , $q \in \text{succ_states}(n)$, κάθε κόμβου n , οι οποίες αντιστοιχούν στους περιορισμούς των \mathfrak{A}_φ -δεκτών αναθέσεων \bar{B} στο υποδέντρο T_n , για τις οποίες $\rho_{\bar{B}}(n) = q$. Οι αντίστοιχες (n, q) -αναθέσεις \bar{A} ενός εσωτερικού κόμβου n , υπολογίζονται ως εξής: συνθέτουμε τα $c(n)$ -τρίγωνα καταστάσεων (q, q_1, q_2) , με $q_i \in \text{succ_states}(s_i(n))$, $i = 1, 2$, $q \in \text{succ_states}(n)$, και αποκωδικοποιούμε τα υποκείμενα επιπρόσθετα χρώματα $\bar{\epsilon}$ αυτών των τριγώνων στις αντίστοιχες αναθέσεις $\text{assign}(n, \bar{\epsilon})$. Οι (n, q) -αναθέσεις \bar{A} είναι όλες οι ενώσεις της μορφής $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \text{assign}(n, \bar{\epsilon})$, όπου κάθε \bar{A}_i είναι μια $(s_i(n), q_i)$ -ανάθεση, για $i = 1, 2$. Προφανώς η ένωση των (n, q) -αναθέσεων ενός κόμβου n , για όλα τα $q \in \text{succ_states}(n)$, είναι οι περιορισμοί των \mathfrak{A}_φ -δεκτών αναθέσεων στο υποδέντρο T_n . Στη ρίζα οι αναθέσεις αυτές είναι ακριβώς οι ζητούμενες \mathfrak{A}_φ -δεκτές αναθέσεις.

3.4.1 Ο υπολογισμός

Ο υπολογισμός για μη διατεταγμένα χρωματισμένα δέντρα. Ο αλγόριθμος των Flum, Frick, Grohe όπως δίνεται στο [13] αφορά μη διατεταγμένα δέντρα¹¹. Θεωρούμε ένα μη διατεταγμένο χρωματισμένο δέντρο $T = ((T, s), c)$. Ο υπολογισμός των συνόλων που ορίστηκαν παραπάνω δίνεται αναλυτικά στον Πίνακα 5 της σελίδας 31. Επισημαίνουμε ότι στην έκφραση υπολογισμού των $\text{accept_assign}(n, q)$, όταν n είναι εσωτερικός κόμβος τ.ω. $s(n) = \{s, s'\}$ και $q \in \text{succ_states}(n)$ (βήμα 3), οι συνθήκες $\bar{A} \in \text{accept_assign}(s, q')$ και $\bar{A}' \in \text{accept_assign}(s', q'')$ προϋποθέτουν ότι $q' \in \text{succ_states}(n)$ και $q'' \in \text{succ_states}(n')$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.8. Υπάρχει μια προφανής ομοιότητα ανάμεσα στον υπολογισμό των υποκείμενων αναθέσεων μιας εκτέλεσης (βλέπε Ενότητα 3.3.1) και στον υπολογισμό των αναθέσεων του τρίτου βήματος του παραπάνω αλγορίθμου. Αυτό είναι φυσικό, αφού όπως έχουμε ήδη επισημάνει ο υπολογισμός των $\text{accept_assign}(\mathfrak{A}_\varphi, T)$ αποτελεί

¹¹Σημειώνουμε ότι στο [13] χρησιμοποιούνται οι συμβολισμοί $P_n, S_n \text{ Sat}_{n,q}$ για τα σύνολα που εδώ ονομάζουμε $\text{pot_states}(n), \text{succ_states}(n), \text{accept_assign}(n, q)$ αντίστοιχα.

Ο αλγόριθμος των Flum, Frick, Grohe.

Βήμα 1. Με κατεύθυνση από τα φύλλα προς τη ρίζα υπολογίζονται:

- αν ο n είναι φύλλο: $\text{pot_states}(n) = \{\Delta((c(n), \bar{\epsilon})) \mid \bar{\epsilon} \in \{0, 1\}^k\}$.
- αν ο n είναι εσωτερικός κόμβος τ.ω. $s(n) = \{s, s'\}$:

$$\text{pot_states}(n) = \{\delta(\{q, q'\}, (c(n), \bar{\epsilon})) \mid q \in \text{pot_states}(s), \\ q' \in \text{pot_states}(s'), \bar{\epsilon} \in \{0, 1\}^k\}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Όταν $\text{pot_states}(\text{root}^T) \cap F = \emptyset$, τότε ο αλγόριθμος τερματίζει:

$$\text{accept_assign}(\mathfrak{A}_\varphi, T) = \emptyset.$$

Βήμα 2. Με κατεύθυνση από τη ρίζα προς τα φύλλα υπολογίζονται:

- αν r είναι η ρίζα του δέντρου T : $\text{succ_states}(r) = \text{pot_states}(r) \cap F$.
- αν ο n είναι εσωτερικός κόμβος με πατέρα m και $s(m) = \{n, n'\}$:

$$\text{succ_states}(n) = \{q \in \text{pot_states}(n) \mid \exists q' \in \text{pot_states}(n'), \exists \bar{\epsilon} \in \{0, 1\}^k \\ \text{τ.ω. } \delta(\{q, q'\}, (c(m), \bar{\epsilon})) \in \text{succ_states}(m)\}.$$

Βήμα 3. Με κατεύθυνση από τα φύλλα προς τη ρίζα έχουμε τους υπολογισμούς:

- αν ο n είναι φύλλο και $q \in \text{succ_states}(n)$:

$$\text{accept_assign}(n, q) = \{\text{assign}(n, \bar{\epsilon}) \mid \Delta(c(n), \bar{\epsilon}) = q\}.$$

- αν ο n είναι εσωτερικός κόμβος τ.ω. $s(n) = \{s, s'\}$ και $q \in \text{succ_states}(n)$:

$$\text{accept_assign}(n, q) = \{\bar{A} \cup \bar{A}' \cup \text{assign}(n, \bar{\epsilon}) \mid \bar{A} \in \text{accept_assign}(s, q'), \\ \bar{A}' \in \text{accept_assign}(s', q''), \\ \delta(\{q', q''\}, (c(n), \bar{\epsilon})) = q\}.$$

Αν r είναι η ρίζα του δέντρου T , τότε:

$$\text{accept_assign}(\mathfrak{A}_\varphi, T) = \bigcup_{q \in \text{succ_states}(r)} \text{accept_assign}(r, q).$$

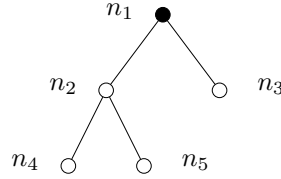
Πίνακας 5: Ο αλγόριθμος των Flum, Frick, Grohe για τον υπολογισμό των \mathfrak{A}_φ -δεκτών αναθέσεων ενός χρωματισμένου δέντρου T .

τον ταυτόχρονο (set-oriented) υπολογισμό των υποκείμενων αναθέσεων των επιτυχημένων εκτελέσεων. \square

Ο υπολογισμός για διατεταγμένα χρωματισμένα δέντρα. Δεδομένου ενός διατεταγμένου χρωματισμένου δέντρου $\mathcal{T} = ((T, s_1, s_2), c)$, οι υπολογισμοί είναι ανάλογοι με τους παραπάνω με τη διαφορά ότι υπάρχει διάκριση μεταξύ του αριστερού $s_1(n)$ και δεξιού $s_2(n)$ παιδιού ενός κόμβου n και έτσι η συνάρτηση μετάβασης ορίζεται σε πλειάδες τη μορφής $(q_1, q_2, (\gamma, \bar{\epsilon}))$ και όχι της μορφής $(\{q_1, q_2\}, (\gamma, \bar{\epsilon}))$. Οι τροποποιήσεις των παραπάνω τύπων έτσι ώστε να ταιριάζουν και για αυτή την περίπτωση, είναι τετριμμένες.

Ένα παράδειγμα. Πριν αποδείξουμε ότι τα σύνολα που υπολογίζονται στα τρία βήματα αντιστοιχούν στον αρχικό τους ορισμό, παραθέτουμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.9. Θεωρούμε ένα μη διατεταγμένο $\{b, w\}$ -δέντρο $\mathcal{T} = (T, s, c)$, με σύνολο κόμβων $T = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\}$, συνάρτηση παιδιών $s = \{n_1 \mapsto \{n_2, n_3\}, n_2 \mapsto \{n_4, n_5\}\}$ και συνάρτηση χρωματισμού $c = \{n_1 \mapsto b, n_2 \mapsto w, n_3 \mapsto w, n_4 \mapsto w, n_5 \mapsto w\}$. Μια διατεταγμένη αναπαράσταση του μη διατεταγμένου \mathcal{T} είναι:



Θεωρούμε το Γ_1 -αυτόματο \mathfrak{A}_φ του Παραδείγματος 3.4 (σελ. 20). Θυμίζουμε ότι οι επεκτάσεις που δέχεται το \mathfrak{A}_φ είναι αυτές που κωδικοποιούν μονοσύνολα που αποτελούνται από έναν κόμβο που έχει δύο παιδιά χρώματος w . Θέλουμε να υπολογίσουμε τις $\text{accept_sign}(\mathfrak{A}_\varphi, \mathcal{T})$.

Υπολογίζουμε αρχικά τις πιθανές καταστάσεις για τα φύλλα του δεδομένου δέντρου. Για τη συνάρτηση εκκίνησης του αυτομάτου \mathfrak{A}_φ , έχουμε ότι $\Delta((w, 0)) = q_w$ και $\Delta((w, 1)) = q_f$. Άρα $\text{pot_states}(n_i) = \{q_w, q_f\}$, για $i = 3, 4, 5$. Επίσης έχουμε ότι $\delta(\{q_w\}, (w, 1)) = q_a$, $\delta(\{q_w\}, (w, 0)) = q_w$, $\delta(\{q_f\}, (w, \epsilon)) = \delta(\{q_f, q_w\}, (w, \epsilon)) = q_f$, για $\epsilon \in \{0, 1\}$. Επομένως $\text{pot_states}(n_2) = \{q_w, q_f, q_a\}$. Και επειδή $\delta(\{q_w\}, (b, 1)) = q_a$, $\delta(\{q_w\}, (b, 0)) = q_b$, $\delta(\{q_f\}, (b, \epsilon)) = \delta(\{q_f, q_a\}, (b, \epsilon)) = \delta(\{q_f, q_w\}, (b, \epsilon)) = q_f$, για $\epsilon \in \{0, 1\}$ και $\delta(\{q_a, q_w\}, (b, 1)) = q_f$, $\delta(\{q_a, q_w\}, (b, 0)) = q_a$, είναι $\text{pot_states}(n_1) = \{q_b, q_f, q_a\}$.

Στο δεύτερο βήμα, αποκλείουμε εκείνες από τις πιθανές καταστάσεις ενός κόμβου $n \in T$ που δεν είναι επιτυχημένες ξεκινώντας από τη ρίζα n_1 . Μόνο η κατάσταση $q_a \in \text{pot_states}(n_1)$ είναι κατάσταση που αποδέχεται, έτσι $\text{succ_states}(n_1) = \{q_a\}$. Όπως παρατηρούμε από τις b -μεταβάσεις της δ , οδηγούμαστε σε κατάσταση q_a , με σύνολα καταστάσεων παιδιών $\{q_w\}$ και $\{q_a, q_w\}$. Επομένως $\text{succ_states}(n_2) = \{q_w, q_a\}$ και $\text{succ_states}(n_3) = \{q_w\}$. Επίσης οδηγούμαστε σε κατάσταση q_w και q_a στον κόμβο n_2 μόνο όταν οι κόμβοι n_4, n_5 βρίσκονται σε κατάσταση q_w ($\delta(\{q_w\}, (w, 1)) = q_a$, $\delta(\{q_w\}, (w, 0)) = q_w$). Δηλαδή $\text{succ_states}(n_i) = \{q_w\}$, όπου $i = 4, 5$.

Στο τελευταίο βήμα, ξεκινάμε από τα φύλλα καταλήγοντας στη ρίζα. Αρχικά υπολογίζουμε τις υποκείμενες αναθέσεις των επιτυχημένων καταστάσεων στα φύλλα. Είναι $\Delta((w, 0)) = q_w$ και $\text{assign}(n_i, 0) = [n_i]^0 = \emptyset$, επομένως $\text{accept_assign}(n_i, q_w) = \{\emptyset\}$, για $i = 3, 4, 5$. Επιπλέον, επειδή $\delta(\{q_w\}, (w, 1)) = q_a$ και $\text{assign}(n_2, 0) = [n_2]^1 = \{n_2\}$, είναι $\text{accept_assign}(n_2, q_a) = \{\{n_2\}\}$. Επίσης $\delta(\{q_w\}, (w, 0)) = q_w$ και έτσι $\text{accept_assign}(n_2, q_w) = \{\emptyset\}$. Οι επιτυχημένες μεταβάσεις στη ρίζα n_1 είναι αυτές που αντιστοιχούν στις ισότητες $\delta(\{q_w\}, (b, 1)) = q_a$ και $\delta(\{q_a, q_w\}, (b, 0)) = q_a$. Υπολογίζουμε τις $\text{accept_assign}(n_1, q_a) = \{\{n_1\}, \{n_2\}\}$. Προφανώς $\text{accept_assign}(\mathfrak{A}_\varphi, T) = \{\{n_1\}, \{n_2\}\}$ \diamond

3.4.2 Ορθότητα των υπολογισμών.

Θα αποδείξουμε ότι τα σύνολα $\text{pot_states}(n)$, $\text{succ_states}(n)$ και $\text{accept_assign}(n, q)$, για κάθε κόμβο $n \in T$ και $q \in \text{succ_states}(n)$ που υπολογίζονται με τη βοήθεια των παραπάνω εκφράσεων αντιστοιχούν στους αρχικούς ορισμούς των συνόλων αυτών. Οι αποδείξεις δίνονται για την περίπτωση των διατεταγμένων χρωματισμένων δέντρων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2. *Θεωρούμε ένα διατεταγμένο Γ -δέντρο $T = ((T, s_1, s_2), c)$ και ένα αυτόματο Γ_k -δέντρο $\mathfrak{A}_\varphi = (Q, \Delta, \delta, F)$. Για κάθε $n \in T$ και $q \in Q$, ισχύει: $q \in \text{pot_states}(n)$ αν υπάρχουν σύνολα $B_1, \dots, B_k \subseteq T$ τέτοια ώστε για την εκτέλεση $\rho_{(B_1, \dots, B_k)}$ του \mathfrak{A}_φ να είναι $\rho_{(B_1, \dots, B_k)}(n) = q$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (Με επαγωγή στο βάθος του δέντρου T .)

(\Rightarrow) Θεωρούμε ένα φύλλο $n \in T$. Επίσης θεωρούμε μια κατάσταση $q \in Q$ τέτοια ώστε $q \in \text{pot_states}(n)$. Από την έκφραση υπολογισμού του συνόλου $\text{pot_states}(n)$, έχουμε ότι η κατάσταση q είναι ίση με $\Delta((c(n), \bar{\epsilon}))$, για κάποιο $\bar{\epsilon} \in \{0, 1\}^k$. Θεωρούμε ότι $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)$. Υπολογίζουμε σύνολα $B_1, \dots, B_k \subseteq T$ τέτοια ώστε $n \in B_i$ αν $\epsilon_i = 1$. Προφανώς στις επεκτάσεις $(T; \bar{B})$ το χρώμα του κόμβου n είναι $(c(n), \bar{\epsilon})$ και άρα $\rho_{\bar{B}}(n) = \Delta((c(n), \bar{\epsilon})) = q$.

Θεωρούμε έναν εσωτερικό κόμβο $n \in T$ με $s_1(n) = n_1$ και $s_2(n) = n_2$. Θεωρούμε $q \in \text{pot_states}(n)$, δηλαδή για $q_i \in \text{pot_states}(n_i)$, $i = 1, 2$, και $\bar{\epsilon} \in \{0, 1\}^k$ είναι $q = \delta(q_1, q_2, (c(n), \bar{\epsilon}))$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι υπάρχουν σύνολα $B'_1, \dots, B'_k \subseteq T$ και $B''_1, \dots, B''_k \subseteq T$ τέτοια ώστε η τιμή της εκτέλεσης του αυτόματου \mathfrak{A}_φ να είναι $\rho_{\bar{B}'}(n_1) = q_1$ και $\rho_{\bar{B}''}(n_2) = q_2$. Υπολογίζουμε σύνολα $B_1, \dots, B_k \subseteq T$ που συμφωνούν με τους κόμβους των $B'_1, \dots, B'_k \subseteq T$ και $B''_1, \dots, B''_k \subseteq T$ στα υποδέντρα T_{n_1} και T_{n_2} ¹² αντιστοιχία, δηλαδή $\bar{B}|_{T_{n_1}} = \bar{B}'|_{T_{n_1}}$ και $\bar{B}|_{T_{n_2}} = \bar{B}''|_{T_{n_2}}$. Επιπλέον τα B_i υπολογίζονται έτσι ώστε $n \in B_i$ αν $\epsilon_i = 1$, για $i = 1, \dots, k$. Στις επεκτάσεις $(T; \bar{B})$, είναι $\rho_{\bar{B}}(n) = \delta(\rho_{\bar{B}'}(n_1), \rho_{\bar{B}''}(n_2), (c(n), \bar{\epsilon})) = q$.

(\Leftarrow) Θεωρούμε τυχαία σύνολα $B_1, \dots, B_k \subseteq T$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \in T$, $\rho_{\bar{B}}(n) \in \text{pot_states}(n)$. Αν ο n είναι φύλλο, είναι $\rho_{\bar{B}}(n) = \Delta((c(n), c_{\bar{B}}(n)))$. Ανάλογα αν ο n είναι εσωτερικός κόμβος, από τον ορισμό της εκτέλεσης και την επαγωγική υπόθεση προκύπτει εύκολα το ζητούμενο. \clubsuit

¹²Θυμίζουμε ότι συμβολίζουμε με T_n το υποδέντρο του T που έχει ρίζα τον κόμβο n και με T_n το σύνολο κόμβων του T_n .

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3. Θεωρούμε ένα διατεταγμένο Γ -δέντρο $\mathcal{T} = ((T, s_1, s_2), c)$ και ένα αυτόματο Γ_k -δέντρο $\mathfrak{A}_\varphi = (Q, \Delta, \delta, F)$. Για κάθε $n \in T$ και $q \in Q$, ισχύει: $q \in \text{succ_states}(n)$ ανν υπάρχουν σύνολα $B_1, \dots, B_k \subseteq T$ τέτοια ώστε η εκτέλεση $\rho_{\overline{B}}$ του \mathfrak{A}_φ να είναι επιτυχημένη και $\rho_{\overline{B}}(n) = q$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (Με επαγωγή στο βάθος του δέντρου \mathcal{T} .)

(\Rightarrow) Έστω $r \in T$ η ρίζα του δεδομένου δέντρου και έστω $q \in \text{succ_states}(r)$. Η $q \in \text{pot_states}(r)$, άρα υπάρχουν $B_1, \dots, B_k \subseteq T$ τέτοια ώστε $\rho_{\overline{B}}(r) = q$. Επίσης $q \in F$, δηλαδή η $\rho_{\overline{B}}$ είναι επιτυχημένη.

Θεωρούμε έναν κόμβο $n_1 \in T$, ο οποίος είναι το αριστερό παιδί ενός κόμβου n , δηλαδή $s_1(n) = n_1$, και $s_2(n) = n_2$. Έστω $q_1 \in \text{succ_states}(n_1)$, δηλαδή υπάρχουν $q_2 \in \text{pot_states}(n_2)$, $\bar{\epsilon} \in \{0, 1\}^k$ και $q \in \text{succ_states}(n)$ τ.ω. $\delta(q_1, q_2, (c(n), \bar{\epsilon})) = q$. Είναι $q_i \in \text{pot_states}(n_i)$, όπου $i = 1, 2$, δηλαδή υπάρχουν $\overline{B}', \overline{B}'' \in (\text{Pow}(T))^k$ τέτοια ώστε $\rho_{\overline{B}'}(n_1) = q_1$ και $\rho_{\overline{B}''}(n_2) = q_2$. Επίσης $q \in \text{succ_states}(n)$, δηλαδή υπάρχει $\overline{C} \in (\text{Pow}(T))^k$ τέτοια ώστε $\rho_{\overline{C}}(n) = q$ και η $\rho_{\overline{C}}$ είναι επιτυχημένη. Υπολογίζουμε σύνολα $B_1, \dots, B_k \subseteq T$ τέτοια ώστε $\overline{B}|_{T_{n_1}} = \overline{B}'|_{T_{n_1}}$, $\overline{B}|_{T_{n_2}} = \overline{B}''|_{T_{n_2}}$, $\overline{B}|_{T_n} = \overline{C}|_{T_n}$ ¹³ και $\overline{B}|_n = \text{assign}(n, \bar{\epsilon})$. Η εκτέλεση $\rho_{\overline{B}}$ είναι επιτυχημένη και $\rho_{\overline{B}}(n_1) = q_1$.

(\Leftarrow) Θεωρούμε σύνολα $B_1, \dots, B_k \subseteq T$. Για κάθε $n \in T$, αν η εκτέλεση $\rho_{\overline{B}}$ είναι επιτυχημένη, τότε $\rho_{\overline{B}}(n) \in \text{succ_states}(n)$. Πράγματι αν r είναι η ρίζα και η $\rho_{\overline{B}}$ είναι επιτυχημένη, είναι $\rho_{\overline{B}}(r) \in F$. Ανάλογα και για τους υπόλοιπους κόμβους. ♣

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.4. Θεωρούμε ένα διατεταγμένο Γ -δέντρο $\mathcal{T} = ((T, s_1, s_2), c)$ και ένα αυτόματο Γ_k -δέντρο $\mathfrak{A}_\varphi = (Q, \Delta, \delta, F)$. Για κάθε $n \in T$, $q \in Q$, $A_1, \dots, A_k \subseteq T_n$ ισχύει: $(A_1, \dots, A_k) \in \text{accept_assign}(n, q)$ ανν υπάρχουν σύνολα $B_1, \dots, B_k \subseteq T$ τέτοια ώστε $(B_1, \dots, B_k)|_{T_n} = (A_1, \dots, A_k)$, η εκτέλεση $\rho_{\overline{B}}$ του \mathfrak{A}_φ είναι επιτυχημένη, και $\rho_{\overline{B}}(n) = q$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (Με επαγωγή στο βάθος του δέντρου \mathcal{T} .)

(\Rightarrow) Θεωρούμε ένα φύλλο $n \in T$ και κατάσταση $q \in \text{succ_states}(n)$. Θεωρούμε επίσης την $(A_1, \dots, A_k) \in \text{accept_assign}(n, q)$. Είναι $(A_1, \dots, A_k) = \text{assign}(n, \bar{\epsilon})$, για $\bar{\epsilon}$ τέτοιο ώστε $\Delta((c(n), \bar{\epsilon})) = q$. Επειδή $q \in \text{succ_states}(n)$, υπάρχουν $C_1, \dots, C_k \subseteq T$, τέτοια ώστε η $\rho_{\overline{C}}$ να είναι επιτυχημένη εκτέλεση και $\rho_{\overline{C}}(n) = q$. Υπολογίζουμε σύνολα $B_1, \dots, B_k \subseteq T$ τέτοια ώστε $\overline{B}|_{T_n} = \overline{A}$ και $\overline{B}|_{T_n} = \overline{C}|_{T_n}$. Η εκτέλεση $\rho_{\overline{B}}$ είναι επιτυχημένη και $\rho_{\overline{B}}(n) = q$.

Θεωρούμε έναν εσωτερικό κόμβο $n \in T$ με $s_1(n) = n_1$ και $s_2(n) = n_2$ και θεωρούμε $q \in \text{succ_states}(n)$. Έστω ότι $(A_1, \dots, A_k) \in \text{accept_assign}(n, q)$. Δηλαδή υπάρχουν $B'_1, \dots, B'_k \subseteq T$ τέτοια ώστε $(B'_1, \dots, B'_k)|_{T_{n_1}} = (C'_1, \dots, C'_k)$, η εκτέλεση $\rho_{\overline{B}'}$ να είναι επιτυχημένη και $\rho_{\overline{B}'}(n_1) = q_1$, υπάρχουν $B''_1, \dots, B''_k \subseteq T$ τέτοια ώστε $(B''_1, \dots, B''_k)|_{T_{n_2}} = (C''_1, \dots, C''_k)$, η εκτέλεση $\rho_{\overline{B}''}$ να είναι επιτυχημένη και $\rho_{\overline{B}''}(n_2) = q_2$, και υπάρχει $\bar{\epsilon}$ τέτοιο ώστε $\delta(q_1, q_2, (c(n), \bar{\epsilon})) = q$, για τα οποία $(A_1, \dots, A_k) = (C'_1, \dots, C'_k) \cup (C''_1, \dots, C''_k) \cup \text{assign}(n, \bar{\epsilon})$. Επιπλέον επειδή $q \in \text{succ_states}(n)$, υπάρχει επιτυχημένη

¹³ Συμβολίζουμε με \overline{T}_n το σύνολο $T \setminus T_n$. Αν $(B_1, \dots, B_k)|_{T_n} = (C_1, \dots, C_k)|_{T_n}$, είναι $B_i \setminus T_n = C_i \setminus T_n$, για $i = 1, \dots, k$.

εκτέλεση $\rho_{\bar{C}}$, όπου $\bar{C} \in (\text{Pow}(T))^k$, τέτοια ώστε $\rho_{\bar{C}}(n) = q$. Υπολογίζουμε σύνολα $B_1, \dots, B_k \subseteq T$ τέτοια ώστε $\bar{B}|_{T_n} = \bar{A}$ και $\bar{B}|_{\bar{T}_n} = \bar{C}|_{\bar{T}_n}$. Η εκτέλεση $\rho_{\bar{B}}$ είναι επιτυχημένη και $\rho_{\bar{B}}(n) = q$.

(\Leftarrow) Για κάθε $n \in T$ και $q \in \text{succ_states}(n)$, θεωρούμε σύνολα $B_1, \dots, B_k \subseteq T$ τέτοια ώστε η $\rho_{\bar{B}}$ να είναι επιτυχημένη και $\rho_{\bar{B}}(n) = q$. Θεωρούμε σύνολα $A_1, \dots, A_k \subseteq T_n$, για τα οποία $(B_1, \dots, B_k)|_{T_n} = (A_1, \dots, A_k)$. Θα δείξουμε ότι $\bar{A} \in \text{succ_assign}(n, q)$.

Αν ο n είναι φύλλο, θεωρούμε το $\bar{\epsilon}$ για το οποίο $\Delta((c(n), \bar{\epsilon})) = q$. Η \bar{A} για την οποία $\bar{B}|_n = \bar{A}$ είναι ίση με $\text{assign}(n, \bar{\epsilon})$. Δηλαδή $\bar{A} \in \text{succ_assign}(n, q)$.

Υποθέτουμε ότι ο n είναι εσωτερικός κόμβος με $s_1(n) = n_1$, $s_2(n) = n_2$ και θεωρούμε ότι για την επιτυχημένη εκτέλεση $\rho_{\bar{B}}$ είναι $\rho_{\bar{B}}(n_i) = q_i$, $i = 1, 2$. Λόγω επαγωγικής υπόθεσης, τα $\bar{B}|_{T_{n_1}} = \bar{A}'$ και $\bar{B}|_{T_{n_2}} = \bar{A}''$, ανήκουν στα $\text{succ_assign}(n_1, q_1)$ και $\text{succ_assign}(n_2, q_2)$ αντίστοιχα. Προφανώς η \bar{A} για την οποία είναι $\bar{A} = \bar{B}|_{T_n}$ είναι ίση με $\bar{A}' \cup \bar{A}'' \cup \text{assign}(n, \bar{\epsilon})$, όπου $\bar{\epsilon}$ τέτοιο ώστε $\delta(q_1, q_2, (c(n), \bar{\epsilon})) = q = \rho_{\bar{B}}(n)$. Άρα $\bar{A} \in \text{succ_assign}(n, q)$. \clubsuit

3.4.3 Αποτελέσματα πολυπλοκότητας

Θα παρουσιάσουμε την ανάλυση του χρόνου εκτέλεσης του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe που δίνεται στα [13], [14]. Σύμφωνα με αυτή, οι αναθέσεις που ικανοποιούν έναν δεδομένο MSO-τύπο σε ένα χρωματισμένο δέντρο \mathcal{T} , υπολογίζονται σε χρόνο που είναι γραμμική συνάρτηση του μεγέθους $|\mathcal{T}|$ του δεδομένου δέντρου και του μεγέθους της εξόδου.

Το αρχικό μας πρόβλημα και τα βήματα επίλυσής του είναι δίνονται συνοπτικά στον Πίνακα 6. Παρουσιάζουμε αρχικά αναλυτικά κάποια βασικά σημεία του υπολογισμού.

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"> - Είσοδος: Γ-δέντρο \mathcal{T}, MSO-τύπος $\varphi(X_1, \dots, X_k)$. - Πρόβλημα: Υπολογισμός του $\text{sat_assign}(\varphi, \mathcal{T})$. <ol style="list-style-type: none"> 1. Υπολογισμός του Γ_k-αυτομάτου \mathfrak{A}_φ. 2. Υπολογισμός των $\text{pot_states}_{\mathfrak{A}_\varphi}(n)$, $n \in T$. 3. Υπολογισμός των $\text{succ_states}_{\mathfrak{A}_\varphi}(n)$, $n \in T$. 4. Υπολογισμός των $\text{accept_assign}_{\mathfrak{A}_\varphi}(n, q)$, $n \in T$, $q \in \text{succ_states}_{\mathfrak{A}_\varphi}(n)$. 5. Είναι $\text{sat_assign}(\varphi, \mathcal{T}) = \bigcup_{q \in \text{succ_states}_{\mathfrak{A}_\varphi}(r^{\mathcal{T}})} \text{accept_assign}_{\mathfrak{A}_\varphi}(r^{\mathcal{T}}, q)$. |
|---|

Πίνακας 6: Ο αλγόριθμος του [13] για το πρόβλημα της MSO-αποτίμησης σε χρωματισμένα δέντρα.

Σύνολα με στοιχεία k -πλειάδες από υποσύνολα του T : αναπαράστασή τους, μέγεθος της κωδικοποίησης, ορισμός της merge. Δεδομένου ενός MSO-τύπου

$\varphi(X_1, \dots, X_k)$, το $\text{sat_assign}(\varphi, T)$ είναι ένα σύνολο από k -πλειάδες $\bar{A} \in (\text{Pow}(T))^k$. Θυμίζουμε ότι το $\text{sat_assign}(\varphi, T)$ υπολογίζεται μέσω του bottom-up υπολογισμού των συνόλων $\text{accept_assign}(n, q)$, $n \in T$, $q \in \text{succ_states}(n)$. Τα $\text{accept_assign}(n, q)$ περιέχουν k -πλειάδες από υποσύνολα του T_n .

Δηλαδή ο υπολογισμός του $\text{sat_assign}(\varphi, T)$, βασίζεται στη διαχείριση συνόλων με στοιχεία k -πλειάδες από υποσύνολα του T . Στο [13], τα σύνολα αυτά αναπαρίστανται ως συνδεδεμένες λίστες. Πιο συγκεκριμένα, κάθε υποσύνολο του T αποθηκεύεται με τη μορφή συνδεδεμένης λίστας. Επίσης μια k -πλειάδα $\bar{A} = (A_1, \dots, A_k) \in (\text{Pow}(T))^k$, αναπαρίστανται ως ένα k -διάστατο διάνυσμα. Το i -οστό στοιχείο αυτού του διανύσματος είναι ένας δείκτης στη λίστα A_i . Ένα σύνολο R από k -διάστατα διανύσματα \bar{A} , αποθηκεύεται ως συνδεδεμένη λίστα. Είναι:

$$\|R\| = \sum_{\bar{A} \in R} \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

Για παράδειγμα αν το R είναι σύνολο από p k -διάστατα διανύσματα \bar{A} για τα οποία $|A_i| = l$, $i = 1, \dots, k$, τότε $\|R\| = p \cdot k \cdot l$.

Θεωρούμε δύο ξένα σύνολα T_1, T_2 και θεωρούμε δύο μη κενά σύνολα R_1, R_2 με k -πλειάδες από υποσύνολα των T_1, T_2 αντίστοιχα. Η πράξη $\text{merge}(R_1, R_2)$, ορίζεται ως εξής:

$$\text{merge}(R_1, R_2) = \{\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \mid \bar{A}_1 \in R_1, \bar{A}_2 \in R_2\}.$$

Στο [14] δίνεται αναλυτικά η διαδικασία (Αλγόριθμος 8, σελίδα 35) για τη υλοποίηση της πράξης $\text{merge}(R_1, R_2)$. Σημειώνεται ότι τα ορίσματα R_1, R_2 ενσωματώνονται στο αποτέλεσμα και δεν είναι πλέον διαθέσιμα μετά τον υπολογισμό της εξόδου (δηλαδή η αντίστοιχη διαδικασία είναι αυτό που ονομάζεται destructive procedure). Ο αλγόριθμος θεωρεί για κάθε πλειάδα $\bar{A}_1 \in R_1$ τις πλειάδες $\bar{A}_2 \in R_2$ (μέσω ενός διπλού loop) και πραγματοποιεί την ένωσή τους $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$. Κάθε τέτοια ένωση πραγματοποιείται σε σταθερό χρόνο. Λόγω της ενσωμάτωσης των ορισμάτων στο αποτέλεσμα, πρέπει κάθε φορά να κατασκευάζουμε έναν κατάλληλο αριθμό από αντίγραφα των στοιχείων των συνόλων R_1, R_2 . Πιο συγκεκριμένα κάθε στοιχείο του R_1 που δεν είναι το τελευταίο της αντίστοιχης λίστας ενώνεται με τα αντίγραφα των στοιχείων του R_2 (γιατί αυτά πρέπει να είναι διαθέσιμα ώστε να γίνουν οι ενώσεις με τα υπόλοιπα στοιχεία του R_1). Ενώ το τελευταίο ενώνεται με τα ίδια τα στοιχεία του R_2 και όχι με αντίγραφά τους (καθώς τα στοιχεία του R_2 δε θα ξαναχρησιμοποιηθούν). Ανάλογα πραγματοποιούνται οι ενώσεις των στοιχείων του R_2 με τα στοιχεία του R_1 . Με τον τρόπο αυτό όλα τα στοιχεία των R_1, R_2 ενσωματώνονται στο αποτέλεσμα και έτσι μειώνεται το κόστος των αντίστοιχων αντιγραφών. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αυτό συντελεί στην επίτευξη της επιθυμητής πολυπλοκότητας.

Παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο υπολογισμού της merge μέσω ενός παραδείγματος. Θεωρούμε ότι $R_1 = \{\bar{A}_1, \bar{B}_1\}$ και $R_2 = \{\bar{A}_2, \bar{B}_2\}$, όπου $\bar{A}_i = (A_i^1, A_i^2, A_i^3)$ και $\bar{B}_i = (B_i^1, B_i^2, B_i^3)$, $i = 1, 2$ (δηλαδή $k = 3$). Θεωρούμε επίσης ότι $|A_1^j| = |B_1^j| = n$, $|A_2^j| = |B_2^j| = m$, $j = 1, 2, 3$. Δηλαδή $\|R_1\| = 2 \cdot 3 \cdot n = 6 \cdot n$ και $\|R_2\| = 2 \cdot 3 \cdot m = 6 \cdot m$. Όπως είναι προφανές $\text{merge}(R_1, R_2) = \{\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2, \bar{A}_1 \cup \bar{B}_2, \bar{B}_1 \cup \bar{A}_2, \bar{B}_1 \cup \bar{B}_2\}$. Δεδομένου ότι $A_i, B_i \subset T_i$, $i = 1, 2$, και $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, είναι $\|\text{merge}(R_1, R_2)\| = 4 \cdot 3 \cdot (n+m) = 12 \cdot (n+m)$.

Ο αλγόριθμος δουλεύει ως εξής: θεωρεί αρχικά τις πλειάδες \bar{A}_1, \bar{A}_2 . Κατασκευάζει τα αντίγραφα τους \bar{A}'_1, \bar{A}'_2 , υπολογίζει την ένωση $\bar{A}'_1 \cup \bar{A}'_2 = (A_1^{1'} \cup A_2^{1'}, A_1^{2'} \cup A_2^{2'}, A_1^{3'} \cup A_2^{3'})$ και την προσθέτει στο αποτέλεσμα. Στη συνέχεια, ακολουθώντας την διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω υπολογίζονται και προστίθενται στο τελικό αποτέλεσμα οι ενώσεις $\bar{A}_1 \cup \bar{B}'_2, \bar{B}'_1 \cup \bar{A}_2, \bar{B}_1 \cup \bar{B}_2$.

Η κατασκευή αντίγραφου για ένα αντικείμενο X γίνεται σε χρόνο $\|X\|$. Στις περιπτώσεις που εξετάζουμε, ο χρόνος για τον υπολογισμό της $\text{merge}(R_1, R_2)$ μπορεί να θεωρηθεί ίσος με:

$$O(k(1 + \|\text{merge}(R_1, R_2)\| - \|R_1\| - \|R_2\|)).$$

Σημειώνουμε επίσης ότι ισχύει $\|\text{merge}(R_1, R_2)\| \geq \|R_1\| + \|R_2\|$.

Χρήσιμοι ορισμοί και παρατηρήσεις για τον υπολογισμό. Ορίζουμε τις υποκείμενες αναθέσεις ενός κόμβου n , χρώματος $c(n)$, αναφορικά με ένα τρίγωνο καταστάσεων (q, q_1, q_2) ως εξής:

$$\text{Assigns}_{q, q_1, q_2}(n) = \{\text{assign}(n, \bar{c}) \mid \bar{c} \in c(n)\text{-add_colors}_{q, q_1, q_2}\}.$$

Ανάλογα ορίζονται τα υποκείμενα επιπρόσθετα χρώματα ενός κόμβου n αναφορικά με ένα τρίγωνο καταστάσεων (q, q_1, q_2) : αυτά ταυτίζονται με τα $c(n)\text{-add_colors}_{q, q_1, q_2}$:

$$\text{Add_Colors}_{q, q_1, q_2}(n) = c(n)\text{-add_colors}_{q, q_1, q_2}.^{14}$$

Προφανώς για τα $(q, q_1, q_2) \notin c(n)\text{-states_triangles}$ είναι $\text{Add_Colors}_{q, q_1, q_2}(n) = \emptyset$ και $\text{Assigns}_{q, q_1, q_2}(n) = \emptyset$.

Θεωρούμε ένα εσωτερικό κόμβο n με παιδιά $s_i(n) = n_i, i = 1, 2$. Θεωρούμε επίσης τα σύνολα $\text{succ_states}(n)$ και $\text{succ_states}(n_i), i = 1, 2$. Οι πλειάδες $(q, q_1, q_2) \in c(n)\text{-states_triangles}$ για τις οποίες $q \in \text{succ_states}(n), q_i \in \text{succ_states}(n_i)$ αποτελούν τα $\text{succ_states_triangles}(n)$.

Θυμίζουμε ότι οι $\text{accept_assign}(n, q)$ είναι οι περιορισμοί \bar{C} στο \mathcal{T}_n των \mathfrak{A}_φ -δεκτών αναθέσεων \bar{B} , για τις οποίες ισχύει $\rho_{\bar{B}}(n) = q$. Ανάλογα ορίζουμε τις $\text{accept_assign}(n, (q, q_1, q_2))$ ως τους περιορισμούς \bar{C} στο \mathcal{T}_n των \mathfrak{A}_φ -δεκτών αναθέσεων \bar{B} , για τις οποίες ισχύει $\rho_{\bar{B}}(n) = q$ και $\rho_{\bar{B}}(n_i) = q_i, i = 1, 2$. Προφανώς είναι

$$\text{accept_assign}(n, q) = \bigcup_{(q, q_1, q_2) \in \text{succ_states_triangles}(n)} \text{accept_assign}(n, (q, q_1, q_2)).$$

Παρατηρούμε ότι όταν $(q, q_1, q_2) \notin \text{succ_states_triangles}(n)$, είναι $\text{accept_assign}(n, (q, q_1, q_2)) = \emptyset$. Για κάθε $(q, q_1, q_2) \in \text{succ_states_triangles}(n)$, είναι $\text{accept_assign}(n, (q, q_1, q_2)) \neq \emptyset$:

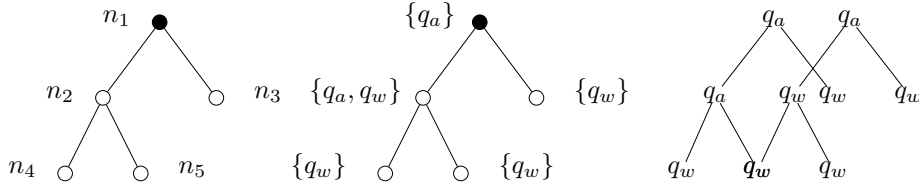
$$\begin{aligned} \text{accept_assign}(n, (q, q_1, q_2)) = \{ \bar{A} \cup \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \mid & \bar{A} \in \text{Assigns}_{q, q_1, q_2}(n), \\ & \bar{A}_1 \in \text{accept_assign}(n_1, q_1) \\ & \bar{A}_2 \in \text{accept_assign}(n_2, q_2) \}. \end{aligned}$$

¹⁴Είναι $\text{Assigns}_{q, q_1, q_2}(n) = \{\text{assign}(n, \bar{c}) \mid \bar{c} \in \text{Add_Colors}_{q, q_1, q_2}(n)\}$.

Δηλαδή με τη βοήθεια της `merge`:

$$\begin{aligned} \text{accept_assign}(n, (q, q_1, q_2)) = & \text{merge}(\text{merge}(\text{Assigns}_{q, q_1, q_2}(n), \\ & \text{accept_assign}(n_1, q_1)), \\ & \text{accept_assign}(n_2, q_2)). \end{aligned}$$

Για το Παράδειγμα 3.9 (σελ. 32) θυμίζουμε ότι είναι $\text{succ_states}(n_1) = \{q_a\}$, $\text{succ_states}(n_2) = \{q_w, q_a\}$ και $\text{succ_states}(n_i) = \{q_w\}$, όπου $i = 3, 4, 5$. Τα αντίστοιχα επιτυχημένα τρίγωνα καταστάσεων είναι $\text{succ_states_triangles}(n_1) = \{(q_a, q_a, q_w), (q_a, q_w, q_w)\}$, $\text{succ_states_triangles}(n_2) = \{(q_a, q_w, q_w), (q_w, q_w, q_w)\}$:



Επίσης είναι $b_add_colors_{q_a, q_a, q_w} = \{0\}$, $\gamma_add_colors_{q_a, q_w, q_w} = \{1\}$, $\gamma = b, w$, $w_add_colors_{q_w, q_w, q_w} = \{0\}$. Δηλαδή $\text{Assigns}_{q_a, q_a, q_w}(n_1) = \{\emptyset\}$, $\text{Assigns}_{q_a, q_w, q_w}(n_1) = \{\{n_1\}\}$, $\text{Assigns}_{q_a, q_w, q_w}(n_2) = \{\{n_2\}\}$, $\text{Assigns}_{q_w, q_w, q_w}(n_2) = \{\emptyset\}$. Είχαμε υπολογίσει ότι $\text{accept_assign}(n_i, q_w) = \{\emptyset\}$, για $i = 3, 4, 5$. Επίσης $\text{accept_assign}(n_2, q_a) = \{\{n_2\}\}$, $\text{accept_assign}(n_2, q_w) = \{\emptyset\}$. Παρατηρούμε ότι $\text{accept_assign}(n_1, q_a) = \text{accept_assign}(n_1, (q_a, q_w, q_w)) \cup \text{accept_assign}(n_1, (q_a, q_a, q_w)) = \{\{n_1\}, \{n_2\}\}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.9. Όπως έχουμε ήδη δει, είναι:

$$\text{accept_assign}(n) = \bigcup_{q^* \in \text{succ_states}(n)} \text{accept_assign}(n, q^*),$$

όπου

$$\text{accept_assign}(n, q^*) = \bigcup_{(q^*, q_1, q_2) \in \text{succ_states_triangles}(n)} \text{accept_assign}(n, (q^*, q_1, q_2)).$$

Ορίζουμε το σύνολο $\text{succ_states_triangles}(n, q)$ με στοιχεία τρίγωνα καταστάσεων t με $\pi_1(t) = q$. Η ισότητα $\text{succ_states_triangles}(n) = \bigcup_{q \in \text{succ_states}(n)} \text{succ_states_triangles}(n, q)$ είναι προφανής και οδηγεί στο εξής:

$$\text{accept_assign}(n) = \bigcup_{(q, q_1, q_2) \in \text{succ_states_triangles}(n)} \text{accept_assign}(n, (q, q_1, q_2)).$$

□

Πολυπλοκότητα του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe. Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe δίνεται στο πατακάτω θεώρημα. Η απόδειξη του θεωρήματος περιλαμβάνει την ανάλυση της πολυπλοκότητας σε κάθε βήμα του αλγορίθμου (βλέπε Πίνακα 6 σελ. 35).

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2 ([13]). Υπάρχει μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ και ένας αλγόριθμος που επιλύει το πρόβλημα της αποτίμησης για MSO-τύπους σε χρωματισμένα δέντρα σε χρόνο

$$f(\|\varphi\|) \cdot (|T| + \|\text{sat_assign}(\varphi, T)\|).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει η κατασκευή του αυτομάτου \mathfrak{A}_φ γίνεται αναδρομικά μέσω της σύνθεσης των αυτομάτων που αντιστοιχούν στους υποτύπους του φ και έχει σημαντικό υπολογιστικό κόστος που εξαρτάται από το $\|\varphi\|$. Δηλαδή το βήμα 1 (Πίνακας 6) πραγματοποιείται σε χρόνο $f_1(\|\varphi\|)$, για κατάλληλη συνάρτηση $f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Θεωρούμε ότι $|Q| = c_Q$ και ότι c_δ είναι ο χρόνος που απαιτείται για τον υπολογισμό μιας τιμής της δ . Αν ο $n \in T$ είναι εσωτερικός κόμβος, ο υπολογισμός του $\text{pot_states}(n)$ απαιτεί χρόνο το πολύ $c_Q^2 \cdot 2^k \cdot c_\delta$:

1. $\text{pot_states}(n) = \emptyset$
2. **forall** $q_1 \in \text{pot_states}(n_1), q_2 \in \text{pot_states}(n_2)$ **do**
3. **forall** $\bar{\epsilon} \in \{0, 1\}^k$ **do**
4. $\text{pot_states}(n) = \text{pot_states}(n) \cup \{\delta(q_1, q_2, (c(n), \bar{\epsilon}))\}$
5. **enddo**
6. **enddo**

Δηλαδή ο υπολογισμός των $\text{pot_states}(n)$, $n \in T$ (Πίνακας 6, βήμα 2) γίνεται σε χρόνο το πολύ $(c_Q^2 \cdot 2^k \cdot c_\delta) \cdot |T|$. Παρατηρούμε ότι ανάλογα πραγματοποιείται ο υπολογισμός των $\text{succ_states}(n)$, $n \in T$ (Πίνακας 6, βήμα 3) και απαιτεί χρόνο το πολύ $(c_Q^3 \cdot 2^k \cdot c_\delta) \cdot |T|$. Έτσι τα βήματα 2 και 3 απαιτούν συνολικά χρόνο $f_2(\|\varphi\|) \cdot |T|$.

Απομένει να υπολογίσουμε τον χρόνο που απαιτείται για το βήμα 4 του Πίνακα 6. Στο Σχήμα 2 παρουσιάζεται η διαδικασία που δίνεται στο [13] για τον υπολογισμό των $\text{accept_assign}(n, q)$, όπου $q \in \text{succ_states}(n)$ και n εσωτερικός κόμβος με παιδιά $s_i(n) = n_i$, $i = 1, 2$. Τα $\text{accept_assign}(n_i, q_i)$, όπου $q_i \in \text{succ_states}(n_i)$, $i = 1, 2$, θεωρούνται γνωστά. Θεωρούμε ένα συγκεκριμένο ζεύγος $(q_1, q_2) \in \text{succ_states}(n_1) \times \text{succ_states}(n_2)$ και αναλύουμε τον υπολογισμό: υπολογίζονται αρχικά οι $\text{Assigns}_{q, q_1, q_2}(n)$ (υπολογισμός του A , βήματα 3-8). Αν για τον υπολογισμό κάθε k -πλειάδας $\text{assign}(n, \bar{\epsilon})$ απαιτούνται k βήματα, ο χρόνος που απαιτείται για τον υπολογισμό του $\text{Assigns}_{q, q_1, q_2}(n)$ είναι το πολύ $2^k \cdot (c_\delta + k)$. Αν $A = \text{Assigns}_{q, q_1, q_2}(n) \neq \emptyset$, υπολογίζεται το σύνολο $\text{merge}(\text{merge}(A, \text{accept_assign}(n_1, q_1)), \text{accept_assign}(n_2, q_2))$. Θυμίζουμε ότι τα ορίσματα μιας πράξης merge ενσωματώνονται στο αποτέλεσμα της πράξης. Έτσι πριν από κάθε τέτοιο υπολογισμό θα πρέπει να κατασκευάζουμε αντίγραφα των $\text{accept_assign}(n_i, q_i)$, $i = 1, 2$. Η κατασκευή των αντιγράφων απαιτεί χρόνο

$$\|\text{accept_assign}(n_1, q_1)\| + \|\text{accept_assign}(n_2, q_2)\|.$$

Ο υπολογισμός του $\text{accept_assign}(n, (q, q_1, q_2)) = \text{merge}(\text{merge}(A, \text{accept_assign}(n_1, q_1)), \text{accept_assign}(n_2, q_2))$ γίνεται σε χρόνο

$$c_m \cdot (\|\text{accept_assign}(n, (q, q_1, q_2))\| - \|A\| - \|\text{accept_assign}(n_1, q_1)\| - \|\text{accept_assign}(n_2, q_2)\|).$$

```

1.  accept_assign(n, q) = ∅
2.  forall q1 ∈ succ_states(n1), q2 ∈ succ_states(n2) do
3.      A = ∅
4.      forall  $\bar{\epsilon} \in \{0, 1\}^k$  do
5.          if  $\delta(q_1, q_2, (c(n), \bar{\epsilon})) = q$  then
6.              A = A ∪ {assign(n,  $\bar{\epsilon}$ )}
7.          endif
8.      enddo
9.      if A ≠ ∅ then
10.         accept_assign(n, q) = accept_assign(n, q) ∪
11.                                merge(merge(A, A1), A2)
12.     endif
13. enddo

```

Σχήμα 2: Ο υπολογισμός του $\text{accept_assign}(n, q)$. Θεωρήσαμε ότι $A_i = \text{accept_assign}(n_i, q_i)$, $i = 1, 2$.

Έτσι, σε έναν εσωτερικό κόμβο n ο χρόνος που απαιτείται για τον υπολογισμό των αντίστοιχων συνόλων $\text{Assigns}_{q, q_1, q_2}(n)$, τη δημιουργία αντιγράφων των $\text{accept_assign}(n_i, q_i)$, $q_i \in \text{succ_states}(n_i)$ $i = 1, 2$ ¹⁵ κάθε φορά που εκτελείται μια πράξη merge ¹⁶ και για τον υπολογισμό των αντίστοιχων πράξεων merge είναι:

$$\begin{aligned}
 & c_Q^3 \cdot 2^k \cdot (c_\delta + k) && (\text{υπολογισμός των } \text{Assigns}_{q, q_1, q_2}(n)) \\
 & + c_Q^3 && (\text{έλεγχος αν } \text{Assigns}_{q, q_1, q_2}(n) \neq \emptyset) \\
 & + c_1 \cdot \left(\sum_{\substack{(q_1, q_2), \\ (q, q_1, q_2) \in \text{succ_states_triangles}(n)}}} (\|\text{accept_assign}(n_1, q_1)\| + \|\text{accept_assign}(n_2, q_2)\|) \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{q_1 \in \text{succ_states}(n_1)} \|\text{accept_assign}(n_1, q_1)\| \right)
 \end{aligned}$$

¹⁵Θεωρείται ότι αυτά χρησιμοποιούνται μια φορά όπως είναι, δηλαδή χωρίς να δημιουργήσουμε τα αντίστοιχα αντίγραφα.

¹⁶Είδαμε ότι έχουμε εκτέλεση μια πράξης merge κάθε φορά που ένα σύνολο $\text{Assigns}_{q, q_1, q_2}(n)$ είναι μη κενό. Όπως αναλύσαμε παραπάνω αυτό ισχύει αν $(q, q_1, q_2) \in \text{succ_states_triangles}(n)$.

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{q_2 \in \text{succ_states}(n_2)} \|\text{accept_assign}(n_2, q_2)\| \\
 & \hspace{15em} (\delta\eta\mu\iota\upsilon\rho\gamma\acute{\iota}\alpha \ \alpha\upsilon\tau\iota\gamma\rho\acute{\alpha}\phi\omega\upsilon\upsilon) \\
 & + c_2 \cdot \left(\sum_{(q, q_1, q_2) \in \text{succ_states_triangles}(n)} (\|\text{accept_assign}(n, (q, q_1, q_2))\| - \right. \\
 & \hspace{15em} \|\text{Assigns}_{q, q_1, q_2}(n)\|) - \\
 & - \sum_{\substack{(q_1, q_2), \\ (q, q_1, q_2) \in \text{succ_states_triangles}(n)}} (\|\text{accept_assign}(n_1, q_1)\| + \\
 & \hspace{15em} \|\text{accept_assign}(n_2, q_2)\|) \Big). \\
 & \hspace{15em} (\upsilon\pi\omicron\lambda\omicron\gamma\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma \ \text{merge})
 \end{aligned}$$

Θεωρούμε ότι $T(n)$ είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να υπολογιστούν οι $\text{accept_assign}(n)$. Αποδεικνύεται με επαγωγή ότι

$$T(n) \leq g(\|A\|) \cdot |T_n| + c \cdot \|\text{accept_assign}(n)\|,$$

όπου $g(\|A\|) = c_Q^3 \cdot 2^k \cdot (c_\delta + k) + c_Q^3$ και $c = c_1 + c_2$. Στη συνέχεια δίνονται τα βασικά σημεία αυτής της απόδειξης.

Σημειώνουμε ότι χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι οι ενώσεις $\text{accept_assign}(n) = \cup_{q \in \text{succ_states}(n)} \text{accept_assign}(n, q)$, $n \in T$ είναι ξένες ενώσεις¹⁷ και έτσι είναι

$$\sum_{q \in \text{succ_states}(n)} \|\text{accept_assign}(n, q)\| = \|\text{accept_assign}(n)\|.$$

Επίσης η ένωση $\text{accept_assign}(n) = \cup_{(q, q_1, q_2) \in \text{succ_states_triangles}(n)} \text{accept_assign}(n, (q, q_1, q_2))$, $n \in T$, είναι ξένη ένωση και έτσι:

$$\sum_{(q, q_1, q_2) \in \text{succ_states_triangles}(n)} \|\text{accept_assign}(n, (q, q_1, q_2))\| = \|\text{accept_assign}(n)\|.$$

Με βάση την παραπάνω ανάλυση του χρόνου που απαιτείται για τον υπολογισμό των $\text{Assigns}_{q, q_1, q_2}(n)$, τον υπολογισμό αντιγράφων και τον υπολογισμό των **merge**, καταλήγουμε ότι για τον χρόνο $T(n)$ ισχύει:

¹⁷Πράγματι για $q, q' \in \text{succ_states}(n)$ με $q \neq q'$, είναι $\text{accept_assign}(n, q) \cap \text{accept_assign}(n, q') = \emptyset$. Θυμίζουμε ότι τα $\text{accept_assign}(n, q)$ είναι σύνολα από πλείαδες $\overline{C} \in (\text{Pow}(T_n))^k$. Για τις $\overline{C} \in \text{accept_assign}(n, q)$, $\overline{C}' \in \text{accept_assign}(n, q')$, δεν μπορεί να είναι $\overline{C} = \overline{C}'$, γιατί τότε για τις επεκτάσεις $(T; \overline{C}) = (T; \overline{C}')$ θα είναι $\rho_{(T; \overline{C})} \neq \rho_{(T; \overline{C}'})$. Άτοπο, το αυτόματο \mathfrak{A}_φ είναι ντετερμινιστικό.

$$\begin{aligned}
 T(n) &\leq g(\|A\|) \\
 &\quad + (c_1 - c_2) \cdot \sum_{\substack{(q_1, q_2), \\ (q, q_1, q_2) \in \text{succ_states_triangles}(n)}}} (\|\text{accept_assign}(n_1, q_1)\| + \\
 &\quad \|\text{accept_assign}(n_2, q_2)\|) \\
 &\quad - c_1 \cdot (\|\text{accept_assign}(n_1)\| + \|\text{accept_assign}(n_2)\|) \\
 &\quad + c_2 \cdot \|\text{accept_assign}(n)\| \\
 &\quad + T(n_1) + T(n_2).
 \end{aligned}$$

Από την επαγωγική υπόθεση, για $i = 1, 2$, έχουμε ότι:

$$T(n_i) \leq g(\|A\|) \cdot |T_{n_i}| + (c_1 + c_2) \cdot \|\text{accept_assign}(n_i)\|.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι για τον όρο

$$S = \sum_{\substack{(q_1, q_2), \\ (q, q_1, q_2) \in \text{succ_states_triangles}(n)}}} (\|\text{accept_assign}(n_1, q_1)\| + \|\text{accept_assign}(n_2, q_2)\|),$$

ισχύουν

$$S \leq \|\text{accept_assign}(n)\|$$

και

$$S \geq \|\text{accept_assign}(n_1)\| + \|\text{accept_assign}(n_2)\|.$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι με κατάλληλη σύνθεση των παραπάνω προκύπτει άμεσα η επιθυμητή πολυπλοκότητα. ♣

3.5 Μικρές παραλλαγές του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe

Όπως είδαμε αναλυτικά στην προηγούμενη ενότητα, η συνάρτηση f στην έκφραση του Θεωρήματος 3.2 καθορίζεται στην ουσία από το μέγεθος του αυτομάτου \mathfrak{A}_φ στο οποίο μεταφράζεται ο αρχικός τύπος φ . Είδαμε σε προηγούμενη ενότητα, ότι το μέγεθος του αυτομάτου \mathfrak{A}_φ είναι γενικά μια υπερεκθετική συνάρτηση που εξαρτάται από τον αριθμό των εναλλαγών των ποσοδεικτών στον τύπο φ .

Στις μικρές παραλλαγές του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe, που συζητάμε σε αυτή την ενότητα, προσπαθούμε από τη μία να προδιορίσουμε ακριβώς τα τμήματα εκείνα του αυτομάτου \mathfrak{A}_φ που χρειάζονται στους υπολογισμούς και από την άλλη να μειώσουμε τον αριθμό των φορών που ανατρέχουμε στο αυτόματο \mathfrak{A}_φ για την ανάκτηση μιας τιμής των συναρτήσεων Δ, δ του αυτομάτου.

Σημειώνουμε ότι οι παραλλαγές αυτές είναι γενικές βελτιστοποιήσεις. Δηλαδή εκτός από τον αλγόριθμο των Flum, Frick, Grohe, μπορούν να εφαρμοστούν για το σύνολο των διαφορετικών προσεγγίσεων επίλυσης του προβλήματος αυτομάτων.

3.5.1 Οι χρήσιμες μεταβάσεις του δεδομένου αυτομάτου \mathfrak{A}_φ : προκαταρκτικό στάδιο βελτιστοποίησης

Ορίζουμε τις χρήσιμες μεταβάσεις του δεδομένου bottom-up ντετερμινιστικού Γ_k αυτομάτου \mathfrak{A}_φ .

Οι χρήσιμες μεταβάσεις του δεδομένου αυτομάτου \mathfrak{A}_φ . Θεωρούμε το bottom-up ντετερμινιστικό Γ_k αυτόματο $\mathfrak{A}_\varphi = (Q, \Delta, \delta, F)$. Θυμίζουμε ότι μεταβάσεις του αυτομάτου είναι το σύνολο $\text{transitions}_\varphi = \{(q, q_1, q_2, \gamma, \bar{\epsilon}) \mid \delta(q_1, q_2, (\gamma, \bar{\epsilon})) = q\}$ και ότι οι μεταβάσεις εκκίνησης είναι το σύνολο $\text{start_transitions}_\varphi = \{(q, \gamma, \bar{\epsilon}) \mid \Delta((\gamma, \bar{\epsilon})) = q\}$. Οι *χρήσιμες μεταβάσεις του αυτομάτου \mathfrak{A}_φ* ορίζονται αναδρομικά: κάθε μετάβαση $(q, q_1, q_2, \gamma, \bar{\epsilon})$ του συνόλου $\text{transitions}_\varphi$ με $q \in F$ είναι μια χρήσιμη μετάβαση. Αν η $(q, q_1, q_2, \gamma, \bar{\epsilon})$ είναι χρήσιμη μετάβαση, τότε χρήσιμες μεταβάσεις είναι επίσης οι $(q_i, q_{i1}, q_{i2}, \gamma_i, \bar{\epsilon}_i)$ και οι $(q_i, \gamma_i, \bar{\epsilon}_i)$, $i = 1, 2$. Συμβολίζουμε τις χρήσιμες μεταβάσεις του αυτομάτου \mathfrak{A}_φ με $\text{transitions}_{\mathfrak{A}_\varphi}^*$ και $\text{start_transitions}_{\mathfrak{A}_\varphi}^*$. Προφανώς η έννοια επεκτείνεται φυσικά και για τα τρίγωνα καταστάσεων. *Χρήσιμα τρίγωνα καταστάσεων* είναι τα υποκείμενα τρίγωνα καταστάσεων των χρήσιμων μεταβάσεων.

Μείωση του μεγέθους του \mathfrak{A}_φ : μια προκατακτική βελτιστοποίηση. Παρατηρούμε ότι θεωρώντας μόνο τις χρήσιμες μεταβάσεις του \mathfrak{A}_φ μειώνεται το μέγεθος του συνόλου των δεδομένων μεταβάσεων. Η βελτιστοποίηση αυτή σχολιάζεται αναλυτικότερα στη συνέχεια με τη βοήθεια παραδειγμάτων.

3.5.2 Τα τρίγωνα καταστάσεων ενός κόμβου: η states triangle-based εκδοχή του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe.

Θυμίζουμε ότι στην προηγούμενη ενότητα παρατηρήσαμε τη σημασία του υπολογισμού των $\text{succ_states_triangles}(n)$ κατά το τρίτο βήμα του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe:

$$\text{accept_assign}(n) = \bigcup_{(q, q_1, q_2) \in \text{succ_states_triangles}(n)} \text{accept_assign}(n, (q, q_1, q_2)).$$

Ορίζουμε στην υποενότητα αυτή τυπικά την έννοια των $\text{succ_states_triangles}(n)$ και εισάγουμε την εντελώς ανάλογη έννοια των $\text{pot_states_triangles}(n)$.

Πιθανά και επιτυχημένα τρίγωνα καταστάσεων σε έναν κόμβο. Τα πιθανά και επιτυχημένα τρίγωνα καταστάσεων ενός κόμβου, ορίζονται:

$$\begin{aligned} \text{pot_states_triangles}(\mathfrak{A}_\varphi, n) &= \{(\varrho(n), \varrho(n_1), \varrho(n_2)) \mid \varrho \in \text{runs}(\mathfrak{A}_\varphi, T)\}, \\ \text{succ_states_triangles}(\mathfrak{A}_\varphi, n) &= \{(\varrho(n), \varrho(n_1), \varrho(n_2)) \mid \varrho \in \text{succ_runs}(\mathfrak{A}_\varphi, T)\}, \end{aligned}$$

όπου ο n θεωρείται εσωτερικός κόμβος με $s_i(n) = n_i$, $i = 1, 2$.

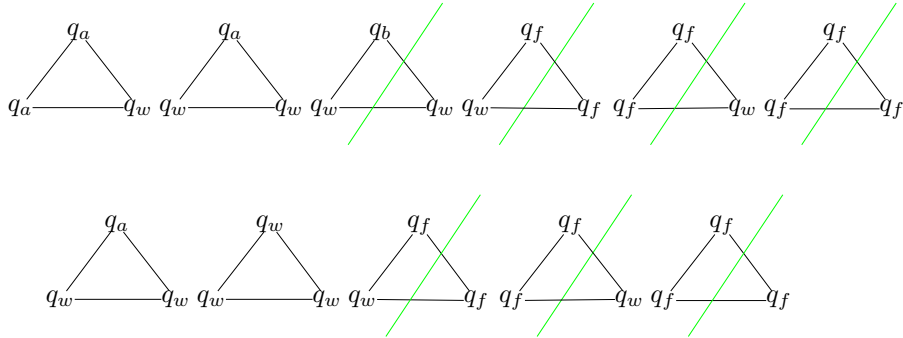
Όταν ο n είναι φύλλο, οι αντίστοιχες έννοιες ταυτίζονται με τις $c(n)$ -καταστάσεις εκκίνησης και τις επιτυχημένες καταστάσεις του n αντίστοιχα.

Triangle-based εκδοχή του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe. Ονομάζουμε triangle-based εκδοχή του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe, τον αλγόριθμο που αντί για καταστάσεις υπολογίζει τρίγωνα καταστάσεων στα δύο πρώτα βήματα, δηλαδή υπολογίζει τα σύνολα: $\text{pot_states_triangles}(\mathcal{A}_\varphi, n)$, $\text{succ_states_triangles}(\mathcal{A}_\varphi, n)$.

Ο υπολογισμός. Ο υπολογισμός δίνεται αναλυτικά στον Πίνακα 7 (σελ. 45). Θεωρούμε ότι το αυτόματο δίνεται ως σύνολα γ_start_states , $\gamma_states_triangles$, $\gamma_add_colors_q$, $\gamma_add_colors_{q,q_1,q_2}$. Χρησιμοποιούμε τα γ_start_states , $\gamma_states_triangles$ στα δύο πρώτα βήματα, ενώ με τα $\gamma_add_colors_q$, $\gamma_add_colors_{q,q_1,q_2}$ υπολογίζονται άμεσα τα αντίστοιχα σύνολα $\text{Add_Colors}_{q,q_1,q_2}(n)$, $n \in T$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.10. Ανάλογα με παραπάνω, παρατηρούμε ότι οι υπολογισμοί των πιθανών και επιτυχημένων καταστάσεων (δύο πρώτα βήματα των Flum, Frick, Grohe) δεν επηρεάζονται από τα υποκείμενα επιπρόσθετα χρώματα των αντίστοιχων μεταβάσεων. Δηλαδή τα αντίστοιχα δύο πρώτα βήματα μπορούν να πραγματοποιηθούν έχοντας ως δεδομένα απλά τα τρίγωνα καταστάσεων του αυτομάτου. \square

Παράδειγμα 3.10. Για το Παράδειγμα 3.9 (σελ. 32) δίνονται τα τρίγωνα καταστάσεων που υπολογίζονται κατά τα δύο πρώτα βήματα. Η πρώτη γραμμή αντιστοιχεί στα $\text{pot_states_triangles}(n_1)$ (όλα) και $\text{succ_states_triangles}(n_1)$ (αυτά που δεν έχουν διαγραφεί) και ανάλογα η δεύτερη στα $\text{pot_states_triangles}(n_2)$ και $\text{succ_states_triangles}(n_2)$.



Σημειώνουμε ότι τα τρία τελευταία τρίγωνα κάθε γραμμής δεν είναι χρήσιμα τρίγωνα του αυτομάτου. \diamond

3.5.3 Οι μεταβάσεις ενός κόμβου: η transition-based εκδοχή του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe

Πιθανές και επιτυχημένες μεταβάσεις σε έναν κόμβο. Σε πλήρη αναλογία με τα πιθανά και επιτυχημένα τρίγωνα καταστάσεων ενός κόμβου, οι πιθανές και επιτυχημένες

Triangle-based εκδοχή του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe.

Βήμα 1. Με κατεύθυνση από τα φύλλα προς τη ρίζα:

- αν ο n είναι φύλλο: $\text{pot_states_triangles}(n) = c(n)_start_states$.
- αν ο n είναι εσωτερικός κόμβος τ.ω. $s_i(n) = n_i, i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \text{pot_states_triangles}(n) = \{ & (q, q_1, q_2) \in c(n)_states_triangles \mid \\ & q_1 \in \pi_1(\text{pot_states_triangles}(s_1)), \\ & q_2 \in \pi_1(\text{pot_states_triangles}(s_2))\}. \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Όταν $\pi_1(\text{pot_states_triangles}(\text{root}^T)) \cap F = \emptyset$, ο αλγόριθμος τερματίζει:

$$\text{accept_assign}(\mathfrak{A}_\varphi, T) = \emptyset.$$

Βήμα 2. Με κατεύθυνση από τη ρίζα προς τα φύλλα:

- αν r είναι η ρίζα του δέντρου T :

$$\text{succ_states_triangles}(r) = \{t \in \text{pot_states_triangles}(r) \mid \pi_1(t) \in F.\}$$

- αν ο n_i είναι εσωτερικός κόμβος με πατέρα n και $s_i(n) = n_i, i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \text{succ_states_triangles}(n_i) = \{ & t \in \text{pot_states_triangles}(n_i) \mid \\ & \pi_1(t) \in \pi_{i+1}(\text{succ_states_triangles}(n))\}. \end{aligned}$$

Βήμα 3. Με κατεύθυνση από τα φύλλα προς τη ρίζα:

- αν ο n είναι φύλλο και $q \in \text{succ_states_triangles}(n)$:

$$\text{accept_assign}(n, q) = \{\text{assign}(n, \bar{\epsilon}) \mid \bar{\epsilon} \in c(n)_add_colors_q\}.$$

- αν ο n είναι εσωτερικός κόμβος τ.ω. $s_i(n) = n_i, i = 1, 2$ και $(q, q_1, q_2) \in \text{succ_states_triangles}(n)$:

$$\begin{aligned} \text{accept_assign}(n, (q, q_1, q_2)) = \{ & \bar{A} \cup \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \mid \bar{A} \in \text{Assigns}_{q, q_1, q_2}(n), \\ & \bar{A}_1 \in \text{accept_assign}(n_1, q_1), \\ & \bar{A}_2 \in \text{accept_assign}(n_2, q_2)\}. \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } \text{Assigns}_{q, q_1, q_2}(n) = \{\text{assign}(n, \bar{\epsilon}) \mid \bar{\epsilon} \in c(n)_add_colors_{q, q_1, q_2}(n)\}.$$

Πίνακας 7: Η states triangle-based εκδοχή του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe.

μεταβάσεις σε κάθε κόμβο ορίζονται:

$$\begin{aligned} \text{pot_transitions}(\mathfrak{A}_\varphi, n) &= \{(q, q_1, q_2, \bar{\epsilon}) \mid \exists \bar{B} \in (\text{Pow}(T))^k \tau. \omega. \\ &\quad q = \rho_{\bar{B}}(n), q_1 = \rho_{\bar{B}}(n_1), q_2 = \rho_{\bar{B}}(n_2), \\ &\quad \bar{\epsilon} = c_{\bar{B}}(n)\}, \\ \text{succ_transitions}(\mathfrak{A}_\varphi, n) &= \{(q, q_1, q_2, \bar{\epsilon}) \mid \exists \bar{B} \in (\text{Pow}(T))^k \tau. \omega. \\ &\quad \rho_{\bar{B}} \in \text{succ_runs}(\mathfrak{A}_\varphi, T), \\ &\quad q = \rho_{\bar{B}}(n), q_1 = \rho_{\bar{B}}(n_1), q_2 = \rho_{\bar{B}}(n_2), \\ &\quad \bar{\epsilon} = c_{\bar{B}}(n)\}, \end{aligned}$$

όπου ο n θεωρείται εσωτερικός κόμβος με $s_i(n) = n_i$, $i = 1, 2$. Ανάλογα όταν ο n είναι φύλλο, οι $\text{pot_transitions}(\mathfrak{A}_\varphi, n)$ και $\text{succ_transitions}(\mathfrak{A}_\varphi, n)$ αποτελούνται από ζευγάρια $(q, \bar{\epsilon})$ με την προφανή σημασία.

Transition-based εκδοχή του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe. Ονομάζουμε transition-based εκδοχή του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe, τον αλγόριθμο που αντί για καταστάσεις υπολογίζει μεταβάσεις στα δύο πρώτα βήματα, δηλαδή υπολογίζει τα σύνολα: $\text{pot_transitions}(\mathfrak{A}_\varphi, n)$, $\text{succ_transitions}(\mathfrak{A}_\varphi, n)$. Ο υπολογισμός των $\text{accept_assign}(\mathfrak{A}_\varphi, T_n)$ (βήμα 3) γίνεται με κατάλληλη σύνθεση των επιτυχημένων μεταβάσεων.

Ο υπολογισμός. Θεωρούμε το διατεταγμένο χρωματισμένο δέντρο $T = ((T, s_1, s_2), c)$. Οι εκφράσεις για τον υπολογισμό των παραπάνω συνόλων δίνονται αναλυτικά στον Πίνακα 8 (σελ. 47). Θεωρούμε ότι το αυτόματο δίνεται ως σύνολα μεταβάσεων $\gamma_start_transitions$ και $\gamma_transitions$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.11. Η πληροφορία για τα σύνολα μεταβάσεων μπορεί να αναπαρασταθεί, αντί ως πλειάδες $(q, q_1, q_2, \bar{\epsilon}_1) \dots (q, q_1, q_2, \bar{\epsilon}_l)$, μέσω αντιστοιχίσεων της μορφής $(q, q_1, q_2) \mapsto \{\bar{\epsilon}_1, \dots, \bar{\epsilon}_l\}$ (και ανάλογα για τις $(q, \bar{\epsilon})$). Θεωρούμε ότι $\text{pot_add_colors}(n, (q, q_1, q_2)) = \{\bar{\epsilon} \mid (q, q_1, q_2, \bar{\epsilon}) \in \text{pot_transitions}(n)\}$. Σημειώνουμε ότι η προβολή στις τρεις πρώτες συντεταγμένες των σχέσεων $\text{pot_transitions}(n)$ και $\text{succ_transitions}(n)$ είναι τα $\text{pot_triangles}(n)$ και $\text{succ_triangles}(n)$ αντίστοιχα. Δηλαδή κάθε $\text{pot_transitions}(n)$ μπορεί να ειδωθεί ως $(\text{pot_add_colors}(n, (q, q_1, q_2)))_{(q, q_1, q_2) \in \text{pot_triangles}(n)}$ (και ανάλογα για τις επιτυχημένες μεταβάσεις). Διαισθητικά, με τα σύνολα αυτά πραγματοποιείται ένας διαχωρισμός του συνόλου των επιπροσθετων χρωμάτων $\{0, 1\}^k$ σε υποσύνολα που χαρακτηρίζονται με τη βοήθεια τριγώνων καταστάσεων. Και κατά συνέπεια ένας διαχωρισμός του συνόλου των διανυσμάτων αναθέσεων που συνεισφέρει κάθε κόμβος¹⁸ ανάλογα με τα πιθανά τρίγωνα καταστάσεων των οποίων είναι υποκείμενα.

Αν $\text{succ_assigns}(n, (q, q_1, q_2)) = \{\text{assign}(n, \bar{\epsilon}) \mid (q, q_1, q_2, \bar{\epsilon}) \in \text{succ_transitions}(n)\}$, τότε τα $(\text{succ_assigns}(n, (q, q_1, q_2)))_{(q, q_1, q_2) \in \text{succ_triangles}(n)}$ αποτελούν διαχωρισμό του συνόλου των διανυσμάτων αναθέσεων που συνεισφέρει ένας κόμβος n στις δεκτές αναθέσεις ανάλογα, με τα επιτυχημένα τρίγωνα καταστάσεων του εν λόγω κόμβου. Δεδομένων των $\text{succ_assigns}(n, (q, q_1, q_2))$, $n \in T$ (τα οποία μπορούν να υπολογιστούν σε δύο

¹⁸Τα διανύσματα αναθέσεων που συνεισφέρει ένα κόμβος n είναι το σύνολο $\{\text{assign}(n, \bar{\epsilon}) \mid \bar{\epsilon} \in \{0, 1\}^k\}$.

Transition-based εκδοχή του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe.

Βήμα 1. Με κατεύθυνση από τα φύλλα προς τη ρίζα:

- αν ο n είναι φύλλο: $\text{pot_transitions}(n) = c(n)\text{-start_transitions}$.
- αν ο n είναι εσωτερικός κόμβος τ.ω. $s_i(n) = n_i, i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \text{pot_transitions}(n) = \{ & (q, q_1, q_2, \bar{\epsilon}) \in c(n)\text{-transitions} \mid \\ & q_1 \in \pi_1(\text{pot_transitions}(s_1)), \\ & q_2 \in \pi_1(\text{pot_transitions}(s_2))\}. \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Όταν $\pi_1(\text{pot_transitions}(\text{root}^T)) \cap F = \emptyset$, ο αλγόριθμος τερματίζει:

$$\text{accep_assign}(\mathfrak{A}_\varphi, T) = \emptyset.$$

Βήμα 2. Με κατεύθυνση από τη ρίζα προς τα φύλλα:

- αν r είναι η ρίζα του δέντρου T :

$$\text{succ_transitions}(r) = \{t \in \text{pot_transitions}(r) \mid \pi_1(t) \in F\}$$

- αν ο n_i είναι εσωτερικός κόμβος τ.ω. $s_i(n) = n_i, i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \text{succ_transitions}(n_i) = \{ & t \in \text{pot_transitions}(n_i) \mid \\ & \pi_1(t) \in \pi_{i+1}(\text{succ_transitions}(n))\}. \end{aligned}$$

Βήμα 3. Με κατεύθυνση από τα φύλλα προς τη ρίζα:

- αν ο n είναι φύλλο και $(q, \bar{\epsilon}) \in \text{succ_transitions}(n)$:

$$\text{accept_assign}(n, q) = \{\text{assign}(n, \bar{\epsilon})\}.$$

- αν ο n είναι εσωτερικός κόμβος τ.ω. $s_i(n) = n_i, i = 1, 2$ και $(q, q_1, q_2, \bar{\epsilon}) \in \text{succ_transitions}(n)$:

$$\begin{aligned} \text{accept_assign}(n, q) = \{ & \bar{A} \cup \bar{A}' \cup \text{assign}(n, \bar{\epsilon}) \mid \bar{A} \in \text{accept_assign}(n_1, q_1), \\ & \bar{A}' \in \text{accept_assign}(n_2, q_2)\}. \end{aligned}$$

Πίνακας 8: Η transition-based εκδοχή του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe.

περάσματα εντελώς ανάλογα με τον τρόπο που υπολογίζονται οι $\text{succ_transitions}(n), n \in T$, οι περιορισμοί αναθέσεων $\text{accept_assign}(n, (q, q_1, q_2))$ μπορούν να υπολογιστούν σε ένα τρίτο πέρασμα με τη βοήθεια της merge :

$$\begin{aligned} \text{accept_assign}(n, (q, q_1, q_2)) = & \text{merge}(\text{merge}(\text{succ_assigns}(n, (q, q_1, q_2)), \\ & \text{accept_assign}(n_1, q_1)), \\ & \text{accept_assign}(n_2, q_2)). \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι κάθε δεκτή ανάθεση προκύπτει στην ουσία από την εφαρμογή μιας ακολουθίας πράξεων merge συνόλων $\text{succ_assigns}(n, (q, q_1, q_2))$, $n \in T^{19}$. Θυμίζουμε ότι η σημασία του διαχωρισμού ανάλογα με τα τρίγωνα καταστάσεων (q, q_1, q_2) είναι το γεγονός ότι αυτά παρέχουν την πληροφορία για τη σωστή συνένωση των αντίστοιχων συνόλων (δηλαδή στην ουσία την πληροφορία για το σχηματισμό των εκτελέσεων του αυτομάτου). \square

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.12. Ο υπολογισμός των καταστάσεων σε αντίθεση με τον υπολογισμό των μεταβάσεων, αποτελεί την ελάχιστη πληροφορία για την διάκριση μεταξύ δεκτών και μη δεκτών αναθέσεων. Με τον υπολογισμό των πιθανών μεταβάσεων στο πρώτο βήμα κρατάμε στην ουσία την πληροφορία για όλες τις πιθανές εκτελέσεις. Τις περισσότερες από αυτές δε θα τις χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια. Διαισθητικά αυτό που κερδίζουμε από τον υπολογισμό των επιτυχημένων μεταβάσεων είναι ότι μετά το πρώτο βήμα δε χρειάζεται να ανατρέξουμε στο αυτόματο ξανά (και να υπολογίσουμε εκ νέου τις μεταβάσεις που έχουμε ήδη θεωρήσει στα δύο προηγούμενα βήματα). Βέβαια σημαντικό μειονέκτημα είναι το μεγάλο μέγεθος των σχέσεων που υπολογίζουμε κάθε φορά. Η σύγκριση των διάφορων παραλλαγών θα δωθεί αναλυτικότερα κατά τη μετάφρασή τους στη σχεσιακή άλγεβρα στην Ενότητα 3.8. \square

3.6 Από το αρχικό αυτόματο \mathfrak{A}_φ στον ορισμό νέων αυτομάτων: ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις και μια διαφορετική διατύπωση του αρχικού προβλήματος

Ξεκινώντας από το δεδομένο bottom-up ντετερμινιστικό Γ_k -αυτόματο \mathfrak{A}_φ , ορίζουμε διαφορετικά αυτόματα που περιέχουν είτε όλη την πληροφορία του \mathfrak{A}_φ είτε κάποιο τμήμα της. Σχολιάζουμε τη σχέση των αυτομάτων αυτών και εξετάζουμε διαφορετικές διατυπώσεις του αρχικού προβλήματος και αλλά και των αλγορίθμων επίλυσής του.

3.6.1 Δύο ισοδύναμα bottom-up Γ -αυτόματα

Το bottom-up ντετερμινιστικό Γ αυτόματο \mathfrak{B}_φ . Θεωρούμε το δεδομένο bottom-up ντετερμινιστικό Γ_k -αυτόματο $\mathfrak{A}_\varphi = (Q^{\mathfrak{A}}, \Delta^{\mathfrak{A}}, \delta^{\mathfrak{A}}, F^{\mathfrak{A}})$. Θυμίζουμε ότι το \mathfrak{A}_φ δέχεται τα Γ_k -δέντρα που είναι φ -επεκτάσεις κάποιου Γ -δέντρου. Ορίζουμε ένα bottom-up

¹⁹Όπως θα δούμε στην Ενότητα 3.8.3, αυτή η ακολουθία πράξεων merge αντιστοιχεί σε μια ακολουθία συνενώσεων (joins) αντίστοιχων σχέσεων μεταβάσεων.

ντετερμινιστικό Γ αυτόματο $\mathfrak{B}_\varphi = (Q^\mathfrak{B}, \Delta^\mathfrak{B}, \delta^\mathfrak{B}, F^\mathfrak{B})$ ως εξής:

$$\begin{aligned} Q^\mathfrak{B} &= \text{Pow}(Q^\mathfrak{A}), \\ \Delta^\mathfrak{B}(\gamma) &= \{\Delta^\mathfrak{A}((\gamma, \bar{\epsilon})) \mid \bar{\epsilon} \in \{0, 1\}^k\}, \\ \delta^\mathfrak{B}(Q_1, Q_2, \gamma) &= \{\delta^\mathfrak{A}(q_1, q_2, (\gamma, \bar{\epsilon})) \mid q_1 \in Q_1, q_2 \in Q_2, \bar{\epsilon} \in \{0, 1\}^k\}, \\ F^\mathfrak{B} &= \{S \in Q^\mathfrak{B} \mid S \cap F^\mathfrak{A} \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Το \mathfrak{B}_φ δέχεται τα Γ -δέντρα που έχουν τουλάχιστον μια φ -επέκταση.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.13. Παρατηρούμε ότι η τιμή της εκτέλεσης του \mathfrak{B}_φ σε κάθε κόμβο n ενός Γ -δέντρου αντιστοιχεί στις πιθανές καταστάσεις του \mathfrak{A}_φ στον n σε όλες τις k -επεκτάσεις του Γ -δέντρου. Δηλαδή η εκτέλεση του \mathfrak{B}_φ , προσομοιώνει το πρώτο βήμα του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe. \square

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.14. Πρόκειται για το αυτόματο που αναγνωρίζει την κλάση των Γ -δέντρων που είναι ορίσιμη από την πρόταση $\phi = \exists \bar{X} \varphi(\bar{X})$. \square

Το bottom-up μη ντετερμινιστικό Γ αυτόματο \mathfrak{C}_φ . Θεωρούμε το δεδομένο bottom-up ντετερμινιστικό Γ_k αυτόματο $\mathfrak{A}_\varphi = (Q^\mathfrak{A}, \Delta^\mathfrak{A}, \delta^\mathfrak{A}, F^\mathfrak{A})$. Το bottom-up μη ντετερμινιστικό Γ αυτόματο $\mathfrak{C}_\varphi = (Q^\mathfrak{C}, \Delta^\mathfrak{C}, \delta^\mathfrak{C}, F^\mathfrak{C})$ ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} Q^\mathfrak{C} &= Q^\mathfrak{A}, \\ \Delta^\mathfrak{C} &= \{(\gamma, q) \mid \exists \bar{\epsilon} \in \{0, 1\}^k \text{ τ.ω. } \Delta^\mathfrak{A}((\gamma, \bar{\epsilon})) = q\}, \\ \delta^\mathfrak{C} &= \{(q_1, q_2, \gamma, q) \mid \exists \bar{\epsilon} \in \{0, 1\}^k \text{ τ.ω. } \delta^\mathfrak{A}(q_1, q_2, (\gamma, \bar{\epsilon})) = q\}, \\ F^\mathfrak{C} &= F^\mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Το \mathfrak{C}_φ δέχεται τα Γ -δέντρα που έχουν τουλάχιστον μια φ -επέκταση. Κάθε επιτυχημένη εκτέλεσή του αντιστοιχεί σε κάποια επιτυχημένη εκτέλεση του \mathfrak{A}_φ .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.15. Το \mathfrak{B}_φ είναι το ισodύναμο bottom-up ντετερμινιστικό αυτόματο του bottom-up μη ντετερμινιστικού αυτομάτου \mathfrak{C}_φ . \square

3.6.2 Ένα bottom-up μη ντετερμινιστικό Γ -αυτόματο που συγκεντρώνει όλη την πληροφορία του \mathfrak{A}_φ : νέα διατύπωση του αρχικού προβλήματος

Το bottom-up μη ντετερμινιστικό Γ -αυτόματο \mathfrak{D}_φ . Θεωρούμε το δεδομένο bottom-up ντετερμινιστικό Γ_k αυτόματο $\mathfrak{A}_\varphi = (Q^\mathfrak{A}, \Delta^\mathfrak{A}, \delta^\mathfrak{A}, F^\mathfrak{A})$. Το bottom-up μη ντετερμινιστικό Γ -αυτόματο $\mathfrak{D}_\varphi = (Q^\mathfrak{D}, \Delta^\mathfrak{D}, \delta^\mathfrak{D}, F^\mathfrak{D})$ ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} Q^\mathfrak{D} &= Q^\mathfrak{A} \times \{0, 1\}^k, \\ \Delta^\mathfrak{D} &= \{(\gamma, (q, \bar{\epsilon})) \mid \Delta^\mathfrak{A}((\gamma, \bar{\epsilon})) = q\}, \\ \delta^\mathfrak{D} &= \{((q_1, \bar{\epsilon}_1), (q_2, \bar{\epsilon}_2), \gamma, (q, \bar{\epsilon})) \mid \delta^\mathfrak{A}(q_1, q_2, (\gamma, \bar{\epsilon})) = q, \bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2 \in \{0, 1\}^k\}, \\ F^\mathfrak{D} &= F^\mathfrak{A} \times \{0, 1\}^k. \end{aligned}$$

	Αυτόματο	Δέχεται
\mathfrak{A}_φ	bottom-up ντετ. Γ_k -αυτόματο	Γ_k -δέντρα που είναι φ - επεκτάσεις κάποιου Γ - δέντρου
\mathfrak{B}_φ	bottom-up ντετ. Γ -αυτόματο	Γ -δέντρα για τα οποία υπάρχει φ -επέκταση
\mathfrak{C}_φ	bottom-up μη ντετ. Γ -αυτόματο	Γ -δέντρα για τα οποία υπάρχει φ -επέκταση
\mathfrak{D}_φ	bottom-up μη ντετ. Γ -αυτόματο	Γ -δέντρα για τα οποία υπάρχει φ -επέκταση

 Πίνακας 9: Τα αυτόματα \mathfrak{A}_φ , \mathfrak{B}_φ , \mathfrak{C}_φ , \mathfrak{D}_φ .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.16. Δεδομένου ενός Γ -δέντρου \mathcal{T} , κάθε επιτυχημένη εκτέλεση του αυτομάτου \mathfrak{D}_φ στο \mathcal{T} ‘υπολογίζει’ μια ανάθεση που ικανοποιεί τον τύπο φ στο \mathcal{T} . Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι η ρ είναι μια επιτυχημένη εκτέλεση του \mathfrak{D}_φ . Σε κάθε κόμβο $n \in \mathcal{T}$, είναι $\rho(n) = (\rho_0(n), \rho_1(n), \dots, \rho_k(n))$. Ορίζουμε τα σύνολα $B_i \subseteq \mathcal{T}$, $i = 1, \dots, k$, ως εξής: $B_i = \{n \in \mathcal{T} \mid \rho_i(n) = 1\}$. Η ανάθεση $\overline{B} = (B_1, \dots, B_k)$, ικανοποιεί τον φ στο \mathcal{T} . Δηλαδή

$$\text{sat_assign}(\varphi, \mathcal{T}) = \{(B_1, \dots, B_k) \mid \exists \text{ επιτυχημένη εκτέλεση } \rho \text{ τ. } \omega. \\ B_i = \{n \in \mathcal{T} \mid \rho_i(n) = 1\}, i = 1, \dots, k\}.$$

Σημειώνουμε ότι για την περίπτωση MSO-τύπων με μόνο μία ελεύθερη μεταβλητή η οποία αντιστοιχεί σε μονοσύνολο (δηλαδή ο αρχικός μας τύπος είχε μια πρωτοβάθμια μεταβλητή) θα είναι

$$\text{sat_assign}(\varphi, \mathcal{T}) = \{n \mid \exists \text{ επιτυχημένη εκτέλεση } \rho \text{ τ. } \omega. \rho_1(n) = 1\}.$$

Θα ασχοληθούμε ειδικότερα με την περίπτωση αποτίμησης MSO-τύπων $\varphi(x)$ στην Ενότητα 4 όπου ορίζεται η έννοια της μονομελούς ερώτησης. \square

3.7 Νέες προσεγγίσεις βελτιστοποίησης για το πρόβλημα του υπολογισμού των \mathfrak{A}_φ -δεκτών αναθέσεων

Θυμίζουμε ότι το πρόβλημά μας είναι ο προσδιορισμός των \mathfrak{A}_φ -δεκτών αναθέσεων για το δεδομένο δέντρο \mathcal{T} . Οι \mathfrak{A}_φ -δεκτές αναθέσεις είναι οι υποκείμενες αναθέσεις των επιτυχημένων εκτελέσεων του \mathfrak{A}_φ στις επεκτάσεις του \mathcal{T} . Κοινό σημείο ενός αποτελεσματικού υπολογισμού είναι ο περιορισμός του υπολογισμού αναθέσεων που δεν είναι \mathfrak{A}_φ -δεκτές.

Παρουσιάσαμε αναλυτικά σε προηγούμενη ενότητα τον αλγόριθμο των Flum, Frick, Grohe για την υλοποίηση της παραπάνω ιδέας. Ο αλγόριθμος αυτός πραγματοποιεί τρία

περάσματα στο δεδομένο δέντρο: ένα top-down και δύο bottom-up. Θα εξετάσουμε στην ενότητα αυτή την εφαρμογή της ιδέας του περιορισμού των αναθέσεων που δεν είναι δεκτές, πραγματοποιώντας δύο περάσματα του δεδομένου δέντρου σε αντίθεση με τα τρία της προσέγγισης Flum, Frick, Grohe. Σημειώνουμε ότι στην Ενότητα 3.8 δίνεται, μέσω εκφράσεων της σχεσιακής άλγεβρας, μία επιπλέον προσέγγιση που βασίζεται σε ένα pre-order πέρασμα του δεδομένου δέντρου.

3.7.1 Υπολογισμός των επιτυχημένων καταστάσεων κάθε κόμβου σε δύο βήματα: ένα top-down πέρασμα και μετά ένα bottom-up;

Είδαμε σε προηγούμενη ενότητα πώς οι επιτυχημένες καταστάσεις των κόμβων του δεδομένου δέντρου υπολογίζονται σε δύο βήματα: ένα αρχικό πέρασμα με κατεύθυνση από τα φύλλα προς τη ρίζα (bottom-up) και ένα δεύτερο με κατεύθυνση από τη ρίζα προς τα φύλλα (top-down). Θυμίζουμε ότι κατά το πρώτο bottom-up πέρασμα υπολογίζονται οι πιθανές καταστάσεις κάθε κόμβου και κατά το δεύτερο top-down αποκλείονται εκείνες από τις πιθανές που δεν είναι επιτυχημένες.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια οι επιτυχημένες καταστάσεις των κόμβων δεν μπορούν να υπολογιστούν σε δύο βήματα αν το αρχικό πέρασμα γίνει με κατεύθυνση από τη ρίζα προς τα φύλλα (top-down).

Ένα top-down πέρασμα: οι ‘reachable’ καταστάσεις ενός κόμβου. Θεωρούμε ένα Γ_k -αυτόματο $\mathfrak{A}_\varphi = (Q, \delta, \Delta, F)$ και ένα Γ -δέντρο $\mathcal{T} = ((T, s_1, s_2), c)$. Οι ‘reachable’ καταστάσεις ενός κόμβου $n \in T$ είναι οι προσεγγίσιμες από τελική κατάσταση στη ρίζα καταστάσεις και μας πληροφορούν για το ποιές από τις καταστάσεις του Q δεν μπορούν να είναι επιτυχημένες καταστάσεις του n . Δηλαδή αν η κατάσταση q δεν είναι ‘reachable’ κατάσταση του n , τότε σίγουρα η q δεν είναι επιτυχημένη.

- Αν r είναι η ρίζα του Γ -δέντρου \mathcal{T} , τότε: $\text{reach_states}(r) = F$.

- Αν n_1 είναι το αριστερό παιδί ενός κόμβου n είναι:

$$\text{reach_states}(n_1) = \{q_1 \in Q \mid \exists q_2 \in Q, \bar{\epsilon} \in \{0, 1\}^k \text{ τ. } \omega. \delta(q_1, q_2, (c(n), \bar{\epsilon})) \in \text{reach_states}(n)\}.$$

Ομοίως για ένα κόμβο n_2 που είναι το δεξί παιδί ενός κόμβου n .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.17. Αν κάθε bottom-up μετάβαση που αντιστοιχεί στην ισότητα $\delta(q_1, q_2, (\gamma, \bar{\epsilon})) = q$ ειδωθεί ως δύο top-down μεταβάσεις που αντιστοιχούν στις $\delta_1(\gamma, q) = q_1$ και $\delta_2(\gamma, q) = q_2$, τότε $\text{reach_states}(n_i) = \{\delta_i(c(n), q) \mid q \in \text{reach_states}(n)\}$, $i = 1, 2$. \square

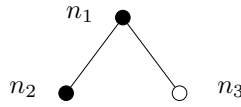
Ένα top-down πέρασμα: οι πιθανές επιτυχημένες καταστάσεις ενός κόμβου. Ονομάζουμε τις καταστάσεις που υπολογίζονται με τον τρόπο που δίνουμε στη συνέχεια, πιθανές επιτυχημένες καταστάσεις ενός κόμβου. Αν ο n είναι φύλλο, οι πιθανές καταστάσεις του n είναι οι $c(n)$ _start_states. Θυμίζουμε ότι $\gamma_start_states = \{q \mid \exists \bar{\epsilon} \text{ τ. } \omega. \Delta((\gamma, \bar{\epsilon})) = q\}$. Δηλαδή:

$$\text{pot_succ_states}(n) = \text{reach_states}(n) \cap c(n)_start_states.$$

Αν ο n είναι εσωτερικός κόμβος με $s_i(n) = n_i$, $i = 1, 2$ οι καταστάσεις του n υπολογίζονται:

$$\begin{aligned} \text{pot_succ_states}(n) = \{ & q \in \text{reach_states}(n) \mid \exists q_1 \in \text{pot_succ_states}(n_1), \\ & q_2 \in \text{pot_succ_states}(n_2), \bar{\epsilon} \in \{0, 1\}^k \text{ τ. ω.} \\ & \delta(q_1, q_2, (c(n), \bar{\epsilon})) = q\}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.11. Θεωρούμε το παρακάτω δέντρο \mathcal{T} και το αυτόματο \mathfrak{A}_ψ .



Είναι $\text{reach_states}(n_1) = \{q_a\}$ και $\text{reach_states}(n_2) = \text{reach_states}(n_3) = \{q_w, q_a, q_b\}$. Επίσης $\text{pot_succ_states}(n_2) = \{q_b\}$ και $\text{pot_succ_states}(n_3) = \{q_w\}$. Παρατηρούμε ότι $\text{pot_succ_states}(n_1) = \emptyset$. \diamond

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.18. Αν για κάποιο κόμβο $n \in T$ είναι είτε $\text{reach_states}(n) = \emptyset$ ή $\text{pot_succ_states}(n) = \emptyset$, τότε $\text{sat_assign}(\varphi, \mathcal{T}) = \emptyset$.

Αν r είναι η ρίζα του δέντρου, τότε:

$$\text{succ_states}(r) = \text{pot_succ_states}(r).$$

\square

3.8 Μεταφράσεις στη σχεσιακή άλγεβρα

Δίνουμε τις μεταφράσεις στη σχεσιακή άλγεβρα των προσεγγίσεων που συζητήσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Σημειώνουμε ότι οι εκφράσεις της άλγεβρας που δίνονται δεν υπολογίζουν ακριβώς τις \mathfrak{A}_φ -δεκτές αναθέσεις²⁰ αλλά σχέσεις που αντιστοιχούν στις \mathfrak{A}_φ -δεκτές συναρτήσεις επιπρόσθετου χρωματισμού (οι οποίες αποτελούν κωδικοποιημένη αναπαράσταση των \mathfrak{A}_φ -δεκτών αναθέσεων). Θυμίζουμε ότι: $\text{accept_add_col}(\mathfrak{A}_\varphi, \mathcal{T}) = \{c_{\bar{B}} \mid \text{το } \mathfrak{A}_\varphi \text{ δέχεται την } (\mathcal{T}; \bar{B})\}$. Δηλαδή το πρόβλημα μας είναι:

- Είσοδος: Γ -δέντρο \mathcal{T} , Γ_k -αυτόματο \mathfrak{A}_φ .
- Πρόβλημα: Υπολογισμός των $\text{accept_add_col}(\mathfrak{A}_\varphi, \mathcal{T})$.

Όπως θα δούμε αναλυτικά στη συνέχεια οι $\text{accept_add_col}(\mathfrak{A}_\varphi, \mathcal{T})$, υπολογίζονται στη σχέση `Accept_Colors`. Κάθε γραμμή του πίνακα της `Accept_Colors`, αντιστοιχεί σε

²⁰Σημειώνουμε επίσης ότι οι αλγόριθμοι που είδαμε και οι αντίστοιχοι υπολογισμοί αφορούσαν τις \mathfrak{A}_φ -δεκτές αναθέσεις. Όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει και είναι εξάλλου φυσικό, ο υπολογισμός των αντίστοιχων \mathfrak{A}_φ -δεκτών συναρτήσεων επιπρόσθετου χρωματισμού είναι εντελώς ανάλογο. Στην συνέχεια θα αναφέρομαστε σε έναν αλγόριθμο της προηγούμενης ενότητας εννοώντας την παραλλαγή του που υπολογίζει συναρτήσεις επιπρόσθετου χρωματισμού.

μία \mathfrak{A}_φ -δεκτή συνάρτηση επιπρόσθετου χρωματισμού.

Βασικές έννοιες του σχεσιακού μοντέλου και των σχεσιακών γλωσσών. Παρουσιάζουμε βασικές έννοιες των σχεσιακών βάσεων δεδομένων και της σχεσιακής άλγεβρας ώστε να είναι κατανοητές οι έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο [2].

Στο σχεσιακό μοντέλο, τα δεδομένα οργανώνονται με τη βοήθεια σχέσεων. Θεωρούμε σύνολα D_1, \dots, D_n , τα οποία ονομάζονται πεδία και θεωρούμε το καρτεσιανό τους γινόμενο $D = D_1 \times \dots \times D_n$. Μια σχέση που ορίζεται στα D_1, \dots, D_n είναι οποιοδήποτε υποσύνολο R του D . Το n ονομάζεται βαθμός (arity) της σχέσης R . Γενικά θεωρούμε ότι τα πεδία είναι πεπερασμένα σύνολα δεδομένων. Τα στοιχεία των σχέσεων ονομάζονται πλειάδες (tuples). Για την πλειάδα $\bar{d} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle$ της R , είναι $d_1 \in D_1 \dots d_n \in D_n$. Σημειώνεται ότι μία σχέση είναι σύνολο, δηλαδή οι πλειάδες της είναι διακεκριμένες και η σειρά τους δεν έχει σημασία. Επίσης οι σχέσεις μπορούν να ειπωθούν ως πίνακες (tables), όπου κάθε πλειάδα είναι μια γραμμή του πίνακα. Τα ονόματα των στηλών μιας σχέσης ονομάζονται γνωρίσματα (attributes). Η ακολουθία όλων των γνωρισμάτων μιας σχέσης R ονομάζεται σχήμα (schema) της R . Αναφερόμαστε στα γνωρίσματα της R είτε με τα ονόματά τους είτε με τη θέση (αριθμός στήλης) τους στο σχήμα σχέσης. Αν X το σχήμα της R , θε λέμε ότι η R είναι μια X -σχέση. Μια σχέση μπορεί επίσης να ειπωθεί ως σύνολο απεικονίσεων με πεδίο ορισμού το X . Δηλαδή σε μια πλειάδα \bar{d} αντιστοιχεί η απεικόνιση $\gamma_{\bar{d}} = \{X_1 \mapsto d_1, \dots, X_n \mapsto d_n\}$.

Σχετικά με τις γλώσσες για την διαχείριση των σχέσεων και την ανάκτηση δεδομένων από μια βάση δεδομένων, υπάρχουν δύο βασικοί φορμαλισμοί για την έκφραση ερωτήσεων στις σχέσεις: η σχεσιακή άλγεβρα (relational algebra) και ο σχεσιακός λογισμός (relational calculus). Η σχεσιακή άλγεβρα ορίζεται μέσω διάφορων πράξεων που εφαρμόζονται σε σχέσεις και παράγουν νέες σχέσεις ("set-oriented" φορμαλισμός). Οι πέντε βασικές πράξεις της σχεσιακής άλγεβρας είναι η επιλογή, η προβολή, το καρτεσιανό γινόμενο, η ένωση και η διαφορά. Οι υπόλοιπες παράγονται από αυτές τις βασικές. Ορίζουμε αυτές που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

- *Επιλογή (selection)*. Θεωρούμε μια (X_1, \dots, X_n) -σχέση \mathcal{R} . Μια συνθήκη επιλογής F είναι μια έκφραση της μορφής $X_i = X_j$, $X_i = a$ (συχνά γράφονται και ως $i = j$, $i = a$), όπου $a \in D_i$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Το αποτέλεσμα της επιλογής $\sigma_F(\mathcal{R})$ περιέχει εκείνες τις πλειάδες της \mathcal{R} για της οποίες αληθεύει η συνθήκη επιλογής F .

- *Προβολή (projection)*. Θεωρούμε μια (X_1, \dots, X_n) -σχέση \mathcal{R} . Θεωρούμε τα $j_1, \dots, j_m \in \{1, \dots, n\}$. Το αποτέλεσμα της προβολής $\pi_{X_{j_1}, \dots, X_{j_m}}(\mathcal{R})$ (συμβολίζεται επίσης $\pi_{j_1, \dots, j_m}(\mathcal{R})$), είναι η $(X_{j_1}, \dots, X_{j_m})$ -σχέση

$$\pi_{X_{j_1}, \dots, X_{j_m}}(\mathcal{R}) = \{(d_{j_1}, \dots, d_{j_m}) \mid \bar{d} \in \mathcal{R}\}.$$

- *Καρτεσιανό Γινόμενο (cartesian product)*. Θεωρούμε μια (X_1, \dots, X_n) -σχέση \mathcal{R} και μια (Y_1, \dots, Y_m) -σχέση \mathcal{S} . Το καρτεσιανό τους γινόμενο $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ είναι η $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m)$ -σχέση:

$$\mathcal{R} \times \mathcal{S} = \{(d_1, \dots, d_n, t_1, \dots, t_m) \mid \bar{d} \in \mathcal{R}, \bar{t} \in \mathcal{S}\}.$$

- (Φυσική) Συνένωση (*natural join*). Θεωρούμε μια (X_1, \dots, X_n) -σχέση \mathcal{R} και μια (Y_1, \dots, Y_m) -σχέση \mathcal{S} η φυσική συνένωση $\mathcal{R} \bowtie \mathcal{S}$ των σχέσεων αυτών είναι η (Z_1, \dots, Z_k) -σχέση

$$\mathcal{R} \bowtie \mathcal{S} = \{\bar{l} \mid \bar{l}|_X \in \mathcal{R}, \bar{l}|_Y \in \mathcal{S}\}.$$

Η (Z_1, \dots, Z_k) ταυτίζεται στις n πρώτες θέσεις με την ακολουθία γνωρισμάτων (X_1, \dots, X_n) ενώ ακολουθούν με τη σειρά που εμφανίζονται στην (Y_1, \dots, Y_m) εκείνα από τα γνωρίσματά της που δεν είναι ίδια με κάποιο από τα (X_1, \dots, X_n) .

- Μετονομασία (*Renaming*). Μια πράξη μετονομασίας απλά μετονομάζει την ακολουθία γνωρισμάτων μιας σχέσης και συμβολίζεται με ρ .

Τα αρχικά μας δεδομένα ως σχέσεις του σχεσιακού μοντέλου. Τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος αυτομάτων είναι ένα Γ_k -αυτόματο $\mathfrak{A}_\varphi = (Q, \delta, \Delta, F)$ και ένα Γ -δέντρο $\mathcal{T} = ((T, s_1, s_2), c)$. Θα δούμε πώς αυτά οργανώνονται με τη βοήθεια σχέσεων του σχεσιακού μοντέλου.

Το αυτόματο \mathfrak{A}_φ μοντελοποιείται με τη βοήθεια των σχέσεων $\text{Start_Transitions}^\gamma$, $\text{Transitions}^\gamma$, $\gamma \in \Gamma$ και Final_States με σχήματα σχέσης $(\mathbf{q}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$, $(\mathbf{q}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ και (\mathbf{q}) αντίστοιχα. Είναι $\text{dom}(\mathbf{q}_1) = \text{dom}(\mathbf{q}_2) = \text{dom}(\mathbf{q}) = Q$ και $\text{dom}(\mathbf{e}_i) = \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq k$. Η ερμηνεία των παραπάνω σχέσεων είναι η προφανής. Πιο συγκεκριμένα, κάθε σχέση $\text{Start_Transitions}^\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, περιέχει τις γ -μεταβάσεις εκκίνησης (γ -start-transitions). Ανάλογα οι $(\text{Transitions}^\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ αντιστοιχούν στις γ -μεταβάσεις (γ -transitions) της συνάρτησης μετάβασης $\delta : Q \times Q \times \Gamma_k \rightarrow Q$. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} \langle q, e_1, \dots, e_k \rangle \in \text{Start_Transitions}^\gamma &\Leftrightarrow \Delta((\gamma, e_1, \dots, e_k)) = q, \\ \langle q, q_1, q_2, e_1, \dots, e_k \rangle \in \text{Transitions}^\gamma &\Leftrightarrow \delta(q_1, q_2, (\gamma, e_1, \dots, e_k)) = q, \\ \langle q \rangle \in \text{Final_States} &\Leftrightarrow q \in F. \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι κάθε $\text{Start_Transitions}^\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, μπορεί να ειδωθεί ως ένας πίνακας με 2^k γραμμές, όπου κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε μια γ -μετάβαση εκκίνησης. Επίσης κάθε $\text{Transitions}^\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, έχει $s^2 \cdot 2^k$, $s = |Q|$, γραμμές που αντιστοιχούν στις γ -μεταβάσεις του δεδομένου αυτομάτου.

Επιπλέον, το δεδομένο δέντρο $\mathcal{T} = ((T, s_1, s_2), c)$ ορίζεται πλήρως από τις σχέσεις Tree και Color σχήματος σχέσης:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) \quad \text{και} \quad (\mathbf{n}, \mathbf{c}),$$

αντίστοιχα όπου $\text{dom}(\mathbf{n}) = \text{dom}(\mathbf{n}_1) = \text{dom}(\mathbf{n}_2) = T$ και $\text{dom}(\mathbf{c}) = \Gamma$. Η σημασία της Tree είναι η προφανής. Δηλαδή $\langle n, n_1, n_2 \rangle \in \text{Tree}$ αν και μόνο αν $n \in T$, $s_1(n) = n_1$, $s_2(n) = n_2$. Ανάλογα για την Color .

Έτσι τα αρχικά μας δεδομένα μπορούν να μοντελοποιηθούν με τη βοήθεια ενός σχήματος βάσης. Όπως είδαμε παραπάνω ορίζονται πλήρως από μια σχεσιακή βάση δεδομένων:

$$R_{\mathfrak{A}_\varphi, \mathcal{T}} = \{(\text{Start_Transitions}^\gamma)_{\gamma \in \Gamma}, (\text{Transitions}^\gamma)_{\gamma \in \Gamma}, \text{Final_States}, \text{Tree}, \text{Color}\}.$$

Εναλλακτικές σχέσεις. Θεωρούμε επίσης σχέσεις $\text{Start_States}^\gamma$, $\text{States_Triangles}^\gamma$, $\gamma \in \Gamma$ με σχήματα σχέσης (\mathbf{q}) , $(\mathbf{q}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$. Η ερμηνεία των παραπάνω σχέσεων είναι

η προφανής. Σημειώνουμε ότι $\text{Start_States}^\gamma = \pi_q(\text{Start_Transitions}^\gamma)$ και $\text{States_Triangles}^\gamma = \pi_{q,q_1,q_2}(\text{Transitions}^\gamma)$.

Χρήσιμες μεταβάσεις του αυτομάτου. Θα συμβολίζουμε τις σχέσεις που είναι υποπίνακες των $\text{Start_Transitions}^\gamma$ και $\text{Transitions}^\gamma$ και περιέχουν τις χρήσιμες μεταβάσεις του δεδομένου αυτομάτου με $\text{Start_Transitions}_*^\gamma$ και $\text{Transitions}_*^\gamma$ αντίστοιχα. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} \langle q, \bar{e} \rangle \in \text{Start_Transitions}_*^\gamma &\Leftrightarrow (q, \gamma, \bar{e}) \in \text{start_transitions}^*, \\ \langle q, q_1, q_2, \bar{e} \rangle \in \text{Transitions}_*^\gamma &\Leftrightarrow (q, q_1, q_2, \gamma, \bar{e}) \in \text{transitions}^*. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.12. Μεταφράζουμε το αυτόματο του Παραδείγματος 3.6 στις αντίστοιχες σχέσεις του σχεσιακού μοντέλου. Θυμίζουμε ότι $\Delta|_{\{w\} \times \{0,1\}} = \{(w, 0) \mapsto q_w, (w, 1) \mapsto q_f\}$ και $\Delta|_{\{b\} \times \{0,1\}} = \{(b, 0) \mapsto q_b, (b, 1) \mapsto q_f\}$, δηλαδή $w_start_transitions = \{(q_w, 0), (q_f, 1)\}$ και $b_start_transitions = \{(q_b, 0), (q_f, 1)\}$. Οι σχέσεις $\text{Start_Transitions}^w$ και $\text{Start_Transitions}^b$ δίνονται στο Σχήμα 3. Ανάλογα, θεωρούμε τις w - και b -μεταβάσεις του δεδομένου αυτομάτου. Οι αντίστοιχες σχέσεις Transitions^w και Transitions^b δίνονται στο Σχήμα 4. \diamond

3.8.1 Ορισμός των σχέσεων $(\text{Transitions}_n)_{n \in T}$, Final_States_r , $(\text{Triangles}_n)_{n \in T}$

Ορίζονται βασικές σχέσεις που χρησιμοποιούνται κυρίως για την απλοποίηση των εκφράσεων στις μεταφράσεις που παρουσιάζονται στις επόμενες ενότητες. Πιο συγκεκριμένα οι σχέσεις $(\text{Transitions}_n)_{n \in T}$ ορίζονται ως εξής: για κάθε φύλλο $n \in T$ η Transitions_n είναι μια $(Q_n, E_1^n, \dots, E_k^n)$ -σχέση:

$$\text{Transitions}_n = \rho_{(Q_n, \bar{E}^n)} \text{Start_Transitions}^{c(n)}$$

και για κάθε εσωτερικό κόμβο n με παιδιά $s_i(n) = n_i$, $i = 1, 2$ είναι η $(Q_n, Q_{n_1}, Q_{n_2}, E_1^n, \dots, E_k^n)$ -σχέση:

$$\text{Transitions}_n = \rho_{(Q_n, Q_{n_1}, Q_{n_2}, \bar{E}^n)} \text{Transitions}^{c(n)}.$$

Ορίζουμε επίσης την Q_r -σχέση

$$\text{Final_States}_r = \rho_{(Q_r)}(\text{Final_States}).$$

Εντελώς ανάλογα με τις $(\text{Transitions}_n)_{n \in T}$ ορίζονται οι σχέσεις $(\text{Triangles}_n)_{n \in T}$: για κάθε φύλλο $n \in T$ η Triangles_n είναι η Q_n -σχέση:

$$\text{Triangles}_n = \rho_{(Q_n)} \text{Start_States}^{c(n)}$$

και για κάθε εσωτερικό κόμβο n με παιδιά $s_i(n) = n_i$, $i = 1, 2$ είναι η (Q_n, Q_{n_1}, Q_{n_2}) -σχέση:

$$\text{Triangles}_n = \rho_{(Q_n, Q_{n_1}, Q_{n_2})} \text{States_Triangles}^{c(n)}.$$

3. MSO-ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΣΕ ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΕΝΑ ΔΕΝΤΡΑ

	q	e		q	e
s_1	q_w	0	s_3	q_b	0
s_2	q_f	1	s_4	q_f	1

Σχήμα 3: Οι σχέσεις Start_Transitions^w και Start_Transitions^b.

	q	q ₁	q ₂	e		q	q ₁	q ₂	e
t_1	q_f	q_a	q_a	0	u_1	q_f	q_a	q_a	0
t_2	q_f	q_a	q_a	1	u_2	q_f	q_a	q_a	1
t_3	q_a	q_a	q_w	0	u_3	q_a	q_a	q_w	0
t_4	q_f	q_a	q_w	1	u_4	q_f	q_a	q_w	1
t_5	q_a	q_a	q_b	0	u_5	q_a	q_a	q_b	0
t_6	q_f	q_a	q_b	1	u_6	q_f	q_a	q_b	1
t_7	q_f	q_a	q_f	0	u_7	q_f	q_a	q_f	0
t_8	q_f	q_a	q_f	1	u_8	q_f	q_a	q_f	1
t_9	q_a	q_w	q_a	0	u_9	q_a	q_w	q_a	0
t_{10}	q_f	q_w	q_a	1	u_{10}	q_f	q_w	q_a	1
t_{11}	q_w	q_w	q_w	0	u_{11}	q_b	q_w	q_w	0
t_{12}	q_a	q_w	q_w	1	u_{12}	q_a	q_w	q_w	1
t_{13}	q_w	q_w	q_b	0	u_{13}	q_b	q_w	q_b	0
t_{14}	q_a	q_w	q_b	1	u_{14}	q_a	q_w	q_b	1
t_{15}	q_f	q_w	q_f	0	u_{15}	q_f	q_w	q_f	0
t_{16}	q_f	q_w	q_f	1	u_{16}	q_f	q_w	q_f	1
t_{17}	q_a	q_b	q_a	0	u_{17}	q_a	q_b	q_a	0
t_{18}	q_f	q_b	q_a	1	u_{18}	q_f	q_b	q_a	1
t_{19}	q_w	q_b	q_w	0	u_{19}	q_b	q_b	q_w	0
t_{20}	q_f	q_b	q_w	1	u_{20}	q_f	q_b	q_w	1
t_{21}	q_w	q_b	q_b	0	u_{21}	q_b	q_b	q_b	0
t_{22}	q_f	q_b	q_b	1	u_{22}	q_f	q_b	q_b	1
t_{23}	q_f	q_b	q_f	0	u_{23}	q_f	q_b	q_f	0
t_{24}	q_f	q_b	q_f	1	u_{24}	q_f	q_b	q_f	1
t_{25}	q_f	q_f	q_a	0	u_{25}	q_f	q_f	q_a	0
t_{26}	q_f	q_f	q_a	1	u_{26}	q_f	q_f	q_a	1
t_{27}	q_f	q_f	q_w	0	u_{27}	q_f	q_f	q_w	0
t_{28}	q_f	q_f	q_w	1	u_{28}	q_f	q_f	q_w	1
t_{29}	q_f	q_f	q_b	0	u_{29}	q_f	q_f	q_b	0
t_{30}	q_f	q_f	q_b	1	u_{30}	q_f	q_f	q_b	1
t_{31}	q_f	q_f	q_f	0	u_{31}	q_f	q_f	q_f	0
t_{32}	q_f	q_f	q_f	1	u_{32}	q_f	q_f	q_f	1

Σχήμα 4: Οι σχέσεις Transitions^w και Transitions^b που αντιστοιχούν στο αυτόματο \mathfrak{A}_ψ . Οι άσπρες γραμμές είναι οι χρήσιμες μεταβάσεις του \mathfrak{A}_ψ .

3.8.2 Ο αλγόριθμος των Flum, Frick, Grohe

Παρουσιάζουμε την μετάφραση στη σχεσιακή άλγεβρα του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe (Ενότητα 3.4).

Βήμα 1. (Bottom-Up) Υπολογισμός των πιθανών καταστάσεων κάθε κόμβου. Υπολογίζουμε με κατεύθυνση από τα φύλλα προς τη ρίζα τις πιθανές καταστάσεις του \mathfrak{A}_φ σε κάθε κόμβο $n \in T$. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $n \in T$, υπολογίζουμε Q_n -σχέσεις P_States_n ως εξής:

- Αν ο n είναι φύλλο, τότε: $P_States_n = \pi_{Q_n}(Transitions_n)$.
- Αν ο n είναι εσωτερικός κόμβος με $s_i(n) = n_i, i = 1, 2$, είναι:

$$P_States_n = \pi_{Q_n}[Transitions_n \bowtie (\bigotimes_{i=1,2} P_States_{n_i})].$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.5. Για κάθε κόμβο $n \in T$, ισχύει $P_States_n = \text{pot_states}(n)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.19. Οι αντίστοιχες εκφράσεις μπορούν να υπολογιστούν μόνο με βάση τις σχέσεις $Triangles_n$. Ανάλογα με το αν ο n είναι φύλλο ή εσωτερικός κόμβος με $s_i(n) = n_i, i = 1, 2$, είναι:

$$\begin{aligned} P_States_n &= Triangles_n. \\ P_States_n &= \pi_{Q_n}[Triangles_n \bowtie (\bigotimes_{i=1,2} P_States_{n_i})]. \end{aligned}$$

□

Βήμα 2. (Top-Down) Υπολογισμός των επιτυχημένων καταστάσεων κάθε κόμβου. Οι επιτυχημένες καταστάσεις $\text{succ_states}(\mathfrak{A}_\varphi, n)$ κάθε κόμβου $n \in T$, υπολογίζονται με κατεύθυνση από τη ρίζα προς τα φύλλα ως Q_n -σχέσεις S_States_n :

- Αν r είναι η ρίζα του δεδομένου δέντρου, τότε

$$S_States_r = P_States_r \bowtie \text{Final_States}_r.$$

- Αν ο n_i είναι το παιδί ενός κόμβου n και ο $n_{i'}$ είναι το αδέρφι του n_i , τότε

$$S_States_{n_i} = \pi_{Q_{n_i}}[Transitions_n \bowtie (S_States_n \bowtie (\bigotimes_{j=i,i'} P_States_{n_j}))].$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.6. Για κάθε κόμβο $n \in T$ ισχύει $S_States_n = \text{succ_states}(\mathfrak{A}_\varphi, n)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.20. Όπως και για το βήμα 1 οι αντίστοιχες εκφράσεις μπορούν να υπολογιστούν με δεδομένες μόνο τις σχέσεις $Triangles_n$ ως εξής:

$$\begin{aligned} S_States_r &= P_States_r \bowtie \text{Final_States}_r. \\ S_States_{n_i} &= \pi_{Q_{n_i}}[Triangles_n \bowtie (S_States_n \bowtie (\bigotimes_{j=i,i'} P_States_{n_j}))]. \end{aligned}$$

□

Βήμα 3. (Bottom-Up) Υπολογισμός των \mathfrak{A}_φ -δεκτών συναρτήσεων επιπρόσθετου χρωματισμού. Υπολογίζουμε τους περιορισμούς των \mathfrak{A}_φ -δεκτών συναρτήσεων επιπρόσθετου χρωματισμού $\text{accept_add_col}(n)$. Θεωρούμε ότι $T_n = \{c_1, \dots, c_{i_n}\}$. Ορίζουμε σχέσεις Accept_Colors_n :

- Αν ο n είναι φύλλο, τότε η $(Q_n, E_1^n, \dots, E_k^n)$ -σχέση Accept_Colors_n είναι:

$$\text{Accept_Colors}_n = \text{S_States}_n \bowtie \text{Transitions}_n.$$

- Αν ο n είναι εσωτερικός κόμβος με $s_1(n) = n_1$ και $s_2(n) = n_2$, τότε η Accept_Colors_n είναι η $(Q_n, E_1^{c_1}, \dots, E_k^{c_1}, \dots, E_1^{c_{i_n}}, \dots, E_k^{c_{i_n}})$ -σχέση²¹:

$$\begin{aligned} \text{Accept_Colors}_n &= \pi_{*\setminus\{Q_{n_1}, Q_{n_2}\}}((\text{S_States}_n \bowtie \text{Transitions}_n) \bowtie \\ &\quad \text{Accept_Colors}_{n_1}) \bowtie \text{Accept_Colors}_{n_2}. \end{aligned}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.7. Θεωρούμε ότι $\text{Accept_Colors}_n = \mathcal{A}_n$. Για κάθε κόμβο $n \in T$,

$$\text{accept_add_col}(n) = \pi_{\overline{E^{c_1}}, \dots, \overline{E^{c_{i_n}}}} \mathcal{A}_n.$$

Μάλιστα $\text{accept_add_col}(n, q) = \pi_{\overline{E^{c_1}}, \dots, \overline{E^{c_{i_n}}}} (\sigma_{Q_n=q} \mathcal{A}_n)$.

3.8.3 Μετάφραση στη σχεσιακή άλγεβρα της transition-based εκδοχής του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe: Ο αλγόριθμος του Γιαννακάκη

Θυμίζουμε ότι η transition-based εκδοχή του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe ορίστηκε αναλυτικά στην Ενότητα 3.5.

Βήμα 1. (Bottom-Up) Υπολογισμός των πιθανών μεταβάσεων κάθε κόμβου. Υπολογίζουμε με κατεύθυνση από τα φύλλα προς τη ρίζα τις πιθανές μεταβάσεις του \mathfrak{A}_φ σε κάθε κόμβο $n \in T$. Πιο συγκεκριμένα υπολογίζουμε σχέσεις P_Transitions_n , $n \in T$, ως εξής:

- Αν ο n είναι φύλλο, τότε η P_Transitions_n είναι η $(Q_n, E_1^n, \dots, E_k^n)$ -σχέση:

$$\text{P_Transitions}_n = \text{Transitions}_n.$$

- Αν ο n είναι εσωτερικός κόμβος με $s_1(n) = n_1$ και $s_2(n) = n_2$, υπολογίζουμε την $(Q_n, Q_{n_1}, Q_{n_2}, E_1^n, \dots, E_k^n)$ -σχέση P_Transitions_n :

$$\text{P_Transitions}_n = \text{Transitions}_n \bowtie \left(\bigotimes_{i=1,2} \pi_{Q_{n_i}} (\text{P_Transitions}_{n_i}) \right).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.8. Για κάθε κόμβο $n \in T$, ισχύει $\text{P_Transitions}_n = \text{pot_transitions}(n)$.

²¹ Δεδομένης μιας \overline{X} -σχέσης \mathcal{R} , συμβολίζουμε με $\pi_{*\setminus\{X_i, X_j\}}(\mathcal{R})$ την προβολή σε όλα τα γνωρίσματα της \mathcal{R} εκτός από τα X_i, X_j .

Βήμα 2. (Top-Down) Υπολογισμός των επιτυχημένων μεταβάσεων κάθε κόμβου. Οι επιτυχημένες μεταβάσεις $\text{succ_transitions}(\mathfrak{A}_\varphi, n)$ κάθε κόμβου $n \in T$, υπολογίζονται με κατεύθυνση από τη ρίζα προς τα φύλλα στις σχέσεις S_Transitions_n που είναι υποπίνακες των P_Transitions_n :

- Αν r είναι η ρίζα του δεδομένου δέντρου, τότε:

$$\text{S_Transitions}_r = \text{P_Transitions}_r \bowtie \text{Final_States}_r.$$

- Αν n_i είναι ένας κόμβος με πατέρα n , τότε

$$\text{S_Transitions}_{n_i} = \text{P_Transitions}_{n_i} \bowtie \pi_{Q_{n_i}}(\text{S_Transitions}_n).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.9. Για κάθε κόμβο $n \in T$ ισχύει $\text{S_Transitions}_n = \text{succ_transitions}(n)$.

Βήμα 3. (Bottom-Up) Σύνθεση των επιτυχημένων μεταβάσεων: υπολογισμός των \mathfrak{A}_φ -δεκτών συναρτήσεων επιπρόσθετου χρωματισμού. Οι περιορισμοί των \mathfrak{A}_φ -δεκτών αναθέσεων στα υποδέντρα T_n είναι $\text{accept_assign}(n) = \bigcup_{q \in \text{succ_states}(n)} \text{accept_assign}(n, q)$. Υπολογίζουμε στο βήμα αυτό τους αντίστοιχους περιορισμούς των \mathfrak{A}_φ -δεκτών συναρτήσεων επιπρόσθετου χρωματισμού $\text{accept_add_col}(n)$. Θυμίζουμε ότι συμβολίζουμε με T_n το σύνολο κόμβων του υποδέντρου T_n . Θεωρούμε ότι $T_n = \{c_1, \dots, c_{i_n}\}$. Ορίζουμε σχέσεις Accept_Colors_n :

- Αν ο n είναι φύλλο, τότε η $(Q_n, E_1^n, \dots, E_k^n)$ -σχέση Accept_Colors_n είναι:

$$\text{Accept_Colors}_n = \text{S_Transitions}_n.$$

- Αν ο n είναι εσωτερικός κόμβος με $s_i(n) = n_i$, $i = 1, 2$, τότε η Accept_Colors_n είναι η $(Q_n, E_1^{c_1}, \dots, E_k^{c_1}, \dots, E_1^{c_{i_n}}, \dots, E_k^{c_{i_n}})$ -σχέση:

$$\text{Accept_Colors}_n = \pi_{*\setminus\{Q_{n_1}, Q_{n_2}\}}[(\text{S_Transitions}_n \bowtie \text{Accept_Colors}_{n_1}) \bowtie \text{Accept_Colors}_{n_2}].$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.10. Για κάθε κόμβο $n \in T$, $\text{accept_add_col}(n) = \pi_{\overline{E}^{c_1}, \dots, \overline{E}^{c_{i_n}}} \text{Accept_Colors}_n$. Μάλιστα $\text{accept_add_col}(n, q) = \pi_{\overline{E}^{c_1}, \dots, \overline{E}^{c_{i_n}}}(\sigma_{Q_n=q} \text{Accept_Colors}_n)$.

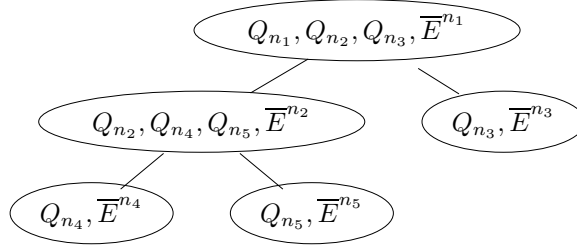
Θεωρούμε τη σχέση $\text{Accept_Colors} = \pi_{\overline{E}^{c_1}, \dots, \overline{E}^{c_{i_r}}}(\text{Accept_Colors}_r)$. Είναι

$$\text{accept_add_colors}(\mathfrak{A}_\varphi, T) = \text{Accept_Colors}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.21. Σχολιάσαμε σε προηγούμενη ενότητα ότι ο υπολογισμός των δεκτών αναθέσεων αντιστοιχεί σε μία ακολουθία συνενώσεων. Στην ουσία ο υπολογισμός των δεκτών συναρτήσεων επιπρόσθετου χρωματισμού αντιστοιχεί στον υπολογισμό της παρακάτω ακυκλικής συζευκτικής ερώτησης:

$$\pi_{\overline{E}^{i_1}, \dots, \overline{E}^{i_{|T|}}}[\text{Final_States}_r \bowtie (\bigotimes_{n \in T} \text{Transitions}_n)].$$

Θεωρούμε την δεντροδιάσπαση $((T, S_1^T, S_2^T), (X_n)_{n \in T})$ της παραπάνω ερώτησης²², όπου το (T, S_1^T, S_2^T) είναι το υποκείμενο δυαδικό δέντρο του δεδομένου χρωματισμένου δέντρου T και τα X_n ανάλογα με το αν ο n είναι φύλλο ή εσωτερικός κόμβος με παιδιά n_1 και n_2 είναι (Q_n, \bar{E}^n) και $(Q_n, Q_{n_1}, Q_{n_2}, \bar{E}^n)$ αντίστοιχα. Ορίζουμε τις σχέσεις $Q_Transitions_n$ $n \in T$ ως εξής: $Q_Transitions_r = Transitions_r \bowtie Final_States_r$, αν r η ρίζα, ενώ διαφορετικά $Q_Transitions_n = Transitions_n$.



Σχήμα 5: Η δεντροδιάσπαση μιας ερώτησης για ένα δέντρο πέντε κόμβων.

Ο υπολογισμός των δεκτών συναρτήσεων επιπρόσθετου χρωματισμού αντιστοιχεί στον υπολογισμό της παρακάτω ακυκλικής συζευκτικής ερώτησης:

$$\pi_{\bar{E}^{i_1}, \dots, \bar{E}^{i_{|T|}}} \left(\bigotimes_{n \in T} Q_Transitions_n \right).$$

Ο αλγόριθμος του Γιαννακάκη (Παράρτημα Β) για τον υπολογισμό ακυκλικών συζευκτικών ερωτήσεων, βασίζεται στην δεντροδιάσπαση της ερώτησης. Η εφαρμογή του (Λήμματα Β.1 και Β.2) για την ακυκλική ερώτηση και την δεντροδιάσπαση που ορίστηκαν παραπάνω ταυτίζεται με την transition-based εκδοχή του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe. \square

Οι μεταφράσεις των τριών εκδοχών του αλγορίθμου συγκεντρώνονται στον Πίνακα 10.

3.8.4 Λιγότερα από τρία περάσματα του δεδομένου δέντρου.

Ένα pre-order πέρασμα. Θεωρούμε δεδομένη την pre-order διάταξη p_1, \dots, p_m των κόμβων του δεδομένου δέντρου. Συμβολίζουμε με Pre_T_n το σύνολο κόμβων του T που αποτελείται από τον κόμβο n και όλους τους κόμβους που προηγούνται του n στην pre-order διάταξη. Αν η i_n είναι η θέση του κόμβου n στην pre-order διάταξη (δηλαδή $p_{i_n} = n$), είναι $Pre_T_n = \{p_1, \dots, p_{i_n}\}$. Θεωρούμε ότι η συνάρτηση $pre_order_next : T \rightarrow T$, αντιστοιχεί σε κάθε κόμβο $n \in T$ τον 'pre-order επόμενο κόμβο' του. Δηλαδή $pre_order_next(p_i) = p_{i+1}$, $i = 1, \dots, m - 1$.

Ακολουθώντας την pre-order διάταξη των κόμβων του δεδομένου δέντρου, υπολογίζουμε σχέσεις Pre_Colors_n . Πιο συγκεκριμένα:

²²Στο Παράρτημα Β ορίζεται αναλυτικά η έννοια της ακυκλικής συζευκτικής ερώτησης και της δεντροδιάσπασης μιας τέτοιας ερώτησης.

- Αν η r είναι η ρίζα του δέντρου, τότε η σχέση Pre_Colors_r υπολογίζεται:

$$\text{Pre_Colors}_r = \pi_{*\setminus Q_r}(\text{Transitions}_r \bowtie \text{Final_States}_r).$$

- Αν p_i είναι ο i -οστός κόμβος στην pre-order διάταξη, τότε, η Pre_Colors_{p_i} είναι:

$$\text{Pre_Colors}_{p_i} = \pi_{*\setminus Q_{p_i}}(\text{Transitions}_{p_i} \bowtie \text{Pre_Colors}_{p_{i-1}}).$$

Στον Πίνακα 11 συγκεντρώνονται οι διάφορες περιπτώσεις.

State-based εκδοχή - Ο αλγόριθμος των Flum, Frick, Grohe	
Βήμα	Υπολογισμός
1	$P_States_n = \pi_{Q_n}(Transitions_n) = Triangles_n.$ $P_States_n = \pi_{Q_n}[Transitions_n^* \bowtie (\bigotimes_{i=1,2} P_States_{n_i})].$
2	$S_States_r = P_States_r \bowtie Final_States_r.$ $S_States_{n_1} = \pi_{Q_{n_1}}[Transitions_n^* \bowtie (S_States_n \bowtie [\bigotimes_{i=1,2} P_States_{n_i}])].$
3	$Accept_Colors_n = S_States_n \bowtie Transitions_n.$ $Accept_Colors_n = \pi_{*\setminus\{Q_{n_1}, Q_{n_2}\}}[(S_States_n \bowtie (\bigotimes_{i=1,2} S_States_{n_i})) \bowtie Transitions_n] \bowtie (\bigotimes_{i=1,2} Accept_Colors_{n_i}).$
Triangle-based εκδοχή του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe	
Βήμα	Υπολογισμός
1	$P_Triangles_n = \pi_{Q_n}(Transitions_n) = Triangles_n.$ $P_Triangles_n = \pi_{Q_n, Q_{n_1}, Q_{n_2}}[Transitions_n \bowtie (\bigotimes_{i=1,2} \pi_{Q_{n_i}}(P_Triangles_{n_i}))]$ $= Triangles_n \bowtie (\bigotimes_{i=1,2} \pi_{Q_{n_i}}(P_Triangles_{n_i})).$
2	$S_Triangles_r = P_Triangles_r \bowtie Final_States_r.$ $S_Triangles_{n_i} = P_Triangles_{n_i} \bowtie \pi_{Q_{n_i}}(S_Triangles_n).$
3	$Accept_Colors_n = S_Triangles_n \bowtie Transitions_n.$ $Accept_Colors_n = \pi_{*\setminus\{Q_{n_1}, Q_{n_2}\}}[(S_Triangles_n \bowtie Transitions_n) \bowtie (\bigotimes_{i=1,2} Accept_Colors_{n_i})].$
Transition-based εκδοχή του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe	
Βήμα	Υπολογισμός
1	$P_Transitions_n = Transitions_n.$ $P_Transitions_n = Transitions_n \bowtie [\bigotimes_{i=1,2} \pi_{Q_{n_i}}(P_Transitions_{n_i})].$
2	$S_Transitions_r = P_Transitions_r \bowtie Final_States_r.$ $S_Transitions_{n_i} = P_Transitions_{n_i} \bowtie \pi_{Q_{n_i}}(S_Transitions_n).$
3	$Accept_Colors_n = S_Transitions_n.$ $Accept_Colors_n = \pi_{*\setminus\{Q_{n_1}, Q_{n_2}\}}[S_Transitions_n \bowtie (\bigotimes_{i=1,2} Accept_Colors_{n_i})].$
$Accept_Colors = \pi_{\overline{E}^{c_1}, \dots, \overline{E}^{c_{i_r}}}(Accept_Colors_r)$	

Πίνακας 10: Οι τρεις εκδοχές του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe. Το $Transitions_n^*$ σημαίνει ότι οι αντίστοιχες σχέσεις μπορούν να αντικατασταθούν από τις $Triangles_n$.

3 Βήματα (Flum, Frick, Grohe)	
Βήμα	Τπολογισμός
1	$P_Transitions_n = Transitions_n.$ $P_Transitions_n = Transitions_n \bowtie [\bigwedge_{i=1,2} \pi_{Q_{n_i}}(P_Transitions_{n_i})].$
2	$S_Transitions_r = P_Transitions_r \bowtie Final_States_r.$ $S_Transitions_{n_i} = P_Transitions_{n_i} \bowtie \pi_{Q_{n_i}}(S_Transitions_n).$
3	$Accept_Colors_n = S_Transitions_n.$ $Accept_Colors_n = \pi_{*\setminus\{Q_{n_1}, Q_{n_2}\}}[S_Transitions_n \bowtie (\bigwedge_{i=1,2} Accept_Colors_{n_i})].$
2 Βήματα (Top-Down & Bottom-Up)	
Βήμα	Τπολογισμός
1	$R_Transitions_r = Transitions_r \bowtie Final_States_r.$ $R_Transitions_{n_i} = Transitions_{n_i} \bowtie \pi_{Q_{n_i}}(R_Transitions_n).$
2	$Pot_Accept_Colors_n = R_Transitions_n.$ $Pot_Accept_Colors_n = \pi_{*\setminus\{Q_{n_1}, Q_{n_2}\}}[R_Transitions_n \bowtie (\bigwedge_{i=1,2} Pot_Accept_Colors_{n_i})].$
2 Βήματα (Bottom-Up & Top-Down)	
Βήμα	Τπολογισμός
1	$P_Transitions_n = Transitions_n.$ $P_Transitions_n = Transitions_n \bowtie [\bigwedge_{i=1,2} \pi_{Q_{n_i}}(P_Transitions_{n_i})].$
2	$Accept_Colors_r^- = \pi_{*\setminus Q_r}(P_Transitions_r \bowtie Final_States_r).$ $Accept_Colors_{t_i}^- = \pi_{*\setminus Q_{t_i}}(P_Transitions_{t_i} \bowtie Accept_Colors_{t_{i-1}}^-).$
1 Βήμα (Top-Down ή Pre-Order)	
Βήμα	Τπολογισμός
1	$Pre_Colors_r = \pi_{*\setminus Q_r}(Transitions_r \bowtie Final_States_r).$ $Pre_Colors_{p_i} = \pi_{*\setminus Q_{p_i}}(Transitions_{p_i} \bowtie Pre_Colors_{p_{i-1}}).$

Πίνακας 11: Οι διάφορες περιπτώσεις (transition-based εκδοχή) ανάλογα με τον αριθμό παρασμάτων.

4 Αυτόματα για το πρόβλημα της αποτίμησης σε XML-δέντρα δεδομένων

Οι εφαρμογές την θεωρίας αυτομάτων στην έρευνα που σχετίζεται με την XML αφορούν τόσο τον ορισμό τυπικών μοντέλων υπολογισμού και φορμαλισμών για την περιγραφή σχήματος όσο και τρόπους για την αποτίμηση ερωτημάτων (βλέπε επίσης [17]). Θα ασχοληθούμε στην ενότητα αυτή με τη σύνδεση αυτομάτων και λογικής σε σχέση με την αποτίμηση ερωτήσεων που προκύπτουν κατά την αναζήτηση πληροφορίας σε XML-έγγραφα. Οι ερωτήσεις αυτές είναι συνήθως μονομελείς και μπορούν να εκφραστούν είτε ως κανονικές εκφράσεις μονοπατιών (regular path expressions (Xpath)) είτε με τη βοήθεια λογικών τύπων (Datalog ή MSO σε δέντρα). Θα ασχοληθούμε με την περίπτωση των λογικών τύπων της MSO και ειδικότερα με δύο αυτόματα που είναι ισοδύναμα με τους αντίστοιχους MSO τύπους με την έννοια ότι ορίζουν τις ίδιες ερωτήσεις. Για περισσότερους φορμαλισμούς αυτομάτων χρήσιμους στα πλαίσια της XML παραπέμπουμε στο [19].

Στην Ενότητα 4.1 παρουσιάζουμε τα Αυτόματα Ερωτήσεων (Query Automata) [20] και στην Ενότητα 4.2 τα Αυτόματα Δέντρων που Επιλέγουν (Selecting Tree Automata) [15] και μελετάμε το πρόβλημα της αποτίμησης για τα αυτόματα αυτά.

Γενικά για την XML και τα XML-έγγραφα. Η XML ([9]) είναι μια γλώσσα για την ανταλλαγή και αποθήκευση δεδομένων με τη μορφή κειμένου. Όπως αναφέραμε, σκοπός της παρούσας ενότητας δεν είναι η εισαγωγή σε θέματα της XML (βλέπε [1] για μια γενική παρουσίαση θεμάτων σχετικά με τις βάσεις δεδομένων και την XML) αλλά η χρησιμοποίηση αυτομάτων για την αποτίμηση μονομελών ερωτήσεων. Για το λόγο αυτό, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι τα XML-έγγραφα μπορούν να μοντελοποιηθούν με τη βοήθεια χρωματισμένων δέντρων μη φραγμένης τάξης (δηλαδή ο αριθμός των παιδιών τους είναι μη φραγμένος), διατεταγμένων (δηλαδή υπάρχει διάταξη στα παιδιά ενός κόμβου), πεπερασμένων, με διακεκριμένη ρίζα. Στον Πίνακα 12 δίνεται ένα παράδειγμα XML-εγγράφου το οποίο περιέχει τμήμα της πληροφορίας μιας βιβλιογραφικής βάσης, ενώ στον Πίνακα 13 δίνεται η αντίστοιχη δεντρική αναπαράσταση. Στις ενότητες που ακολουθούν, πριν ορίσουμε τα αντίστοιχα αυτόματα, παρουσιάζονται αναλυτικά οι ορισμοί των δέντρων που χρησιμοποιούνται στην κάθε περίπτωση για την μοντελοποίηση της XML (XML-δέντρα).

4.1 Αυτόματα ερωτήσεων (Query automata)

Ακολουθούμε τους συμβολισμούς και παρουσιάζουμε τα βασικά αποτελέσματα του [20].

Μονομελείς ερωτήσεις. Όπως ήδη αναφέραμε θα ασχοληθούμε με MSO-τύπους που ορίζουν μονομελείς ερωτήσεις (unary queries). Δηλαδή δεδομένου ενός MSO-τύπου $\varphi(x)$, θέλουμε να υπολογίσουμε τις αναθέσεις που ικανοποιούν τον $\varphi(x)$ σε ένα δεδομένο δέντρο. Το σύνολο των αναθέσεων είναι ένα σύνολο κόμβων, υποσύνολο του συνόλου κόμβων του δεδομένου δέντρου. Η μονομελής ερώτηση που αντιστοιχεί στον

```

<bibl>
  <paper>
    <author> Thomas </author>
    <date> 1997 </date>
    <title> Languages, Automata, and Logic </title>
  </paper>
  <book>
    <author> Ebbinghaus </author>
    <author> Flum </author>
    <date> 1999 </date>
    <title> Finite Model Theory </title>
  </book>
</bibl>

```

Πίνακας 12: Ένα XML-έγγραφο.

δεδομένο τύπο ορίζεται

$$Q_\varphi = \{n \mid \mathcal{T} \models \varphi(n)\}.$$

Με τον τρόπο αυτό το σε κάθε MSO-τύπο $\varphi(x)$ αντιστοιχεί ένα σύνολο κόμβων.

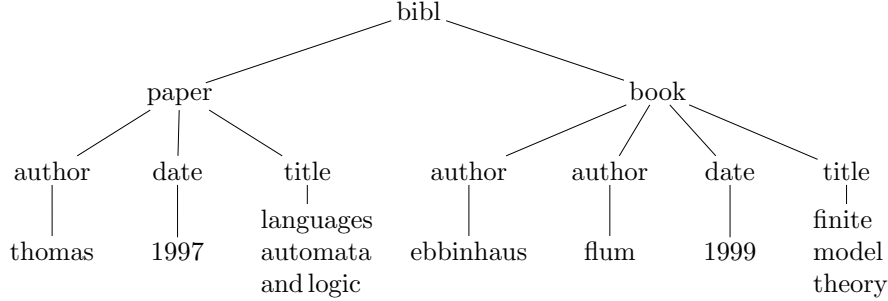
Ένα αυτόματο ερώτησης (query automaton- QA) είναι ένα ντετερμινιστικό διπλής κατεύθυνσης (two-way) πεπερασμένο αυτόματο για δέντρα, το οποίο έχει την ικανότητα να επιλέγει κόμβους ανάλογα με την κατάσταση και την ετικέτα¹ των κόμβων αυτών.

4.1.1 Δέντρα: βασικές έννοιες

Ένα Σ -δέντρο είναι ένα δέντρο όπου τα παιδιά κάθε κόμβου είναι διατεταγμένα και έχουν μια ετικέτα από κάποιο πεπερασμένο αλφάβητο Σ .

Γενικά τα δέντρα συμβολίζονται με τα γράμματα t, s, s_1, \dots , ενώ οι κόμβοι δηλώνονται με n, m, n_1, \dots . Αν n είναι ένας κόμβος, συχνά συμβολίζουμε με n_i το i -στό παιδί του n . Το σύνολο κόμβων ενός δέντρου t συμβολίζεται με $\text{dom}(t)$ και η ρίζα του t με $\text{root}(t)$. Ο βαθμός (arity) ενός κόμβου n ενός δέντρου είναι ο αριθμός των παιδιών του n . Το σύνολο των παιδιών του n συμβολίζεται με $\text{children}(n)$. Λέμε ότι ένα δέντρο t έχει τάξη (rank) m , όπου $m \in \mathbb{N}$, αν ο βαθμός κάθε κόμβου του t είναι μικρότερος ή ίσος του m . Θυμίζουμε επίσης ότι το βάθος (depth) ενός κόμβου n είναι ο αριθμός των κόμβων στο μονοπάτι από τον n στη ρίζα (συνυπολογισμένου του n , μη συνυπολογισμένης της ρίζας). Το ύψος (height) του n είναι ο αριθμός των κόμβων στο

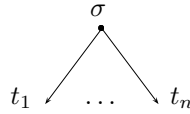
¹Σημειώνουμε ότι η έννοια της ετικέτας ταυτίζεται με την έννοια του χρώματος ενός κόμβου όπως αυτή ορίστηκε και χρησιμοποιήθηκε στις προηγούμενες ενότητες.



Πίνακας 13: Ένα XML-δέντρο που αντιστοιχεί στο έγγραφο του πίνακα 12.

μακρύτερο μονοπάτι από τον n σε ένα φύλλο (συνυπολογισμένου του n , μη συνυπολογισμένου του φύλλου). Δηλαδή το βάθος της ρίζας και το ύψος ενός φύλλου είναι μηδέν. Συμβολίζουμε την ετικέτα του n με $label(n)$.

Επιπλέον, αν σ είναι ένα σύμβολο του Σ και τα t_1, \dots, t_n είναι Σ -δέντρα, τότε χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\sigma(t_1, \dots, t_n)$ για το Σ -δέντρο που αναπαρίσταται γραφικά ως εξής:



4.1.2 Αυτόματα ερωτήσεων για δέντρα φραγμένης τάξης

Ορίζονται τα αυτόματα ερωτήσεων για δέντρα φραγμένης τάξης (QA^r) ως διπλής κατεύθυνσης ντετερμινιστικά αυτόματα δέντρων τα οποία έχουν επεκταθεί με μια συνάρτηση επιλογής. Σημειώνουμε ότι τα δέντρα που θεωρούμε είναι Σ -δέντρα τάξης το πολύ K , όπου K φυσικός αριθμός.

Αυτόματα δέντρων διπλής κατεύθυνσης (Two-way tree automata). Ένα διπλής κατεύθυνσης ντετερμινιστικό αυτόματο δέντρου (*two-way deterministic tree automaton* - 2DTA^r) είναι μια πλειάδα $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, s, \delta)$, όπου το Q είναι ένα πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων, το $F \subseteq Q$ είναι το σύνολο των τελικών καταστάσεων, η $s \in Q$ είναι η αρχική κατάσταση και η δ είναι το σύνολο συναρτήσεων μετάβασης $\{\delta_{leaf}, \delta_{root}, \delta_{\uparrow}, \delta_{\downarrow}\}$. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν ξένα υποσύνολα U και D του $Q \times \Sigma$ (το U αντιστοιχεί στις πάνω και το D στις κάτω μεταβάσεις) τέτοια ώστε η $\delta_{leaf} : D \rightarrow Q$ είναι η συνάρτηση μετάβασης για τα φύλλα, $\delta_{root} : U \rightarrow Q$ είναι η συνάρτηση μετάβασης για τη ρίζα, $\delta_{\uparrow} : U^* \rightarrow Q$ είναι η συνάρτηση μετάβασης για τις προς τα πάνω μεταβάσεις και $\delta_{\downarrow} : D \times \{1, \dots, K\} \rightarrow Q^*$ είναι η συνάρτηση μετάβασης για τις προς τα κάτω μεταβάσεις. Για κάθε $i \leq K$, η $\delta_{\downarrow}(q, a, i)$ είναι μια ακολουθία καταστάσεων μήκους i .

Μια τομή (*cut*) C ενός δέντρου t είναι ένα υποσύνολο του $\text{dom}(t)$ που περιέχει ακριβώς έναν κόμβο από κάθε μονοπάτι από τη ρίζα προς ένα φύλλο. Μια διαμόρφωση

(*configuration*) του αυτομάτου \mathcal{A} στο δέντρο t είναι μια απεικόνιση $c : C \rightarrow Q$ από μια τομή C του t στο σύνολο καταστάσεων του \mathcal{A} .

Το αυτόματο \mathcal{A} όταν ενεργεί πάνω σε ένα δέντρο t πραγματοποιεί μια *μετάβαση* (*transition*) μεταξύ δύο διαμορφώσεων $c_1 : C_1 \rightarrow Q$ και $c_2 : C_2 \rightarrow Q$, η οποία συμβολίζεται με $c_1 \rightarrow c_2$, ανν πραγματοποιεί μία πάνω μετάβαση, μία κάτω μετάβαση, μία μετάβαση φύλλου ή μια μετάβαση ρίζας:

1. Το αυτόματο \mathcal{A} πραγματοποιεί μια *πάνω μετάβαση* (*up transition*) από την διαμόρφωση c_1 στην διαμόρφωση c_2 αν υπάρχει ένας κόμβος n τέτοιος ώστε
 - a. $\text{children}(n) = \{n_1, \dots, n_m\} \subseteq C_1$,
 - b. $C_2 = (C_1 \setminus \text{children}(n)) \cup \{n\}$,
 - c. $c_2(n) = \delta_{\uparrow}((c_1(n_1), \text{label}(n_1)), \dots, (c_1(n_m), \text{label}(n_m)))$, και
 - d. η c_2 ταυτίζεται με την c_1 στην τομή $C_1 \cap C_2$.
2. Το αυτόματο \mathcal{A} πραγματοποιεί μια *κάτω μετάβαση* (*down transition*) από την διαμόρφωση c_1 στην διαμόρφωση c_2 αν υπάρχει ένας κόμβος n τέτοιος ώστε
 - a. $n \in C_1$,
 - b. $C_2 = (C_1 \setminus \{n\}) \cup \text{children}(n)$, όπου $\text{children}(n) = \{n_1, \dots, n_m\}$,
 - c. $c_2(n_1), \dots, c_2(n_m) = \delta_{\downarrow}((c_1(n), \text{label}(n)), \text{arity}(n))$, και
 - d. η c_2 ταυτίζεται με την c_1 στην τομή $C_1 \cap C_2$.
3. Το αυτόματο \mathcal{A} πραγματοποιεί μια *μετάβαση ρίζας* (*root transition*) από την διαμόρφωση c_1 στην διαμόρφωση c_2 αν
 - a. $C_1 = C_2 = \{\text{root}(t)\}$, και
 - b. $c_2(\text{root}(t)) = \delta_{\text{root}}((c_1(\text{root}(t)), \text{label}(\text{root}(t))))$.
4. Το αυτόματο \mathcal{A} πραγματοποιεί μια *μετάβαση φύλλου* (*leaf transition*) από την διαμόρφωση c_1 στην διαμόρφωση c_2 αν υπάρχει ένα φύλλο n τέτοιο ώστε
 - a. $n \in C_1$,
 - b. $C_1 = C_2$
 - c. $c_2(n) = \delta_{\text{leaf}}((c_1(n), \text{label}(n)))$, και
 - d. η c_2 ταυτίζεται με την c_1 στο $C_1 \setminus \{n\}$.

Η διαμόρφωση $c : C \rightarrow Q$ με $C = \{\text{root}(t)\}$ και $c(\text{root}(t)) = s$, είναι η *διαμόρφωση εκκίνησης* (*start configuration*). Κάθε διαμόρφωση c με $c(\text{root}(t)) \in F$ είναι μια *διαμόρφωση που αποδέχεται* (*accepting configuration*). Αυτό σημαίνει ότι ένα διπλής κατεύθυνσης ντετερμινιστικό αυτόματο (2DTA^r) ξεκινάει από τη ρίζα και επιστρέφει σε αυτή για να δεχθεί το δέντρο. Μια εκτέλεση είναι μια ακολουθία διαμορφώσεων c_1, \dots, c_n , $n \geq 1$, τέτοια ώστε να ισχύει $c_1 \rightarrow \dots \rightarrow c_n$ και η c_1 να είναι η διαμόρφωση εκκίνησης. Η παραπάνω εκτέλεση είναι *επιτυχημένη* όταν δεν υπάρχει διαμόρφωση c τέτοια ώστε $c_n \rightarrow c$ και επιπλέον η c_n είναι διαμόρφωση που αποδέχεται.

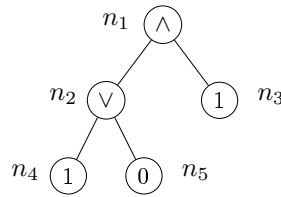
Σημειώνεται ότι παρόλο που συνήθως υπάρχουν πολλές διαφορετικές εκτελέσεις ενός ντετερμινιστικού αυτομάτου διπλής κατεύθυνσης σε ένα δέντρο, η ακολουθία καταστάσεων στις οποίες βρίσκεται κάθε κόμβος του δεδομένου δέντρου είναι η ίδια για όλες τις πιθανές εκτελέσεις. Το γεγονός αυτό εξασφαλίζεται λόγω της διαμέρισης του συνόλου $Q \times \Sigma$ στα U, D . Έτσι, ένας κόμβος σε μία συγκεκριμένη κατάσταση δεν μπορεί να κάνει μια πάνω μετάβαση σε μία εκτέλεση και μια κάτω σε μία άλλη εκτέλεση. Αυτός είναι ο λόγος που η συμπεριφορά των αυτομάτων αυτών θεωρείται ντετερμινιστική και συχνά αναφερόμαστε στην εκτέλεση του \mathcal{A} αντί για το πιο σωστό μία εκτέλεση του \mathcal{A} .

Παράδειγμα 4.1. Το διπλής κατεύθυνσης ντετερμινιστικό αυτόματο ($2DTA^r$) \mathcal{A} , που ορίζεται στη συνέχεια, ενεργεί σε γεμάτα δυαδικά δέντρα που αναπαριστούν Boolean κυκλώματα και δέχεται αυτά που αποτιμούνται στη μονάδα. Τα Boolean κυκλώματα που θεωρούμε περιέχουν τους τελεστές \vee και \wedge . Θεωρούμε ότι $\Sigma = \{\vee, \wedge, 0, 1\}$. Τα δέντρα που θεωρούμε είναι Σ -δέντρα, με ετικέτες για τους εσωτερικούς κόμβους τα \vee, \wedge και με ετικέτες για τα φύλλα τα $0, 1$.

Για το $2DTA^r$ $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, s, \delta)$ είναι $Q = \{s, u, 1\} \cup \{0, 1\}^2$ και $F = \{1\}$. Τα σύνολα $D, U \subseteq Q \times \Sigma$ που αντιστοιχούν στις κάτω και πάνω μεταβάσεις αντίστοιχα είναι $D = \{s\} \times \Sigma$ και $U = \{u, (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \times \Sigma$. Οι συναρτήσεις μεταβάσεων $\delta_{\text{leaf}} : D \rightarrow Q$, $\delta_{\text{root}} : U \rightarrow Q$, $\delta_{\uparrow} : U^2 \rightarrow Q$, και $\delta_{\downarrow} : D \times \{2\} \rightarrow Q^2$ ορίζονται στη συνέχεια. Για $\sigma \in \Sigma$, $i, j, i_1, j_1, i_2, j_2 \in \{0, 1\}$, και $o, o_1, o_2 \in \{\vee, \wedge\}$, είναι:

1. $\delta_{\downarrow}(s, \sigma, 2) = (s, s)$,
2. $\delta_{\text{leaf}}(s, \sigma) = u$,
3. $\delta_{\uparrow}((u, i), (u, j)) = (i, j)$,
4. $\delta_{\uparrow}(((i_1, j_1), o_1), ((i_2, j_2), o_2)) = (i_1 o_1 j_1, i_2 o_2 j_2)$,
5. $\delta_{\uparrow}(((i_1, j_1), o_1), (u, i_2)) = (i_1 o_1 j_1, i_2)$,
6. $\delta_{\uparrow}((u, i_1), ((i_2, j_2), o_2)) = (i_1, i_2 o_2 j_2)$,
7. $\delta_{\text{root}}((i, j), o) = i o j$.

Θεωρούμε το δέντρο που ακολουθεί και περιγράφουμε την εκτέλεση του \mathcal{A} σε αυτό.



Για τη διαμόρφωση εκκίνησης $c_1 : C_1 \rightarrow Q$, είναι $C_1 = \{n_1\}$ και $c_1(n_1) = s$. Δηλαδή $c_1 = \{n_1 \mapsto s\}$. Παρατηρούμε ότι από την c_1 , το \mathcal{A} μπορεί να πραγματοποιήσει μόνο μία μορφή μετάβασης: κάτω μετάβαση. Έτσι θεωρούμε την τομή $C_2 = \{n_2, n_3\}$ και ορίζουμε τη διαμόρφωση $c_2 = \{n_2 \mapsto s, n_3 \mapsto s\}$. Είναι $\delta_{\downarrow}(c_1(n_1), \text{label}(n_1), 2) =$

$\delta_1(s, \wedge, 2) = (s, s) = (c_2(n_2), c_2(n_3))$. Δηλαδή το \mathcal{A} πραγματοποιεί μια κάτω μετάβαση από τη c_1 στη c_2 . Ανάλογα, θεωρούμε την τομή $C_3 = \{n_4, n_5, n_3\}$ και ορίζουμε τη διαμόρφωση $c_3 = \{n_4 \mapsto s, n_5 \mapsto s, n_3 \mapsto s\}$. Το \mathcal{A} πραγματοποιεί μια κάτω μετάβαση από τη c_2 στη c_3 . Από αυτή τη διαμόρφωση, το \mathcal{A} μπορεί να πραγματοποιήσει μόνο μεταβάσεις φύλλου. Έτσι θεωρούμε την τομή $C_4 = C_3$ και ορίζουμε τη διαμόρφωση $c_4 = \{n_4 \mapsto u, n_5 \mapsto s, n_3 \mapsto s\}$. Εύκολα επαληθεύεται ότι το \mathcal{A} πραγματοποιεί μια μετάβαση φύλλου από τη c_3 στη c_4 και ομοίως από τη c_4 στη c_5 , όπου $C_5 = C_4$ και $c_5 = \{n_4 \mapsto u, n_5 \mapsto u, n_3 \mapsto s\}$. Θεωρούμε την $C_6 = \{n_2, n_3\}$ και τη διαμόρφωση $c_6 = \{n_2 \mapsto (1, 0), n_3 \mapsto s\}$. Η $c_5 \rightarrow c_6$ είναι μια πάνω μετάβαση. Αν $C_7 = C_6$ και $c_7 = \{n_2 \mapsto (1, 0), n_3 \mapsto u\}$, η $c_6 \rightarrow c_7$ είναι μια μετάβαση φύλλου. Επίσης αν $C_8 = \{n_1\}$ και $c_8 = \{n_1 \mapsto (1, 1)\}$, η $c_7 \rightarrow c_8$ είναι μια πάνω μετάβαση. Τέλος θεωρούμε $C_9 = C_8$ και $c_9 = \{n_1 \mapsto 1\}$. Είναι $c_8 \rightarrow c_9$ και η c_9 είναι μια διαμόρφωση που αποδέχεται. Η εκτέλεση c_1, \dots, c_9 είναι επιτυχημένη.

Σημειώνουμε ότι θα μπορούσαμε αντί για την c_6 , να είχαμε θεωρήσει τη διαμόρφωση $c'_6 = \{n_4 \mapsto u, n_5 \mapsto u, n_3 \mapsto u\}$. Η εκτέλεση $c_1, \dots, c_5, c'_6, c_7, c_8, c_9$ είναι προφανώς επιτυχημένη. Παρατηρούμε ότι και στις δύο εκτελέσεις η ακολουθία καταστάσεων στις οποίες βρίσκεται διαδοχικά κάθε κόμβος είναι ίδια. Ειδικότερα, για τα φύλλα n_i , $i = 3, 4, 5$ αυτή είναι s, u , για τον n_2 είναι $s, (1, 0)$ και για τη ρίζα n_1 είναι $s, (1, 1), 1$. \diamond

Αυτόματα ερωτήσεων. Ένα αυτόματο ερώτησης για δέντρα φραγμένης τάξης (*query automaton- QA^r*) είναι μία πλειάδα $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, s, \delta, \lambda)$, όπου το $(Q, \Sigma, F, s, \delta)$ είναι ένα αυτόματο δέντρου διπλής κατεύθυνσης και η λ είναι μια συνάρτηση από το $Q \times \Sigma$ στο $\{0, 1\}$. η λ είναι η *συνάρτηση επιλογής* (*selection function*).

Αν t είναι ένα δέντρο και n ένας κόμβος του δέντρου, τότε το αυτόματο \mathcal{A} επιλέγει τον κόμβο n σε μια διαμόρφωση $c : C \rightarrow Q$, αν $n \in C$ και $\lambda(c(n), \text{label}(n)) = 1$. Το \mathcal{A} επιλέγει τον κόμβο n εάν η εκτέλεσή του c_1, \dots, c_m πάνω στο t είναι επιτυχημένη και εάν υπάρχει ένα $i \in \{1, \dots, m\}$ τέτοιο ώστε ο n να επιλέγεται από το \mathcal{A} στην c_i . Η ερώτηση που εκφράζεται από το αυτόματο \mathcal{A} ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{A}(t) = \{n \in \text{dom}(t) \mid \text{το } \mathcal{A} \text{ επιλέγει την } n\}.$$

Παράδειγμα 4.2. Ένα αυτόματο που επιλέγει όλους τους κόμβους μου αποτιμούνται με 1 σε ένα λογικό κύκλωμα, προκύπτει φυσικά από το αυτόματο διπλής κατεύθυνσης του Παραδείγματος 4.1 θέτοντας το F ίσο με Q και προσθέτοντας την συνάρτηση λ , η οποία ορίζεται ως εξής: για $i, j \in \{0, 1\}$, και $o \in \{\vee, \wedge\}$ είναι $\lambda((i, j), o) = 1$ αν $ioj = 1$. \diamond

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.1. Ενώ τα διπλής κατεύθυνσης ντετερμινιστικά αυτόματα δέντρων είναι ισοδύναμα με τα ντετερμινιστικά bottom-up αυτόματα δέντρων (με την έννοια ότι ορίζουν τις ίδιες κλάσεις δέντρων), το ίδιο δεν ισχύει για τα αυτόματα ερωτήσεων (όχι ισοδύναμα με την έννοια ότι εκφράζουν τις ίδιες ερωτήσεις). Δηλαδή, δεν είναι όλα τα αυτόματα ερωτήσεων ισοδύναμα με ντετερμινιστικά αυτόματα ερωτήσεων τα οποία είναι μόνο bottom-up ή μόνο top-down. \square

MSO και αυτόματα ερωτήσεων. Το θεώρημα που ακολουθεί χαρακτηρίζει την εκφρασιμότητα των αυτομάτων ερωτήσεων για δέντρα φραγμένης τάξης σε σχέση με την MSO.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1 ([20]). *Μια μονομελής ερώτηση εκφράζεται από ένα αυτόματο ερώτησης δέντρου φραγμένης τάξης αν και μόνο αν είναι ορίσιμη στην MSO.*

Στο παραπάνω θεώρημα βασίζεται η απόδειξη της ισοδυναμίας της MSO και της μοναδιαίας datalog ως προς τη ικανότητά τους να ορίζουν μονομελείς ερωτήσεις ([16]).

4.2 Μονομελείς ερωτήσεις και Αυτόματα δέντρων που επιλέγουν (Selecting Tree Automata)

Παρουσιάζονται τα βασικά σημεία του προβλήματος της αποτίμησης μονομελών ερωτήσεων σε δέντρα φραγμένης τάξης σύμφωνα με το [15].

4.2.1 Εισαγωγικές έννοιες

Δίνονται οι βασικοί ορισμοί που αφορούν τη μοντελοποίηση των XML-εγγράφων και τον ορισμό των αντίστοιχων μονομελών ερωτήσεων.

Σχήμα, στιγμιότυπο δέντρου σχήματος σ , XML-έγγραφο. Ένα σχήμα (*schema*) είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από σύμβολα μονομελών σχέσεων. Θεωρούμε ότι $\sigma = \{S_1, \dots, S_n\}$ είναι ένα σχήμα. Ένα στιγμιότυπο δέντρου σχήματος σ (*tree instance of schema σ*) ή σ -στιγμιότυπο δέντρου (*σ -tree instance*), είναι μια πλειάδα

$$\mathbf{T} = (V^{\mathbf{T}}, \gamma^{\mathbf{T}}, \text{root}^{\mathbf{T}}, S_1^{\mathbf{T}}, \dots, S_n^{\mathbf{T}}),$$

όπου $V^{\mathbf{T}}$ είναι ένα (πεπερασμένο) σύνολο κόμβων, η $\gamma^{\mathbf{T}} : V^{\mathbf{T}} \rightarrow (V^{\mathbf{T}})^*$ είναι μια συνάρτηση της οποίας ο γράφος είναι ακυκλικός και έχει έναν μοναδικό κόμβο εσωτερικού βαθμού 0 από τον οποίο όλοι οι άλλοι κόμβοι είναι προσεγγίσιμοι, η $\text{root}^{\mathbf{T}}$ είναι αυτός ο κόμβος εσωτερικού βαθμού 0, τα $S_1^{\mathbf{T}}, \dots, S_n^{\mathbf{T}}$ είναι υποσύνολα του $V^{\mathbf{T}^2}$. Για τα στιγμιότυπα δέντρων, ο γράφος της γ είναι δέντρο με ρίζα την $\text{root}^{\mathbf{T}}$, και ο w είναι παιδί του u , αν ο w εμφανίζεται στο $\gamma(u)$. Όταν το στιγμιότυπο \mathbf{T} εννοείται από τα συμφραζόμενα, συχνά παραλείπεται η αναφορά του.

Τα XML-έγγραφα μοντελοποιούνται ως στιγμιότυπα δέντρων. Οι μονομελείς σχέσεις που αντιστοιχούν στο σχήμα χρησιμοποιούνται για την κωδικοποίηση της πληροφορίας που περιέχεται στους κόμβους ενός XML-δέντρου. Η πληροφορία αυτή μπορεί να είναι το XML-tag ενός κόμβου, ή πληροφορία που κωδικοποιείται στα αλφαριθμητικά δεδομένα ενός κόμβου.

Ερωτήσεις, λογική και σχεσιακές δομές. Μία (μονομελής) ερώτηση (*unary query*) Q σχήματος σ αντιστοιχεί σε κάθε στιγμιότυπο δέντρου σχήματος σ ένα υποσύνολο $Q(\mathbf{T}) \subseteq V^{\mathbf{T}}$.

²Σημειώνουμε ότι υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ του σχήματος σ και του αλφαβήτου Γ της ενότητας που αφορά τα χρωματισμένα δέντρα. Το σ ορίζει τα πιθανά σύνολα στα οποία μπορεί να ανήκει ένας κόμβος και ανάλογα το Γ ορίζει τα σύνολα $(P_\gamma^{\mathbf{T}})_{\gamma \in \Gamma}$ που προσδιορίζουν τα χρώματα των κόμβων. Η βασική διαφορά είναι ότι σε κάθε κόμβο n αντιστοιχεί μοναδικό χρώμα γ ($n \in P_\gamma^{\mathbf{T}}$) σε ένα χρωματισμένο δέντρο, ενώ φυσικά ο n μπορεί να ανήκει σε πολλές σχέσεις $S^{\mathbf{T}}$, $S \in \sigma$, σε ένα σ -στιγμιότυπο. Δηλαδή τα $(P_\gamma^{\mathbf{T}})_{\gamma \in \Gamma}$ αποτελούν διαμέριση του συνόλου κόμβων ενώ τα $(S^{\mathbf{T}})_{S \in \sigma}$ όχι.

Ένα σ -στιγμιότυπο δέντρου μπορεί να αναπαρασταθεί από μια σχεσιακή δομή της οποίας το λεξικό αποτελείται εκτός από τα μονομελή σύμβολα σχέσεων του σ , από τα μονομελή σύμβολα σχέσεων *Root*, *Leaf*, *Last_Sibling* και από τα διμελή σύμβολα σχέσεων *First_Child* και *Next_Sibling*, όλα με τη φυσική σημασία. Το \mathbf{T} χρησιμοποιείται για να δηλώσει τόσο το αντίστοιχο στιγμιότυπο δέντρου, όσο και την λογική δομή που το αναπαριστά.

Θεωρούμε ένα στιγμιότυπο δέντρου \mathbf{T} και έναν MSO-τύπο $\varphi(x)$. Συμβολίζουμε με $\varphi(\mathbf{T})$ το σύνολο όλων των κόμβων $u \in V^{\mathbf{T}}$ για τους οποίους $\mathbf{T} \models \varphi(u)$ (δηλαδή το $\text{sat_assign}(\mathbf{T}, \varphi)$). Η $\mathbf{T} \rightarrow \varphi(\mathbf{T})$ ονομάζεται *ερώτηση που ορίζεται από τον φ* .

Διαδικές δομές. Δεδομένου ενός στιγμιότυπου δέντρου υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος κωδικοποιεί το δεδομένο στιγμιότυπο σε ένα δυαδικό στιγμιότυπο. Η μετάφραση της MSO στα αντίστοιχα δυαδικά στιγμιότυπα γίνεται εύκολα. Δηλαδή μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να περιοριστούμε μόνο σε δυαδικά στιγμιότυπα (Πίνακας 14).

Σε αντίθεση με τη γενική περίπτωση, τα δυαδικά στιγμιότυπα δέντρων αναπαρίστανται ως σχεσιακές δομές με τη βοήθεια των εξής δυαδικών συμβόλων σχέσης: *First_Child* και *Second_Child*, με την προφανή σημασία³.

4.2.2 Selecting Tree Automaton

Υπάρχει ένα κοινό χαρακτηριστικό σημείο ανάμεσα στα αυτόματα που ορίζονται σε αυτή την ενότητα και στα αυτόματα ερώτησης που ορίστηκαν στην προηγούμενη ενότητα: ορισμένες καταστάσεις είναι *καταστάσεις που επιλέγουν (selecting states)*, δηλαδή επιλέγουν τους κόμβους που αποτελούν την απάντηση στην αντίστοιχη ερώτηση. Ωστόσο, αν εξαιρέσει κανείς αυτή την ομοιότητα, οι μηχανισμοί υπολογισμού των απαντήσεων των ερωτήσεων είναι αρκετά διαφορετικοί.

Μη-ντετερμιστικό (bottom-up) αυτόματο δέντρου, αυτόματο σ -δέντρου. Ένα μη-ντετερμιστικό (bottom-up) αυτόματο δέντρου είναι μια πλειάδα $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, F, \delta)$, όπου το Q είναι ο *χώρος καταστάσεων (state space)*, Σ είναι το *αλφάβητο*, $F \subseteq Q$ είναι το σύνολο των *καταστάσεων που αποδέχονται*, και

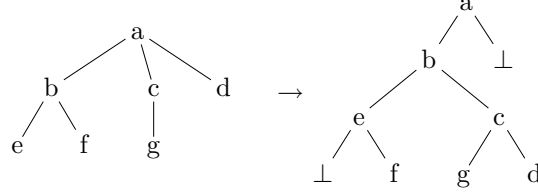
$$\delta : \Sigma \cup (Q \times \Sigma) \cup (Q \times Q \times \Sigma) \rightarrow \text{Pow}(Q)$$

είναι η *συνάρτηση μετάβασης*.

Η συνάρτηση μετάβασης δ ορίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να καλύπτει όλες τις περιπτώσεις: φύλλα, εσωτερικούς κόμβους με ένα παιδί και εσωτερικούς κόμβους με δύο παιδιά. Σημειώνεται ωστόσο, ότι αν ένας κόμβος έχει μόνο ένα παιδί, δεν υπάρχει η δυνατότητα διάκρισης ανάμεσα στην περίπτωση που το παιδί αυτό είναι το αριστερό και στην περίπτωση που αυτό είναι το δεξί παιδί του εν λόγω κόμβου.

Ένα *αυτόματο σ -δέντρου (σ -tree automaton)*, δηλαδή ένα αυτόματο που ενεργεί σε στιγμιότυπα δέντρων σχήματος σ , είναι ένα μη-ντετερμιστικό (bottom-up) αυ-

³Αν $\Sigma = \text{Pow}(\sigma)$ και ο γράφος της $\gamma^{\mathbf{T}}$ είναι ένα δυαδικό δέντρο με κάθε εσωτερικό κόμβο να έχει ακριβώς δύο παιδιά, τότε η έννοια του σ -στιγμιότυπου δέντρου είναι ισοδύναμη με εκείνη του χρωματισμένου Σ -δέντρου.



Πίνακας 14: Κωδικοποίηση σε δυαδικό στιγμιότυπο.

τόματο δέντρου $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, F, \delta)$ με $\Sigma = \text{Pow}(\sigma)$. Εάν το \mathbf{T} είναι ένα στιγμιότυπο δέντρου και $n \in V^{\mathbf{T}}$, χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\Sigma(n)$ για να δηλώσει το $\{R \in \sigma \mid n \in R^{\mathbf{T}}\} \in \Sigma = \text{Pow}(\sigma)^4$.

Η εκτέλεση ενός αυτομάτου σ -δέντρου σε δυαδικά στιγμιότυπα. Η εκτέλεση (*run*) ενός αυτομάτου σ -δέντρου $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, F, \delta)$ σε ένα στιγμιότυπο δυαδικού δέντρου \mathbf{T} είναι μια απεικόνιση $\rho : V^{\mathbf{T}} \rightarrow Q$ τέτοια ώστε:

- $\rho(n) \in \delta(\Sigma(n))$, αν ο $n \in V^{\mathbf{T}}$ είναι φύλλο,
- $\rho(n) \in \delta(\rho(n_1), \Sigma(n))$, εάν ο $n \in V^{\mathbf{T}}$ είναι εσωτερικός κόμβος με ένα παιδί n_1 ,
- $\rho(n) \in \delta(\rho(n_1), \rho(n_2), \Sigma(n))$, εάν ο $n \in V^{\mathbf{T}}$ είναι εσωτερικός κόμβος με παιδιά n_1 και n_2 .

Μια εκτέλεση είναι επιτυχημένη αν $\rho(\text{root}^{\mathbf{T}}) \in F$. Το αυτόματο \mathfrak{A} δέχεται το \mathbf{T} εάν υπάρχει μια επιτυχημένη εκτέλεση του \mathfrak{A} στο \mathbf{T} .

Προσθήκη ενός μηχανισμού για την επιλογή κόμβων: αυτόματα δέντρων που επιλέγουν. Τα αυτόματα που ορίστηκαν παραπάνω δεν έχουν την ικανότητα να ορίζουν μονομελείς ερωτήσεις. Για να το επιτύχουν αυτό θα πρέπει να εφοδιαστούν με έναν επιπρόσθετο μηχανισμό για την επιλογή κόμβων.

Ένα αυτόματο σ -δέντρου που επιλέγει (*selecting σ -tree automaton, σ -STA*) είναι μια πλειάδα $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, F, \delta, S)$, όπου το (Q, Σ, F, δ) είναι ένα αυτόματο σ -δέντρου και το $S \subseteq Q$ ένα σύνολο καταστάσεων που επιλέγουν.

Η ερώτηση που ορίζεται από ένα σ -STA αντιστοιχεί σε κάθε σ -δέντρο \mathbf{T} το σύνολο

$$\mathfrak{A}(\mathbf{T}) = \{v \in V^{\mathbf{T}} \mid \text{σε κάθε επιτυχημένη εκτέλεση του } \mathfrak{A} \text{ ο κόμβος } v \text{ βρίσκεται σε κατάσταση που επιλέγει}\}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2 ([15]). Μία μονομελής ερώτηση (σε δυαδικά στιγμιότυπα δέντρων) είναι ορίσιμη στην MSO αν και μόνο αν είναι ορίσιμη από ένα STA.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αποδεικνύεται αρχικά ότι για κάθε μονομελή MSO ερώτηση, υπάρχει ένα ισοδύναμο STA. Η απόδειξη βασίζεται στο γνωστό αποτέλεσμα (Doner[10], Thatcher&

⁴Σημειώνουμε την αντιστοιχία ανάμεσα στο $\Sigma(n) \in \Sigma$ και στο χρώμα $c(n) \in \Gamma$ του κόμβου n ενός χρωματισμένου Γ -δέντρου T . Θυμίζουμε ότι $c(n) = \gamma$ αν $n \in P_\gamma^T$. Εδώ $\Sigma(n) = \{S, P, R\}$ αν $n \in S^{\mathbf{T}}$, $n \in P^{\mathbf{T}}$ και $n \in R^{\mathbf{T}}$.

Wright[21]) ότι μια κλάση δυαδικών δέντρων είναι ορίσιμη στην MSO ανν είναι αναγνωρίσιμη από ένα αυτόματο δέντρου. Άμεση συνέπεια της παραπάνω πρότασης είναι ότι για κάθε MSO-τύπο $\psi(X)$ στο λεξικό $\sigma \cup \{First_Child, Second_Child\}$, όπου σ είναι κάποιο σχήμα, υπάρχει ένα αυτόματο δυαδικού $\sigma \cup \{X\}$ -δέντρου \mathfrak{A}_ψ τέτοιο ώστε για όλα τα υποσύνολα $U \subseteq V^{\mathbf{T}}$ να είναι

$$(\mathbf{T}, U) \models \psi(X) \iff \mathfrak{A}_\psi \text{ δέχεται το } (\mathbf{T}, U),$$

όπου με (\mathbf{T}, U) συμβολίζεται η επέκταση του δυαδικού σ -στιγμιότυπου \mathbf{T} στο δυαδικό $\sigma \cup X$ -στιγμιότυπο δέντρου όπου το X (μονομελές σύμβολο σχέσης) ερμηνεύεται ως U .

Θεωρούμε την μονομελή ερώτηση $\varphi(x)$, δηλαδή έναν MSO-τύπο με μία ελεύθερη πρωτοβάθμια μεταβλητή, και ορίζουμε τον MSO-τύπο

$$\psi(X) = \forall x(\varphi(x) \rightarrow X(x)).$$

Παρατηρούμε ότι τότε είναι:

$$\varphi(\mathbf{T}) = \bigcap \{U \subseteq V^{\mathbf{T}} \mid (\mathbf{T}, U) \models \psi(X)\}.$$

Θεωρούμε ότι το αυτόματο \mathfrak{A}_ψ ορίζεται από την πλειάδα $(Q, \text{Pow}(\sigma \cup X), F, \delta)$. Με βάση αυτό ορίζεται ένα νέο αυτόματο $\mathfrak{A} = (Q \times \{0, 1\}, \text{Pow}(\sigma), F \times \{0, 1\}, \delta', Q \times \{1\})$, που είναι ένα αυτόματο ερώτησης σ -δέντρου με συνάρτηση μετάβασης δ' η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\delta'((q_1, e_1), (q_2, e_2), a) = (\delta(q_1, q_2, a) \times \{0\}) \cup (\delta(q_1, q_2, a \cup \{X\}) \times \{1\}),$$

για όλα τα $q_1, q_2 \in Q$, $e_1, e_2 \in \{0, 1\}$, $a \in \text{Pow}(\sigma)$. Ανάλογα ορίζονται οι $\delta'(a)$ και $\delta'(q, a)$. Οι δεκτές εκτελέσεις του αυτομάτου \mathfrak{A} στο \mathbf{T} αντιστοιχούν στις δεκτές εκτελέσεις του \mathfrak{A}_ψ στις επεκτάσεις (\mathbf{T}, U) . Επομένως,

$$\mathfrak{A}(\mathbf{T}) = \bigcap \{U \subseteq V^{\mathbf{T}} \mid \mathfrak{A}_\psi \text{ δέχεται το } (\mathbf{T}, U)\} = \varphi(\mathbf{T}).$$

Για την αντίθετη κατεύθυνση, θεωρούμε ότι το $\mathfrak{A} = (Q, \text{Pow}(\sigma), F, \delta, S)$ είναι ένα σ -STA με σύνολο καταστάσεων $Q = \{q_1, \dots, q_k\}$. Μία εκτέλεση ρ του \mathfrak{A} σε ένα δυαδικό σ -στιγμιότυπο δέντρου \mathbf{T} μπορεί να περιγραφεί από μία πλειάδα (U_1, \dots, U_k) από υποσύνολα του $V^{\mathbf{T}}$, για τα οποία είναι $v \in U_i$ αν $\rho(v) = q_i$. Θεωρούμε ότι η πρωτοβάθμια πρόταση $\psi(X_1, \dots, X_k)$ εκφράζει το γεγονός ότι η (X_1, \dots, X_k) περιγράφει μία δεκτή εκτέλεση. Τότε ο τύπος

$$\varphi(x) = \forall X_1 \dots X_k (\psi(X_1, \dots, X_k) \rightarrow \bigvee_{i, q_i \in S} X_i(x))$$

ορίζει την ίδια ερώτηση με το \mathfrak{A} . ♣

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.1 ([15]). *Για κάθε STA \mathfrak{A} υπάρχει ένα STA \mathfrak{A}' τέτοιο ώστε για όλα τα δυαδικά στιγμιότυπα δέντρου \mathbf{T} ,*

$$\mathfrak{A}(\mathbf{T}) = \{v \in V^{\mathbf{T}} \mid \text{υπάρχει μία επιτυχημένη εκτέλεση του } \mathfrak{A}' \text{ στο } \mathbf{T} \text{ όπου ο κόμβος } v \text{ βρίσκεται σε κατάσταση που επιλέγει}\}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν $\varphi(x)$ είναι η ερώτηση που ορίζει το STA \mathfrak{A} , θεωρούμε το STA $\mathfrak{B} = (Q, \text{Pow}(\sigma), F, \delta, S)$ που ορίζει την $\neg\varphi(x)$. Εύκολα επαληθεύεται ότι το STA για το οποίο ισχύει η παραπάνω ιδιότητα είναι $\mathfrak{A}' = (Q, \text{Pow}(\sigma), F, \delta, Q \setminus S)$. \clubsuit

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.2. Στην Ενότητα 3.2.4 παρουσιάστηκε ο γενικός τρόπος κατασκευής του Γ_k -αυτομάτου \mathfrak{A}_ϕ για κάθε k -μελή MSO[τ_Γ^0]-τύπο ϕ . Προφανώς η κατασκευή του αυτομάτου δυαδικού $\sigma \cup \{X\}$ -δέντρου \mathfrak{A}_ψ που αντιστοιχεί σε κάποιο MSO-τύπο $\psi(X)$ στο λεξικό $\sigma \cup \{First_Child, Second_Child\}$, γίνεται ανάλογα. Για παράδειγμα, το αυτόματο που αντιστοιχεί σε έναν ατομικό τύπο $S^*(X)$, $S \in \sigma$, είναι ανάλογο του $\Gamma \times \{0, 1\}$ -αυτομάτου που αντιστοιχεί στον $P_\alpha^*(X)$, $\alpha \in \Gamma$ (Πίνακας 1, σελ. 18). Θυμίζουμε ότι για το $\mathfrak{A}_{P_\alpha^*}$ είναι $\Delta((\gamma, 0)) = q_0$, $\gamma \in \Gamma$ και $\Delta((\alpha, 1)) = q_\alpha$, $\Delta((\alpha', 1)) = q_f$ για $\alpha' \in \Gamma \setminus \{\alpha\}$. Για το \mathfrak{A}_{S^*} είναι $\delta(W) = q_0$, αν $W \in \text{Pow}(\sigma)$, $\delta(W \cup \{X\}) = q_\alpha$, αν $W \in \{M \in \text{Pow}(\sigma) \mid S \in M\}$, και $\delta(W \cup \{X\}) = q_f$, αν $W \in \{M \in \text{Pow}(\sigma) \mid S \notin M\}$. $\Delta((\alpha', 1)) = q_f$ για $\alpha' \in \Gamma \setminus \{\alpha\}$. Ανάλογα ισχύουν για τις υπόλοιπες μεταβάσεις και για τους υπόλοιπους ατομικούς τύπους. Δεδομένων των αυτομάτων που αντιστοιχούν στους ατομικούς τύπους, οι κανόνες κατασκευής αυτομάτων για πιο σύνθετους τύπους επεκτείνονται φυσικά. \square

Παράδειγμα 4.3. Θεωρούμε το σχήμα $\sigma = \{P, R\}$ και θεωρούμε τον τύπο $\varphi(x) = P(x)$. Δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσουμε ότι το αυτόματο που αντιστοιχεί στον τύπο $\psi(X) = \forall x(P(x) \rightarrow X(x))$ είναι $\mathfrak{A}_\psi = (Q, \text{Pow}(\{P, R, X\}), F, \delta)$, όπου $Q = \{q_0, q_a, q_f\}$, $F = \{q_a\}$ και για τη δ έχουμε τις ισότητες: $\delta(\{P\}) = q_f$, $\delta(\{P, R\}) = q_f$, $\delta(\{P, X\}) = q_a$, $\delta(\{P, R, X\}) = q_a$, $\delta(\{R\}) = \delta(\{R, X\}) = q_0$ και $\delta(q_0, q_0, W) = \delta(q_0, W) = \delta(W)$, $W \in \text{Pow}(\{P, R, X\})$. Επίσης $\delta(q_f, *, *) = \delta(*, q_f, *) = q_f$ (το $*$ δηλώνει ότι τα αντίστοιχα ορίσματα μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή στο πεδίο ορισμού τους) και $\delta(q_f, *) = q_f$. Επιπλέον είναι $\delta(q_0, q_a, \{P\}) = q_f$, $\delta(q_0, q_a, \{P, R\}) = q_f$, $\delta(q_0, q_a, \{P, X\}) = q_a$, $\delta(q_0, q_a, \{P, R, X\}) = q_a$, $\delta(q_0, q_a, \{R\}) = \delta(q_0, q_a, \{R, X\}) = q_a$ και $\delta(q_a, q_0, W) = \delta(q_a, q_a, W) = \delta(q_a, W) = \delta(q_0, q_a, W)$, $W \in \text{Pow}(\{P, R, X\})$.

Το αντίστοιχο αυτόματο ερώτησης $\{P, R\}$ -δέντρου είναι $\mathfrak{A} = (Q', \text{Pow}(\{P, R\}), F', \delta', S)$, όπου $Q' = \{q_{00}, q_{01}, q_{a0}, q_{a1}, q_{f0}, q_{f1}\}$, $F' = \{q_{a0}, q_{a1}\}$, $S = \{q_{01}, q_{a1}, q_{f1}\}$ και η δ' ορίζεται: $\delta'(\{P\}) = \{q_{f0}, q_{a1}\}$, $\delta'(\{P, R\}) = \{q_{f0}, q_{a1}\}$, $\delta'(\{R\}) = \{q_{00}, q_{01}\}$ και $\delta'(q_{0i}, q_{0j}, W) = \delta'(q_{0i}, W) = \delta'(W)$, $i, j \in \{0, 1\}$, $W \in \text{Pow}(\{P, R\})$. Επίσης $\delta'(q_{fi}, *, *) = \delta'(*, q_{fi}, *) = \delta'(q_{fi}, *) = \{q_{f0}, q_{f1}\}$, $i \in \{0, 1\}$. Επιπλέον είναι $\delta'(q_{0i}, q_{aj}, \{P\}) = \{q_{f0}, q_{a1}\}$, $\delta'(q_{0i}, q_{aj}, \{P, R\}) = \{q_{f0}, q_{a1}\}$, $\delta'(q_{0i}, q_{aj}, \{R\}) = \{q_{a0}, q_{a1}\}$ και $\delta'(q_{ai}, q_{0j}, W) = \delta'(q_{ai}, q_{aj}, W) = \delta'(q_{ai}, W) = \delta(q_{0i}, q_{aj}, W)$, $i, j \in \{0, 1\}$, $W \in \text{Pow}(\{P, R\})$. \diamond

4.2.3 Το πρόβλημα της αποτίμησης για STA-ερωτήσεις σε δυαδικά στιγμιότυπα

Με τον όρο STA-ερωτήσεις αναφερόμαστε στις ερωτήσεις που ορίζονται από αυτόματα δέντρων που επιλέγουν (STAs). Η πολυκλοκότητα του προβλήματος αποτίμησης STA-ερωτήσεων περιγράφεται στο θεώρημα που ακολουθεί.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.1 ([15]). Το πρόβλημα της αποτίμησης για STA-ερωτήσεις σε δυαδικά στιγμιότυπα δέντρων μπορεί να επιλυθεί σε χρόνο $O(s^3 \cdot n)$, όπου s είναι ο αριθμός των

καταστάσεων του δεδομένου αυτομάτου και n ο αριθμός των κόμβων του δεδομένου στιγμιότυπου.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε ένα STA $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, F, \delta, S)$, $\Sigma = \text{Pow}(\sigma)$, και θεωρούμε ένα στιγμιότυπο δυαδικού σ -δέντρου \mathbf{T} . Ανάλογα με τα δύο πρώτα βήματα του αλγορίθμου των Flum, Frick, Grohe υπολογίζονται σύνολα πιθανών και επιτυχημένων καταστάσεων σε κάθε κόμβο σε ένα bottom-up και ένα top-down πέρασμα του δεδομένου δέντρου αντίστοιχα. Σε κάθε πέρασμα πραγματοποιούνται για κάθε κόμβο $O(s^3)$ υπολογισμοί.

Οι κόμβοι του $\mathfrak{A}(\mathbf{T})$ είναι ακριβώς αυτοί για τους οποίους το σύνολο επιτυχημένων καταστάσεων αποτελεί υποσύνολο του S . ♣

Στο [18] παρουσιάζεται μία αποτελεσματική τεχνική για τον υπολογισμό ερωτήσεων σε XML-δέντρα, η οποία βασίζεται στον αλγόριθμο αποτίμησης των STAs.

5 Το πρόβλημα της MSO-αποτίμησης σε δομές φραγμένου δεντροπλάτους

Παρουσιάζεται η αναγωγή του προβλήματος για τις δομές φραγμένου δεντροπλάτους σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα για χρωματισμένα δέντρα και τα αντίστοιχα αποτελέσματα πολυπλοκότητας που δίνονται στο [13].

Θεωρούμε μια κλάση δομών \mathcal{C} , τέτοια ώστε το δεντροπλάτος κάθε δομής (η έννοια ορίζεται αναλυτικά στη συνέχεια) που ανήκει σε αυτή να είναι φραγμένο από μια σταθερά w . Θεωρούμε μια τ -δομή $\mathcal{A} = (A, (R^A)_{R \in \tau}) \in \mathcal{C}$ και θεωρούμε έναν MSO[τ]-τύπο $\varphi(X_1, \dots, X_l, x_1, \dots, x_m)$. Το παρακάτω πρόβλημα αποτελεί ένα στιγμιότυπο του προβλήματος της εύρεσης των αναθέσεων για τη MSO-λογική σε δομές φραγμένου δεντροπλάτους (αρχικό πρόβλημα):

- Είσοδος: τ -δομή \mathcal{A} , MSO[τ]-τύπος $\varphi(X_1, \dots, X_k, x_1, \dots, x_l)$.
- Πρόβλημα: Υπολογισμός του $\text{sat_assign}(\varphi, \mathcal{A})$.

5.1 Αναγωγή του αρχικού προβλήματος σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα MSO-αποτίμησης σε χρωματισμένα δέντρα

Ορίζονται βασικές έννοιες του προβλήματος και παρουσιάζονται αναλυτικά τα βασικά σημεία της αναγωγής.

5.1.1 Οι δεντροδιασπάσεις μια δομής

Δεντροδιασπάσεις δομής. Θεωρούμε μια τ -δομή $\mathcal{A} = (A, (R^A)_{R \in \tau})$. Ο υπεργράφος

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = (A, \{\{a_1, \dots, a_r\} \mid \exists R \in \tau, R \text{ } r\text{-μελές}, (a_1, \dots, a_r) \in R^A\}),$$

ονομάζεται *υπεργράφος της δομής \mathcal{A}* . Οι *δεντροδιασπάσεις της δομής \mathcal{A}* , είναι οι δεντροδιασπάσεις του υπεργράφου της (δηλαδή $\text{TreeDecomp}(\mathcal{A}) = \text{TreeDecomp}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$). Ανάλογα, το *δεντροπλάτος της \mathcal{A}* είναι $\text{tw}(\mathcal{A}) = \text{tw}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$. Μια κλάση δομών \mathcal{C} έχει φραγμένο δεντροπλάτος εάν υπάρχει ένα w τέτοιο ώστε $\text{tw}(\mathcal{A}) \leq w$ για κάθε δομή $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$.

Ειδικές δεντροδιασπάσεις. Θεωρούμε μια τ -δομή $\mathcal{A} = (A, (R^A)_{R \in \tau})$. Μία ειδική (*special*) w -δεντροδιάσπαση της \mathcal{A} είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $(\mathcal{T}, (\bar{a}^n)_{n \in T})$, όπου το $\mathcal{T} = (T, E^T)$ είναι ένα γεμάτο δυαδικό δέντρο, η $(\bar{a}^n)_{n \in T}$ είναι μια οικογένεια από $(w+1)$ -πλειάδες $\bar{a}^n = (a_0^n, a_1^n, \dots, a_w^n)$ από στοιχεία του A (δηλαδή $\bar{a}^n \in A^{w+1}$, $n \in T$) και η $(\mathcal{T}, (\{a_0^n, a_1^n, \dots, a_w^n\})_{n \in T})$ είναι μία w -δεντροδιάσπαση της δομής \mathcal{A} . Θα συμβολίζουμε με $\text{SpecTreeDecomp}(\mathcal{A})$ το σύνολο των ειδικών δεντροδιασπάσεων μιας δομής \mathcal{A} και με $\text{SpecTreeDecomp}_w(\mathcal{A})$ τα στοιχεία του $\text{SpecTreeDecomp}(\mathcal{A})$ πλάτους w .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.1. Τα block διαφορετικών κόμβων του δέντρου μιας ειδικής δεντροδιάσπασης είναι δυνατόν να ταυτίζονται. Δηλαδή δεδομένης μιας ειδικής δεντροδιάσπασης μπορεί να υπάρχουν κόμβοι $n_i, n_j \in T, n_i \neq n_j$ για τους οποίους να είναι $\bar{a}^{n_i} = \bar{a}^{n_j}$.

Επίσης είναι προφανές ότι δεδομένης μιας w -δεντροδιάσπασης μιας δομής, η μετατροπή της σε μία ειδική w -δεντροδιάσπαση της δομής αυτής, γίνεται σε γραμμικό χρόνο. Για παράδειγμα, αν $(T, (X_n)_{n \in T})$ μια w -δεντροδιάσπαση, για κάθε $X_n = \{a_0, \dots, a_w\}$ θεωρούμε ότι $\bar{a}^n = (a_0, a_1, \dots, a_w)$. Ενώ για κάθε $X_n = \{a_0, \dots, a_u\}, u < w$, μπορούμε να θεωρήσουμε $\bar{a}^n = (a_0, a_1, \dots, a_u, a_0, \dots, a_0)$, δηλαδή συμπληρώνουμε τις θέσεις $u+1, \dots, w$ της πλειάδας \bar{a}^n επαναλαμβάνοντας το στοιχείο a_0 . Η $(T, (\bar{a}^n)_{n \in T})$ είναι μια ειδική w -δεντροδιάσπαση. \square

5.1.2 Κωδικοποίηση μιας δομής στο δέντρο μιας ειδικής δεντροδιάσπασής της: το αντίστοιχο χρωματισμένο δέντρο

Θεωρούμε ένα λεξικό $\tau = \{R_1, R_2, \dots, R_m\}$. Υποθέτουμε ότι κάθε σύμβολο σχέσης $R_i, 1 \leq i \leq m$, είναι r_i -μελής. Θεωρούμε μία τ -δομή $\mathcal{A} = (A, (R_i^{\mathcal{A}})_{1 \leq i \leq m})$ και θεωρούμε μια ειδική w -δεντροδιάσπαση $(T, (\bar{a}^n)_{n \in T})$ της \mathcal{A} . Θα δούμε στη συνέχεια αναλυτικά πώς η δομή \mathcal{A} κωδικοποιείται σε ένα χρωματισμένο δέντρο $T^* = (T, c)$. Παρατηρούμε ότι το υποκείμενο δέντρο του T^* ταυτίζεται με το δέντρο της δεδομένης δεντροδιάσπασης. Στην ουσία, η κωδικοποίηση της δομής \mathcal{A} πραγματοποιείται στη συνάρτηση χρωματισμού c . Ο ορισμός του T^* ολοκληρώνεται με τον ορισμό της c .

Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $[w]$ για το σύνολο $\{0, 1, \dots, w\}$. Ορίζουμε το αλφάβητο $\Gamma_{(\tau, w)}$ ως εξής:

$$\Gamma_{(\tau, w)} = \text{Pow}([w]^2) \times \text{Pow}([w]^2) \times \text{Pow}([w]^{r_1}) \times \dots \times \text{Pow}([w]^{r_m}).$$

Το T^* είναι ένα $\Gamma_{(\tau, w)}$ -δέντρο και έτσι $c: T \rightarrow \Gamma_{(\tau, w)}$. Δηλαδή το χρώμα $c(n)$ ενός κόμβου $n \in T$ είναι μια $(m+2)$ -πλειάδα $(c_1(n), c_2(n), \dots, c_{m+2}(n))$, η οποία ορίζεται ως εξής:

- $c_1(n) = \{(i, j) \mid a_i^n = a_j^n\}$,
- $c_2(n) = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } n \text{ είναι η ρίζα του δέντρου } T \text{ (} n = r^T \text{),} \\ \{(i, j) \mid a_i^n = a_j^s\}, & \text{αν } n \neq r^T \text{ και } s \text{ είναι ο πατέρας του } n. \end{cases}$
- $c_{i+2}(n) = \{(j_1, \dots, j_{r_i}) \mid (a_{j_1}^n, \dots, a_{j_{r_i}}^n) \in R_i^{\mathcal{A}}\}$, για $i \in 1, 2, \dots, m$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.2. Το $c_1(n)$ μας πληροφορεί για τις επαναλήψεις ενός στοιχείου στην πλειάδα \bar{a}^n . Παρατηρούμε ότι $(i, i) \in c_1(n), 0 \leq i \leq w$, για κάθε $n \in T$. Και για κάποιο κόμβο n με $\bar{a}^n = (a_0, a_1, \dots, a_u, a_0, \dots, a_0)$ (η πλειάδα που θεωρήσαμε στην προηγούμενη παρατήρηση), θα είναι επίσης $(0, i), (i, 0) \in c_1(n), u+1 \leq i \leq w$. Το 0 είναι η θέση πρώτης εμφάνισης του a_0 στην πλειάδα \bar{a}^n .

Θυμίζουμε επίσης (από τον ορισμό της δεντροδιάσπασης) ότι για κάθε στοιχείο $a \in A$ το $T_a = \{n \in T \mid a \in \{a_0^n, \dots, a_w^n\}\}$ είναι συνεκτικό, δηλαδή το T_a είναι ένα υποδέντρο. Έτσι αν n είναι η ρίζα του T_a (δηλαδή ο κόμβος του με το ελάχιστο βάθος), και i μια θέση εμφάνισης του a στην \bar{a}^n , τότε $(i, j) \notin c_2(n), 0 \leq j \leq w$. Αν ο n είναι ένας άλλος κόμβος του T_a (διαφορετικός από τη ρίζα), τότε υπάρχει $(i, j) \in c_2(n)$, όπου i μια θέση

εμφάνισης του a στην \bar{a}^n και j μια θέση εμφάνισης του a στην \bar{a}^s , $s \in T_a$ πατέρας του n .

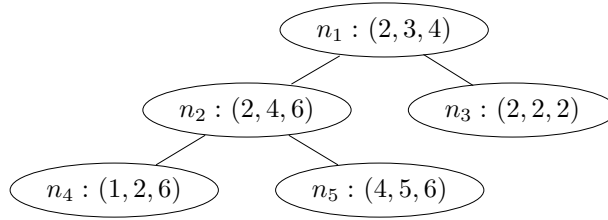
Οι c_1, c_2 παρέχουν την πληροφορία για την πρώτη εμφάνιση ενός στοιχείου $a \in A$ σε κάθε πλειάδα \bar{a}^n , $n \in T_a$ και για τη ρίζα του T_a αντίστοιχα. Όπως θα δούμε στη συνέχεια η πληροφορία αυτή χρησιμοποιείται για τη μοναδική αναπαράσταση ενός $a \in A$ από μια πλειάδα $\bar{U}(a) \in (\text{Pow}(T))^{(w+1)}$.

Όπως είναι προφανές στις c_{i+2} , $1 \leq i \leq m$, έχουμε κωδικοποιημένες τις σχέσεις R_i^A αντίστοιχα. Είναι $R_i^A = \{(a_{j_1}^n, \dots, a_{j_{r_i}}^n) \mid (j_1, \dots, j_{r_i}) \in c_{i+2}(n), n \in T\}$. \square

Παράδειγμα 5.1. Θεωρούμε το λεξικό $\tau = \{R\}$, όπου το R είναι ένα 3-μελές σύμβολο σχέσης και θεωρούμε την $\{R\}$ -δομή $\mathcal{A} = (A, R^A)$, με σύμπαν $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και

$$\begin{aligned} R^A = \{ & (1, 2, 6), (2, 6, 1), (6, 1, 2), (6, 2, 1), (2, 1, 6), (1, 6, 2), \\ & (2, 3, 4), (3, 4, 2), (4, 2, 3), (2, 4, 3), (4, 3, 2), (3, 2, 4), \\ & (4, 5, 6), (5, 6, 4), (6, 4, 5), (4, 6, 5), (6, 5, 4), (5, 4, 6)\}. \end{aligned}$$

Ο υπεργράφος της \mathcal{A} είναι $\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = (A, \{\{1, 2, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}\})$. Το δεντροπλάτος της δομής \mathcal{A} είναι 2. Μια ειδική 2-tree-decomposition $(\mathcal{T}, ((a_0^n, a_1^n, a_2^n))_{n \in T})$ της \mathcal{A} , όπου το \mathcal{T} είναι ένα γεμάτο δυαδικό δέντρο με σύνολο κόμβων $T = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\}$, δίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Το $\Gamma_{(\{R\}, 2)$ -δέντρο \mathcal{T}^* που κωδικοποιεί την $\{R\}$ -δομή \mathcal{A} με τη βοήθεια της $(\mathcal{T}, ((\bar{a}^n))_{n \in T})$ είναι το (\mathcal{T}, c) . Για τη συνάρτηση χρωματισμού $c : T \rightarrow \text{Pow}(\{0, 1, 2\}^2) \times \text{Pow}(\{0, 1, 2\}^2) \times \text{Pow}(\{0, 1, 2\}^3)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} c(n_1) &= (\{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}, \emptyset, \\ &\quad \{(0, 1, 2), (0, 2, 1), (1, 2, 0), (1, 0, 2), (2, 0, 1), (2, 1, 0)\}). \\ c(n_2) &= (\{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}, \{(0, 0), (1, 2)\}, \emptyset). \\ c(n_3) &= (\{0, 1, 2\}^2, \{(0, 0), (1, 0), (2, 0)\}, \emptyset). \\ c(n_4) &= (\{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}, \{(1, 0), (2, 2)\}, \\ &\quad \{(0, 1, 2), (0, 2, 1), (1, 2, 0), (1, 0, 2), (2, 0, 1), (2, 1, 0)\}). \\ c(n_5) &= (\{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}, \{(0, 1), (2, 2)\}, \\ &\quad \{(0, 1, 2), (0, 2, 1), (1, 2, 0), (1, 0, 2), (2, 0, 1), (2, 1, 0)\}). \end{aligned}$$

\diamond

Σημειώνουμε ότι ισχύει το εξής για την πολυκλοκότητα του υπολογισμού του $\Gamma_{(\tau,w)}$ -δέντρο T^* :

ΛΗΜΜΑ 5.1 ([13]). *Δεδομένης μιας τ -δομής $\mathcal{A} = (A, (R_i^{\mathcal{A}})_{1 \leq i \leq m})$ και μιας ειδικής w -δεντροδιάσπασης $(\mathcal{T}, (\bar{a}^n)_{n \in T})$ της \mathcal{A} , το αντίστοιχο $\Gamma_{(\tau,w)}$ -δέντρο T^* μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο*

$$f(\|\tau\|, w) \cdot |T|,$$

για μια κατάλληλη συνάρτηση f .

5.1.3 Αντιστοίχιση ενός στοιχείου και ενός υποσυνόλου του A σε μια πλειάδα υποσυνόλων του T

Δεδομένης μιας τ -δομής \mathcal{A} και δεδομένης μιας ειδικής w -δεντροδιάσπασης $(\mathcal{T}, (\bar{a}^n)_{n \in T})$ της \mathcal{A} , θα δούμε πώς μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε στοιχείο $a \in A$ μια $(w+1)$ -πλειάδα (V_0, \dots, V_w) , όπου $V_i \subseteq T$, για κάθε $0 \leq i \leq w$. Αυτό γίνεται μέσω του ορισμού της απεικόνισης $\bar{U} : A \rightarrow (\text{Pow}(T))^{w+1}$. Η επέκταση της \bar{U} , $\bar{U}^* : \text{Pow}(A) \rightarrow (\text{Pow}(T))^{w+1}$ δίνει την ανάλογη αντιστοίχιση για την περίπτωση των υποσυνόλων $B \subseteq A$.

Κόμβος ενός στοιχείου. Σε πλήρη αναλογία με τον ορισμό του κόμβου $\text{node}_{(\mathcal{T}, \mathcal{X})}(v)$ μιας κορυφής $v \in H$ ενός υπεργράφου ως προς μια δεντροδιάσπαση $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$, ο κόμβος $\text{node}_{(\mathcal{T}, \bar{a})}(a)$ ενός στοιχείου $a \in A$ ως προς την $(\mathcal{T}, (\bar{a}^n)_{n \in T})$, ονομάζεται ο ελάχιστος κόμβος $n \in T$, ως προς την $\leq^{\mathcal{T}}$, για τον οποίο $a \in \{a_0^n, \dots, a_w^n\}$. Όταν η δεντροδιάσπαση (\mathcal{T}, \bar{a}) εννοείται από τα συμφραζόμενα, θα γράφουμε απλά $\text{node}(a)$.

Η απεικόνιση $\bar{U} : A \rightarrow (\text{Pow}(T))^{w+1}$. Δεδομένου ενός στοιχείου $a \in A$, προσδιορίζουμε τον κόμβο του $\text{node}(a)$, και τη θέση $\text{first_occur}(a, \text{node}(a))$ ¹ στην οποία πρωτοεμφανίζεται το a στην πλειάδα $\bar{a}^{\text{node}(a)} = (a_0^{\text{node}(a)}, \dots, a_w^{\text{node}(a)})$.

Πιο συγκεκριμένα, κωδικοποιούμε το a , μέσω της κωδικοποίησης του ζευγαριού $(\text{node}(a), \text{first_occur}(a, \text{node}(a)))$ σε μια $(w+1)$ -πλειάδα από υποσύνολα του T . Αυτό γίνεται μέσω της αντιστοίχισης $\bar{U} : A \rightarrow (\text{Pow}(T))^{w+1}$, η οποία ορίζεται ως εξής: $\bar{U}(a) = (U_0(a), \dots, U_w(a))$, με

$$U_i(a) = \begin{cases} \{\text{node}(a)\} & \text{αν } i = \text{first_occur}(a, \text{node}(a)), \\ \emptyset & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

για $0 \leq i \leq w$. Δηλαδή, αν $\text{node}(a) = t$ και $\text{first_occur}(a, t) = i$, τότε

$$\bar{U}(a) = (\emptyset, \dots, \emptyset, \underbrace{\{t\}}_{i\text{-θέση}, \emptyset, \dots, \emptyset).$$

Η απεικόνιση $\bar{U}^* : \text{Pow}(A) \rightarrow (\text{Pow}(T))^{w+1}$. Η απεικόνιση \bar{U}^* μέσω της οποίας πραγματοποιείται η κωδικοποίηση ενός υποσυνόλου $B \subseteq A$ σε μια $(w+1)$ -πλειάδα από

¹Είναι $\text{first_occur}(a, n) = i$, όταν $a_i^n = a$ και $a_j^n \neq a$ για $0 \leq j < i$.

υποσύνολα του T ορίζεται ως εξής: $\bar{U}^*(B) = (U_0^*(B), \dots, U_w^*(B))$, όπου

$$U_i^*(B) = \bigcup_{a \in B} U_i(a).$$

Δηλαδή $\bar{U}^*(B) = \bigcup_{a \in B} \bar{U}(a)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.3. Δεδομένης της πλειάδας $\bar{U}^*(B) = (U_0^*(B), \dots, U_w^*(B))$, το αντίστοιχο υποσύνολο $B \subseteq A$, που αυτή κωδικοποιεί, υπολογίζεται

$$B = \bigcup_{i=0}^w \{a_i^t \mid t \in U_i^*(B)\}.$$

Το πέρασμα από το B στην $\bar{U}^*(B)$ και από την $\bar{U}^*(B)$ στο B , γίνεται σε γραμμικό χρόνο. \square

5.1.4 Συνθήκες ώστε μια τυχαία πλειάδα υποσυνόλων του T να αποτελεί κωδικοποίηση ενός στοιχείου ή ενός υποσυνόλου του A

Εξετάζονται στη συνέχεια οι συνθήκες που απαιτούνται ώστε μια τυχαία $(w+1)$ -πλειάδα από υποσύνολα του T , να αποτελεί κωδικοποίηση ενός στοιχείου $a \in A$ ή ενός υποσυνόλου $B \subseteq A$, μέσω των απεικονίσεων \bar{U} και \bar{U}^* που ορίστηκαν στην προηγούμενη υποενότητα αντίστοιχα.

Οι συνθήκες. Θεωρούμε τα υποσύνολα $S_0, \dots, S_w \subseteq T$. Παρατηρούμε (προηγούμενη υποενότητα) ότι για κάθε $a \in A$, το διάνυσμα $\bar{U}(a)$, έχει συγκεκριμένη μορφή: αν $\text{node}(a) = t$ και $\text{first_occur}(a, t) = i$, τότε το $\bar{U}_i(a) = \{t\}$ και $\bar{U}_j(a) = \emptyset$, για κάθε $j \neq i$. Για να υπάρχει $a \in A$, τέτοιο ώστε $\bar{U}(a) = (S_0, \dots, S_w)$, θα πρέπει τα S_0, \dots, S_w , να έχουν την παραπάνω μορφή (συνθήκη 1). Επιπρόσθετα, αν $S_i = \{t\}$, θα πρέπει το i να είναι η θέση που κάποιο $a \in A$ πρωτοεμφανίζεται στο \bar{a}^t (συνθήκη 2) και ο t να είναι ο ελάχιστος κόμβος του a (συνθήκη 3).

Δηλαδή, δεδομένων τυχαίων υποσυνόλων $S_0, \dots, S_w \subseteq T$, υπάρχει κάποιο $a \in A$, τέτοιο ώστε $(S_0, \dots, S_w) = \bar{U}(a)$, αν και μόνο αν, ισχύουν οι συνθήκες:

1. Η $\bigcup_{i=0}^w S_i$ είναι μονοσύνολο.
2. Για κάθε $t \in T$: αν $t \in U_j$, τότε $(i, j) \notin c_1(t)$, για $0 \leq i < j \leq w$.
3. Για κάθε $t \in T$: αν $t \in U_i$, τότε $(i, j) \notin c_2(t)$, για $0 \leq i, j \leq w$.

Επιπλέον, δεδομένων τυχαίων υποσυνόλων $S_0, \dots, S_w \subseteq T$, υπάρχει κάποιο $B \subseteq A$, τέτοιο ώστε $(S_0, \dots, S_w) = \bar{U}^*(B)$, αν και μόνο αν, ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες 1 και 2.

Πώς οι συνθήκες αυτές εκφράζονται στην $\text{MSO}[\tau_{(\tau, w)}]$: οι τύποι $\sigma_i(\bar{X})$, $i = 1, 2, 3$. Οι συνθήκες 1, 2 και 3 εκφράζονται στην $\text{MSO}[\tau_{(\tau, w)}]$ από τους τύπους $\sigma_1(\bar{X})$,

$\sigma_2(\bar{X})$ και $\sigma_3(\bar{X})$ αντίστοιχα:

$$\sigma_1(X_0, \dots, X_w) = \forall x \forall y \left(\left(\bigvee_{0 \leq i \leq w} X_i(x) \wedge \bigvee_{0 \leq i \leq w} X_i(y) \right) \rightarrow x = y \right),$$

$$\sigma_2(X_0, \dots, X_w) = \forall x \bigwedge_{0 \leq i < j \leq w} \left(X_j(x) \rightarrow \bigwedge_{\substack{\gamma \in \Gamma(\tau, w) \\ (i, j) \in \gamma_1}} \neg P_\gamma(x) \right),$$

$$\sigma_3(X_0, \dots, X_w) = \forall x \bigwedge_{0 \leq i, j \leq w} \left(X_i(x) \rightarrow \bigwedge_{\substack{\gamma \in \Gamma(\tau, w) \\ (i, j) \in \gamma_2}} \neg P_\gamma(x) \right),$$

όπου θεωρήσαμε ότι $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{m+2})$.

Ορισμός των τύπων $\text{MSO}[\Gamma_{(\tau, w)}]$ -τύπων $\text{Element}(\bar{X})$ και $\text{Set}(\bar{X})$. Με τη βοήθεια των $\sigma_1(\bar{X})$, $\sigma_2(\bar{X})$, $\sigma_3(\bar{X})$, ορίζονται οι $\text{MSO}[\Gamma_{(\tau, w)}]$ -τύποι

$$\text{Element}(X_0, \dots, X_w) = \sigma_1(X_0, \dots, X_w) \wedge \sigma_2(X_0, \dots, X_w) \wedge \sigma_3(X_0, \dots, X_w),$$

$$\text{Set}(X_0, \dots, X_w) = \sigma_2(X_0, \dots, X_w) \wedge \sigma_3(X_0, \dots, X_w),$$

με την προφανή ερμηνεία: για τυχαία υποσύνολα $S_0, \dots, S_w \subseteq T$, ισχύουν

$$T^* \models \text{Element}(S_0, \dots, S_w) \Leftrightarrow \text{υπάρχει } a \in A \text{ τέτοιο που } (S_0, \dots, S_w) = \bar{U}(a),$$

$$T^* \models \text{Set}(S_0, \dots, S_w) \Leftrightarrow \text{υπάρχει } B \subseteq A \text{ τέτοιο που } (S_0, \dots, S_w) = \bar{U}^*(B).$$

5.1.5 Μετάφραση ενός $\text{MSO}[\tau]$ -τύπου φ σε έναν $\text{MSO}[\tau^*]$ -τύπο φ^*

Είδαμε σε προηγούμενη ενότητα πώς μια δεδομένη τ -δομή \mathcal{A} δένδροπλάτους w , μετατρέπεται σε ένα $\Gamma_{(\tau, w)}$ -δέντρο T^* , το οποίο είναι μια τ^* -δομή (συμβολίζουμε με τ^* το λεξιλόγιο $\{E, (P_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_{(\tau, w)}}\}$). Θα δούμε τώρα ότι σε κάθε $\text{MSO}[\tau]$ -τύπο φ αντιστοιχεί ένας $\text{MSO}[\tau^*]$ -τύπος φ^* τέτοιος ώστε ο υπολογισμός του $\text{sat_assign}(\varphi^*, T^*)$, να οδηγεί στον άμεσο υπολογισμό του $\text{sat_assign}(\varphi, T)$.

Η ακριβής διατύπωση δίνεται στο λήμμα που ακολουθεί. Η απόδειξη του λήμματος μας δίνει ταυτόχρονα τον τρόπο κατασκευής του φ από τον φ^* .

ΛΗΜΜΑ 5.2 ([13]). Κάθε MSO -τύπος $\varphi(X_1, \dots, X_k, y_1, \dots, y_l)$ μπορεί να μεταφραστεί αποτελεσματικά σε έναν τύπο $\varphi^*(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_l)$, έτσι ώστε:

i. Για κάθε $B_1, \dots, B_k \subseteq A$, $a_1, \dots, a_l \in A$ να ισχύει το εξής:

$$\begin{aligned} A &\models \varphi(B_1, \dots, B_k, a_1, \dots, a_l) \iff \\ T^* &\models \varphi^*(\bar{U}^*(B_1), \dots, \bar{U}^*(B_k), \bar{U}(a_1), \dots, \bar{U}(a_l)). \end{aligned}$$

ii. Για κάθε $\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_k, \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_l$ τέτοια ώστε $T^* \models \varphi^*(\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_k, \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_l)$, υπάρχουν $B_1, \dots, B_k \subseteq A$, $a_1, \dots, a_l \in A$ τέτοια ώστε $\bar{S} = \bar{U}^*(B_i)$, για $1 \leq i \leq k$ και $\bar{V} = \bar{U}(a_i)$, για $1 \leq i \leq l$.

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του τύπου φ και βασίζεται στην έννοια της κλειστότητας που παρουσιάζεται στη συνέχεια.

Κλειστή πλειάδα: ο τύπος $\text{Closed}(S_0, \dots, S_w)$. Θεωρούμε μια πλειάδα $\bar{S} = (S_0, \dots, S_w)$, με $S_0, \dots, S_w \subseteq T$. Η \bar{S} ονομάζεται κλειστή, όταν για κάθε $s, t \in T$ και $0 \leq i, j \leq w$ ισχύουν τα εξής:

1. Αν $t \in S_i$ και $(i, j) \in c_1(t)$, τότε $t \in S_j$
2. Αν $(s, t) \in E^T$, $s \in S_j$ και $(i, j) \in c_2(t)$, τότε $t \in S_i$.

Εκφράζουμε τις δύο αυτές συνθήκες με τη βοήθεια δύο MSO[τ^*]-τύπων:

$$\text{Clos}_1(X_0, \dots, X_w) = \forall x \bigwedge_{0 \leq i, j \leq w} \left((X_i(x) \wedge \bigvee_{\substack{\gamma \in \Gamma(\tau, w) \\ (i, j) \in \gamma_1}} P_\gamma(x)) \rightarrow X_j(x) \right),$$

$$\text{Clos}_2(X_0, \dots, X_w) = \forall x \forall y \left(E(x, y) \rightarrow \bigwedge_{0 \leq i, j \leq w} \left((X_j(x) \wedge \bigvee_{\substack{\gamma \in \Gamma(\tau, w) \\ (i, j) \in \gamma_2}} P_\gamma(y)) \rightarrow X_i(y) \right) \right),$$

όπου θεωρήσαμε ότι $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{m+2})$.

Ο MSO[τ^*]-τύπος $\text{Closed}(X_0, \dots, X_w)$ εκφράζει την κλειστότητα:

$$\text{Closed}(X_0, \dots, X_w) = \text{Clos}_1(X_0, \dots, X_w) \wedge \text{Clos}_2(X_0, \dots, X_w).$$

Δηλαδή, για τυχαία υποσύνολα $S_0, \dots, S_w \subseteq T$, έχουμε:

$$T^* \models \text{Closed}(S_0, \dots, S_w) \iff \eta(S_0, \dots, S_w) \text{ είναι κλειστή.}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.4. Θεωρούμε ένα στοιχείο $a \in A$ και μια κλειστή πλειάδα (S_0, \dots, S_w) . Αν $(\bar{U}_0(a), \dots, \bar{U}_w(a)) \subseteq (S_0, \dots, S_w)$, τότε για κάθε $t \in T$ και $0 \leq i \leq w$, έχουμε

$$a_i^t = a \quad \text{ανν} \quad t \in S_i.$$

Δηλαδή αν μια κλειστή πλειάδα \bar{S} περιέχει την $\bar{U}(a)$, που αποτελεί την κωδικοποίηση της πρώτης εμφάνισης του a στην αντίστοιχη δεντροδιάσπαση, περιέχει κωδικοποιημένες όλες τις εμφανίσεις του a . \square

Παράδειγμα 5.2. Θεωρούμε το δέντρο T^* του προηγούμενου παραδείγματος. Είδαμε ότι $\bar{U}(2) = (\{t_1\}, \emptyset, \emptyset)$. Η $(\{t_1, t_2, t_3\}, \{t_3, t_4\}, \{t_3\})$ είναι μια κλειστή πλειάδα για το T^* , που περιέχει την $\bar{U}(2)$. Παρατηρούμε ότι αυτή περιέχει όλες τις εμφανίσεις του 2 στην αντίστοιχη δεντροδιάσπαση. \diamond

5.1.6 Τα βήματα του αλγορίθμου: αποτελέσματα πολυπλοκότητας

Το πρόβλημα και τα βήματα επίλυσης του περιγράφονται στον παρακάτω πίνακα.

- Είσοδος: τ -δομή \mathcal{A} , MSO[τ]-τύπος $\varphi(X_1, \dots, X_k, x_1, \dots, x_l)$.
- Πρόβλημα: Υπολογισμός του $\text{sat_assign}(\varphi, \mathcal{A})$.
 1. Υπολογισμός μιας ειδικής w -δεντροδιάσπασης $(\mathcal{T}, (\bar{a}^n)_{n \in \mathcal{T}})$ της δομής \mathcal{A} , όπου $w = \text{tw}(\mathcal{A})$.
 2. Υπολογισμός του $\Gamma_{(\tau, w)}$ -δέντρου \mathcal{T}^* .
 3. Υπολογισμός του MSO[τ^*]-τύπου $\varphi^*(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_l)$.
 4. Υπολογισμός $\text{sat_assign}(\varphi^*, \mathcal{T}^*)$
 5. Υπολογισμός του $\text{sat_assign}(\varphi, \mathcal{T})$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1 ([13]). *Δεδομένης μιας τ -δομής \mathcal{A} , και ενός MSO[τ]-τύπου $\varphi(X_1, \dots, X_k, x_1, \dots, x_l)$, υπάρχει μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ και ένας αλγόριθμος ο οποίος επιλύει το πρόβλημα της αποτίμησης για τον MSO τύπο φ στη δομή \mathcal{A} σε χρόνο*

$$f(\|\varphi\|, \text{tw}(\mathcal{A})) \cdot (|\mathcal{A}| + \|\text{sat_assign}(\varphi, \mathcal{T})\|).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη αποτελεί ανάλυση της πολυπλοκότητας των βημάτων του αλγορίθμου με τη βοήθεια των Θεωρημάτων 2.1 και 3.2 και των Λημμάτων 5.1 και 5.2. ♣

Παραρτήματα

A Η MSO₀

Από την MSO λογική στην MSO₀ λογική: μετάφραση του φ σε ένα νέο τύπο φ' χωρίς πρωτοβάθμιες μεταβλητές. Συχνά κατά τη μελέτη της μοναδιαίας δευτεροβάθμιας λογικής χρησιμοποιούμε ένα τροποποιημένο λογικό σύστημα το οποίο έχει την ίδια εκφραστική δύναμη με την MSO και το οποίο ονομάζεται MSO₀ λογική (ο συγκεκριμένος συμβολισμός οφείλεται στον Thomas, βλέπε [22]). Η MSO₀ λογική έχει απλούστερο συντακτικό στο οποίο καταργούνται οι πρωτοβάθμιες μεταβλητές και έχουμε μόνο μεταβλητές συνόλων. Η ιδέα είναι να 'μιμηθούμε' τα στοιχεία με τη βοήθεια μονοσυνόλων. Έτσι για παράδειγμα ο $X(x)$ θα αντικατασταθεί στην MSO₀ από τον $\{x\} \subseteq X$. Γενικότερα έχουμε τους εξής νέους ατομικούς τύπους για την MSO₀ λογική σε χρωματισμένα δέντρα $T(\Gamma)$:

$$X \subseteq Y, \text{Sing}(X), \text{Suc}_1(X, Y), \text{Suc}_2(X, Y), X \subseteq P_\gamma (\gamma \in \Gamma)$$

με την προφανή σημασία, δηλαδή το X είναι υποσύνολο του Y , το X είναι μονοσύνολο, τα X, Y είναι μονοσύνολα $\{x\}, \{y\}$ με $S_1(x, y), S_2(x, y)$ και το X είναι υποσύνολο του P_γ αντίστοιχα.

Η μετάφραση από την MSO στην MSO₀ λογική γίνεται εύκολα με επαγωγή στην πολυπλοκότητα των MSO-τύπων. Οι αντίστοιχοι κανόνες μετατροπής περιγράφονται δίνονται στον Πίνακα 15. Με βάση αυτούς ο δεδομένος MSO-τύπος $\varphi(X_1, \dots, X_l, x_1, \dots, x_m)$ μετατρέπεται εύκολα σε έναν MSO₀-τύπο $\varphi'(X_1, \dots, X_l, Y_1, \dots, Y_m)$.

MSO-τύπος φ	MSO ₀ -τύπος φ'
$Y(x)$	$\text{Sing}(X) \wedge X \subseteq Y$
$x = y$	$\text{Sing}(X) \wedge \text{Sing}(Y) \wedge X \subseteq Y$
$S_i(x, y)$	$\text{Suc}_i(X, Y)$
$P_\gamma(x)$	$\text{Sing}(X) \wedge X \subseteq P_\gamma$
$\exists x \phi$	$\exists X \phi'$
$\neg \phi$	$\neg \phi'$
$\phi \wedge \psi$	$\phi' \wedge \psi'$

Πίνακας 15: Κανόνες μετασχηματισμού.

Παράδειγμα A.1. Ο MSO-τύπος $\forall x(P_\gamma(x) \rightarrow \exists y(S_1(x, y) \wedge Z(y)))$, μεταφράζεται στον MSO₀-τύπο:

$$\forall X(\text{Sing}(X) \wedge X \subseteq P_\gamma \rightarrow \exists Y(\text{Sing}(Y) \wedge \text{Suc}_1(X, Y) \wedge Y \subseteq Z)).$$

◇

Β Ακυκλικές συζευκτικές ερωτήσεις της πρωτοβάθμιας λογικής (FO Acyclic Conjunctive Queries)

Βασικές έννοιες. Ατομικοί τύποι (*atomic formulas*) ή άτομα (*atoms*) ονομάζονται οι τύποι της πρωτοβάθμιας λογικής που έχουν τη μορφή $x = y$ ή $R(x_1 \dots x_r)$ για κάποιο r -μελές σύμβολο σχέσης. Τα λεκτικά (*literals*) είναι ατομικοί τύποι ή ατομικοί τύποι με άρνηση. Δεδομένου ενός τύπου φ , το σύνολο των ατομικών τύπων που εμφανίζονται στον φ , συμβολίζεται με $\text{atoms}(\varphi)$. Ενώ με $\text{var}(\varphi)$ συμβολίζεται το σύνολο των μεταβλητών που εμφανίζονται στον φ και με $\text{free}(\varphi)$ το σύνολο των ελεύθερων μεταβλητών του φ . Σε κάθε τύπο φ αντιστοιχεί ένας υπεργράφος

$$\mathcal{H}_\varphi = (\text{var}(\varphi), \{\text{var}(\alpha) \mid \alpha \in \text{atoms}(\varphi)\}),$$

που είναι ο υπεργράφος του τύπου φ . Ο υπεργράφος \mathcal{H}_φ έχει για σύνολο κορυφών τις μεταβλητές του τύπου φ και κάθε υπερακμή του είναι το σύνολο των μεταβλητών που εμφανίζονται σε κάποιον ατομικό τύπο του φ . Μια δέντροδιάσπαση ενός τύπου φ είναι μια δέντροδιάσπαση του υπεργράφου \mathcal{H}_φ του τύπου. Μια δέντροδιάσπαση $(T, (X_t)_{t \in T})$ ενός τύπου φ ονομάζεται *αυστηρή* (*strict*) εάν υπάρχει ένας κόμβος $t \in T$ του δέντρου T τέτοιος που το block X_t να περιέχει τις ελεύθερες μεταβλητές του τύπου φ , δηλαδή τέτοιος ώστε $\text{free}(\varphi) \subseteq X_t$.

Μια συζευκτική ερώτηση (*conjunctive query*) είναι ένας FO-τύπος που έχει την εξής μορφή:

$$\exists y_1 \dots \exists y_m \bigwedge_{i=1}^n \alpha_i,$$

όπου οι $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ είναι ατομικοί τύποι.

Το πρόβλημα της εύρεσης των αναθέσεων για συζευκτικές ερωτήσεις. Για κάθε τύπο $\varphi(x_1, \dots, x_l) \in \text{FO}$, το σύνολο $\text{sat_assign}(\varphi, \mathcal{A})$ είναι μια $\{x_1, \dots, x_l\}$ -σχέση πάνω στο σύνολο A . Ειδικότερα, για μία ερώτηση $\varphi(x_1, \dots, x_l) = \exists y_1 \dots \exists y_m \bigwedge_{i=1}^n \alpha_i$, το σύνολο $\varphi(x_1, \dots, x_l)$ σε μια δομή \mathcal{A} είναι

$$\text{sat_assign}(\varphi, \mathcal{A}) = \pi_{\{x_1, \dots, x_l\}}(\text{sat_assign}(\alpha_1, \mathcal{A}) \bowtie \dots \bowtie \text{sat_assign}(\alpha_n, \mathcal{A})).$$

Δηλαδή το πρόβλημα της εύρεσης των αναθέσεων που ικανοποιούν μία συζευκτική ερώτηση $\exists y_1 \dots \exists y_m \bigwedge_{i=1}^n \alpha_i$, ανάγεται στον υπολογισμό της $\{x_1, \dots, x_l\}$ -σχέσης

$$\pi_{\{x_1, \dots, x_l\}} \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \text{sat_assign}(\alpha_i, \mathcal{A}) \right).$$

Ο αλγόριθμος του Γιαννακάκη. Γενικά το αποτέλεσμα μιας ακολουθίας από πράξεις συνένωσης μπορεί να γίνει πάρα πολύ μεγάλο. Έτσι κατά τον υπολογισμό μιας ερώτησης $\pi_X \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \mathcal{R}_i \right)$ είναι επιθυμητό να αποφεύγεται, όπου είναι δυνατό, ο υπολογισμός της πλήρους συνένωσης $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \mathcal{R}_i$ και η μετέπειτα προβολή πάνω στο σύνολο X . Μια αποτελεσματική στρατηγική αποτίμησης, προς αυτή την κατεύθυνση, είναι αυτή κατά την οποία παρεμβάλλονται υπολογισμοί συνενώσεων και προβολών με αποτέλεσμα να

μειώνεται το μέγεθος των ενδιάμεσων αποτελεσμάτων. Η παραπάνω διαδικασία είναι γνωστή ως υπολογισμός των ημι-συνενώσεων (*semi-joins*) (βλέπε επίσης [2]). Δεδομένης μιας X -σχέσης \mathcal{R} και δεδομένης μιας Y -σχέσης \mathcal{S} , η ημι-συνένωση της σχέσης \mathcal{R} με τη σχέση \mathcal{S} είναι $\pi_X(\mathcal{R} \bowtie \mathcal{S})$. Ισχύει ότι $\mathcal{R} \bowtie \mathcal{S} = (\pi_X(\mathcal{R} \bowtie \mathcal{S})) \bowtie \mathcal{S}$. Ο αλγόριθμος του Γιαννακάκη βασίζεται στην ιδέα του υπολογισμού ημι-συνενώσεων κατά την αποτίμηση ακυκλικών συζευτικών ερωτήσεων.

Παρουσιάζουμε τα βασικά σημεία αυτού του αλγόριθμου του Γιαννακάκη (Λήμματα Β.1 και Β.2) όπως αυτά δίνονται στο [13]. Η κεντρική ιδέα υπολογισμού μιας συζευτικής ερώτησης φ σε μια δομή \mathcal{A} είναι η εξής: θεωρούμε ότι μπορεί να υπολογιστεί αποτελεσματικά μία δεντροδιάσπαση $(\mathcal{T}, (X_t)_{t \in T})$ του φ , και για κάθε $t \in T$, η X_t -σχέση

$$\mathcal{P}_t = \bigbowtie_{\substack{\alpha \in \text{atoms}(\varphi) \\ \text{var}(\alpha) \subseteq X_t}} \text{sat_assign}(\alpha, \mathcal{A}).$$

Παρατηρούμε ότι $\text{sat_assign}(\varphi, \mathcal{A}) = \pi_{\text{free}(\varphi)}(\bigbowtie_{t \in T} \mathcal{P}_t)$ και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα Β.2 για τον υπολογισμό του $\text{sat_assign}(\varphi, \mathcal{A})$. Ειδικά για την περίπτωση που η δεντροδιάσπαση του τύπου είναι αυστηρή αρκεί να εφαρμοστούν τα δύο βήματα του Λήμματος Β.1.

ΛΗΜΜΑ Β.1. Υπάρχει ένας αλγόριθμος ο οποίος επιλύει το πρόβλημα που ακολουθεί σε χρόνο $O(|T| \cdot \max_{t \in T} \|\mathcal{P}_t\|)$:

- Είσοδος: Δεντροδιάσπαση $(\mathcal{T}, (X_t)_{t \in T})$, X_t -σχέση \mathcal{P}_t , $t \in T$.
- Πρόβλημα: Υπολογισμός της $\mathcal{R}_t = \pi_{X_t}(\bigbowtie_{t \in T} \mathcal{P}_t)$, $t \in T$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ο αλγόριθμος πραγματοποιεί δύο περάσματα στο δέντρο της δεντροδιάσπασης: ένα bottom-up και ένα top-down.

1. *Bottom-up* πέρασμα: Υπολογίζεται για κάθε κόμβο $t \in T$ μια σχέση $\mathcal{Q}_t = \pi_{X_t}(\bigbowtie_{u \geq t} \mathcal{P}_u)$. Ο υπολογισμός πραγματοποιείται με κατεύθυνση από τα φύλλα προς τη ρίζα. Αν ο t είναι φύλλο, τότε $\mathcal{Q}_t = \mathcal{P}_t$ και αν ο t είναι εσωτερικός κόμβος με παιδιά t_1, \dots, t_m , είναι

$$\mathcal{Q}_t = \mathcal{P}_t \bowtie \left(\bigbowtie_{1 \leq j \leq m} \pi_{X_t}(\mathcal{Q}_{t_j}) \right).$$

2. *Top-down* πέρασμα: Αν r είναι η ρίζα του \mathcal{T} , τότε $\mathcal{R}_r = \mathcal{Q}_r$. Ενώ για κάθε κόμβο $t \in T \setminus \{r\}$ με πατέρα s είναι

$$\mathcal{R}_t = \pi_{X_t}(\mathcal{R}_s) \bowtie \mathcal{Q}_t.$$

♣

ΛΗΜΜΑ Β.2. Υπάρχει ένας αλγόριθμος ο οποίος επιλύει το πρόβλημα που ακολουθεί σε χρόνο $O(|T| \cdot (\max_{t \in T} \|\mathcal{P}_t\|) \cdot \|\mathcal{S}\|)$:

- Είσοδος: $(T, (X_t)_{t \in T})$, $X \subseteq \bigcup_{t \in T} X_t$, X_t -σχέση \mathcal{P}_t , $t \in T$.
- Πρόβλημα: Υπολογισμός της $\mathcal{S} = \pi_X(\boxtimes_{t \in T} \mathcal{P}_t)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Υπολογίζονται αρχικά οι σχέσεις $(\mathcal{R}_t)_{t \in T}$ του Λήμματος Β.1

Για κάθε κόμβο $t \in T$, ορίζεται $Y_t = \bigcup_{u \geq T_t} (X \cup X_u)$. Επίσης αν ο t έχει πατέρα s , τότε θεωρείται ότι είναι $Z_t = X_t \cup X_s$ και για τη ρίζα είναι $Z_r = \emptyset$. Υπολογίζεται για κάθε t μια σχέση

$$\mathcal{S}_t = \pi_{Y_t \cup Z_t} \left(\boxtimes_{u \geq T_t} \mathcal{R}_u \right).$$

Τότε $\mathcal{S} = \mathcal{S}_r$. Ο υπολογισμός των \mathcal{S}_t , $t \in T$, πραγματοποιείται με κατεύθυνση από τα φύλλα προς τη ρίζα (bottom-up). Αν ο t είναι φύλλο, τότε $\mathcal{S}_t = \pi_{Y_t \cup Z_t}(\mathcal{R}_t)$ και αν ο t είναι εσωτερικός κόμβος με παιδιά t_1, \dots, t_m , είναι

$$\mathcal{Q}_t = \pi_{Y_t \cup Z_t}(\mathcal{R}_t \boxtimes \mathcal{S}_{t_1} \dots \boxtimes \mathcal{S}_{t_m}).$$

♣

Αναφορές

- [1] S. Abiteboul, P. Buneman, and D. Suciu. *Data on the Web*. Morgan Kaufmann Publishers, 2000.
- [2] S. Abiteboul, R. Hull, and V. Vianu. *Foundations of Databases*. Addison-Wesley, 1995.
- [3] S. Arnborg, J. Lagergren, and D. Seese. Easy problems for tree-decomposable graphs. *Journal of Algorithms*, 12:308-340, 1991.
- [4] J.R. Büchi. Weak second-order arithmetic and finite automata. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 6:66-92, 1960.
- [5] H.L. Bodlander. A tourist guide through treewidth. *Acta Cybernetica*, 11:1-21, 1993.
- [6] H.L. Bodlander. A linear-time algorithm for finding tree-decompositions of small treewidth. *SIAM Journal on Computing*, 25:1305-1317, 1996.
- [7] B. Courcelle. Graph rewriting: An algebraic and logic approach. In J. van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science*, volume 2, pages 194-242. Elsevier Science Publishers, 1990.
- [8] J.E. Doner. Decidability of the weak second-order theory of two successors. *Notices Amer. Math. Soc.*, 12:365-468, March 1965.
- [9] World Wide Web Consortium. Extensible Markup Language (XML). <http://www.w3.org/XML/>.
- [10] J.E. Doner. Tree Acceptors and some of their Applications. *Journal of Computer and System Sciences*, 4:406-451, 1970.
- [11] R.G. Downey and M.R. Fellows. *Parameterized Complexity*. Springer-Verlag, 1999.
- [12] H.D. Ebbinghaus and J. Flum. *Finite Model Theory*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1999.
- [13] J. Flum, M. Frick, and M. Grohe. Query Evaluation via tree-decompositions. *Journal of the ACM*, 49(6):716-752, 2002.
- [14] M. Frick. Easy instances for Model Checking. PhD thesis, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, 2001.
- [15] M. Frick, M. Grohe, and C. Koch. Query Evaluation on Compressed Trees. In *Proceedings of the 18th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science LICS*, June 2003. To appear.

- [16] G. Gottlob and C. Koch. Monadic Datalog and the Expressive Power of Web Information Extraction Languages, Nov. 2002. Journal version of PODS'02 paper, submitted.
- [17] N. Klarlund, T. Schwentick and D. Suciu. XML: Model, Schemas, Types, Logics, and Queries. In *Logics for Emerging Applications of Databases*, Springer, 1-41, 2003.
- [18] C. Koch. Efficient Processing of Expressive Node-Selecting Queries on XML Data in Secondary Storage: A Tree Automata-based Approach. In *Proc. VLDB*, 2003.
- [19] F. Neven. Automata, logic and XML. In *Computer Science Logic*, pages 2-26, 2002.
- [20] F. Neven and T. Schwentick. Query Automata. In *Proceedings of the 18th ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART Symposium on Principles of Database Systems*, pages 205-214, 1999.
- [21] J. Thatcher and J. Wright. Generalized Finite Automata Theory with an Application to a Decision Problem of Second-order Logic. *Mathematical Systems Theory*, 2(1):57-81, 1968.
- [22] W. Thomas. Languages, Automata, and Logic. In G. Rozenberg and A. Salomaa, editors, *Handbook of Formal Languages*, volume 3, chapter 7, pages 386-455. Springer Verlag, 1997.

Ευρετήριο συμβόλων

- $\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2$, 24
 \mathfrak{A}_φ , 16
 accept_add_col($\mathfrak{A}_\varphi, \mathcal{T}$), 23
 accept_add_col(n), 59
 accept_assign($\mathfrak{A}_\varphi, \mathcal{T}$), 22
 accept_assign($\mathfrak{A}_\varphi, \mathcal{T}_n$), 29
 accept_assign(n), 29
 accept_assign($n, (q, q_1, q_2)$), 37
 Accept_Colors $_n$, 59
 add_col(ϱ, \mathcal{T}), 24
 Add_Colors $_{q, q_1, q_2}(n)$, 37
 assign(n, \bar{e}), 24
 assign(n, q), 27
 assign(ϱ, \mathcal{T}), 24
 Assigns $_{q, q_1, q_2}(n)$, 37

 c , 5
 $c_{\overline{B}}$, 13
 $\mathcal{C}_{\Gamma, \varphi}$, 14
 $\mathcal{C}_{\mathcal{T}, \varphi}$, 14
 Color, 54

 Equal*(X, Y), 17

 $\varphi(\mathbf{T})$, 71
 Final_States, 54
 Final_States $_r$, 55

 γ _add_colors, 25
 γ _add_colors $_{q, q_1, q_2}$, 25
 γ _start_states, 25
 γ _start_transitions, 25
 γ _states_triangles, 25
 γ _transitions, 25
 Γ_k , 13

 MSO, 3
 MSO*, 17

 node(a), 79
 node(e), 9
 node(v), 9

 $P_\gamma^*(X)$, 17
 P_Transitions $_n$, 58
 $\pi_{X_{j_1}, \dots, X_{j_m}}(\mathcal{R})$, 53
 pot_runs($\mathfrak{A}_\varphi, \mathcal{T}$), 23
 pot_states(\mathfrak{A}_φ, n), 29
 pot_transitions(\mathfrak{A}_φ, n), 46

 $[Q]^{\leq 2}$, 6

 $\rho_{\overline{B}}$, 23

 s , 6
 s_i , 5
 $S_i(x, y)$, 5
 S_Transitions $_n$, 59
 sat_assign(φ, \mathcal{A}), 3
 $S_i^*(X, Y)$, 17
 $\sigma_F(\mathcal{R})$, 53
 SpecTreeDecomp $_w(\mathcal{A})$, 76
 Start_States $^\gamma$, 54
 Start_Transitions $^\gamma$, 54
 Start_Transitions *_* , 55
 start_transitions $^*_{\mathfrak{A}_\varphi}$, 43
 States_Triangles $^\gamma$, 54
 succ_runs($\mathfrak{A}_\varphi, \mathcal{T}$), 23
 succ_states(\mathfrak{A}_φ, n), 29
 succ_states_triangles(n, q), 38
 succ_states_triangles(n), 37
 succ_transitions(\mathfrak{A}_φ, n), 46

 (\mathbf{T}, U) , 73
 $(\mathcal{T}; \overline{B})$, 13
 \mathcal{T}_n , 4
 τ_Γ , 4
 τ_Γ^0 , 5
 Transitions $^\gamma$, 55
 transitions $^*_{\mathfrak{A}_\varphi}$, 43
 Transitions $^\gamma$, 54
 Transitions $_n$, 55
 Tree, 54
 TreeDecomp(\mathcal{H}), 9
 Triangles $_n$, 55

$\text{tw}(\mathcal{H})$, 9

$Y^*(X)$, 17

Ευρετήριο Ορων

ανάθεση

- \mathcal{A}_φ -δεκτή, 22
- (n, q) -ανάθεση, 27
- περιορισμός σε υποδέντρο, 29
- q -ανάθεση, 27
- υποκείμενη μιας εκτέλεσης, 24
- υποκείμενη του $\bar{\epsilon}$ στον n , 24

αυτόματο δέντρο

- αυτόματο \mathcal{A}_φ , 16
- κατασκευή, 17
- αυτόματο ερώτησης (QA), 69
- bottom-up ντετερμινιστικό επιτυχημένη εκτέλεση, 6
- bottom-up ντετερμινιστικό, 5
- εκτέλεση, 5
- bottom-up μη-ντετερμινιστικό, 71
- διπλής κατεύθυνσης, 66
- εκτέλεση, 67
- μεταβάσεις, 67
- που επιλέγει (STA), 72

δέντρο

- δυναμικό στιγμιότυπο, 71
- Γ -δέντρο, 4
- γεμάτο δυναμικό, 4
- χρωματισμένο, 4
- διατεταγμένο, 5
- μη διατεταγμένο, 4
- σ -στιγμιότυπο δέντρο, 70

δεντροδιάσπαση

- δομής, 76
- ειδική, 76
- υπεργράφου, 8
- blocks, 9
- κόμβος κορυφής, 9
- κόμβος υπερακμής, 9
- πλάτος, 9
- πολυπλοκότητα υπολογισμού, 9
- ω -δεντροδιάσπαση, 9

δεντροπλάτος

- δομής, 76
- υπεργράφου, 9

δομή

- τ -δομή, 3

επέκταση

- \bar{B} -επέκταση, 13
- φ -επέκταση, 13
- k -επέκταση, 13
- επιπρόσθετο χρώμα, 13

καταστάσεις

- ενός κόμβου
- επιτυχημένες, 29
- πιθανές, 29

λεξιικό, 3

μετάβαση, 6

- μετάβαση εκκίνησης, 6
- μεταβάσεις

- του αυτομάτου \mathcal{A}_φ
- γ -μεταβάσεις, 25
- χρήσιμες, 43

μονομελής ερώτηση, 65

σχεσιακή άλγεβρα, 53

- πράξεις
- επιλογή σ , 53
- καρτεσιανό γινόμενο \times , 53
- μετονομασία ρ , 54
- προβολή π , 53
- συνένωση \bowtie , 54

σχεσιακό μοντέλο, 53

συνάρτηση

- επιπρόσθετου χρωματισμού, 13
- \mathcal{A}_φ -δεκτή, 23
- υποκείμενη μιας εκτέλεσης, 24
- χρωματισμού, 5

υπεργράφος, 8

- δεντροπλάτος, 9
- δομής, 76
- υποδέντρο, 4